

De Lapide Philosophorum

№I (017)

НОЯБРЬ, 2018



www.de-lapide-philosophorum.umi.ru

В номере:

А.Н. Ковалёв

**Об истоках
догмата о Троице
стр. 4–51**

В.Д. Цветков

**«Золотая»
гармония,
энергетическая
оптимальность
и сердце
стр.52–115**

Н.Ф. Семенюта

**О взаимосвязи
гармонических
рекуррентных
рядов чисел
стр.116–140**

16+



De Lapide Philosophorum

Том I,
MMXVIII

Ежеквартальное
междисциплинарное издание
под редакцией Д.С. Клещева

Адрес редакции:
www.de-lapide-philosophorum.umi.ru
Почтовый адрес:
de.lapide.philosophorum@gmail.com

ISSN 2409-1022

Русская «Джоконда» да Винчи

История эта получила огласку несколько лет назад, когда британская газета «Daily Mail» опубликовала мнение итальянского искусствоведа, археолога и популярного телеведущего Сильвано Винчети о том, что в частной коллекции в Санкт-Петербурге может храниться еще один вариант знаменитой «Джоконды», написанный самим да Винчи!

Практически сразу появились отзывы разных экспертов от полного неприятия в духе «даже комментировать подобную ерунду не буду» до осторожных призывов во всем разобраться «без сенсаций». С тех пор прошло порядка семи лет — за это время по всему миру разошлись десятки газетных статей и обзоров, было отснято несколько видеосюжетов, в которых фигурировала картина. Наконец, в 2018 году на телеканале «Культура» вышел фильм «Дело о другой Джоконде» (режиссер Тамара Бочарова), где собраны и представлены широкой публике основные аргументы, позволившие Сильвано Винчети высказать гипотезу об авторстве Леонардо.

Прежде всего, ряд технических анализов — радиоуглеродный, инфракрасный, спектральный — показал, что холст и краски с тех мест картины, которые не подвергались реставрации, относятся ко времени жизни Леонардо да Винчи. А ведь скептики с самого начала делали упор на том, что для да Винчи нехарактерна работа на холсте, а значит, это «всего лишь» копия одного из учеников Леонардо, отреставрированная в XVIII веке.

Но да Винчи на холсте писал, о чем он сам упоминает в трактате о технике живописи, и даже существует упоминание об одной из таких картин на холсте «Вознесение Богоматери», которая до наших дней не сохранилась. Лукавые и до некоторой степени наивные придирки со стороны противников Сильвано Винчети были развенчаны, однако они показали, что в объективном изучении

картины заинтересованы далеко не все эксперты. Дело ведь касается не только искусства, не только больших денег, речь идет о самой парадигме исключительности «Джоконды».

Если бы еще одну «Джоконду» обнаружили в запасниках европейских музеев или у частного коллекционера из США, то авторство да Винчи признали бы во всем мире (так было не раз с картинами учеников да Винчи, к которым сам мастер либо не имел отношения, либо мог слегка приложить руку). Однако ситуация осложняется тем, что уникальная картина находится в России. По какому-то мистическому совпадению исключительность знаменитой «Джоконды» из Лувра вдруг стала оспаривать «Джоконда» из Питера в то самое время, когда Россия заявила всему миру о бредовости «теории американской исключительности».

Нам уже приходилось доказывать бредовость «теории германской исключительности», но все это, так сказать, частные случаи одного и того же психологического комплекса или архетипа в общественном сознании. Подлинной причиной неприятия русской «Джоконды» является глубоко укоренившаяся в умах современного человечества «теория исключительности» как таковая.

В действительности настоящих ценителей искусства не так много, чтобы мог появиться культ вокруг «Джоконды», «Моны Лизы» или «Мадонны». Культ поклонения этому образу на Западе всегда имел не столько художественный или духовный, сколько массово-идеологический характер. В качестве подтверждения можно привести пример из музыкальной индустрии, где много лет рекорды популярности бьет певица, взявшая псевдоним Мадонна. Хотя сценический образ американской Мадонны не имеет ничего общего ни с эпохой Возрождения, ни с каноническим христианством, он успешно выражает собой именно архетип «западной исключительности».

Русская «Джоконда» ломает именно часть ментального кода «западного человека», и мы наблюдаем редкое явление, когда артефакт культуры оказывает тонкое воздействие на восприятие интеллектуальной элиты. Запад не может игнорировать упрямые факты, но и признать другую «Джоконду» ему не хватает духа.

Мало того, что на картине из Питера отчетливо видны две колонны, о которых оставил свидетельство Рафаэль, побывавший в мастерской Леонардо, и которые на картине из Лувра были незаметно дописаны поверх готового фона! Так еще и улыбка русской «Джоконды» в точности соответствует наброску из дневника Леонардо и подготовительному рисунку, тогда как «Джоконда» в Лувре улыбается иначе и выглядит старше. Для чего же мастер написал еще одну «Джоконду»?

Ответ напрашивается сам собой: вторая картина была написана в 1514 – 1515 годах для короля Франциска I, близкого друга да Винчи. Она была продана за два года до смерти да Винчи королю Франции учеником Леонардо — Салаи. Очевидно, Франциск I имел возможность сравнить ее с прототипом и заметить отсутствие колонн на новой работе. Дописать колонны, опираясь на оригинал, да Винчи доверил Салаи, что объясняет, почему ученик выступил в роли конечного продавца и почему в архивной описи имущества Салаи оказалась первая оригинальная «Джоконда», оцененная нотариусом баснословно дорого.

Собранных исторических, искусствоведческих и технических данных в любом другом случае было бы уже достаточно для признания того, что русская «Джоконда» была написана да Винчи в 1503 году. Но экспертное сообщество, отстаивая идеологически важную исключительность «Джоконды» из Лувра, разумеется, приложит все усилия, чтобы этого не допустить. Трудно сказать, сколько лет еще продлятся эти детективные разбирательства, но однажды время раскроет и эту тайну.

► Любопытно уже то, что факт продажи «Джоконды» и еще трех картин да Винчи его учеником Салаи никогда раньше не афишировался искусствоведами. Такое доверие мастера и ученика вполне может указывать на то, что какие-то элементы своих картин Леонардо поручал писать Салаи. Инициалы SL в значках «Джоконды» (и первой 1503 года, и второй 1515 года) могут поэтому означать именно совместное авторство Салаи (S) и Леонардо (L) в обоих случаях.

А.Н. Ковалёв

Исторические и психологические истоки догмата о Троице и божественная пропорция

Et mortuus est dei filius: prorsus credibile est, quia ineptum est.

Et sepultus resurrexit: certum est, quia impossibile.

Тертуллиан, De Carne Christi, 5.4.¹

После Чернобыльской аварии, с ее отсылкой к Апокалипсису (полынь-трава), многие жители еще Советского Союза, потеряв чувство твердой почвы под ногами, стали стремительно обращаться к православию. При этом догматы Церкви стали чем-то вроде островков твердой, веками освященной, земли, к которым с чувством обретаемого спасения стали стремиться вновь обращенные. Многие уверовали, что крест «животворящий» со словами «Во имя Отца, и Сына, и Святаго Духа» может очистить обычную пищу, которая шла привычным потоком в центральную часть России с Украины, Белоруссии и Прибалтики, от ее смертельной радиоактивной начинки.

Пошатнулась привычная для СССР вера во всемогущество интеллекта. Некоторые люди интеллектуального труда стали искать и находили компромиссные варианты, с

¹ «И Сын Божий умер: это бесспорно, ибо нелепо. И, погребённый, воскрес: это несомненно, ибо невозможно». Тертуллиан (155/165 – 220/240), автор первого удачного варианта догмата о Пресвятой Троице.

IN BREVI

Андрей Николаевич Ковалев, профессиональный математик, автор книги «В поисках пятого порядка» и целого ряда исследований в области истории математики, предлагает взглянуть на историю возникновения религиозных догматов христианства, в частности догмата о Святой Троице, с необычной стороны.

В самом деле, какие глубинные психологические и исторические причины привели к развитию христианских представлений о Троицизме? Существует ли связь выделения числа «три» с числом π ? Какую роль сыграли гностические течения на формирование христианства в первых веках нашей эры? Почему внутри христианства, несмотря на все попытки очистить учение Христа от сомнительных толкований, так и не сложилось подлинного единства, почему все попытки реформирования христианства потерпели крах?

Об этих и многих других вопросах начинаешь задумываться, читая статью А.Н.Ковалева. С одной стороны, можно понять отцов церкви, которые всячески стремились отмежеваться от Троицы «классического язычества» — Отец, Сын, Мать (божественная душа). С другой стороны, попытки извести женский образ, особенно в этом усердствовал католицизм, не избавили христианство от расколов, которые по разным причинам продолжают существовать до сих пор.

Но изучение истории церкви не является для автора самоцелью, его размышления об исключении образа Святой Души связаны с попыткой понять, почему в наши дни это привело к исключению представлений о гармонии, с которой связаны многие психические процессы, более того, порой к негласному запрету на изучение свойств «Божественной пропорции».



оправдательной базой для христианских догматов. Так в 1990 году в журнале «Вопросы философии» появилась статья академика РАН, физика-механика, одного из создателей советской космонавтики, **Б.В. Раушенбаха** «**О логике триединости**» [1]. Рассматривая атрибуты Святой Троицы с точки зрения формальной логики, он показывает, что они не противоречат ей, и в качестве «*математической модели*» Троицы берет трехмерное пространство: «*Таким образом, самый обыкновенный вектор в трехмерном пространстве и его три ортогональные составляющие дают логически безупречный пример объекта, обладающего совокупностью нужных свойств: триединности, единосущности, неслиянности и нераздельности*».

Он восхищается мудростью сотворивших догмат о Троице: «*Остается лишь удивляться тому, что отцы Церкви сумели сформулировать эту совокупность свойств, не имея возможности опираться на математику. Они совершенно справедливо называли любые отклонения от этой совокупности ересями, как бы ощущая внутренним зрением их разрушительную пагубность. Лишь сегодня становится понятным величие отцов Церкви и в смысле интуитивного создания безупречной логики триединности*». И заканчивает свою статью вполне в христианском духе: «*Что касается, если так можно выразиться, «алгоритма», по которому из трех Лиц возникает единый Бог, то здесь, как уже указывалось, богословие говорит о непостижимой тайне внутренней жизни Бога. Таким образом, непостижимой является во все не логическая структура Троицы (она вполне разумна), а кардинальное качество Троицы, жизнь Бога в Самом Себе*».

Несмотря на «*христианскую смиренность*», проявленную академиком, его статья была научно выдержанной и содержательной и создала ориентиры для последующих исследований догматов на стыке науки и веры. Вызывает несогласие только категорично отрицательное отношение к ересям, выказывающее и отсутствие

глубокого знания достижений современной исторической науки и психологии, что неудивительно, поскольку Раушенбах — физик, и ... личностную ориентацию, если не на всесильность интеллекта, то на его лидирующую роль в жизни.

Предложенное ниже рассмотрение догмата о Троице основано на историческом и психологическом анализе, не без элементов рационализма, хотя последнее и было уже много веков назад осуждено, как «*ересь*». Но поскольку Средние века, кажется, уже давно закончились,² можно надеяться, что критика написанного ниже будет отталкиваться не от положений Православной Церкви, которая «*возвещает, что Троица совершенно непостижима не только для людей, но даже для самых высших ангелов. Поэтому Троицу познавать возможно только с помощью Божией*», а от достижений современной исторической науки и психологии. Последнее не значит, что автор не допускает существование верных представлений, полученных ненаучным путем, как и истин, непостижимых для современного человека науки.

Краткий исторический экскурс

Догмат о Троице начинает формулироваться на Первом Вселенском соборе в 325 году (**Никея**), как ответ арианам и гностикам и одновременно акт отторжения их. На этом соборе был принят символ веры об единосущности Сына-Бога – Сыну-Отцу. После Собора Арий (256 – 336) был изгнан, а его книги сожжены. Но Константин Великий разрешил арианству, к которому принадлежало много епископов Востока, оста-

² Хотя по полушутливому заявлению историка и писателя Умберто Эко «*Средние века уже начались*».

ваться официальной религией. Более того, на смертном одре он был крещен в христианскую веру священником-арианом.

Арианство, зародившись в ученой Александрии Египетской, являлось попыткой рационализировать христианскую догматику, привнесением иерархичности отношений в Троицу, что имело исторические корни, о которых будет написано ниже. Отметим, что взгляды Ария разделял и Евсевий Кесарийский (ок. 263 – 340) – римский историк, отец церковной истории, хронология которого была принята Церковью до XVI века.

В 359 году на Ариминском соборе было решено не употреблять термины «*сущность*» и «*ипостась*» об Отце, Сыне и Святом Духе, как неизвестные и приводящие в соблазн, поскольку их нет в Писаниях. Фактически это был запрет на употребление Никейского Символа веры и временная победа арианства.

В 381 году император Феодосий I, будучи противником арианства, потребовал созыва нового Вселенского собора в Константинополе, где арианство и было окончательно осуждено. Одновременно кафедра Константинополя встала на 2 место после Рима, сместив александрийскую на третье место.

Окончательно Символ веры в Пресвятую Троицу был принят только на **IV Вселенском соборе в Халкидоне в 451 году (Халкидонский символ веры)**. Согласно православному учению:

- Бог Отец ни от кого не рождается и ни от кого не исходит;
- Бог Сын предвечно рождается от Бога Отца;
- Бог Святой Дух предвечно исходит от Бога Отца.

Этот собор имел и чисто политическую цель — не дать отколоться, склонным к ересям, Александрийской и Антиохийской церквям. В то время как александрийцы разрабатывали синтез христианства с учением Платона, а значит и пифагорейства, антиохий-

цы следовали Аристотелю. Они не только не отвергали научного знания, но и (по свидетельству Епифания) «с утра до вечера сидели над занятиями, стараясь излагать представление о Боге при помощи геометрических фигур». Так Евсевий Эмесский (ок. 300 – 360), изучавший теологию у Евсевия Кесарийского, был наставником основателя антиохийской религиозной школы (Диодора Тарсийского) и был изгнан папской Эмессы с поста епископа за чрезмерно глубокое знание математики, которое он проявлял на своих проповедях.

Спор о Святой Троице был одним из пунктов взаимного обвинения и предания анафеме во время раскола Византийской и Римской Церквей в 1054 году, в дни, когда утром на востоке светила новая яркая звезда (вспышка сверхновой в созвездии Тельца 4 июля 1054 года), напоминая о Вифлеемской звезде.

Будет проявлением наивности мнение, что развитие и утверждение догмата о Троице шло «с Божьей помощью», хотя последнее не просто утверждается христианской Церковью, но в учение был введен специальный догмат о непогрешимости пап в случае утверждения догматов. Мол, безошибочность папы в таких случаях, как приемника апостола Петра, является даром Святого Духа. Так, например, в приведенной выше формулировке догмата, с современной точки зрения, во втором пункте есть одна логическая ошибка. «Предвечно» значит существующий искони, не имеющий начала во времени, хотя слово «рождается» предполагает время его появления. Но поскольку, согласно догмату о непогрешимости, сии утверждения есть плоды даров Святого Духа, то они и не должны удовлетворять ограниченной человеческой логике.³

³ В рамках современных космогонических теорий и этот пункт может быть удовлетворен, если рождение Христа происходило до Большого Взрыва, т.е. до начала «нашего времени».

Одним словом, многое в христианском учении успешно развивалось в духе утверждения Тертуллиана, приведенного в эпиграфе. Тертуллиан и был одним из первых, кто еще до Никейского собора сформулировал взгляд на Троицу. «*Et Pater Deus, — говорит он, — et Filius Deus, et Spiritus Sanctus Deus, et Deus unusquisque*».⁴

Сам инструмент осуждения на ересь и последующие запрет и изгнание отражают факт существования борьбы за власть, и не только над душами, которую стала вести Церковь, называвшая себя христианской, с начала IV века. Под вывеской очищения учения от ложных представлений, сначала Римская, а затем — Константинопольская церкви, утвердив свое прокрустово ложе, занимались, по сути, уничтожением как многообразия христианских течений первых трех веков, так и исторических свидетельств, не укладывающихся в творимую доктрину. В том числе шла чистка религиозного учения под число 3³ — было оставлено 27 книг Ветхого Завета и 27 книг Нового Завета. В этом очистительном труде личность самого Христа теряла исторические очертания, вся более мифологизируясь.

Поэтому не стоит удивляться, что Реформация в XVI веке шла под вдохновенным желанием вернуться «к истинному христианству» первых веков; что Сведенборг писал о своей встрече с Христом, который говорит о ложности пути христианской Церкви; что Кьеркегор сводил роль христианского учения к нулю, придавая значение только искренности чувств верующего, а многие серьезные историки конца XIX – начала XX вв. допускали, что Христос был мифологической личностью, вроде Геркулеса древних греков.

Выражение «*еретических*» взглядов до XVIII века могло закончиться пытками и костром, потом — отлучени-

⁴ «*И Отец – Бог, и сын – Бог, и Святой Дух – Бог, и Бог каждому*» (лат.)

ем, со всеми вытекающими последствиями. Между тем, среди антитринитаристов были:

Мигель Сервет (1511 – 1553) — испанский мыслитель, естествоиспытатель и выдающийся врач, открыл малый круг кровообращения, восстановил приоритет Колумба в открытии Америки. Антитринитаристские взгляды выразил в анонимной книге «*Восстановление христианства*» (1533), с очевидностью, был сторонником протестантов;

Джон Мильтон (1608 – 1674) — английский поэт, автор «*Потерянного рая*» и многих религиозных памфлетов;

Джон Локк (1632 – 1704) — английский педагог и философ, представитель эмпиризма и либерализма. Он широко признан как один из самых влиятельных мыслителей Просвещения и теоретиков либерализма;

Исаак Ньютон (1642 – 1727) — религиозные взгляды Ньютона, по мнению многих историков науки, были близки к арианству;

Джозеф Пристли (1733 – 1804) — естествоиспытатель, философ, общественный деятель. Вошёл в историю, прежде всего, как выдающийся химик, открывший кислород;

Томас Джефферсон (1743 – 1826) — один из авторов Декларации независимости США (1776), ее третий президент;

Генри Уодсворт Лонгфелло (1807 – 1882) — американский поэт, автор «*Песни о Гайавате*» («*The song of Hiawatha*»);

Лев Толстой (1828 – 1910) — за свои религиозные взгляды был отлучен в 1901 году от лона Православной церкви, в коем состоянии прибывает по сей день.

История с отлучением Толстого может вызвать вопрос: почему сама крупность фигуры единственного Титана русской словесности не подтолкнула высших иерархов Православной Церкви усомниться тогда в истинности своих догматов? Каким образом кучка людей с недале-

временных протестантских движениях как раз менее всего заметны признаки христианства первых веков. Избежать различных толкований в христианстве невозможно, и это не зависит от того, какой догмат или символ веры кем-то был принят. Христос не уточнил двумя или тремя перстами креститься и как толковать Его тождество с Богом Отцом, понимая, что человеческая глупость все равно извратит саму суть учения. Западная традиция изначально была склонна к вольному (в зависимости от ситуации) прочтению слов Нового Завета. Например, на основании того, что Иисус Христос в одном месте Писания обращается к апостолу Петру: «*Отойди от меня, сатана, потому что ты думаешь не о том, что Божие, но что человеческое*» (Евангелие от Марка, 8; 33), — протестантские проповедники (кальвинисты, лютеране и др.) обвиняли Римскую католическую церковь, т.е. церковь апостола Петра, в сатанизме... Но, если взглянуть на протестантизм с исторической точки зрения, в нем еще меньше стали «думать о том, что Божие». Сама идея спасения оказалась в нем сведена не к духовному подвигу через отрешение от материальных соблазнов, а наоборот — к накопительству и комфорту, в которых стали видеть благоденствие и такой вполне себе «человеческий» способ индивидуального избавления от страданий.

Для многих в XVI – XVII веках лозунг возвращения к «истинному христианству» был вдохновенным, однако для непосредственных политических деятелей Реформации это был предлог для политической борьбы с Римом и империей Габсбургов. Подобным образом сейчас, например, запущен проект создания автокифальной украинской церкви, и следующим шагом могут стать взаимные обвинения церквей, аналогичные тем, которые предъявлялись то одним, то другим. Во многих со-

ких умом берет на себя смелость утверждать, что великий писатель не попадет в Рай, поскольку мы его отлучили?! Но может быть, именно по малости ума и утверждали?.. Или в этом проявилась какая-то другая черта высших иерархов христианской церкви?.. Хотя самими иерархами церкви эти вопросы отменяются, как не имеющие отношения к делу: Был отлучен, поскольку так повелевают постановления Церкви в адрес еретиков... он был предупрежден, но не захотел покаяться.

Но здесь нас будет интересовать не верность или ложность принятого учения о Пресвятой Троице, а скрытые от взгляда верующего исторические корни и психологические причины для его утверждения. При этом следует отдавать себе отчет, что какие бы корни не откопались, и какие внутренние скрытые общечеловеческие причины не вышли бы на свет — они не докажут ложность учения о Троице. Так гораздо сложнее доказать отсутствие Бога, чем его существование. Хотя и то и другое нельзя сделать на современном этапе.

Истоки

Еще задолго до того, как в Вавилоне определили для отношения площади круга к квадрату его радиуса число 3, оно уже было наделено символическим содержанием. В рамках наших рассуждений важно не только это содержание, но и соотношение его с числами 1 и 2. Поэтому приведем здесь почти полностью соответствующий отрывок из энциклопедической статьи [2]:

... *Оправдано предположение, что 1 означает, как правило, не столько первый элемент ряда в современном смысле, сколько целостность, единство. Совершенная целостность, понимаемая как единица,*

объясняет приписывание числа 1 таким образом этой совершенной целостности, как бог или космос. Число 2 лежит в основе бинарных противопоставлений, с помощью которых мифопоэтические и ранненаучные традиции описывают мир. Оно отсылает к идее взаимодополняющих частей монады (мужской и женской как два значения категории пола; небо и земля, день и ночь как значения, принимаемые пространственно-временной структурой космоса), к теме парности, в частности в таких её аспектах, как чётность, дуальность, двойничество, близнецство. Характерно соотношение 1 и 2, реконструируемое по данным ведийской традиции. Число 2 в ней выступает как символ противопоставления, разделения и связи, с одной стороны, и как символ соответствия или гомологичности противопоставляемых членов — с другой. В силу этих качеств 2 есть первичная монада, защищающая человека от небытия и соответствующая творению — небу и Земле, рождённым в одном гнезде.

Как таковое два противопоставит трансцендентному одному, единому, размышление над которым дало начало особой стадии в развитии спекулятивно-космологического умозрения. Сказанное о семантике 1 и 2 объясняет, почему в ряде культурных традиций 1 и 2 (или иногда только 1) не рассматриваются как числа (соответствующие слова нередко оформляются иначе, нежели другие числительные). Первым числом в целом ряде традиций ... считается 3; оно открывает числовой ряд и квалифицируется как совершенное число. 3 — не только образ абсолютного совершенства, превосходства, но и основная константа мифопоэтического макрокосма и социальной организации (включая и нормы стандартного поведения). Ср. 3 сферы вселенной, 3 высшие ценности, божественные троицы (или трёхипостасные, трёхглавые божества типа славянского Триглава, древнеиндийского Тримурти; ...), ...».

размышляющих о Боге, критиков церкви и явных вольнодумцев, если они соблюдают паритет возможностей, оставляя за церковью естественное право на существование. Проблема состоит еще в том, что в начале XX века РПЦ была в значительной степени инфильтрована масонскими религиозно-политическими организациями, которые успешно выполняли задачу по дискредитации церкви. Некоторые православные иерархи в то время даже не скрывали свою принадлежность масонскому (прозападному) движению. Так что сам Л.Н.Толстой, понимавший что к чему, мог порвать с церковью именно по причине того, что считал эту организацию служащей не Богу и не православному народу, а интересам Запада. Довольно сдержанная позиция церкви по отношению к разгулу революционного беззакония тем и объясняется, что церковь (как земная организация) тоже была в некоторой мере замешана в расшатывании политической обстановки в царской России. Что касается современной Католической церкви, то в ней вообще был отменен запрет на членство в масонских организациях, и многие факты свидетельствуют о том, что подлинными хозяевами католической, равно как и протестантской, ветвей христианства являются тайные общества, скрывающие подлинные цели своей деятельности.

◀ Вопрос отлучения Толстого — это в конечном счете волеизъявление самого Льва Николаевича. При этом, конечно, не церковные иерархи решают, будет или нет спасена душа отлученного, то есть отлучение — это еще не Суд Божий. Тем самым иерархи лишь констатируют, что церковь по ряду причин не может ассоциировать себя со взглядами отлученного. Иначе получится, что любой популярный толкователь или создатель собственного вероучения, атеист или даже сатанист может объявить себя «истинным православным христианином» и добиваться признания этой позиции от церкви, апеллируя к своему «конституционному праву свободы совести». То есть, если у церкви не будет никакого механизма защиты, то произойдет размывание самого понятия «церковь», и каждый будет иметь равное право для создания личной «православной церкви». Было бы странно, если бы церковь не воспользовалась отлучением, когда в некоторый исторический момент возникла необходимость в демаркации, скажем, учения Толстого и учения Христа. В то же время, церковь (во всяком случае, русская православная) не отлучает философов, по-своему

На то, что число три относится у славян к наиболее значимым элементам числового ряда, указывают многие ученые. Так, **С.М. Толстая** пишет, что число три символизирует у славянских народов «развитие и завершенность процесса, полноту некоторой последовательности, имеющей начало, середину и конец. Число 3 определяет вертикальную структуру Мира, разделенного на нижний (Земля в смысле всего, находящегося ниже ее поверхности, в том числе и Аид — **А.К.**), средний (атмосфера, мир людей — **А.К.**) и верхний (Небо, мир богов — **А.К.**) уровни, временную модель дневного времени (утро – полдень – вечер), изоморфное ему деление биологического существования (молодость – зрелость – старость)». [3].

Трехчастная структура любого полноценного процесса, протекающего во времени, имела отражение и в самой структуре времени, очищенной от явлений: вчера-сегодня-завтра или прошлое-настоящее-будущее.

Согласно теории **Ж. Дюмезиля**, получившей свое развитие в трудах **А. Греймаса** [4], конструкция индоевропейской ментальной вселенной имела трехфункциональную структуру и отражала трехчастную структуру индоевропейского общества (жрецы – воины – крестьяне). Отметим, что трехчастная структура общества имеет почленное соотнесение с аналогичным делением вертикали: крестьяне – Земля, воины – атмосфера, жрецы – Небо.

Нам еще понадобятся числа 9 и 12, первое — как связанное с числом 3, второе — как знаковое для додекаэдра, представителем которого в мире вещественных чисел является число **Фидия**, «**Божественная пропорция**». Поэтому приведем здесь соответствующие отрывки из энциклопедических статей.

«В ряде традиций с числом 7 соперничает число 9, получаемое троекратным повторением триады. В старой китайской поэзии число 9 используется в значении «все».

Большую роль играет оно в индивидуальном мистическом опыте...» [2].

Т.е. число девять, которое с первого века станет символом Христа, как записанное на латинском аббревиатура его имени и величания (IX), еще до этого было насыщено мистическим религиозным содержанием. Интересно, что Пифагор, разбив греческий алфавит на три группы по восемь,⁵ число 8 считал символом максимального человеческого... поскольку в его время было 8 небес. По крайней мере, так считают историки науки. Интересна в этом плане, фраза **Дона Хуана из четвертой книги «Сказки о Силе**. «Сорок восемь — это наше число, — сказал он. — Именно оно делает нас людьми. Я не знаю почему. Не трать свои силы на idiotские вопросы» [6].

Птолемей, создатель «Альмагеста», живя в Александрии и попробовав из многих котелков философских похлебок, не мог не знать и о символическом истолковании роли Христа в истории человечества, о «подсказке», данной уже в Его числе, — IX. Ведь уже само это число наталкивало на мысль о преодолении Им обычного человеческого удела, заданного восемью сферами земного Неба. Возможно, именно под влиянием гностического взгляда на символ **Христа астроном вводит девятое небо — Перводвигатель**, или невидимое кристальное небо. В последующем христианские теологи замкнули счет введением десятого неба — **недвижимого Эмпирея** (что значит по-гречески: пламенный), полностью удовлетворив склонность к десятичным системам.

«В отличие от динамической целостности, символизируемой числом 3, число 4 является образом статической целостности, идеально устойчивой структуры. ... Отсюда — использование числа 4 в мифах о сотворении все-

⁵ Для чего его ученикам пришлось к бывшим в его время 19 действующим буквам добавить еще 5.

ленной и ориентации в ней: 4 стороны света, 4 главных направления, четвёрки богов или четырёх-ипостасные боги (ср., напр., четырёх Перкунасов в литовском фольклоре или богов — стражей 4 сторон света), 4 времени года, века (ср. ведийские обозначения 4 эпох и одновременно термины игры в кости), 4 элемента (иногда они соотносятся с 4 мифологическими персонажами) и т. п. 4 компонента актуализируются в тех геометрических фигурах, которые имеют наибольшее мифопоэтическое значение - квадрат, мандала, крест.

Из произведения 3 и 4 возникает число 12, которое также принадлежит к наиболее употребительным в мифопоэтических культурах числовым шаблонам (12 частей года, соответственно — знаков зодиака, 12-членные пантеоны и т. п.). [2]

«Оно фигурирует также и в магических практиках, наряду с числами 7 и 9. По обычаям сербов надо накануне Юрьева дня собрать воду из 12 источников и оставить ее переночевать перед домом, назавтра добавить в нее росу с 12 растений и давать это больным для излечения». [3/].

Здесь важно отметить, что 12 — с одной стороны связано с циклическим ходом и счетом времени, с другой, будучи производением числа-символа горизонтального мира и числа-символа вертикального мира, является презентацией всего макрокосмоса. Последнее объясняет, почему после открытия додекаэдра и его свойств, он становится выразителем первичной структуры космоса у древних греков и индусов. **Примечательно, что при этом могло произойти слипание зодиака и додекаэдра в один символ.** Соотнесение граней додекаэдра со знаками зодиака было, как минимум, в раннем Средневековье. На территории Женевы был найден литой свинцовый додекаэдр, размером примерно в 3 см, покрытый пластинками из серебра с названиями знаков зодиака (см. рис.). Если его ставить в один ряд с

«римскими» додекаэдрами, найденными на территории Франции и Англии, то они датируются III – IV веками н.э. Трудно сказать стояло ли за этим соотнесением какое-либо философское представление, или мы имеем только результат удачного переноса знаков зодиака на гадательный предмет. В первом случае, мы имели бы факт связывания в далеком прошлом деления временного цикла на 12 равных частей с последовательной активизацией одной из граней некоторого мистического додекаэдра. Отметим, что некоторые современные исследования, позволяют предположить возможность существования такой связи.⁶



Рис. 1. Додекаэдр со знаками зодиака

Евреи вышли из Египта с «наследством», которое в виде мистерий частично было восстановлено в храме Соломона. Так в Египте царица Хатшепсут в XVI веке до н.э. построила храм «Чудо из Чудес»,⁷ службы в котором главный жрец выполнял, согласно сохранившимся фрескам, в окружении 12 помощников, разбитых на 4 группы по три человека. Предположительно, то же число

⁶ Более подробно см. в [5], главы «Меридианы китайской медицины» и «Последняя фантазия».

⁷ Храм в Деир-эль-Бахри. Иммануил Великовский считал, что план этого храма совпадал с планом храма Соломона («Века в хаосе», 1952).

священников, разбитых на такие же группы, исправляли службу и в храме Соломона. По крайней мере, перед первым храмом Иерусалима, на юго-восточном углу, располагалось «медное море» — медная чаша для ритуального омовения священников, стоящая на 12 быках, ориентированных по четырем сторонам света. Т.е. традиция выбирать именно 12 священников и, предположительно, соотносить их со знаками зодиака может быть древнее храма Соломона. Выбор Христом среди учеников именно двенадцати апостолов и характер Тайной вечери позволяют предположить, что он следовал в этом традициям храма Соломона.

Но, возможно, содержательная сторона этого выбора не сводится к простому соблюдению традиции. Интересно, что и **Леонардо да Винчи изобразил на «Тайной вечери»** апостолов, разбитых на четыре группы по три. И более того — соотнесение апостолов на росписи с конкретными знаками зодиака поддерживается многими деталями этого произведения.⁸ **Сальвадор Дали** делает следующий шаг и представляет композицию Тайной вечери, вписанной в додекаэдр. Тем самым не только высвобождая мотив «Тайной вечери» от ассоциации с астрологией, с неизбежностью, связывавшей события из жизни человека, «*пришедшего дать нам волю*», с волей Рока, но и, возможно, в гениальном прозрении находя геометрически точный символ свободы.⁹

Но вернемся к числам 1 и 3. С одной стороны, неделимая единица — самый древний числовой символ совершенства и цельности, т.е. — бога, с другой, его геометрическим символом является окружность с точкой в центре — первичная монада. Числовой характеристикой этого геометрического образа явля-

⁸ Подробнее см. [11], глава «Сокрытое в картинах».

⁹ Почему именно символ свободы см. в [5], глава «Последняя фантазия».

лось отношение площади круга к квадрату радиуса, для которого в III тысячелетии до н.э. в Вавилоне определили, что оно равно 3. При этом оно определялось через формулу: *площадь круга равна квадрату длины окружности, деленному на 12* [7, с. 13].¹⁰

Т.е. число 3 становится первым скрытым символом божественного. Геометрическим символом, соответствующим этому «*прозрению*» становится равносторонний треугольник, вписанный в окружность, с точкой в центре.¹¹ Интересно отметить, что иудеи, хотя и вышли из Египта, когда там уже применялось для числа π более точное приближение (3,16), с X по V века до н.э. для числа π принимали значение 3 [7, с. 17]. Этому факту есть письменные свидетельства, в том числе и в Библии. Отметим, что источники Ветхого Завета делятся учеными на 2 части: **Элохист и Яхвист**. К Элохисту относятся Пятикнижие и Книга Иисуса Навина, предположительно написанных в XIII веке до н.э., через 5 столетий после исхода,¹² в которых имя божье записано как «*элохим*», что является множественным числом от «*элох*»¹³ — «*господин, господь*».

Фактически Библия начинается словами: «*Вначале сотворили Боги небо и землю*». В Яхвисте для Бога исполь-

¹⁰ Это говорит о том, что в Вавилоне в это время уже определили равенство констант в соответствующих формулах для длины окружности и площади круга.

¹¹ Если к этому рисунку добавить три радиуса, с концами в вершинах треугольника, то получим исходный символ, который подтолкнул Рыжего Патрика избрать лист клевера при разъяснении ирландцам содержания догмата о Троице, что, согласно легенде, и подтолкнуло их к крещению.

¹² Современная исторически согласованная датировка исхода — XIII век до н.э., хотя в школьных учебниках по истории в Израиле до сих пор используется дата — 1315 год до н.э.

¹³ Сравните со словом «*аллах*».

зуется слово Яхве (Иегова), что отражает уже монотеистические взгляды иудеев. Представление иудеев о равенстве π , насыщенного религиозным смыслом, числу 3, по времени совпадает с переходом от многобожия к монотеизму, и Троица Ветхого завета, отчасти, является компромиссным решением в этом переходе.

Но что могла включать символика числа 3 во время этого перехода? Во первых, 3 — символ совершенных процессов, текущих во времени, и самого времени. Большинство временных циклов хорошо совмещалось с символическим движением по кругу, скрытой числовой презентацией которого для древнего человека являлось $\pi \equiv 3$. **Т.е. время, его структуру, могли отнести к атрибутам скрытого бога.**

Во вторых, 3 — древний символ целостности внутренне дифференцированной структуры. Среди таких структур были и социальные. Самой простой социальной структурой является семейная ячейка. Были семьи и у богов. В отличие от семей обыкновенных смертных, они насыщались символическим, отчасти сакральным содержанием, отражающим скрытую структуру мира. **В Древнем Египте, откуда вышли иудеи, божественной семье сопоставлялся священный прямоугольный треугольник, со сторонами 3, 4 и 5.** Где 3 - представляло Изиду, 4 – Осириса, 5 – их сына, Гора.

Плутарх писал: «Они сравнивают вертикальную сторону [прямоугольного треугольника] с мужчиной, горизонтальную — с женщиной, а гипотенузу — с их потомком: Озирис как начало, Изида как середина или хранилище и Гор как завершение». Но Осирису было соотнесено число 7, поэтому, наверно, точнее говорить, что 4 — символ Осириса в фазе его воплощения в теле фараона, во время интронизации которого приходят поклониться с 4 сторон света.¹⁴

¹⁴ К. Кэмпбелл пишет в «The Miraculous Birth of King Amon – Hotep III»: «...царь, несущий знаки Осириса, занимает ме-

Остается вопросом, стал ли прямоугольный треугольник Кеплера в Египте вторым вариантом священного треугольника. **А.И. Щетников** приводит достаточно убедительные доводы в пользу утверждения, что он использовался в качестве исходного при строительстве пирамиды Хеопса [9]. При этом такой треугольник Щетников называет совершенным и «золотым». Числовые характеристики треугольника Кеплера в пирамиде: половина основания пирамиды — 220 локтей, высота — 280 локтей, расчетное целочисленное значение апофемы — 356 локтей.¹⁵ **Т.е. базовым треугольником являлся целочисленный треугольник (55, 70, 89)** и для Божественной пропорции получается выражение **89/55** — отношение двух соседних чисел Фибоначчи.

Если число $280 = 4 \cdot 7 \cdot 10$ легко соотносится с Осирисом (7) в его статусе фараона (4) и сопровождаемого символом совершенства, завершенности (10), то в числе 220 труднее найти отражение числовой символики Из-

сто на троне и последовательно обращается к 4 сторонам света...» [8]. Но это не значит, что он является Осирисом. Он – сын Осириса, его божественный приемник, несущий в себе семя бога-отца. Это семя приводит к тому, что Осирис существует в нем, как «просветленное дитя», которого алхимики называли «внутренним просветленным человеком» или «астральным телом». В процессе правления «дитя» вырастает, обретая образ Осириса, который окончательно оформляется только со смертью фараона. После смерти фараона, жрецы ждут определенный день, при котором осуществляется таинство «путешествия к звездам», когда дух правителя выходит из тела, сливается с Осирисом и улетает к поясу Ориона. В этой мистерии участвует и приемник царской власти, который «возвращается со звезд» в виде сына Осириса – Гора. Следующим утром, при появлении утренней звезды (?), объявляется об интронизации божественного Гора.

¹⁵ Вычисленное по теореме Пифагора значение апофемы — 356, 09.

иды (3). Желая сохранить за горизонтальным катетом женское начало, можно вспомнить, что в объединенном Египте было 11 Иерофантов + 11 Иерофантес.¹⁶ Тогда в числе $55 = 5 \cdot 11$ второй сомножитель мог символизировать духовную власть женского рода (иерофантесы) — Святой Дух женского рода, который на русском языке лучше назвать «Святой Душой».¹⁷ Отметим, что 5 могло быть и символом Сириуса, который изображался пятиконечной звездой. Напомним, что Изиде соотнесена именно эта звезда.

Т.е. священная Троица в древнем Египте — это сначала «Отец-Осирис, Сын-Гор и ... Изиды», а потом, может быть, — «Отец, Сын и ... Святая Душа».¹⁸ «Святой Дух» в иудейской религии до н.э. и был женского рода, поскольку соответствующее ему слово **РУ-АХ** — женского рода. Замещение его духом мужского рода происходит в христианской теологии параллельно с изгнанием Марии Магдалины из числа апостолов.¹⁹ Сейчас, когда Ватикан вернул Марию в число апостолов (2016) может пора вернуть и Святому Духу его истинное содержание?..

В заключении этой главки отметим, что когда для п утвердилось приближение Архимеда ($22\sqrt{7}$), то размышления над «излишком» — $1\sqrt{7}$, представленном в десятичной записи — 0, (142857) стали продолжением проникновения в тайну бога. Случай сыграл здесь свою шутку — в

16 5 — в Верхнем Египте, 5 — в Нижнем + верховная жрица Изиды, которой часто была сама царица.

17 Отметим, что именно так и поступает Даниил Андреев в своей «Розе Мира».

18 К.Г. Юнг пишет, что третьей частью была **Ка** Изиды [14].

19 В 2016 году Ватикан вернул Марию Магдалину в число апостолов. Может, недалек и тот день, когда Святому духу вернут женскую природу?

последовательности цифр были все,²⁰ кроме кратных трем, что подлило масла в огонь воображения. В результате родилось изображение на окружности, разделенной на 9 равных частей, последовательных 9 цифр, соединенных между собой. **Две последовательности точек-цифр 3-6-9 и 1-4-2-8-5-7, выписанных на окружности, соединялись линиями, которые потом превратились в стрелки.** Т.е. к стандартному символу треугольника, вписанному в окружность (соединение точек-цифр 3-6-9), добавилось, тревожащее дух, дополнительное построение. Даже в начале XX века **Г. Гурджиев** «медитации» над этим рисунком считал одной из самых продвинутых духовных практик. В 90-ые года прошлого века в этом деле нашлось немало его последователей в новой России.

Троица и гностицизм

В начале нашей эры Александрия Египетская была котлом, в котором варилась похлебка из разнообразных учений и религий, поглощаемая людьми разных сословий и профессий, но объединенных одним недугом — жаждой знаний. Они собирались в группы по своим предпочтениям: **Офиты** (от древне-греч. ὄφις — «змея», «змей»), почитавшие змею, как символ высшего знания; **Борбориты** (от древне-греч. Βόρβωρος — грязь, нечистоты) — неопифагорейцы, почитавшие число восемь; **Сифиане**, почитавшие Сета, которого считали третьим сыном Адама и Евы, а Христа — его воплощением; **Терапевты** — еврейская община лекарей, пробующих новые методы лечения, в том числе и звуком (голосом), и держащих связь с кумранской общиной, и ... кого только там не было, всех не упомянешь.

Но кроме эксцентрических групп гностиков были и ученые христиане, занимавшиеся развитием символи-

20 До XIII века не было цифры ноль.

ческих и скрытых представлений об устройстве Мира и человека. Они оставили нам ряд книг, в которых, несмотря на их символизм, сохранилось много ценных свидетельств не о мифологическом Христе, а — историческом.²¹

Гностицизм явился формой связи новой, христианской религии с мифологией и философией эллинизма. Гностики признавали мать Иисуса частью Троицы. Об этом есть свидетельства в гностических апокрифических евангелиях, не вошедших в общехристианский канон, например, в «Евангелие Египтян», датированного I—III веками нашей эры: *«Три силы произошли от него; они: Отец, Мать, (и) Сын, из живого молчания, что происходит от нетленного Отца. Сии произошли от молчания Отца неведомого. Вторая сила-огдоада — Мать, ... правящая над небом, сила неизъяснимая, невыразимая Мать. Она породилась от себя; она возникла; она соединилась с Отцом молчания безмолвного».*

Здесь они выступают наследниками египетского символизма. В другом гностическом тексте, «Апокрифе Иоанна» из Библиотеки Наг-Хаммади, есть тоже строки упоминающие мать как часть троицы: *«Я тот, кто [с вами] все время. Я — отец, я — мать, я — сын».* Тертуллиан получил толчок для формулирования своей идеи Троицы именно от гностиков. *«Философия, — пишет он, — породила все ереси. От нее пошли «зоны» и другие странные вымыслы. Из нее гностик Валентин произвел свою человекообразную троицу, ибо он был платоником».* (Тертуллиан. «О писаниях еретиков», 7-8).

В рамках развиваемой темы интересен вопрос: Проводили ли гностики аналогию между трехчастной структурой человека (дух-душа-тело) и небесной Троицей по принципу сопоставления: Отец —

²¹ В частности, о существовании у Христа брата-близнеца. Подробнее см. далее по тексту.

дух, Мать — душа, Сын — тело? К этому могли подталкивать и «Изумрудная скрижаль» Гермеса Трисмегиста, с ее постулатом: *«То, что находится внизу, соответствует тому, что пребывает вверху; и то, что пребывает вверху, соответствует тому, что находится внизу»*, и фраза Христа: *«Царствие Божье внутри вас есть».*

Уподобление Царства Небесного диаде дух-душа + нечто (?) есть в «Евангелие от Матфея», глава 13 (44-48): *«Еще подобно Царство Небесное сокровищу, скрытому на поле, которое, найдя, человек утаил, и от радости о нем идет и продает всё, что имеет, и покупает поле то. Еще подобно Царство Небесное купцу, ищущему хороших жемчужин, который, найдя одну драгоценную жемчужину, пошел и продал всё, что имел, и купил ее. Еще подобно Царство Небесное неводу, закинутому в море и захватившему рыб всякого рода, который, когда наполнился, вытащили на берег и, сев, хорошее собрали в сосуды, а худое выбросили вон».* Здесь дух — «сокровище» из первого сравнения и «жемчужина» из второго; душа — «купец» из второго сравнения. Но что есть «невод» из третьего сравнения? Может быть, это «тело», заброшенное в мир, как в море, где рыбки — черты характера?..

Троица и Божественная пропорция

Древние люди придавали большое значение совпадению двух смыслов в одном решении (событии), как проявлению скрытого, божественного содержания. Тогда то, что в пирамиде Хеопса, определяемой отношением чисел, наполненных для египтян символическим смыслом — 70/55 — гипотенуза-апофема треугольника (символ Гора) получается в 17 раз больше горизонтального катета (иерофантесса, Святая Душа), могло наполнить ощущением приближения

к божественной тайне, пробудить в жреце-архитекторе чувство сакральной верности найденного им решения для наклона боковой поверхности.

Если треугольник Кеплера был возведен в Древнем Египте в ранг совершенного и его стороны при этом сохранили символические значения «Божественного семейства», то тогда Сын оказывается в Φ (1.618...) раз больше «Святой(-го) Души (Духа)». И это соотношение повторяется в эпоху Возрождения!

В трактате математика Лука Пачоли «О божественной пропорции» (1498) с иллюстрациями Леонардо Да Винчи, явно читается религиозно-мистическое отношение ее автора к тайне этой пропорции. Пачоли полагал, что Божественная пропорция символизирует Троицу: Бог Отец – целый отрезок – 1, Сын – большая часть – ϕ , Святой Дух – меньшая ϕ^2 . Развивая эту символическую связь, **он единственность и неизменность данной пропорции сравнивает с единственностью и неизменностью Бога**, иррациональность отношения — с непостижимостью и невыразимостью Бога. Видно, что в этом пассаже Пачоли может выступать приемником египетского сакрального геометрического символизма.

Предполагал ли он возможность существования аналогии между Святой Троицей и обычной земной семьей? Мог ли подобные темы обсуждать с Леонардо да Винчи? Найти однозначный ответ на эти вопросы почти невозможно, хотя бы потому, что приверженец подобных взглядов мог быть обвинен в ереси. Но в VII главе трактата читаем: «... так как она [божественная пропорция, $\phi = 0,618...$ – А.К.] стоит в ряду других пропорций без вида или другого отличия, при одном соблюдении условий их определения, в этом ее можно уподобить Нашему Спасителю, который пришел не для того, чтобы нарушить Законы, но чтобы исполнить их, и общался со всеми, под-

чиняясь и слушаясь Марию и Иосифа».²² То, что Спаситель оказывается в Φ раз больше Святого Духа (Ру-Ах древних евреев, Ка египтян) при существовании связей европейского и египетского герметизма, может являться косвенным доводом в пользу утверждения, что в Древнем Египте могли дойти до включения треугольника Кеплера в список священных.

Пачоли, обсуждая соответствие рассматриваемой пропорции ее высокому названию – Божественная – пишет: «Так и наша святая пропорция в качестве формальной сущности придает – согласно древнему Платону в его Тимее – самому небу форму тела, называемого додекаэдром».²³ Чем дает толчок для соответствующих поисков в астрономии.

Некотрые гравюры XVI века астрономического характера, ставящие перед современными историками науки ряд вопросов, говорят о том, что люди эпохи Возрождения пошли дальше – спроецировав додекаэдр на небесную сферу и взяв за основу мысль из «Изумрудной скрижали» Гермеса Трисмегиста – «...То, что находится внизу, соответствует тому, что пребывает вверху; и то, что пребывает вверху, соответствует тому, что находится внизу» — они стали искать более детальные соответствия между скрытым небесным додекаэдром и законами построения земной жизни.²⁴ Впервые «Изумрудная скрижаль» была напечатана в 1541 г. в трактате «Об алхимии» Chrysogonus'a Polydorus'a, но до этого, как минимум, с середины XV века, она ходила во множестве списков.

22 Перевод А.И. Щетникова. Увеличенным шрифтом выделены все имена в самой книге, вышедшей на русском. Возможно, что они выделены так в оригинале.

23 «О Божественной пропорции», глава V, перевод А.И. Щетникова.

24 Более подробно см. в [5] главу «Божественная пропорция в сакральной геометрии Возрождения».

Среди скрытых поисков духовной аристократии Возрождения было и отслеживание небесных указаний в поддержку еретического представления, что у Христа был брат-близнец. К этому факту приводит пошаговая расшифровка одной гравюры XVI века, из книги, посвященной астрономическим инструментам [10], [11]. При этом, «первоначальный анализ ситуации», проведенный в этом деле придворным астрономом императора Священной Римской империи Карла V, основывался на вписывании в небесную сферу додекаэдра, и проводилась определенная связь между Христом с его близнецом и Диоскурами. Это означало реставрацию греческой версии рождения Сына Бога в близнецовой паре (Геркулес, Диоскуры, Елена Прекрасная) в отношении Христа и ставило под сомнение верность догматов о непорочном зачатии и Святой Троице. Интересно отметить, что сей поиск происходил в те же года (1532 – 1533), когда вышла антитринитаристская книга «Восстановление христианства» испанского врача **Мигеля Сервета**.

Литературными источниками для верования в существование у Христа брата близнеца мог быть цикл апокрифических книг: «Евангелие от Фомы», «Книга Фомы Атлета» и «Деяние Фомы», написанных в период от 150 до 300 гг. В последних двух книгах этой трилогии, Фома представлен непосредственно как близнец Христа: «Спаситель сказал: Брат Фома, покуда время есть у тебя в мире, услышь меня, и я открою тебе, о чем помыслил ты в сердце своем. Поскольку сказано, что ты — близнец мой и друг мой истинный, испытай себя и познай, кто ты и как был или как будешь» («Книга Фомы Атлета», par. 1); «Близнец Христа, апостол Всевышнего, ты тоже посвящен в скрытое учение Христа, ты получил тайные инструкции...» («Деяния Фомы», XXXIX). Отметим, что представление о брате-близнеце Христа разделял и Леонардо да Винчи, как следует из анализа его «Тайной Вечери» [11, приложение «Сокрытое в картинах»].

Можно сказать, что Божественная пропорция, поддерживая развитие представлений о Святой Троице в эпоху Возрождения, ставила под сомнение верность догмата о ней.

Троица с точки зрения психоанализа и аналитической психологии

Можно попробовать восстановить примерный путь формирования догмата о Святой Троице. Часть формулировки «Бог есть един по существу, но троичен в лицах» вызывает в памяти один из первичных смыслов троичности, связанного с тремя этапами жизни человека: ребенок (сын) – муж (отец) – старец (святой дух), как осуществленной (воплощенной) структуре времени: прошлое-настоящее-будущее. Действительно, различие лиц одного и того же человека в детстве, зрелости и старости часто может поражать, но это единый человек. Поскольку круг был не только частью символа Бога, но и символом человеческой жизни (принцип уробороса — змея, кусающего свой хвост), то равенство π — сокрытого символа божественного совершенства — трем, на время приподняло вуаль тайны с образа невыразимого бога, а близость геометрических символов привело к слипанию и последующему переносу части исходного содержания на конечную цель исканий всякого верующего человека. Во время этого переноса активизируется вторая часть древнего смысла троичности (отец-мать-сын), что приводит в Египте к появлению триады Осирис-Изида-Гор и соответствующего священного треугольника. Архаичное требование «един в трех

лицах» приводит к удалению «божественной матери» из египетской триады, к замене Святой Души — Святым Духом.

Посмотрим, что говорит об этом современная наука о человеке — психология. Все, кто хотя бы мельком знакомился с основными идеями Зигмунда Фрейда, хорошо знают, что отец психоанализа считал Бога-Отца порождением родительского комплекса, детской тоски растерянных взрослых по твердой руке отца, ведущего сквозь страшный лес окружающего мира. «Религия — общечеловеческий навязчивый невроз» — писал он. В книге «Тотем и Табу» (1913) он обрисовал этапы зарождения и развития религиозных чувств, идущих параллельно с развитием индивидуума.

Фрейд, будучи евреем и ценя этот факт,²⁵ интересовался происхождением монотеизма у евреев и в своей исторической работе «Моисей и монотеизм» (1939) возводил его корни к религиозной реформе Эхнатона, которую, после неудачной попытки фараона, жрец Моисей и предлагает плененному обстоятельством жизни в Египте семитскому народу [12].

По Фрейду, Моисей предложил иудеям веру в Атона²⁶ — бога Солнца, который в последующем, после возвращения иудеев к монотеизму через века, был заменен на бога вулканов — Яхве. Чем Атон отличался от Яхве? «Вейгал в книге «Жизнь и дни Эхнатона» говорит, что Эхнатон не признавал адских ужасов, от которых следует-де защищаться магическими заклинаниями. «Все эти заклинания он предал огню. Джины, духи, чудовища, полубоги и сам Озирис вспыхнули ярким пламенем и превратились в прах». Далее, интересен способ, которым представлялся

25 Он писал Артуру Шницлеру, в ответ на поздравление с 70-летием: «Эмоционально еврейство все еще весьма существенно для меня».

26 Ср. Адонай — «господь» (иврит) и Атон.

Бог-Солнце, — не маленькой пирамидой с соколом над ней, как прежде, а почти продуманно — **круглым диском**, из которого исходят лучи, кончающиеся в человеческих руках» [12]. Здесь важно, что изначально геометрически символом единого бога евреев мог быть круглый диск, и что он сводил на нет значение Осириса, а значит и Триады: Осирис-Изида-Гор. Эта тенденция возобновилась при формировании христианского догмата о Святой Троице.

Разбирая историю появления монотеизма у евреев, Фрейд пишет: «Среди заповедей религии Моисея есть одна, имеющая большее значение, чем это кажется на первый взгляд. Это запрет на создание образа Бога — принуждение поклоняться Богу, которого нельзя увидеть.

... Возможно, он просто хотел быть последовательным: в этом случае его Бог не имел бы ни имени, ни облика. Возможно, это была новая мера против злоупотребления магией. Но если этот запрет был принят, то он должен был иметь мощное влияние. Ибо он означал, что сенсорное восприятие ставилось на второе место после того, что можно было назвать абстрактной идеей — триумф интеллектуальности над чувственностью или, строго говоря, отречение от инстинктов, со всеми неизбежно вытекающими психологическими последствиями.

... У наших детей, невротических взрослых, а также у примитивных народов мы встречаемся с ментальным явлением, которое описываем как веру во «всемогущество мыслей». По нашему мнению, оно заключается в переоценке влияния, которое наши умственные ... действия могут оказывать на изменение окружающего мира. ... Мы предполагаем, что феномен «всемогущества мыслей» отражал чувство гордости человечества за развитие речи, которое привело к такому удивительному продвижению интеллектуальной деятельности. Было открыто новое

невротика, занимая место религии или некой общей атеистической теории (а так происходит всегда, когда к психоаналитику начинают ходить словно на исповедь), из программы исследований превращается в навязчивую идею или даже в массовый психоз.

Несомненно, религиозное чувство, накладываясь на комплекс неполноценности и ограниченности человеческой личности, нередко приводит к неврозам, но если бы Фрейд имел смелость быть честным с самим собой и со своими пациентами, он бы заметил, подобно Юнгу, что атеизм, технологии и наука не менее часто приобретают формы одержимостей и психозов (кстати говоря, одержимость Нобелевской премией давно стала классической манией, и каждый год «научный мир» лишь стимулирует раздувание этой мании, в том числе с помощью изначально невротичной «Шнобелевской премии»). Обобщение Фрейда некорректно и лукаво уже потому, что любая мысль или идея способна породить невроз, даже такая, которая по замыслу была направлена на исцеление от невроза (разумеется, сюда входит и религия). Даже сама теория Фрейда для религиозного или атеистического

царство интеллектуальности, в котором решающими стали идеи, воспоминания и умозаключения в противоположность низшей психической деятельности, сущностью которой является непосредственное чувственное восприятие. Это, бесспорно, была одна из самых важных ступеней на пути к очеловечиванию,

... Люди оказались вынуждены признать «интеллектуальные» силы в целом ... действие которых тем не менее приводит к несомненному и действительно исключительно мощному эффекту. Если мы можем полагаться на свидетельство языка, то именно движение воздуха послужило прототипом интеллектуальности [Geistigkeit], так как интеллект [Geist] получил свое название от дыхания ветра – *animus, spiritus* и древнееврейского *ruach* (дыхание [слово женского рода – **А.К.**]) ... По сей день умирающий человек «выдыхает свою душу» [Seele]. Однако теперь мир духа [Geisterreich] открыт для людей.

Моисеев запрет поднял Бога на более высокий уровень интеллектуальности, и таким образом был открыт путь для дальнейших изменений идеи Бога ... Вследствие всех таких продвижений в интеллектуальном развитии, увеличивалось чувство собственного достоинства человека, он становился гордым — ощущал себя стоящим выше по отношению к другим людям, все еще остающимся под властью чувственности. Моисей, как мы знаем, передал евреям возвышенное чувство избранности. Дематериализация бога внесла новый ценный вклад и в тайную сокровищницу. Евреи сохранили свою склонность к интеллектуальным интересам» [12, глава «Рост интеллектуальности»].

В следующей главе он описывает последствия частичного отказа от инстинктов:
«Религия, которая началась с запрета создавать образ Бога, с течением столетий все больше и больше развивается в религию отказа от инстинктов ... Бог

становится полностью оторванным от сексуальности и возвышенным до идеала этического совершенства. Но этика – это ограничение инстинкта...

... именно авторитет родителей — в особенности его самодержавного отца, угрожающий возможностью наказания – заставляет ребенка отказаться от инстинкта и решает за него, что разрешается, и что запрещается. Позднее, когда место родителей занимает общество и Сверх-Я, то, что для ребенка считалось «хорошим поведением» или «непослушанием», описывается как «хорошее» и «плохое» или «добродетельное» и «порочное». Но это всегда одно и то же – отказ от инстинкта под давлением авторитета, сменяющего и продолжающего отца.

... то, что кажется нам таким грандиозным в отношении этики, таким непостижимым и странно очевидным, обязано этому своей связи с религией, своему происхождению от воли отца» [12, глава «Отречение от инстинкта»].

Далее, с некоторой очевидностью, Фрейд описывает психологические этапы появления веры в существование Всевышнего. Оторванность Бога от инстинктивных сторон жизни, от сексуальности и связь его с образом Отца способствовали, как и формированию символа Троицы, так и вычищению его от женского начала.

«Предатель» **Карл Густав Юнг** не стал Иисусом Навином, как надеялся Фрейд, новой создаваемой отцом психоанализа религии. Он сделал шаг в сторону и увидел нуминозность в самой глубине человеческой психики. В результате своего отхода от учителя он создал новое направление — аналитическую психологию, с совершенно иным взглядом на религию и природу божественного.

Отец аналитической психологии, создавший теорию архетипов, уделил внимание и Троице, описав результат

своих исследований в труде «Попытка психологического истолкования догмата о Троице» [15]. Но еще раньше, в работе «Феноменология духа в сказках» [14], структурность которых и их героев, по мнению Юнга, отражает структуру психе: *«Будучи непредсказуемым, естественным и свободным произведением психики, сказка не могла хорошо отразить никакой реальности, кроме собственной реальности души»* — он рассматривал триадные образования в психике человека, их соотношения с сознанием и бессознательным: *«... три «осознанные» функции в распоряжении «я» имеют три соответствующих им бессознательных компонента, которые еще не освободились от власти подсознания. И так же как три сознательные части этих функций противоположны четвертой, непроявленной, которая действует как болевой фактор, так высшая функция, похоже, имеет своего худшего «врага» в лице подсознания. ... Две противоположные триады, из которых одна представляет благо, а другая — силы зла, как нельзя лучше соответствуют функциональным структурам сознания и подсознания»* [13].

Высказанные в этой более ранней работе мысли питали Юнга при работе над «Попыткой психологического истолкования догмата о Троице».

В «Предварительных замечаниях» этой работы Юнг предостерегает: *«... я со всей серьезностью задаюсь вопросом, не оказались ли бы христианские символы в гораздо большей опасности, если бы они укрывались в неприкосновенной области непостижимого и были недоступны интеллектуальному пониманию. Слишком уж легко они могут настолько от нас отдалиться, что иррациональность их обратится в шокирующую бессмыслицу»*. Предвидя критику, он там же пишет: *«Было бы в корне неверно воспринимать мой замысел как попытку «психологизировать» догму. Символы, покоящиеся на архетипическом основании, вообще не могут быть сведены к*

чему-либо другому, и это хорошо известно всякому, кто хоть сколько-нибудь разбирается в моих психологических воззрениях», — повторение чего, как мне кажется, будет не лишним здесь.

После «Предварительных замечаний» Юнг рассматривает «Дохристианские параллели к идеи Троицы», перечисляя и анализируя триадные единства Вавилона, Египта и Греции. В частности он пишет: *«... египетская теология решительно утверждает и ставит во главу угла **сущностное единство** (омоусию) бога-отца и бога-сына (представленного фараоном). В качестве третьего к ним присоединяется Ка-мутеф («Бык его матери»), который есть не что иное, как **ка**, порождающая сила бога. В ней и через нее отец и сын связываются не в триаду, но в **триединство** ... Святой Дух как породитель, от которого зачат Сын Божий, соответствует Ка-мутефу, означающему и обеспечивающему единство отца и сына ... Божественное зачатие фараона происходит через Ка-мутефа в человеческом теле царицы-матери. Однако последняя, как и Мария, остается за рамками Троицы»*.

Анализируя греческие истоки, он рассматривает и «Тимей» Платона, который начинается словами: *«Один, два, три — а где же четвертый... любезный Тимей?»*. Юнг пишет: *«Соединение **одной** пары противоположностей [земли и огня] ведет лишь к **двухмерной триаде**: $p^2 + pq + q^2$. Эта величина, будучи простой плоскостью, не реальна, но лишь умопостижима. Для передачи физической реальности необходимы две пары противоположностей, образующих **quaternio**: $p^3 + p^2q + pq^2 + q^3$ Примечательно, что Платон сначала представляет соединение противоположностей интеллектуальной проблемой (в двух измерениях), а затем каким-то образом приходит к осознанию того факта, что так никакой реальности не достичь. В одном случае речь идет о связанной в себе*

самой триаде, в другом — о тетраде. Эта дилемма занимала умы алхимиков на протяжении более чем тысячелетия, получив свое выражение в аксиоме **Марии-пророчицы**, которая сказывается и в снах современных людей, а в психологии отражается в виде оппозиции между тремя относительно дифференцированными функциями сознания и недифференцированной четвертой, так называемой низшей или неполноценной функцией, которая остается неодомашиненной, неприспособленной, неконтролируемой, примитивной и, вследствие своей контаминации коллективным бессознательным, архаически-мистической. Она находится в непримиримой оппозиции к наиболее дифференцированной функции. Например, если наиболее дифференцированной функцией выступает мышление (интеллект), тогда неполноценную четвертую функцию будет представлять чувство».

Последний пассаж коррелирует с приведенными выше размышлениями Фрейда о монотеизме. В этом анализе диалога Платона Юнг очерчивает важную характеристику триадных построений — умозрительность, связанная с плоскостностью, и невозможность через них достичь реальности, требующей объемности. Анализируя далее «Тимея», Юнг подмечает, что окончательное триадное образование по Платону («три сущности») Мировой души содержит 5 элементов, где две пары противоположностей выступают двумя сущностями и еще присутствует «средний» элемент.

Прежде чем перейти непосредственно к анализу Троицы христиан, Юнг подчеркивает строптивость четвертого элемента, не простое его ускользание от сознания, а противопоставленность осознаваемой умозрительной Троице. Но при этом только обретение четвертого возвращает человека в полноту физической реальности. «Тот же определяющий фактор (четвертый элемент) позаботился о том, чтобы Пла-

тон всю жизнь оставался холостяком, как бы подтверждая триадическую мужественность своего образа бога».

Начиная анализ христианской Троицы, он подчеркивает архетипность самого символа, что обеспечивает его возрождение в разные времена и в разных странах. Далее он пишет: «Платоновская формула троичности ... противоречит христианской Троице в одном существенном пункте: платоновская триада построена на оппозиции, тогда как в Троице ничего похожего на оппозицию нет — напротив, в себе самой она всецело гармонична ... С точки зрения формы Троицу можно понять и в платоновском смысле, но в содержательном плане мы вынуждены опираться только на психические данности, т. е. иррациональные, непредопределяемые логически данные. Иными словами, мы должны проводить различие между **логической идеей Троицы и ее психологической реальностью**. Последняя выводит нас к египетским воззрениям, которые на много веков старше идеи Троицы, а затем и к архетипу, обеспечивающему подлинное ... право на существование троической идеи вообще.

Психологическая данность включает Отца, Сына и Святого Духа. Если в качестве посылки избрать «Отца», то отсюда логически вытекает «Сын»; «Святой Дух», однако, логически никак не связан ни с «Отцом», ни с «Сыном». Здесь нам приходится иметь дело с какой-то особой данностью, покоящейся на иной предпосылке. Согласно древнему вероучению, Святой Дух есть «vera persona, quae a filio et patre missa est» [истинная Ипостась, посланная от Сына и Отца].²⁷ Его «processio a patre filioque» [исхождение от Отца и Сына] есть «навание», а не «порождение», как в случае с Сыном. Это довольно-таки диковинное представление согласуется с

²⁷ Здесь Юнг исходит из католического символа веры, не совпадавшим в этом пункте с православным, что было одним из пунктов обвинений во время раскола 1054 года.

сохранившимся еще в средние века разделением «*corpus*» и «*spiramen*», причем под последним понималось нечто большее, нежели просто «дыхание». Собственно, этим словом обозначалась *anima*, т. е. дыхание, дуновение. ... это дыхание ... мыслилось самостоятельно, в виде некоторой субстанции (или ипостаси), существующей наряду с телом. Так выражалась идея одушевленности живого тела: его «жизнь» понималась как нечто привходящее и самостоятельное, как **независимая от тела душа**».

Поскольку дух и тело человека символически связаны с огнем и землей, то «посредник» между ними – **душа, anima** связана с воздухом, и в рамках платоновской умозрительной формы Троицы, наполняется в христианстве содержанием Святого Духа. «Сокровенная идея отцовско-сыновнего отношения более высокого уровня — выдвигание некоей незримой фигуры, «духа», представляющего собой самую суть мужской жизни. Жизнь тела, человеческая жизнь полагается чем-то отличным от самого человека. Отсюда идея **ка** или бессмертной души, способной отделяться от тела и независимо от него существующей. ... Рядоположение человека и его «жизни» есть психологический результат, обусловленный в первую очередь тем, что слабо дифференцированное сознание, которое еще не может мыслить абстрактно, неспособно подводить объекты своего внимания под определенные категории. Оно может лишь схватывать воспринимаемые свойства вещей и располагать их рядом: человека и его жизнь... Очевидно, подобное происходит и в случае с египетским **ка**. Отец-сын-жизнь (животворящая сила) при полном исключении богородицы образуют патриархальную формулу, «витающую в воздухе» задолго до наступления христианской эры» [14].

Юнг достаточно часто в своей работе подчеркивает, что формирование символа веры и догмата о Троице –

это развертывание архетипа: «Поскольку реально люди **не знали**, что открылось им столь внезапно в «Сыне Человеческом», но лишь **верили** имевшимся в наличии толкованиям, то можно сказать, что многовековое последствие открывшегося было, собственно, не чем иным, как постепенным развертыванием архетипа в сознании, иначе говоря его рецепцией в систему оставшихся от античности понятийных возможностей ... Для развертывания и формулировки «открывшихся» содержаний были необходимы время и дистанция. Результаты этой интеллектуальной деятельности отложились в серии тезисов, так называемых **догматов**, совокупность которых была подытожена в так называемом символе, т. е. исповедании веры. С точки зрения психологии, подобный *Breviarium Fidei* по праву носит имя «символа», так как это некое символическое выражение, некий антропоморфный образ, описывающий трансцендентный факт, который невозможно ни обосновать, ни истолковать рационально» [14].

Поскольку Христос своею жизнью реализует идею самости, то Юнг, как автор идеи о четырехчастной структуре последней, с неизбежностью триаду рассматривает, как усеченный вариант четверицы, о которой учил еще Пифагор. «...в пифагорейской школе господствовало представление, что душа — это не треугольник, но квадрат. ... Идеальная полнота — круг, однако его естественное минимальное членение — четверица» [14]. Но четвертая часть психе, будучи несовершенной, пребывающей за пределами власти сознания, оценивается отрицательно, становится носительницей зла, частично отторгается (уходит в бессознательную часть), превращаясь в подобие тени.

По Юнгу получается, что дохристианская Троица соответствовала только трем частям человеческой психики, которая в полноте характеризуется четверицей, организованной по принципу 3 + 1. При этом выделение

этой триады в полностью самостоятельную «сущность» было связано с отторжением 4 части, связанной с инстинктивной, бессознательной стороной жизни. Четверица Бога в иудейских интеллектуальных построениях была представлена его тетраграмматом יהוה ²⁸ с числовым значением – 26 (10+5+5+6). Исторический и философский анализ связей этого символа и религиозных построений вокруг него с другими религиозными доктринами дан в полноценной статье Клещева Д. [15]. Аналогично, еще до появления догмата о Троице, были подобные размышления вокруг тетраграммы Христа: IC XC, которая иногда изображалась в виде креста с буквами на концах. Если обыкновенное сокращенное обозначение имени Спасителя – IX привело к соотнесению ему числа 9, то его тетраграмма в «латинском» варианте давала число: 99 90. В зависимости от языка прочтения буквы приобретали разные цифровые варианты, изображенные на рисунке 1, где десятки и сотни сокращены до значимых цифр ($10 \equiv 1$, $200 \equiv 2$, $600 \equiv 6$).

Три девятки в латинском варианте соответствуют трем полностью дифференцированным (развитым) функциям психики, а 0 — неразвитая функция, погруженная в воды бессознательного. В греческом варианте тетраграммы Христа ей соответствует цифра 6. В латинском варианте Триада Христа, как часть его тетраграммы, (9-9-9) является внутренне не дифференцированной, а в греческой — дифференцированной, что более близко к учению Юнга.²⁹

28 YHWH , Яхве, которое, отметим, достаточно часто читалось греками как: П I П I.

29 Проблемы и вопросы, возникающие в связи с тетраграммой Христа, рассмотрены в [10], в главе «Тетраграмма Христа как символ человеческого предела».

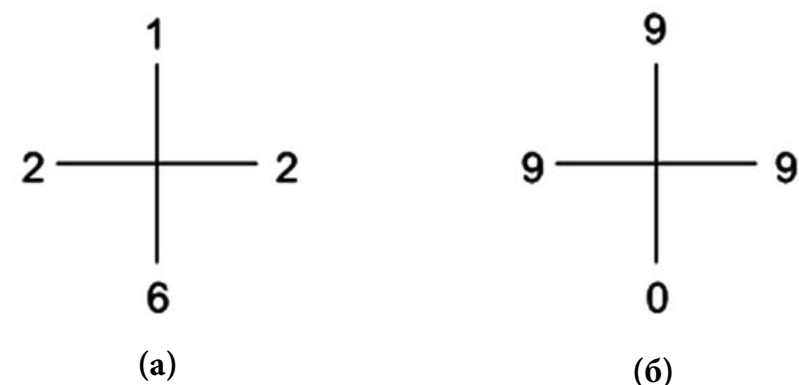


Рис. 2. Числовые кресты тетраграммы Христа; греческий (а), латинский (б).

Если Отец и Сын имели по своей тетраграмме, толкавших на истолкование, то естественно предположить, что, хотя бы в рамках гностицизма, Святому Духу (Святой Душе гностиков) тоже могла быть соотнесена своя четверица. Поскольку гностики строили эклектическое учение, вбиравшее в себя и платонизм, то они могли в этом вопросе опираться и на диалог «Тимей». Тогда в полноте Троице гностиков могла соответствовать 12-частная структура. Хотя этому утверждению еще требуются поддерживающие доводы из источников, но в случае его верности, это построение могло выводить его авторов на трехмерную структуру додекаэдра или икосаэдра, символически связываемую с полным сокрытым строением Троицы.

В заключение Юнг подчеркивает, что обретение самости предполагает освоение всех четырех дифференцированных функций психики, и «... нам делается понятен дуализм гностических систем, создатели которых стремились отдать должное действительному значению зла. Их первостепенной заслугой является и то, что они основательно занялись вопросом «откуда зло?». Библейская традиция на многое тут не проливает никакого света, так что более чем понятно, почему

Юнг прав: в трех авраамических религиях единобожия (иудаизм, христианство, ислам) вопрос об истоках зла приводил неизбежно к логическим затруднениям, поскольку этот ключевой вопрос не был решен в самом начале создания западной традиции монотеизма во времена фараона Эхнатона. В индуизме, который проходил стадии «взросления» гораздо дольше и без разрыва с древнейшими пластами культуры, этот вопрос был поставлен и решен иначе, не перекладыванием вины на дьявола или Бога, а осознанием того, что источником зла является человеческое невежество. Поэтому в индуизме споры идут о другом — в результате чего возникает невежество и как его преодолеть. В отличие от авраамических традиций монотеизма, каждая из которых претендует на свое исключительное открытие «истинного Бога» (в то же время признавая, как ни странно, Его непостижимость тварным умом), в восточной традиции более терпимо относятся к разным уровням постижения Бога. Там еще в эпоху Рамааны осознали, что истинное единобожие и сострадание к живым существам нельзя привить с помощью искусственных методов и ритуалов. Человек либо следует истине, совершенствуя сознание, дух и разум, либо деградирует, порождая в мире еще большее зло.

старые теологи не особенно спешили просветить нас в вопросе о господстве зла. В монотеистической религии все, идущее против Бога, может быть возведено только к самому же Богу. Это по меньшей мере предвзято, а потому должно быть каким-то образом обойдено. Вот где сокрыта глубинная причина того, что дьявол, эта в высшей степени влиятельная инстанция, не имеет в троическом космосе подобающего пристанища. Непросто разобраться, в каком отношении к Троице он находится. В качестве противника Христа он должен был бы занимать эквивалентную позицию против своего соперника и равным образом быть «Сыном Божьим». А это прямоком привело бы нас к известным гностическим представлениям, согласно которым дьявол, в качестве Сатанаэля был первым сыном Бога, Христос же — вторым. Другим логическим следствием оказалась бы отмена формулы Троицы и ее замена **Четверицей**». [14]

Советский и российский психолог Владимир Леви, прекрасный публицист, в одной из своих книг размышляет о синтезе четырех сердец, дающем равное развитие всем сторонам человеческой психики. И представляет этот синтез символически в виде перехода, изображенного на Рис. 3. Возникающий символический рисунок он назвал «квадрикором».

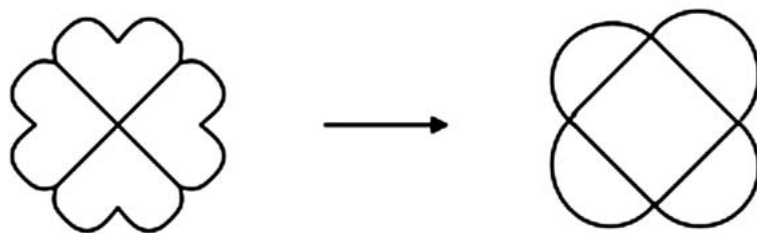


Рис. 3. Символическое изображение процесса синтеза четырех «сердец» по В. Леви

Несмотря на прекрасный символ, реализовать синтез при жизни, видимо, невозможно. По крайней мере, до тех пор, пока не будет «искуплено» все прошлое. Но последнее все равно, что вычерпать море. И существующее устойчивое представление о такой возможности соответствует постоянному принижению инстинктивных сторон жизни среди утверждаемых в обществе ценностей. Зная, что характер — это судьба, но, забывая инстинктивную природу характера, мы делаемся слепыми в понимании причин краха, как человеческих судеб, так и общества в решительные поворотные моменты.

Троица – современная наука – симметрия пятого порядка

В рамках формальной логики, приведенные выше исторические истоки и психологические причины, приведшие к проекции в догмат о Троице соответствующих содержаний, не доказывают ложность самого представления о Троице. Они, скорее, говорят о необходимости отойти от догматического взгляда на положение Божественного в Мире и понимать опасность, которая предостерегает человека при формулировании религиозных утверждений. Но поскольку «царствие Божье внутри нас», то сам процесс проецирования может выполнить и добрую службу, невольно перенеся во взгляд о божественном реальные его стороны. Здесь как нельзя лучше подходит изречение древнеегипетского мудреца Гермеса Трисмегиста: «То, что находится внизу, соответствует тому, что пребывает сверху...». Но, следуя заветам Фрейда и Юнга, не следует и забывать, что процесс вытеснения будет толкать или к обрезанным версиям, или ко взглядам, где близкое слишком разнесено.

При математически поддержанном подходе удобно отталкиваться от озвученного выше физически содержательного варианта трактовки Троицы, как проекции триединства Дух-душа-тело или близкого к нему. При этом, конечно, части этого триединства не могут быть равны между собой. Современная наука не оставляет места для духа в нашем трехмерном мире, выталкивая эту неуловимую сущность из него... что может оказаться открытием дверей в новые пространственные измерения. Действительно, если мы признаем существование жизни после смерти, то научное рассмотрение такой возможности с неизбежностью толкает нас ввести для нее новые измерения.

Представление о существовании «Царствия Небесного» часто подразумевало его расположение непосредственно на небесах, но это в вульгарном (народном) варианте, а в сакральном — «*царствие мое не от мира сего*» — могло предполагать существование «другого мира» буквально в другом мире, в другом пространстве. Как, кстати, и высказывание Христа «*у Отца моего много земель*» не следует сразу трактовать в смысле: много пока не занятых земель здесь или, более современно, — много планет. Чтобы жизнь души после смерти не стала вовлечением в коллективное сновидение, «другой мир» должен существовать материально, независимо от наших фантазий о нем. Но эта материальность не обязательно предполагает построение из частиц этого мира, а даже, может быть, не обязательно существование гравитации.

По сути, мы ничего пока не знаем об этом. И хотя «*духовидческие*» книги, вроде «**Розы Мира**» **Даниила Андреева**, и предлагают некоторый вариант конкретных знаний о тех мирах, но современная наука не спешит ориентироваться на них в соответствующих исследованиях.

Философские попытки ответить на многие религиозные вопросы путем введения новых измерений начались не позднее XVII века. Британский философ **Генри Мор** (1614 – 1687) в труде «Руководство по метафизике» (1671) утверждал, что призраки и духи действительно существуют и населяют четвертое измерение, недоступное нашему восприятию. Богословы XIX в., не находя рай и ад в небесах и под землей, задумывались, нельзя ли обнаружить их в высших измерениях. Некоторые писали, что Вселенная состоит из трех параллельных пространств: земли, небес и ада. А Бог, согласно **теологу Артуру Уиллинку**, пребывает значительно удаленным от этих трех миров: он живет в бесконечномерном пространстве.

Уже одно только введение развернутого четвертого пространственного измерения (пятого — с учетом временной координаты) чисто математически позволяет предположить, при отсутствии условий-ограничений, возможность существования бесконечного числа трехмерных пространств. Если же дополнительные многомерные пространства свернуты до размеров планковской длины, то связать с ними трехмерный мир, вроде нашего, можно только введением еще дополнительных измерений. Так на двухмерной сфере (образ свернутого пространства) нет бесконечных прямых.

Многие системы верований содержат не только представление о существовании «другого мира», но и «*гипотезы*» о соотношении миров. Назвав одно из других пространств «духовным», мы можем веру в первородство «духовного» над материальным и идею индуизма о проникновении в этот мир в результате «*великого пахтанья*» Бога рассматривать под углом новой парадигмы о происхождении жизни в нашем мире в результате проникновения в него из другого, «духовного» мира. Современные кос-

могониические теории о циклах в жизни Вселенной, когда Большой Взрыв, начавший ее историю, ждет ее и в «конце времен», толкают ввести ради сохранения смысла жизни в такой Вселенной, существование «другого мира», не подчиняющегося неизбежному всеобщему гравитационному коллапсу.³⁰ Гипотеза о независимости структур того мира от гравитации возникает, как следствие желательного сохранения плодов его развития во время гравитационного сжатия Вселенной. Но если такой мир сохраняется, и в нем содержится квинтэссенция опыта, в том числе и человеческая, то, может быть, он существовал и до последнего Большого Взрыва? И сохранился после него? И именно его неисчезающее существование и сохраняет источник для появления и развития жизни в этом мире? И тогда слова Христа о том, что он был раньше Моисея можно углубить вопросом: насколько раньше?

Гипотеза о рождении Христа до Большого Взрыва неожиданным образом оправдала бы часть догмата о Троице, где говорится: «Бог Сын предвечно рождается от Бога Отца», поскольку наше время (наша вечность), в физическом смысле, началось только с Большим Взрывом. Сущности, сохранившиеся после Большого Взрыва, со своей памятью многих миллиардов лет, нам, с нашей исторической памятью в несколько тысячелетий, казались бы воистину богами.³¹

Здесь уместно будет вспомнить известную фразу Христа из Евангелия: «Царствие Божие внутри вас есть»

³⁰ Современные космогонические теории и предполагают существования другого многомерного мира до Большого Взрыва, но который начал сворачиваться после Взрыва. Остается открытым вопрос — все ли измерения того Мира обязательно свернулись.

³¹ Это замечание не следует воспринимать слишком критически. Оно имеет смысл только для расширения горизонтов нашего восприятия.

(Лк. 17:21). Т.е., если существует другое пространство, в которое мы попадаем после смерти, то, может быть, в нас есть тело (со своей анатомией), соответствующее тому миру? Допустив это, как гипотезу, легко определить первых «претендентов» на причастность к тому миру — это система чакр в индуистской медицине и философии. Не являются ли первые пять чакр чем-то вроде позвоночника тонкоматериального тела? О существовании в нас тонкоматериальных тел пишет и **Даниил Андреев** в «Розе Мира», перечисляя их: монада (шестимерная), пятимерный шельт, создаваемый монадой, астральное и эфирное тела [16].

Интересно отметить, что размерность пространства монады, существующей не в наших измерениях, полностью совпадает с количеством дополнительных измерений, которые допускает современная теория гетеротических суперструн. Если составлять соответствие этих тел лицам Божественной Троице, исходя из фразы «Царствие Божье внутри вас есть», то получим: монада — Отец, шельт — Дух (Ка египтян), а астральное тело — Сын. При этом эфирное тело, в сотворении которого, по Андрееву Д., участвует зараженная семенем эйцехоре эфирное тело Земли [16], окажется отторгаемой сознанием четвертой частью, которую можно соотнести с душой. Андреев пишет, что без этих тонкоматериальных тел ни одно живое существо не может жить в нашем мире, тем самым выдвигая гипотезу о необходимости существования другого многомерного пространства для появления жизни на Земле.

С очевидностью, развив науку, как сумму знаний о законах мира, в котором живем, мы получили ответ науки об истоках жизни, как о самоорганизующемся явлении. Его можно описать, если правильно начать или с квантовой механики, или с неорганической химии, или с теории синергетики (Пригожин, 1947) об усложняющейся и самоорганизующейся материи. Вопрос представляет-

ся трудно разрешимым только из-за сложности системы, существования большого числа взаимосвязанных уровней. Но принципиальной неразрешимости при такой постановке как бы нет. Но если вдруг окажется, что структуры, претендующие на право называться живыми, могут возникать только при предшествующем существовании полей особых свойств, обладающих **симметрией пятого порядка**, свойств описываемых, к примеру, покрытиями Пенроуза, и эти свойства — суть следствия конкретных ограничений, накладываемых на поля в другом трехмерном пространстве?³²

Тогда наша парадигма об истоках жизни претерпит полный переворот. Но когда такой переворот сможет произойти? Сама тенденция описания всего мира, включая сам феномен жизни, оставаясь в рамках столетиями утверждаемого взгляда, конечно, имеет такую инерцию, что бессмысленно пытаться ее остановить или изменить направление ее движения. Разумнее, не конфликтуя с существующей суммой знаний и представлений, начать разрабатывать новые, ища им подтверждение.

Если попробовать начать искать внутри человека элементы, принадлежащие другим измерениям, то систему чакр естественно отнести, скорее всего, к астральному телу. А тогда не является ли частью эфирного тела система энергетических меридианов человека? Небольшой,

³² Речь идет об одном следствии теоремы Щербак-Варченко-Чмутова: «...специальные функции трех переменных, связанные с группой симметрии икосаэдра, являются ограничениями на иррациональное пространство периодических функций 6 переменных. Таким образом, эти функции квазипериодичны, определяют квазикристаллическую структуру в трехмерном пространстве и порождают его квазипериодические покрытия Пенроуза, имеющие икосаэдрическую симметрию» (Из статьи В. И. Арнольда «Замечания о квазикристаллической симметрии» в приложении к книге [17, с. 299]) Подробнее см. в [5].

проведенный в [5], анализ системы энергетических меридианов человека говорит о присущей ей симметрии пятого порядка, о возможной связи с чакрой, обладающей той же симметрией, и наталкивает на мысль о явной ее аналогии с некой гипотетической структурой Земли.³³ И, кто знает, не стоит ли за этой схожестью нечто большее?..

Конечно, возникает закономерный вопрос: Если в нас есть «тонкоматериальное тело», принадлежащее другому миру, то должны быть у этого тела и органы чувств, но почему тогда мы не обнаруживаем их? Возможно, частично — из-за почти полной обращенности во внешний мир, погруженности в проблемы дня, где эти органы не востребованы, частично — из-за неразвитости их. Ориентация на внешний мир эволюционно желательна и поддерживается активностью α -ритма. Только в ночные часы, особенно во время сна, активность α -ритма падает и могут проявиться «другой» слух и зрение. Но иногда на Земле рождаются люди с хорошо развитыми «духовным» слухом или зрением. В Европе и на Востоке они становятся великими поэтами и пророками, а в царской России были юродивыми или, при сильном интеллекте, — еретиками, в советской — психически больными.

В России времен веры в Советы религиозная ориентация на ценности жизни после смерти мешала бы социализации и строительству новой государственности, и с ней, естественно, велась борьба. Но с другой стороны, постоянное осознание отдельности существования души и тела мешает достижению внутреннего синтеза, создает трудно устранимый зазор внутри человека. Поэтому «забвение» своей внутренней дифференцированности, характерное детскому мироощущению, по-

³³ См. [5, глава «Animus Terrae»], где говорится о симметрии пятого порядка в структуре Земли.

могает обретению целостности. Есть разница между фразами «какая красивая девушка» и «какое красивое тело у девушки». Второй вариант содержит интонацию отчуждения от человека его тела. Это чувство отчуждения, ставшее обычным и повсеместным, создает трудно преодолимую пропасть между человеком, таким образом самоидентифицирующимся, и окружающим миром.

Между тем, превращение в советской науке души в «эпифеномен нейрофизиологических реакций в коре головного мозга» лишило человеческую жизнь чувства перспективы. Если цели жизни ограничиваются делами улучшения ее на Земле и оставлением потомства, то частная история если и сохраняется, то только в «духовном наследии», в памяти людей. Такая позиция выгодна государству, его склонности ставить свои цели выше человеческих. Но христианство и начиналось с переориентации человека с имперских и государственных целей на внутренние, чисто человеческие. Поэтому представляется, что возвращение в христианскую религию идеи реинкарнации будет способствовать утверждению чисто христианских ценностей.

Существует представление, что многие тайны жизни или даже сама тайна жизни, как-то связаны с симметрией пятого порядка, с ее агентом в мире чисел — «**Божественной пропорцией**». Но поиски этой связи часто ведутся на элементарном уровне, в надежде, что число Фидия выскочит при поиске минимума или максимума какой-нибудь функции. Скорее всего, реальный выход на золотое сечение, при рассмотрении вопросов, связанных с основаниями жизни, получится только при анализе **многомерных построений**. Пока это проявляется только в чистой математике (см., например, дополнения к книге Клейна [17], где в том числе рассматриваются и многомерные монады, как математические

объекты), и остается, возможно, самая трудная часть — **связать ее результаты с реальностью**.

Список литературы

1. Раушенбах Б.В. О логике триединности, «Вопросы философии» 1990, № 11, с. 166 – 169.
2. Топоров В.Н. Числа // Мифы народов мира. Энциклопедия. 2-е изд. М., 1988. Т. 2. . С. 629 – 631. <http://philologos.narod.ru/myth/numbers.htm>
3. Толстая С.М. Число // Славянские древности. Этнолингвистический словарь / Под общ. ред. Н.И. Толстого. М., 2012. Т. 5. С. 544.
4. Greimas A. Of Gods and Men: Studies in Lithuanian Mythology. Bloomington; Indianapolis, 1992.
5. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка, 2017, ISBN 978-5-4485-3753-0 http://kovalevandrey.ihostfull.com/Books/Book_1.html
6. К. Кастанеда, «Сказки о Силе». Киев, София, 1993.
7. Жуков А.В. Вездесущее число π , М.: Едиториал УРСС, 2004.
8. Collin Campbell, The miraculous birth of king Amon-hotep III, and other Egyptian studies, Edinburgh, Oliver and Boyd, 1912.
9. Щетников А. И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе. Матем. обр., 2006, № 3(38), страницы 59–71.
10. Ковалев А.Н. Гностические этюды, 2017, ISBN 978-5-4485-3536-9 http://kovalevandrey.ihostfull.com/Books/Book_3.html
11. Ковалев А.Н. Потерянное наследство и хронология, 2017, ISBN 978-5-4485-4194-0. http://kovalevandrey.ihostfull.com/Books/Book_2.html
12. Фрейд З. «Моисей и монотеизм» // Психианализ. Религия. Культура. М.: Ренессанс, 1992. с. 136 – 256.
13. Юнг К.Г. К феноменологии духа в сказках // Дух Меркурий, М.: Канон, 1996, с. 199 – 252
14. Юнг К.Г. Попытка психологического истолкования догмата о Троице // Ответ Иову, М.: Канон+, 1998. С. 99 – 186.
15. Д. Клещев, Тетраграмматон. Имя Божие или тайна за семью печатями // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17533, 19.06.2012.
16. Андреев Даниил. Роза мира. М.: Иной мир, 1992.
17. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989.

ум и духовное наследие человечества. Чтобы сохранить человечество в этом все более и более бесчеловечном мире, необходимо осмысление духовности. А.Н.Ковалёв ставит задачу поиска механизма работы с тонкоматериальным миром, а именно формул, позволяющих понять, скажем так, «ментально-квантовую запутанность» сознания с другими процессами, переложить духовный опыт на язык математики, и такая задача осуществима. Другое дело, что формула — на то и формула, что ее сможет употребить в своих интересах кто угодно, и совсем не обязательно это будет мудрый и высоко нравственный человек. Воспользовавшись тонкоматериальным миром для извлечения или перемещения энергии, для каких-то других утилитарных целей, можно легко переступить грань дозволенного, и это будут даже не последствия вроде «глобального потепления», а последствия, связанные с кардинальным изменением самого понятия жизни, с неконтролируемыми психоэнергетическими процессами в биосфере, вроде эпидемии безумия (и такие признаки уже появились в нашу эпоху «цифривизации сознания»). Возможно, именно глубокий страх перед новыми законами тонкого мира не позволяет «научному сообществу» признать реальность феномена сознания как особого вида квантово-гравитационных волн, между тем, так оно и есть на самом деле.

Все попытки реформирования христианства потерпели неудачу и вели лишь к еще большему расколу и хаосу. Возможно, главная ошибка реформаторов в том, что они пытались преобразовать религию, полагая, что она заставит преобразиться все общество. Но в действительности такой подход обречен на неудачу. Начинать нужно не с преобразований религии, а с преобразований в самой душе человека. Религии, как и люди, не могут да и не должны быть одинаковыми. Как справедливо отмечает Андрей Николаевич, современная культура деградирует именно потому, что «атеистическая» наука обесценила человеческую жизнь, человеческий раз-

В.Д. Цветков

«Золотая» гармония «противоположностей», энергооптимальность и сердце

Публикация выложена на сайте
«Академии Тринитаризма» www.trinitas.ru

*В природе существует присущая ей
скрытая гармония, отражающаяся в
наших умах в виде простых
математических законов.*

Герман Вейль

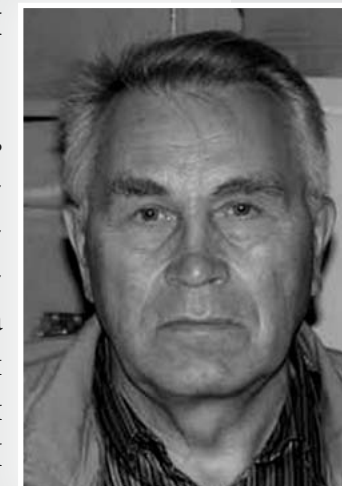
*Закон золотого деления должен быть
диалектической необходимостью.*

Алексей Лосев

Постановка проблемы

В современной биологии постоянно возникают новые науки как результат выдающихся открытий в мире живой природы. В «старых» науках происходят процессы дифференциации, появляются новые направления по мере расширения и углубления традиционного «поля поиска». Биология испытывает острую потребность в интегрирующей и синтезирующей научной дисциплине, которая объединяла бы все науки о живом. Таким интегрирующим направлением в возрастающей степени становит-

IN BREVI



Кандидат биологических наук, член-корреспондент Международной академии информатизации, член совета Международного клуба Золотого сечения, член совета электронного журнала «Математическая морфология», Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН В.Д.Цветков окончил радиофакультет Московского авиационного института.

По специальности – биофизик, область его научных интересов охватывает кардиологическую биофизику (сердечные циклы человека и млекопитающих в условиях покоя и нагрузки, гемодинамика, кислородное обеспечение), отрицательные аэроионы.

В.Д.Цветков – основоположник релятивистского направления в биофизической кардиологии (гармония, симметрия и оптимальность сердечных систем, фракталы, золотое сечение и ряды Фибоначчи).

Автор более 60 публикаций, в том числе 3 монографий. В 1990 году защитил диссертацию кандидата биологических наук «Системная организация деятельности и кислородного обеспечения сердца млекопитающих в условиях нагрузки» в Институте биофизики АН СССР. Защитным советом было направлено ходатайство в ВАК о повторной защите представленного материала в качестве докторской диссертации.

ся учение о Гармонии. Гармония – важнейшее начало, объединяющее живую природу. Она представляет целостность, равновесие «противоположностей», оптимальность живых систем, их устойчивость и стабильность.

В настоящее время многие биологи уже не сомневаются в том, что Природа в процессе эволюции стремится к предельной гармонизации биосистем. Установленное совершенство биосистем разного назначения и различной сложности явилось одним из главных факторов, обусловивших поиск математических законов, в соответствии с которыми происходит гармонизация живых объектов [4, 6, 17, 30, 34, 47, 59, 81 и др.]. Вскрытие математической основы гармонии, общей для всех живых систем, приобретает важнейшее значение, является одной из главных проблем теоретической биологии.

В статье представлены энергооптимальный критерий и особенности «золотой» гармонии живого объекта — сердца человека и млекопитающих. В качестве методологического инструментария для выявления гармонии сердечных систем автором использованы: системный подход, диалектическое единство «противоположностей» и принцип наименьшего действия.

Гармония «противоположностей», Числа и золотое сечение

Выдающийся российский биолог-теоретик **А.А. Любичев** (1890-1972), размышляя о преемственности идей в современной науке, высказал убеждение в том, что *«следуя великому диалектическому закону развития науки, в этом процессе неоднократно придется возвращаться к великим мыслителям Эллады»* [28, с.

212]. Гармония со времен древнегреческих философов и до наших дней была и остается великой *«сквозной»* идеей, привлекающей внимание многих поколений ученых. К этому следует добавить, что интерес к идее гармонии временами возрастал или, напротив, снижался, но никогда не исчезал.

Возвращение к древним истокам в наши дни обусловлено поисками новых подходов к решению крупных научных проблем. Анализ гармонии и сам термин (греч. **ἀρμονία** — **слаженность, соразмерность частей**) впервые были представлены в трудах философов Древней Греции. Главная истина, заключенная в учении великого греческого философа **Пифагора** (570-500 до н.э.) и его учеников, состоит в том, что **гармония объективна**, она существует помимо нашего сознания в гармоническом устройстве всего сущего, начиная с космоса и кончая микромиром. С самого начала гармония отождествлялась с **«противоположностями»** в объекте.

Мир устроен так, что любое явление обязательно имеет свою противоположность, каждая из которых неустранима и проявляется совместно с альтернативой. Первое структурное определение гармонии было представлено древнегреческим мыслителем **Гераклитом** (540-480 до н. э.): *«В мире существует единство, но это единство (гармония) образуется сочетанием противоположностей»* [по 38, с. 76].

Пифагорейцы рассматривали природу вещей как конфигурацию «противоположных» качеств. Таких противоположностей насчитывалось десять: предел – беспредельное, нечетное – четное, одно – многое, правое – левое, мужское – женское, покой – движение, прямое – кривое, свет – тьма, добро – зло, квадрат – выгнутый прямоугольник. В наши дни идея структурной гармонии «противоположностей» получила дальнейшее развитие. Гармония «противоположностей» является необходи-

мым условием стабильности и устойчивости систем. По мнению белорусского философа **Э.М. Сороко**, «*Великая карта оптимальных состояний природы, согласно которой та создает свои порядки, написана языком противоположностей, контрастностей, противодействий*» [47, с. 101]. «Противоположности» пронизывают все физические объекты в микро-, макро-, гипермирах Природы.

Гармония «противоположностей», как полагали пифагорейцы, должна быть представлена числовым отношением: «*Гармония является божественной и заключается в числовых отношениях...*» [по 11, с. 129]. Древнегреческому философу и геометру **Пифагору и его ученикам** приписываются выражения: «*Все вещи — суть числа*», «*Бог положил числа в основу мирового порядка*», «*Мир создан в подражание числам*». Гармония «противоположностей», как полагали пифагорейцы, должна быть представлена числовым отношением.

Древнегреческий философ **Аристотель** отмечал, что важны не сами числа, а их соотношения, ибо «*соотношение есть сущность*», а «*всякий порядок есть отношение*» [по 47, с. 76]. Особое значение пифагорейцы приписывали числам в деле познания. С помощью чисел пифагорейцы не просто решали практические задачи, а пытались объяснить природу всего сущего. Они стремились постигнуть сущность чисел и числовых отношений, ибо через нее надеялись понять сущность мироздания.

Платон (428-348 до н. э.) по этому поводу писал: «*Мы никогда не стали бы разумными, если бы исключили число из человеческой природы*» [по 17, с. 6]. Так возникает первая в истории «*попытка осмыслить число как мироздающий и смыслообразующий элемент*» [66].

Мысль о привлечении математики для выявления гармоничных соотношений в объекте возникла с самого начала формирования учения о Гармонии. Математики школы Пифагора считали, что числа правят миром. В

платоновской Академии были заложены основы многих отраслей математики, которые получили дальнейшее развитие в александрийской школе (**Евклид, Архимед, Эратостен, Диофант** и др.). Характерные черты пифагоризма: мистика чисел, математизация науки, первичность Космоса.

Космос у греков вовсе не синоним Вселенной, это слово отождествляется с красотой, украшениями. «*Философские постулаты пифагоризма заключаются в гармоничности, космичности, а не хаотичности Вселенной, в признании сравнительно простых, доступных математической трактовке законов. Платон считал абсолютные математические идеи существующими на небе. Несмотря на сказочную форму, математические идеи Платона несут в себе глубочайшее философское содержание, их разделяют многие современные ученые*». Это направление математики, по мнению **А.П. Стахова** [52], может стать важнейшим источником идей и концепций в развитии современной науки.

Поскольку гармония объективна, она может предстать в качестве объекта математического исследования. По современному представлению, математическая гармония «*фиксирует внимание на количественной стороне дела и безразлична к качественному своеобразию частей, вступающих в гармоническое соответствие*» [67, с. 15]. Например, закон золотого сечения «присутствует» и в музыке, и в архитектуре, и живописи, и в литературе, а также и во множестве объектов живой и неживой природы. Гармония означает такую организацию объекта, при которой все его части удовлетворяют некоторым общим требованиям, взаимно дополняя и уравновешивая друг друга. В Большой Советской Энциклопедии представлено определение, которое выражает современное понимание гармонии: «*Гармония — соразмерность частей и целого,*

Но в действительности любые конечные дискретные числа представимы в виде непрерывных бесконечных последовательностей. Возможность отображения конечного объекта поэтому вытекает из возможности его соотношения не только с другими конечными объектами, но с самой бесконечностью. Человеческие «конечные числа» и соответственно человеческое сознание могут существовать лишь при условии, что в пространстве их существования возможна бесконечная целеобразующая непрерывность, действующая по тому же фундаментальному принципу, по которому действует и человеческое сознание. То есть для существования человеческого сознания в природе бесконечных процессов должен существовать эквивалент, который всегда ассоциировался в человеческой психике с божеством. Поэтому наука, отрицающая существование непрерывного эквивалента нашему конечному разуму, не дала и не в состоянии дать удовлетворительного определения непрерывности. Нельзя говорить о непрерывном пространстве, непрерывных функциях, с которыми работает наш разум, и в то же время отрицать скрытое в самом разуме свойство бесконечной непрерывности. А без понятия непрерывности — любая теория, любая наука представляет собой шаткое здание, частную гипотезу, построенную без какого бы то ни было общего основания.

Сознание существует тогда и там, где существует возможность соизмерения частей и составления из них единой соразмерно устроенной непрерывности. Для человека с его ограниченными возможностями непрерывность всегда представляется в образе целого, т.е. дискретного объекта.

слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия» [9, с. 128].

В этом определении четко просматривается определение «гармонии» с математической точки зрения («соразмерность частей и целого», «внутренняя упорядоченность и мера»). За «соразмерностью частей и целого», их «слиянием в единое целое» «скрывается» единство и мера «противоположностей» в объекте.

Таким образом, гармония допускает количественное определение, она может стать предметом математического исследования. Отметим, что термин Математика Гармонии (**the Mathematics of Harmony**) был введен в конце XX века для обозначения математического учения о природе, созданного древними греками [53]. Математика Гармонии — математическая теория, изучающая «гармонию» с количественной точки зрения. Огромный вклад в это направление математики сделан А.П. Стаховым.

В своих публикациях А.П. Стахов не перестает подчеркивать, что развиваемая им «Математика Гармонии» в истоках своих восходит к математике Пифагора, Платона и Евклида. «Математика Гармонии» — это возрождение пифагорейской математики с учетом современных научных достижений в этой области.

В современной науке, как продолжение традиций школы Пифагора, возрождается интерес к «особым» числам, представленных во многих объектах природы. Как пишет Ю.А. Урманцев, «числа выступают на передний план в самых «горячих» точках науки: то при изучении распределения планет в Солнечной системе, то при объяснении сущности кода наследственности, то при выводе фундаментальных инвариантов в теоретической

физике, то при определении периодической природы музыкального ряда и таблицы Менделеева» [59, с. 16-17].

Однако, «*весь вопрос, — как пишет математик Г.Б. Аракелян, — ...в том, почему при описании наиболее фундаментальных закономерностей появляются именно эти, а не другие числа?*» [1, с. 133]. К сожалению, несмотря на растущее количество публикаций, для большинства ученых особые числа и связанные с ними проблемы организации и гармонии исследуемых объектов все еще остаются на заднем плане как нечто второстепенное и мистическое. Математика Гармонии, связанная с особыми числами, имеет тесные связи с современным естествознанием, в частности, с **теоретической физикой, ботаникой, генетикой, биологией, информатикой, синергетикой**. Это направление продолжает расти и развиваться.

Математическое представление гармонии «противоположностей» выражается, как правило, в виде определенных числовых пропорций. Идея Гармонии Мироздания, в основе которой лежит пифагорейское учение о числовой гармонии Мироздания, тесно связана с пропорцией Золотого Сечения. Особые свойства золотой пропорции, по мнению Э.М. Сороко, «*позволяют возвести это...математическое сокровище в разряд инвариантных сущностей гармонии*» [47, с. 83]. Из многих пропорций, которыми издавна пользовался человек при создании гармонических произведений, золотая пропорция единственная и неповторимая, обладающая уникальными математическими свойствами. Важнейшую роль золотого сечения в гармонизации объектов природы отмечали величайшие философы Древней Греции Пифагор и Платон. «С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии, — писал А.Ф. Лосев [27], — мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиненное закону

гармонического деления — Золотого Сечения». Великий ученый Средневековья **И. Кеплер** (1571-1630) писал о золотом сечении: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень».

Кеплер поставил золотое сечение в один ряд с одной из самых знаменитых геометрических теорем. **А. Бакунинский** [3] убедительно показал, что «золотое сечение» является частным случаем «теоремы Пифагора».

Закон «золотого сечения» широко использовался древними греками в архитектурных памятниках (Парфенон), в скульптурах **Фидия** (5 в. до н. э.), **Поликлета** (5 в. до н. э.), **Мирона** (5 в. до н. э.), **Праксителя** (4 в. до н. э.). «Теория измерения гармонии по принципу деления в среднем и крайнем отношении... составила тот фундамент, ту стартовую площадку, на которой впоследствии были воздвигнуты и получили движение концепции гармонии в новоевропейской науке и эстетике» [47, с. 76].

Таким образом, золотая пропорция является своего рода «визитной карточкой» красоты и гармонии. Закон золотого сечения представлен в музыке, в архитектуре, в живописи, в литературе, во многих творениях живой и неживой природы. Это структурно-математическая характеристика, которая определяет форму прекрасного независимо от того содержания, которое несет в себе форма. В частности, отношение золотого сечения придается форматам книг, бумажникам, шкатулкам и множеству других предметов быта. По мнению многих выдающихся современных ученых, принцип золотого сечения — высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей [17].

«В природе существует присущая ей скрытая гармония, отражающаяся в наших умах в виде простых мате-

матических законов», утверждал выдающийся математик XX века Г. Вейль [12]. С золотым сечением и числами Фибоначчи связаны многие выдающиеся открытия современной науки и техники. Сюда следует отнести квазикристаллы израильского ученого **Дана Шехтмана** [19], алгометрическую теорию измерения [48], концепцию компьютеров Фибоначчи [49], закон структурной гармонии систем, сформулированный белорусским философом **Э.М. Сороко** [47], резонансную теорию Солнечной системы [10].

Следует отметить также ряд других важных теоретических и экспериментальных результатов.

Ю.С. Владимиров [15] показал, что в теории электрослабых взаимодействий возникают соотношения, приближенно совпадающие с «золотым сечением».

А.С. Харитоновым [62] предлагается новая парадигма природы, человека и общества, основанная на золотом сечении.

О.Б. Балакшиным [4] получены новые результаты по применению принципов гармонии, симметрии и золотого сечения к проблеме саморазвития динамики подобных систем. Им установлено, что среди немногих по количеству обобщенных вариантов систем особое место занимает золотая пропорция («золотые траектории развития систем»).

А.И. Иванус [23] разработал идеи гармоничного менеджмента «по Фибоначчи и золотому сечению».

Украинский исследователь **С.И. Якушко** [68] описал «фибоначчиеву» закономерность в Периодической системе Д.И. Менделеева.

Важнейшим вкладом в Математику Гармонии является публикация книги **проф. А.П. Стахова** «The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science» [82].

Необходимо отдельно представить наиболее выдающиеся теоретические и экспериментальные исследова-

ния, отнесенные к «присутствию» золотого сечения в биологических системах.

О.Я. Боднар [6] установил закон преобразования спиральных симметрий, раскрывающий механизм роста и формирования в живой природе. Рост филлотаксисных форм сопровождается изменением симметрии пересекающихся спиралей, количество которых выражается парами чисел — $1/2$, $2/3$, $3/5$, $5/8$, $8/13$ и т.д. Последовательная смена порядка спиральной симметрии характеризуется гиперболическим поворотом. «Геометрия Боднара» раскрывает механизм роста *«филлотаксисных»* объектов.

Отметим, что **Г. Вейль** (1885-1955) рассматривал числовой закон филлотаксиса как загадку живой природы. Он утверждал, что *«современные ботаники относятся ко всему учению о филлотаксисе менее серьезно, чем их предшественники»* [12, с. 99].

Российский исследователь **С.В. Петухов** [34/] предложил оригинальный взгляд на генетический код. Основная идея Петухова состоит в том, чтобы представить генетические полиплеты в матричном виде. Открытие Петухова показывает глубокую связь генетического кода с золотым сечением. Исследования Петухова показывают фундаментальную роль, которую играет золотое сечение в генетическом кодировании.

В.Г. Бочков [8] предложил способ нахождения оптимальных состояний любой функциональной физиологической системы по данному измеримому (шкалированному) ее параметру. В частности, он приводит убедительные аргументы тому, что **температурный режим млекопитающих, в том числе и человека, явление не случайное, а обусловлено минимумом теплоемкости воды, достигаемым в диапазоне 30 – 40°C.** Этот минимум своей связью с квадратом ($1/\Phi$) объясняет факт

устойчивости водной основы земной жизни — структур биоорганизмов.

А.В. Жирмунский и **В.И. Кузьмин** [22], анализируя критические уровни в развитии биологических систем (зачатие, рождение, половая зрелость, смерть), установили, что отношение некоторых важнейших параметров на соседних уровнях характеризуется числом $e^e=15,15...$ С точки зрения преобразований качественной симметрии здесь имеет место золотое сечение [30]. Число e^e является инвариантом преобразований важнейших параметров в процессе развития организма.

Таким образом, можно утверждать, что «золотая» симметрия систем имеет широкое распространение в животном и растительном мире.

В.И. Коробко [25] обнаружил взаимосвязь некоторых интегральных физико-механических характеристик **твердого деформируемого тела** с золотым сечением. Коробко установлены многочисленные, ранее неизвестные проявления золотой пропорции в деятельности организма человека: его физиологических ритмах, эргономических параметрах «вхождения» в окружающую среду.

И.Н. Степанов [54] обнаружил многочисленные проявления золотого сечения и чисел Фибоначчи в структуре почвенного покрова, вещественного состава почв и их продуктивности.

И.А. Рыбин [42] в статье **«Психофизика: поиск новых подходов»** на основании экспериментальных данных показал, что число $\Phi=1,618$ — инвариант психофизических законов, описывающих сенсорные восприятия человека.

А.Г. Суббота [55] показал универсальность проявления золотого сечения в строении некоторых органов и систем, а также в их функциональных параметрах.

В.Д. Цветков [63] показал, что энергооптимальная деятельность сердца в решающей степени обусловлена золотым сечением и числами Фибоначчи. Сердце работает

с минимальными затратами энергии, крови, мышечной и сосудистой массы. Золотые отношения составляют основу законов композиции структур сердечного цикла; эти соотношения справедливы для различных видов млекопитающих.

А.А. Соколов и Я.А. Соколов [46] в статье «**Математические закономерности электрических колебаний мозга**», показали, что соотношение частот волн (ритмов) электрических колебаний мозга равно золотой пропорции.

А.Г. Волохонский [16] установил соответствие общей структуры генетического кода, ряда биномиального разложения 2 и икосаэдра.

Б.Н. Розин [40] показал, что в результате деления число клеток, возникающих от исходной клетки на каждом шаге деления, подчиняется «фибоначчиевой» закономерности: 1, 2, 3, 5, 8, 13,...

Представленные выше открытия, связанные с золотым сечением, являются достаточно убедительным подтверждением того факта, что биология приближается к раскрытию одного из сложнейших научных понятий живой природы — понятия гармонии. Можно добавить, в человеке — совершеннейшем творении Природы — пропорция золотого сечения к настоящему времени установлена на самых различных уровнях. Золотое сечение выявлено в работе мозга и сердца, строении глаз и ушей, параметрах обоняния и вкуса, субклеточных структурах, пропорциях частей лица, рук, ног и всего тела и многих других составляющих организма.

Удивительное постоянство, с каким проявляются золотое сечение и числа Фибоначчи на всех уровнях организации природы (генетический код, фуллерены, квазикристаллы, филлотаксисные структуры, морфология человека, сердечные циклы, форма Земли, «золотая» спираль Галактики и др.) дает основания высказать ги-

потезу, что «законы Гармонии одни те же на всех уровнях организации природы» [51].

«Золотое» число Ф – основание Математики Гармонии

Математическое представление гармонии, как правило, выражается в виде определенных числовых пропорций. Древние считали, что «две части или две величины не могут быть ...связаны между собой без посредства третьей...». В этом представлении очевидна особая роль среднего пропорционального. Оно содержит в себе, как считает **М.А. Марутаев** [30, с. 162], «качественное обобщение, т.к. оно выражается одним числом, а не множеством».

Отдельные конкретные числа и отношения способны выражать не только количество, но и «качество». Именно поэтому пропорции так существенны в выражении гармонии. Золотое сечение, составляющее основу Математики Гармонии, является самым известным примером «качества», представленного в отношении.

Учение о золотом сечении возникло в результате тщательного исследования природы чисел. Считается, что деление отрезка в среднем и крайнем отношении впервые было осуществлено великим философом и геометром Древней Греции Пифагором. По мнению **Б.Л. ван дер Вардена** [11], Пифагор, возможно, позаимствовал деление отрезка в среднем и крайнем отношении у египтян и вавилонян. Было показано, что отрезок единичной длины AB можно разделить на две части точкой C так, что отношение большей части ($CB=x$) к меньшей ($AC=1-x$) будет равняться отношению всего отрезка ($AB=1$) к его большей части (CB):

$$CB/AC=(AC+CB)/CB,$$

$$\text{т.е. } x/(1-x)=1/x.$$

Положительным корнем уравнения

$$x^2 + x - 1 = 0$$

является $(-1 + \sqrt{5})/2$, так что отношение $1/x$ в рассматриваемой пропорции равно иррациональному числу

$$\Phi = 1/x = 1,618033989...$$

Число 1,618 получило обозначение Φ в честь древнегреческого скульптора Фидия (ок. 490-430 до н. э.), который использовал золотую пропорцию в своих скульптурах. Об этом числе писали Платон (428-348 до н. э.), Поликет (V в. до н. э.), Евклид (325-265 до н. э.), Витрувий (I в. до н. э.) и др. Величину, обратную Φ обычно обозначают числом

$$\varphi = 1/\Phi = 0,618.$$

Следует указать на уникальную аналогию между геометрической прогрессией:

$$f_1 = \Phi^0, f_2 = \Phi^1, f_3 = \Phi^2, f_4 = \Phi^3, \dots, f_n = \Phi^{n-1}, f_{n+1} = \Phi^n, f_{n+2} = \Phi^{n+1}, \dots$$

и арифметическим рядом, построенным по рекуррентной формуле:

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1},$$

где первыми членами ряда являются числа Φ^0 и Φ^1 .

«Геометрический» и «арифметический» ряды «золотых» чисел обладают удивительным свойством: числа этих рядов, начиная с первого и дальше, совпадают. Отметим, что подобное совпадение имеет место только для арифметической и геометрической последовательностей с начальными членами $\Phi^0=1$ и $\Phi^1=1,618$.

Любые три соседних числа обеих последовательностей заключают в себе симметрию подобия:

$$A\Phi^{n+1}:A\Phi^n = A\Phi^n:A\Phi^{n-1}=\Phi$$

(число Φ является инвариантом подобия). Аналогично можно представить нисходящий ряд золотых чисел

$$\Phi^0, \Phi^{-1}, \Phi^{-2}, \Phi^{-3}, \dots, \Phi^{-(n-1)}, \Phi^{-n}, \Phi^{-(n+1)}$$

и рекуррентный ряд

$$f^{n+2} = f_n - f_{n+1},$$

$$\text{где } f_n = \Phi^0, f_{n+1} = \Phi^{-1}, f^{n+2} = \Phi^{-2} \text{ т. д.,}$$

в которых симметрия подобия также соблюдается. Естественно, это свойство сохраняется при умножении как восходящих, так и нисходящих «золотых» рядов на любое число A .

Важнейшим вкладом в сокровищницу соотношений чисел в рекуррентных рядах являются публикации итальянского ученого **Леонардо Пизанского** (1170-1240), более известного как Фибоначчи. В 1202 г. вышло в свет его сочинение «Liber abaci» («Трактат по арифметике»). В книге излагается множество задач. Одна из них ставится следующим образом: «Сколько пар кроликов в один год от одной пары рождается, ...если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рожают кролики со второго месяца своего рождения». Получилась последовательность чисел:

$$1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \text{ и т. д.}$$

Этот ряд чисел в дальнейшем получил название ряда Фибоначчи. Числа ряда Фибоначчи обычно обозначают буквой F . Обозначив число кроликов в n -ый месяц через F_n , а в следующие месяцы — F_{n+1} , F_{n+2} и т.д., последовательность чисел ряда Фибоначчи можно представить рекуррентной формулой:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

И. Кеплер (1571-1630) впервые установил, что $F_{n+1}/F_n \rightarrow \Phi$, а **Р. Симпсон** (1687-1768) строго доказал, что при достаточном удалении от начала ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n = \Phi$.

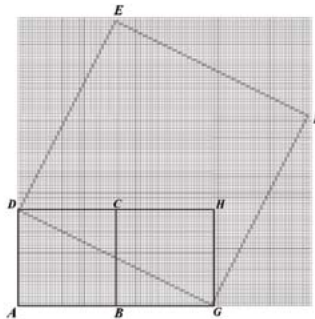
Э. Люка (1842-1891) показал, что особую роль играет еще одна числовая L-последовательность:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots,$$

названная впоследствии рядом Люка. Позднее было установлено, что всякий ряд с рекуррентным свойством $\{f_n + f_{n+1} = f_{n+2}\}$ с любыми начальными членами a и b порождает последовательность

$$a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b \text{ и т.д.,}$$

бесконечной непрерывной десятичной дроби можно выразить разными способами: $5 = 5,000... \infty$ или $5 = 4,999... \infty$. Так вот, оказалось, что другие способы построения $\sqrt{5}$ существуют. Вместо площади точно равной $n^2 \cdot 5$ можно взять другое число и построить разбиение площади $DEFG$ на четыре равных квадрата + один неравный им квадрат. Например:



Здесь вместо несуществующего квадрата $n^2 \cdot 5$ из $40^2 \cdot 5 = 8000$ элементов построен реально существующий квадрат $x^2 = DEFG = n^2 \cdot 5 - (2x-1)$ или $40^2 \cdot 5 - (80-1) = 8000 - 79 = 7921$. Число 7921 является квадратным $89^2 = 7921$. В бесконечном приближении $\sqrt{5} = 2,23606...$ как раз не обязательно целочисленное разбиение площади на 5 равных между собой квадратов, а достаточно такого большого числа, которое позволит для десятичного выражения $100 \cdot 5 - (200-1)$ записать конечный базис периода $\sqrt{5} = 2,23606_{(447)}$, такой что будет выполняться тождество $\sqrt{5}^2 = 5,000... \infty 1$. Т.е. в бесконечном континууме существует возможность эффективного упорядочения «несоизмеримых» последовательностей, и она вытекает из аксиомы выбора Цермело.

Иррациональность числа $\Phi = 1,618033989...$ вытекает из того простого факта, что оно строится при помощи числа $\sqrt{5}$. Для доказательства существования числа $\sqrt{5}$ необходимо построить квадрат, такой чтобы площадь его можно было разбить на пять равных квадратов из n -го числа клеток (элементов). Но произведение любого числа n , умноженного на 5, не дает квадратного числа x^2 (так же, как для $\sqrt{2}$ перемножение любого числа n на 2 не дает квадратного числа x^2). Следовательно, квадратного числа $\sqrt{5}$ не существует, поскольку построить такой квадрат невозможно. В этом смысле математики во всем мире оперируют приближениями к числу, которое официально признают несуществующим. Это зафиксировано в самом названии — «иррациональное» или «несоизмеримое» число. Однако при исследовании феномена непрерывности голландским математиком Лейтзеном Брауэром был поставлен вопрос, который обычными словами можно выразить так: «Хорошо, квадратного числа x^2 для выражения $\sqrt{5}$ не существует. Но, может быть, в бесконечном математическом континууме существуют другие способы его построения, удовлетворяющие заданным параметрам?». Ведь всем известно, что число 5 в

отношение соседних членов которой по мере удаления от начала стремится к величине $\Phi=1,618$.

Ж. Бине (1842-1891) является автором знаменитых формул Бине, которые связывают целые числа Фибоначчи и Люка с иррациональным золотым числом $\Phi=1,618$:

$$F_n = (\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}) / \sqrt{5},$$

$$L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}.$$

Эти формулы задают абсолютно точное представление целых чисел F_n и L_n через золотое число Φ и число $\sqrt{5}$, которые являются иррациональными числами. Формулы Бине являются как бы связующим звеном между целыми и иррациональными числами.

Во второй половине XX века были установлены новые формы представления рациональных чисел через иррациональные с использованием золотого числа Φ и применение их на практике.

Американский математик **Дж. Бергман** [69] предложил необычный способ позиционного представления чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i,$$

где A – действительное число, a_i – двоичная цифра $\{0,1\}$ i -разряда, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, Φ^i – вес – i -разряда, $\Phi=1,618\dots$ – основание счисления. Основная отличительная особенность «системы Бергмана» состоит в том, что ее основанием является золотое число. С помощью иррационального числа Φ можно представить все действительные числа. Любое натуральное число может быть представлено в виде конечного числа степеней Φ . Система Бергмана переворачивает классическое представление о позиционных системах счисления, исторически сложившееся отношение между рациональными и иррациональными числами.

На основании формул Бине украинскими учеными **А.П. Стаховым, И.С. Ткаченко, Б.Н. Розиным и О.Я. Боднаром** были открыты гиперболические функции Фи-

боначчи и Люка. Эти функции имеют прямое отношение к теоретическому естествознанию. Как показано в исследованиях Боднара, гиперболические функции Фибоначчи лежат в основе геометрической теории ботанического явления филотаксиса, который известен в науке еще со времен Кеплера.

А.П. Стахов и И.С. Ткаченко [50] предложили новый вид тригонометрических (гиперболических) функций (sF_x — фибоначчиев синус, cF_x — фибоначчиев косинус и т.д.), связанных с числом Φ :

$$sFs(x) = (\Phi^x - \Phi^{-x}) / \sqrt{5},$$

$$cFs(x) = (\Phi^x + \Phi^{-x}) / \sqrt{5}.$$

Основу нового класса гиперболических функций представляет анализ формул Бине и Люка. В отличие от классических гиперболических функций, основанием которых является число $e=2,718\dots$ (основание натуральных логарифмов), основанием нового класса является число $\Phi=1,618$.

А.П. Стахов [49] развивает направление по приложению обобщенных золотых сечений и p -чисел Фибоначчи к решению задач математической теории измерений и использованию нетрадиционных методов в теории кодирования информации. Геометрическая интерпретация рекуррентного соотношения для p -чисел Фибоначчи может быть получена, если мы разделим отрезок AB точкой C в таком отношении, чтобы

$$AB/CB=x, \text{ а } CB/ACp =xp.$$

Значение искомого отношения AB/CB сводится к решению алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} + x^p - 1 = 0.$$

При $p=1$ уравнение принимает классический вид: $x^2+x-1=0$. Корнем данного уравнения является число

$$1/\Phi = (-1 + \sqrt{5})/2 = 0,618.$$

По аналогии с золотой пропорцией положительный p -корень уравнения называется обобщенной золотой пропорцией или p -пропорцией, а соответствующее де-

ление отрезка — золотым p -сечением. А.П. Стахов разработал на этой основе логические системы контроля, обладающие информационной и структурной избыточностью, достаточной не только для контроля, но и для немедленного автоматического исправления «сбоев» или ошибок без заметной потери машинного времени.

Значительный интерес к золотым p -сечениям был проявлен в философской науке. Э.М. Сороко возвел их в ранг «закона структурной гармонии систем», который он формулирует следующим образом: «Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоническое строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную...устойчивость» [47].

Эти золотые сечения по отношению к нормированию противоположностей к единице образуют своего рода интерференционную решетку («узлы») — $0,500+0,500$; $0,382+0,618$; $0,318+0,682$; $0,276+0,724$ и т.д. Их разделяют «пучности» — $0,430+0,570$; $0,346+0,654$; $0,295+0,705$ и т. д. «Узлы» представляют зоны согласованности, устойчивости, а, следовательно, и гармонии самоорганизующихся систем, а «пучности» — зоны неустойчивости и дисгармонии. В своей книге Сороко представил следующий важный вывод: «Структурная гармония систем природы, т. е. гармония их внутреннего строения, подчиняется четкому математическому закону».

С.В. Петухов [34] предложил оригинальный взгляд на генетический код. Открытие Петухова показывает фундаментальную роль, которую играет золотое сечение в генетическом кодировании.

М.А. Марутаев [30] открыл еще одну связь числа $\Phi=1,618$ с симметрией. Это открытие ему удалось сделать благодаря развитой им оригинальной теории качественной симметрии чисел. На основе введенного Марутаевым понятия качественной симметрии любое число

можно перевести из одной октавы в другую (октавой является интервал чисел $(\sqrt{2})^{i+1} \div (\sqrt{2})^i$, где i -любое целое число). Связь числа Φ с преобразованиями качественной симметрии в пределах 14 октав может быть представлена следующей последовательностью a -чисел:

$$\begin{array}{ccccccc} +7 & +6 & +5 & +4 & +3 & +2 & +1 \\ 9,888 \perp 6,472 \perp 4,944 \perp 3,236 \perp 2,472 \perp 1,618 \perp 1,236 \perp \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 \\ 0,809 \perp 0,618 \perp 0,405 \perp 0,309 \perp 0,202 \perp 0,154 \perp 0,101 \end{array}$$

(Числа $+7 \div -7$ представляют заданную октаву, символ \perp означает зеркальную симметрию соседних чисел относительно $\sqrt{2}^i$). Таким образом, золотое сечение может выражаться не только числом Φ (как принято), но и другими (представленными выше). Причем все a_i - числа могут быть получены посредством формулы:

$$a_i = 1,236^{k_i} 2^{n_i},$$

где $i= +1, +2, \dots, +7$ и т.д., $-1, -2, \dots, -7$ и т.д. $k=+1$ или -1 , чередуясь в каждом последующем диапазоне, так что для диапазона $+1 - k=+1$, а для диапазона $+2 - k=-1$, для диапазона $-2 - k=+1$ и т.д.; n — целое, меняющееся через диапазон на единицу, причем для положительных диапазонов $n=0, 1, 2, 3$ и т.д., а для отрицательных — $n=0, -1, -2, -3$ и т.д.; для начальных диапазонов $+1, -1 - n=0$.

М.А. Марутаевым на основе качественной симметрии была показана связь числа F с фундаментальным числом $\alpha=137$ (постоянная тонкой структуры). Отметим, что число 137 выводится из фундаментальных констант природы — заряда электрона (q), постоянной Планка (h) и скорости света (c). Безразмерное число 137 связано с целостностью мироздания, поскольку является отношением фундаментальных констант.

В конце XX и в начале XXI веков аргентинский математик В. Шпинадель [80], французский математик и инженер М. Газале [70], американский математик Д. Каппраф [74] и российский инженер А. Татаренко [56] независимо

друг от друга пришли к новому классу математических констант, названных металлическими пропорциями:

$$\Phi_\lambda = (\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}) / 2,$$

где $\lambda > 0$ – любое действительное число. В формуле представлено бесконечное количество новых математических констант. «Металлические» пропорции или «золотые λ -пропорции» обладают рядом замечательных свойств. Заметим, что при $\lambda=1$ «металлическая пропорция» сводится к классической золотой пропорции.

Очевидно, что представленные выше математические соотношения, так или иначе связанные с числом $\Phi=1,618$, представляют Математику Гармонии во многих явлениях окружающего нас мира, что они действительно связаны с фундаментальными проблемами современной науки.

«Простота», принцип наименьшего действия и законы физики

Критерий истинной науки состоит в его отношении к математике. Суть того, во что непоколебимо верили Декарт, Кеплер, Галилей, Ньютон и Лейбниц сводится к следующему: **природе внутренне присуща некая скрытая гармония, которая отражается в сознании человека в виде простых математических законов.** Несомненно, ни один закон физики исследователь не может «выдумать» — он лишь находит его в природе. За много веков человеком созданы такие великие построения, как евклидова геометрия, птолемеяева система мира, механика Ньютона, теория электромагнитного поля, теория относительности и квантовая теория.

Математика, как известно, является неотъемлемой всех этих и многих других теорий, их основой и сущностью. *«Математические теории позволили обнаружить порядок и план повсюду в природе, где их только можно было найти»* [24, с. 350].

Об этом же пишет **Н. Винер** (1894-1964): *«Высшее назначение математики как раз и состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает»* [по 17, с. 47].

Важнейшим преимуществом языка математики является его краткость и точность. Математика и есть тот инструмент науки, который сложное и многообразное делает простым и единообразным. По мнению выдающегося физика **Е. Вигнера** (1902-1995), *«утверждение о том, что природа выражает свои законы на языке математики... в наши дни ...верно более чем когда-либо»* [13, с. 192]. Возникает вопрос, что же могло обусловить столь тесную связь реальных физических объектов с формулами и теориями абстрактной математики? По-видимому, те принципы, которые были заложены в качестве исходных при возникновении и развитии математики. Начало возникновения математики скрыто в глубине тысячелетий.

Казалось бы, невозможно установить те исходные принципы, которые составили общую исходную методическую основу математики. Определенные истоки понимания этого содержатся в книге **М. Клайна** [24, с. 48]: *«...у греков, начиная с 6 в. до н. э., сложилось определенное миропонимание, сущность которого сводится к следующему. Природа устроена рационально, а все явления протекают по точному и неизменному плану, который, в конечном счете, является математическим».* Из этой цитаты видно, что древними математиками в качестве исходной была принята телеологическая гипотеза о рациональном, целесообразном устройстве мира.

Тем самым они как бы заложили тысячелетний опыт по проверке результативности телеологического принципа (принципа о целесообразном устройстве мира) в развитии науки. В основе телеологического подхода к объекту лежит предположение, что цель есть «разумный акт», осуществляемый в Природе ее объективными силами. Телеология означает учение о целях. В той мере, в какой цель есть несомненно существующий факт, телеология несомненно имеет научное значение, представляя собой объяснение этого факта.

Утверждая телеологичность математики, лауреат Нобелевской премии **П. Дирак** (1902-1984) писал по этому поводу: «Математик играет в игру, правила которой он изобрел сам, а физик – где их изобретает Природа, но постепенно становится все более очевидным, что правила, которые математика считает интересными, совпадают с теми, что задает природа» [21].

Еще в 14 веке францисканский монах и философ **У. Оккама** (1285-1349) утверждал: «Чем ближе мы находимся к некоторой истине, тем проще оказываются законы, выражающие эту истину» [по 18, с. 140]. Стремление к простоте, ясности и универсальности всегда лежало в основе развития естествознания. Методологи науки выделяют принцип простоты в качестве краеугольного камня самого научного знания. С точки зрения диалектики сложность неотделима от простоты. По мнению российского философа **Н.Ф. Овчинникова**, «сложность природы не может быть понята в самой себе без того, чтобы человеческая мысль не нашла скрытую за ней простоту самой природы. Без поисков исходных элементов наука осталась бы на уровне описания открывающихся нашему взору природных процессов» [33, с. 328].

Мысль о том, что «природа действует простейшим образом», т.е. наиболее экономно, принадлежит **И. Бер-**

нулли (1667-1748). Это утверждение послужило источником многих научных идей и методических приемов. **И. Ньютон** (1642-1727) в своих «Математических началах» писал: «Природа ничего не делает напрасно, а было бы напрасным совершать многим то, что может быть сделано меньшим. Природа проста и не излишествует излишними причинами вещей». **А. Эйнштейн** считал, что «все должно быть сделано настолько просто, насколько возможно, но не проще этого». В конечном счете, сложность систем может быть представлена весьма внешне простыми математическими отношениями.

В современной науке гармония все чаще отождествляется с «красотой» представляемой теории. «Красиво сведение сложного к простоте» [17, с. 36]. Красота и гармония стали важнейшими категориями познания, в определенной степени даже его целью. Академик **А.Б. Мигдал** (1911-1991) писал: «В физике последнего времени на первый план переместилось понятие красоты теории. Красота теории имеет в физике почти определяющее значение» [31].

Среди многих выдающихся ученых нашего времени начинает преобладать представление о том, что красивые и гармоничные формулы и уравнения вызывают большее доверие к их достоверности, чем математические выражения, не обладающие этими достоинствами.

Выдающийся физик лауреат Нобелевской премии **Р. Фейнман** (1918-1988) был убежден, что «истину можно узнать по красоте». Важнейшим преимуществом количественного языка математики является краткость и точность. Тем самым «в языке математики воплощается еще один признак красоты науки – сведение сложности к простоте» [17, с. 45].

Однако, тезис «природа любит простоту» и в наши дни оспаривается и подвергается сомнению. Но еще в начале 20 века великий французский математик **А. Пуанкаре** (1854-1912) писал: ... «даже те, кто не верит более в простоту природы, принуждены поступать таким образом,

как если бы они разделяли эту веру; обойти эту необходимость значило бы сделать невозможным всякое обобщение, а, следовательно, и всякую науку» [по 57, с. 275]. Ведь если не руководствоваться критерием простоты, то невозможно выбрать какое-либо теоретическое обобщение из бесчисленного множества различных вполне осуществимых обобщений. Иначе говоря, Пуанкаре утверждал, что во всех случаях надо исходить из гипотезы простоты природы. Этот принцип построения физических теорий впоследствии стали называть «принципом простоты».

Красиво сведение сложного к «простоте». Можно сказать, что поиск «простоты» в своей основе предполагает **целенаправленный (телеологический) подход к изучаемому объекту**. Полученные при этом «простые» математические выражения отображают «простоту» Природы.

Основу целенаправленного подхода к объекту составляют экстремальные энергетические принципы, используемые в качестве исходных положений в основных разделах физики. По мнению **И.А. Ассеева** [2, с. 215], *«наука только тогда достигает теоретического уровня развития, когда начинает активно использовать экстремальные принципы для формулировки своих основных теоретических положений и на этой основе широко применять экстремальные математические методы»*. Справедливость этого утверждения подтверждается историей механики и физики – наук, достигших наиболее высокого развития, а также успехами в построении теоретической кибернетики и биологии.

Аспекты экстремальности привлекали внимание математиков с древних времен. Представляют интерес античные знания о максимумах и минимумах. Например, пифагорейцы обращали особое внимание на уникальные геометрические объекты – круг (окружность) и шар

(сфера). Круг является единственной фигурой, у которой максимум площади при минимальном периметре. Шар имеет максимум объема при минимальной поверхности. Идея экстремальности свойств геометрических объектов в дальнейшем нашла свое отражение в поисках и выявлении общих принципов экстремальности в механике и различных разделах физики.

Проблема выявления принципов и законов расхода энергии движущимися объектами уходит своими корнями в далекое прошлое. Впервые эффект экстремальности был установлен французским математиком **П. Ферма** (1601-1665). Было установлено, что луч света всегда распространяется в пространстве между двумя точками по тому пути, по которому время его прохождения меньше, чем по любому из всех других путей, соединяющих эти точки. Из всех возможных луч «выбирает» такую траекторию, при которой время движения минимально.

Этот феномен в дальнейшем получил название — **принцип Ферма**. Принцип Ферма является исходным принципом геометрической оптики. Как отмечено **Д.В. Сивухиным**, при обосновании этого принципа *«Ферма руководствовался теологическими соображениями, согласно которым природа действует целенаправленно, она не может быть расточительной и должна достигать своих целей с наименьшими затратами средств»* [45, с. 47].

Ученые XVIII века были убеждены в том, совершенная Вселенная не терпит напрасных затрат и поэтому каждое действие природы должно быть наименьшим из всех возможных. В 1740 г. французский ученый **П. Мопертьюи** (1698-1759) при анализе траекторий движения планет установил **принцип наименьшего действия**. Этот принцип был сформулирован следующим образом: *«Количество действия, необходимое для того, что-*

бы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным» (величина «действие» в принципе наименьшего действия выражается произведением энергии на время). Принцип наименьшего действия по существу стал центральным принципом вариационного исчисления – новой области математического анализа, основоположником которой стал **Лагранж** (1736-1813). Величайший математик XVIII века **Л. Эйлер** (1707-1783) в 1744 г. преобразовал принцип наименьшего действия в **принцип экстремального действия**, который имеет два принципиально различающихся решения: **минимальное и максимальное**. Особое значение принципа наименьшего действия представлено следующим высказыванием Пуанкаре [37, с. 107]: *«Сама формулировка принципа наименьшего действия имеет в себе нечто, неприятно поражающее наш ум. При переходе от одной точки к другой материальная частица, не подверженная действию какой-либо силы, но подчиненная условию не сходить с некоторой поверхности, движется по геодезической линии, т.е. по кратчайшему пути. Эта частица как будто знает ту точку, куда ее желают привести...»*.

Любое незначительное изменение (вариация) данной траектории практически не повлияет на величину действия, что говорит об экстремальности (о наименьшем значении) этой величины. Любая другая траектория при попытке ее вариации даст значительные изменения величины действия, что говорит об энергетической неоптимальности этих траекторий. Оказывается, что траектория, соединяющая в четырехмерном континууме две наперед заданные точки *A* и *B*, найденная из условия обеспечения наименьшего действия (оптимальности), всегда соответствует ее природной форме. Из всех принципиально возможных механизмов процессов реализуются именно те, которые дают наиболее оптимальные «траектории» развития процессов.

Это, с одной стороны, позволяет получать оптимальный путь движения (развития), следуя в каждом шаге законам природы. С другой стороны, даже не зная конкретных механизмов и законов системной динамики, но, зная интегральные характеристики системы, мы можем на основе принципа оптимальности прогнозировать ее будущее.

Дальнейшее прогрессивное развитие экстремального принципа в физике в приложении не к отдельным точкам, а к системам принадлежит **Ж. Лагранжу** (1736-1813): *«Сумма произведений масс на интегралы скоростей, умноженных на элементы пройденных путей, является всегда максимумом или минимумом»*. Впоследствии было показано, что разработки Лагранжа имеют отношение только к классической механике и не пригодны для использования в других разделах физики. Последующие усовершенствования понимания принципа наименьшего действия и математического его выражения были выполнены ирландским ученым **У.Р. Гамильтоном** (1805-1865).

Гамильтон одним из первых обнаружил близость по своей сущности принципа наименьшего действия принципу Ферма. На основе представлений о единстве мира, о красоте и гармонии природы он связывал этот принцип с общим методом Лагранжа в теоретической физике, подчеркивая особую важность этого метода. Формулировку принципа наименьшего действия Гамильтон дает в вариационной форме, исходя из представлений об экстремумах, подобно своим предшественникам – Эйлеру и Лагранжу. Наиболее точно и понятно принцип наименьшего действия, отображенный в уравнениях Гамильтона, выразил **А. Пуанкаре** [37, с. 103]: *«Все переменные, какие могут происходить с телами природы, управляются двумя экспериментальными законами: 1) сумма кинетической и потенциальной*

лось, наоборот, если в начале XX века часть ученых еще была настроена на познание подлинных причин естества, то сейчас, когда появился такой инструмент, как компьютерные технологии, «научный инфантилизм» еще больше усилился. Между «старой» и «новой» наукой принципиальная разница именно в том, что «новая» наука окончательно потеряла интерес к обобщению опыта, к глубоким философским размышлениям (которые позволял себе тот же Анри Пуанкаре). Физики конца XIX – начала XX веков не имели тех огромных технических возможностей, которые есть сейчас. Их можно уподобить рыбакам с удочками в руках, которые ловили рыбу, изучая ее повадки, изучая рельеф дна водоема, совершенствуя свою собственную интуицию. Теперь ситуация другая – ничего этого не нужно делать. Скажем, чтобы получить новое химическое вещество с заданными параметрами, достаточно запустить программу поиска, и она выдаст нужную формулу. Это можно сравнить с вылавливанием рыбы огромными сетями – такими большими, что в них оказывается вся рыба водоема. Ответственность и самостоятельность суждений, а главное – уровень интуиции у нынешних ученых перестали совершенствоваться, без компьютера они стали как без головы. Теперь совершенствуются не сами «рыбаки», а «сети», которыми вылавливается рыба, и этой рыбы выловлено столько, что никто не берет даже систематизировать улов (открытия), никого не интересует ни сам водоем (естество), ни состояние общества, для которого формально вылавливается вся эта «рыба».

Неприятность телеологической составляющей в принципе наименьшего действия и неприятность законов красоты для «научного общества» заключается в том, что все усилия науки на протяжении последних двух-трех веков были направлены именно на разрушение в современной культуре представлений о неких «предопределенных» состояниях в материальном мире. Подавляющее большинство ученых с самого начала своей научной деятельности настроено вовсе не на познание подлинных причин естества (как до сих пор продолжают думать о научном сообществе люди с наукой несвязанные), а на то, чтобы заставить природу производить те действия, которые от нее желают получить ученые. Подобно маленькому ребенку, который сам еще не готов ни понимать, ни учиться, но уже требует от матери дорогих игрушек. К сожалению, в наши дни мало что измени-

Те же самые закономерности характерны для психической энергии: в ней кинетическая энергия – та, которая задействуется преимущественно в состоянии бодрствования, а потенциальная – та, которой может обладать сознание, если его ускорить определенными экстремальными воздействиями. Потенциальная энергия аккумулируется преимущественно в процессах, которые мы называем «подсознательными». При этом, как показал К.Г.Юнг, значительная часть потенциальной энергии содержится в каждом человеке в виде «коллективного бессознательного» – архетипов, реализующихся в состоянии бодрствования в виде тех или иных поступков, тех или иных поведенческих моделей, включая сюда поведение крупных межэтнических и цивилизационных систем. То есть сознание человека тоже движется по принципу наименьшего действия – в том направлении, которое обеспечивает самый малый перепад между расщудочной и подсознательной психической энергией. Волна или поток света наиболее всего подходит для абстрактного описания сознания, и в этом в общем-то нет ничего нового, если вспомнить, что примерно таким образом и описывается тонкая энергия или душа человека во всех верованиях, об этой аналогии известно давно, но наука, конечно же, предпочитает игнорировать подобные аналогии, а значит, реального изучения феноменов психической энергии в ближайшее время вряд ли можно ожидать.

энергии не меняются. Это принцип сохранения энергии; 2) если система тел в момент t_0 имеет конфигурацию A , а в момент t_1 конфигурацию B , то переход от первой конфигурации ко второй всегда совершается таким путем, что среднее значение разности между двумя видами энергии за промежуток времени от...до является величиной самой малой из всех возможных».

Следует отметить, что в математическом отношении уравнения Лагранжа и Гамильтона представляют собой тождественными, но по физической сущности они принципиально различаются. Уравнение Гамильтона, отобразившее наиболее полно принцип наименьшего действия, обеспечило возможность успешного использования его не только в классической механике, но и в других разделах физики. Экстремальные принципы поражают не только своей общностью, но и фундаментальной ролью в построении различных разделов теоретического естествознания и, особенно, теоретической физики.

В наши дни особая важность принципа наименьшего действия для теоретической физики уже не вызывает сомнений. Исходными положениями основных разделов физики являются экстремальные принципы, которые надежно установлены на основе эмпирических обобщений и математического анализа. **М. Борн** (1882-1970) указывал на то, что «свойства минимальности мы встречаем во всех разделах физики и они являются не только верными, но и крайне целесообразными...для формулировки физических законов» [7, с. 113]. Принцип наименьшего действия – один из механизмов энергоэкономности самоорганизующихся систем.

Как отмечает **И.И. Свентицкий** [43], основополагающее «присутствие» принципа наименьшего действия установлено в следующих основных разделах современной физики.

Возникновение специальной и общей теории относительности явилось важнейшим этапом развития теоретической физики. Теория относительности выявила огра-

ниченность основных исходных положений классической механики. Исключение составил принцип наименьшего действия в форме Гамильтона. В основном уравнении геометродинамики – **уравнение Эйнштейна – Гамильтона – Якоби** – в неявном виде отображен принцип наименьшего действия. В общей теории относительности 4-мерная симметрия пространства-времени остается в силе. Эта симметрия, выполняющая очень важную роль в теории относительности, находится в согласии с принципом наименьшего действия. В связи с этим величина действия является наиболее универсальной величиной, характеризующей одновременное изменение системы в пространстве-времени. «Основные уравнения квантовой электродинамики – уравнения Дирака и Паули содержат гамильтониан». Аналитически величину неопределенности законом неопределенности Гейзенберга также удалось выразить на основе уравнения Гамильтона.

В основные уравнения квантовой механики – уравнения Шредингера – гамильтониан входит в виде оператора. В качестве основы исходного уравнения Шредингера использована волновая функция классической оптики (выводимая из принципа Ферма), в которую введен в качестве оператора гамильтониан.

Установлена связь макроэлектродинамических уравнений Максвелла и Гамильтона. Все основные аналитические зависимости и законы геометрической оптики выводятся из принципа Ферма, согласно которому луч света, распространяясь из одной точки в другую, проходит траекторию, соответствующую наименьшему времени прохождения. Принцип Ферма по своей сущности тождественен принципу наименьшего действия. Закон электромагнитной инерции Ленца также можно рассматривать как принцип минимизации перехода магнитной энергии в электрическую энергию и наоборот. В этом отношении он явно тождественен принципу наименьшего действия, которым определяется минимизация перехода

в механических процессах потенциальной энергии в кинетическую и наоборот.

Принцип наименьшего действия широко используется в современной физике и системном анализе. Всеобщность и универсальность принципа наименьшего действия для физики состоит в том, что он является **вариационным** принципом. Сложность объяснения «присутствия» экстремальных принципов в природе состоит в том, что их невозможно вывести из **более общих** принципов и законов, так как в общей формулировке они сами являются предельно общими. Все попытки вывести экстремальные принципы из физических законов и принципов оказались несостоятельными. Как пишет **В.А. Асеев** [2, с. 109], «*Экстремальные принципы по сфере своего применения выходят за рамки этой науки (физики)*».

Принцип наименьшего действия дает полную физическую характеристику движения системы, в то время как закон сохранения и превращения энергии рассматривает протекание явлений во времени. С математической точки зрения неодинаковое значение обоих принципов состоит в том, что принцип сохранения, применяемый к конкретному случаю, дает только одно уравнение. Тогда как для полного изучения необходимо столько уравнений, сколько имеется независимых координат. Принцип наименьшего действия в каждом конкретном случае дает как раз столько уравнений, сколько имеется независимых координат.

Биологические системы и энергооптимальность

Можно ли связать биологические объекты с принципами экстремальности? По мнению **М. Планка** (1858-1947), «*Принцип наименьшего действия в понятие причинности вводит совершенно новую мысль: к *causa efficiens* – причине, которая*

*действует из настоящего в будущее и представляет более поздние обстоятельства как обусловленные прежними, добавляет *causa finalis*, которая, напротив, делает предпосылкой будущее, а именно определенно направленную цель, а отсюда выводит течение процессов, ведущих к этой цели*».

«*Развитие физики, —* отмечает далее Планк, *— привело к формулировкам, имеющим выраженный телеологический характер. Но это не внесло ничего нового или противоположного в закономерности природы. Просто речь идет о другой по форме, а по сути дела совершенно равноправной точке зрения. Так же, как и в физике, это, наверное, подходит и к биологии, где разница обоих способов приняла более резкие формы*» [76, S. 25].

Планк пришел к обобщающему выводу о том, что «*...высшим физическим законом, венцом всей системы является ...принцип наименьшего действия*» [35, с. 68]. Можно сказать, что все энергетические принципы, составляющие основу физики, по своей сущности являются природными механизмами энергоэкономности. По мнению известного биофизика **А.А. Блюменфельда** (1921-2002), «*проблемы, возникающие при рассмотрении упорядоченности биологических структур, ее создания и эволюции, не лежат в области физики*», поскольку «*физика не претендует на объяснение природы... (она) пытается объяснить лишь закономерности в поведении различных объектов*» [5, с. 45]. Естественно, нельзя говорить об обратимости эволюционных процессов в организме. Биология сводима к физике лишь в том смысле, что физические законы раскрывают основу энергетики биологических процессов.

Перенесение из физики в биологию экстремальных (оптимальных) принципов, связанных с энергией, позволило использовать в этой науке экстремальные математические методы. Заложенные в них идеи красоты, оптимальности, экономии как нельзя лучше соответствуют

давнему представлению о совершенстве и целесообразности живой природы.

По все еще широко распространенным в наши дни представлениям строение каждого органа целиком определяется как эволюционное приспособление к условиям окружающей среды и непосредственным функциональным нагрузкам этого органа. Известно, однако, что при всем фантастическом разнообразии объектов и процессов в живой природе те или иные формы организации очень часто повторяются.

Одни и те же формы нередко могут быть представлены у множества объектов, даже не имеющих генетического родства. Феномен сходства имеет широкое распространение в живой природе (например, форма листьев, венчиков цветков растений и молекул). Отнюдь не случайно также сходство формы объектов живой и неживой природы (морозные узоры на стекле и рисунок растений, спирали галактик и раковин и т.д.). В самостоятельной роли формы можно убедиться хотя бы по тому, что живые системы чаще всего имеют форму сферы, цилиндра, спирали, дерева.

Все эти конструкции обладают уникальными свойствами. **Спираль** позволяет уместить огромный запас информации в малом пространстве и в то же время отрезок спирали является кратчайшим расстоянием между двумя точками на поверхности цилиндра. **Цилиндр** имеет максимальную жесткость по отношению к другим полым вытянутым фигурам (например, полый параллелепипед или призма). **Форма шара** обеспечивает минимальный расход материала на оболочку при максимальной жесткости сферической оболочки. «**Дерево**» позволяет снабжать ткани кровью и кислородом с минимальной затратой сосудистого материала и крови. Примеры, как самоорганизующаяся природа бережно сохраняет и использует ценную информацию на протяжении

всех этапов ее эволюции, наглядно продемонстрированы в книге Лима-де-Фариа [26], посвященной эволюции природы и, в частности, биологической эволюции. В ней на многочисленных иллюстративных примерах аналогий между структурами физико-химических и биологических объектов показано, что ценная информация, созданная природой на физико-химическом этапе эволюции и осуществленная в соответствующих **энергоэффективных** (энергоэкономных) структурах, используется и на биологическом этапе эволюции.

По принятому определению оптимизация биосистемы означает приведение ее к «*наилучшему*» виду. Телеологический подход давно нашел свою «*нишу*» в биологических науках. Издавна люди интуитивно понимали, что большинство систем Природы не только гармоничны, но и оптимальны с точки зрения протекающих в них процессов.

Выдающийся биолог академик **Л.С. Берг** (1876-1950) сформулировал принцип: «*Фундаментальным свойством жизни является целенаправленность*». Согласно учению Л.С. Берга, главной проблемой биологической эволюции является обязательно возникающий целенаправленный ответ на воздействие окружающей среды. Движение к цели происходит за счет действия внутренних механизмов организма в ответ на изменения окружающей среды. Для всякой системы организма существует «*свой*» отклик на изменения внешней среды.

Всякий параметр живой системы существует в пределах диапазона возможных его значений, при которых нормальная деятельность системы еще сохраняется. Внутри диапазона всегда существует участок допустимых положительных и участок допустимых отрицательных приращений параметра по отношению к некоторой исходной величине. Естественно, что исходное значение параметра по разным причинам может изменяться, при

этом меняется числовое соотношение между «положительным» и «отрицательным» участками. Возникает вопрос: «Каким образом в течение длительного внешнего «возмущения» (воздействия) реализуется механизм поиска оптимальной величины того или иного параметра? Таким механизмом эволюции, как нам представляется, является элементарный механизм движения материи (ЭМД), выдвинутый генетиком **В.В. Петрашовым** [33].

В замечательной книге В.В. Петрашова приводятся убедительные доказательства работы этого механизма. Согласно Петрашову, ответ организма на внешнее воздействие, «...это включение в процесс его собственных флюктуационных отклонений, по знаку (+ или -), соответствующих направлению воздействия внешнего фактора» [33, с. 13].

Как показал В.В. Петрашов, «именно ЭМД оптимизирует живые системы» [33, с. 19]. Работа ЭМД в течение длительного времени продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто значение параметра, оптимальное по отношению к внешнему воздействию. В дальнейшем оптимальная величина параметров будет поддерживаться тем же элементарным механизмом. Постоянное и длительное воздействие в течение многих поколений одних и тех же «возмущающих» факторов внешней среды приводит в итоге «возмущенные» системы организма к функционированию, **наиболее эффективному** для того или иного уровня воздействия. К сожалению, В.В. Петрашов не указывает **конкретный** критерий максимальной эффективности.

Важнейшее свойство живых организмов — способность потреблять из окружающей среды доступную свободную энергию и использовать ее на свои жизненные процессы — принципиально отличает их от неживой природы. Основная часть информационных или управляющих процессов в организме направлена на обеспе-

чение функционирования подсистемы энергообмена, на сохранение ее структур: «...с операционной точки зрения кибернетические механизмы для того и существуют, чтобы обеспечить стабилизацию и сохранение энергетической части организма. Таким образом, способность к адаптации, выживание и устойчивость — это различные проявления одного и того же свойства биологических объектов...» [58, с. 8].

Таким образом, подсистемы обмена веществ и информационных или управляющих процессов функционально и структурно подчинены подсистеме энергообмена. Проявление этих процессов, подтверждающих этот закон на микроуровне, доказано в работах **Г. Хакена** [61] и **А.П. Руденко** [41]. Необходимо также обратить внимание на то, что ведущая роль в адаптивном поведении клетки проявляется в минимизации текущих регуляторных затрат по отношению к функциональным энергозатратам [22].

Анализируя химические каталитические процессы и рассматривая химическую предбиологическую эволюцию, А.П. Руденко пришел к выводу о том, что «...причины и движение химической эволюции имеют энергетический характер. Устойчивость основного закона эволюции определяется энергетическими параметрами. Факторы прогрессивной эволюции также имеют энергетическую природу» [41, с. 11]. Представленные факты позволяют сделать заключение о том, что живая природа имеет общую направленность структур и функций — **биоэнергетическую** целенаправленность [43].

Во второй половине XX века и в биологии стали формулироваться вариационные принципы и использоваться математические экстремальные методы. Основные принципы математического моделирования биологических систем состоят в следующем.

Предполагается, что для любой биологической системы и любого биологического процесса может быть сформулирован критерий оптимальности. Применение математических экстремальных методов в биологии связывается рядом авторов с принципом оптимальной конструкции организма [39, 77]. Впервые гипотезу о биоэнергооптимальности организма сформулировал **Н. Рашевский** в своей работе «Математическая биофизика»: «*Организм имеет оптимально возможную конструкцию по отношению к экономии используемого материала и расходованию энергии, необходимых для выполнения заданных функций*» [77, р. 292].

Такой подход оказался одним из наиболее плодотворных. На сегодняшний день из него получено наибольшее число конкретных биологических результатов. Оптимальность конструкции организма понимается как его максимальная простота, максимальная адекватность биологическим функциям. Согласно формулировке Н. Рашевского конструкция организма в отношении энергии оптимальна. **Н. Рашевский** [77] и **Р. Розен** [39] применили принцип оптимальной конструкции при рассмотрении зависимости размеров сердца, легких, кровеносной системы млекопитающих, особенностей работы этих органов от выполнения главной биологической задачи, которой они подчинены. Таким образом, принцип оптимальной конструкции в формулировке Рашевского является не чем иным, как проявлением в биологии физического принципа наименьшего действия.

Неизбежность энергооптимальной самоорганизации в живой природе следует из второго постулата принципа оптимальности, открытого создателем неравновесной термодинамики **И.Р. Пригожиным** [36]. Этот принцип сформулирован в форме вариационного принципа минимума диссипации (рассеяния) энергии: если возможно множество сценариев протекания про-

цесса, согласных с законами сохранения и связями, наложенными на систему, то в **реальности процесс протекает по сценарию, которому отвечает минимальное рассеяние энергии**, то есть минимальный прирост энтропии.

Конечно, к проблеме оптимальности в живых системах можно подходить не только со стороны энергетики. Например, для анализа гемососудистой системы, обеспечивающей доставку кислорода к тканям того или иного органа или организма в целом, может быть использован один (или несколько) из следующих критериев: минимальный расход энергии в сосудах, минимальное сопротивление движению крови, минимальный объем крови и сосудистого вещества, минимальное напряжение сдвига на стенках сосудов и т.д. Вопрос состоит в том, какой из этих критериев Природа «предпочитает» остальным? Оптимизации сосудистых бифуркаций (разветвлений) был посвящен целый ряд математических исследований. При этом использовались различные критерии оптимальности: минимум мощности [84], минимум объема [73], минимум площади поверхности сосудов [85].

В конечном счете, было установлено [85], что в области параметров гемодинамики, имеющих физиологическое значение, результаты, полученные с помощью различных критериев, весьма близки. В связи с этим, можно считать, что в физиологических пределах ведущим является энергооптимальный критерий, которому дополнительно «сопутствуют» и остальные перечисленные критерии экономии. Таким образом, в конструкции одной живой системы обеспечивается «пересечение» множества оптимальных решений по различным критериям. В частности, нами было установлено [63, 64], что основу оптимального функционирования гемососудистой системы сердца составляет минимизация затрат энергии, крови и сосудистого материала.

Системный подход, принцип оптимального вхождения и гармония

Выдающийся русский ученый К.А. Тимирязев (1843-1920) еще в прошлом веке обращал внимание на то, что «для полного познания сущности объекта недостаточно ответить на вопрос, как он устроен, необходимо также знать, почему он устроен именно так?» Эта проблема по-прежнему весьма актуальна и в наше время. Сложность решения этой проблемы заключается в том, что вплоть до наших дней наука развивается главным образом за счет анализа — расчленения сложного целого на «простые» части. На этом пути были получены выдающиеся практические результаты. По этой причине синтез как метод временно потерял свою привлекательность. Однако редукционистский метод в своей основе имеет принципиальный недостаток: объект исследования исчезает как целое, как система со всеми ее особенностями. Естественно, что при таком подходе невозможно установить организацию и гармонию «целого» объекта. Устранение этого недостатка становится возможным благодаря тому, что в науке возникает новый, системный, идеал научного мышления и обобщения.

Системный метод ориентирует исследователя на раскрытие целостности объекта, на выявление многообразных типов связей в нем и сведение их в единую теоретическую картину. «Системные исследования имеют важную координирующую и направляющую роль для гармонического развития многих областей биологии» [29].

Создание общей теории систем (ОТС) явилось итогом усилий нескольких поколений выдающихся деятелей науки. Основы единого научного подхода к изучению живых систем были заложены в начале XX века русским

ученым А.А. Богдановым. Однако начало общего интереса к проблемам теории систем принято относить к публикации в 1940-х годах первых работ австрийского биолога Л. фон Берталанфи, во многом повторяющих те же общие представления, которые сформулировал А.А. Богданов. В настоящее время общая теория систем является уже достаточно развитой теорией.

Во второй половине XX века был разработан ряд вариантов ОТС, имеющих универсальный характер. Наибольший теоретический и практический интерес для нас представляет вариант ОТС Ю.А. Урманцева [59]. Ю.А. Урманцев показал глубокое единство органического и неорганического мира, вытекающее из системной природы любых объектов. Разработанный Урманцевым вариант ОТС включает в себя понятия «объект», «объект-система» и «закон композиции». За «объект» признается любой предмет мысли, т. е. предметы объективной и субъективной реальности, и не только вещи, но также качества, свойства, отношения, процессы, параметры и т.д.

«Объект-система» — это единство, созданное определенными сорта «первичными» элементами + связывающими их в целое отношениями (в частном случае, взаимодействиями) + ограничивающими эти отношения условиями (закон композиции).

Во всех объект-системах можно выделить следующие аспекты: 1) первичные элементы, рассматриваемые на данном уровне исследования как неделимые; 2) отношения единства между этими элементами и 3) законы композиции (организации), определяющие границы этих отношений. Понятие о законе композиции, впервые введенное Ю.А. Урманцевым в определение системы, позволяет представить живую систему как закономерный, упорядоченный, неслучайный набор объектов. ОТС Урманцева не дает готового рецеп-

та для нахождения закона композиции любой системы. Такой закон исследователю в каждом отдельном случае предстоит установить самому. Законы композиции (организации), выявленные в результате построения и анализа живой системы, позволяют в дальнейшем перейти к установлению гармонии «противоположностей» рассматриваемого объекта.

Выявление важнейшего аспекта целостности объекта — гармонии — предполагает предварительное изучение его организации. Отметим, лишь во второй половине прошлого столетия организация живых систем стала рассматриваться не как второстепенная данность, не подлежащая изучению, а как нечто самостоятельное, как аспект отдельного исследования. Более того, постепенно стало очевидным, что, как писал лауреат Нобелевской премии **Н. Винер**, «главные проблемы биологии...связаны с системами и их организацией во времени и пространстве» [14, с. 43].

Системный подход предполагает сложную организацию живой системы, многообразие взаимодействий между ее элементами. Функционально связанные в одной системе объекты различной сложности образуют ряд иерархических систем: каждый «сложный» объект состоит из «простых» систем и одновременно каждая «простая» система образована из своих «простых» элементов и т.д. Выявление законов организации «простых» систем позволяет приступить к установлению критерия гармонии «сложной» системы, согласно которому происходит сопряжение (гармония) «простых» элементов в единое целое. Эта операция имеет продолжение на каждом новом уровне сложности.

Нахождение гармонии живых систем по многим причинам является сложной задачей. Прежде всего, для выявления гармонии какого-либо живого объекта необходимо иметь достаточный объем экспериментально полученных результатов. В биологии ежегодно появляет-

ся огромное количество разрозненных экспериментальных данных. Однако разрозненные факты сами по себе имеют небольшую значимость для выявления гармонии. Они приобретают значение, только будучи связанными в рамках единого целого. В настоящее время возникла настоятельная потребность осмыслить и систематизировать «Монбланы» результатов, полученных в результате труда армии ученых в той или иной области биологии.

Предвидя создавшееся положение, лауреат Нобелевской премии **Г. Селье** (1907-1982) еще в прошлом веке писал о «настоятельной необходимости в сведении воедино огромного количества данных, публикуемых в медицинских журналах» [44, с. 34]. «Но, — с сожалением отмечал далее Селье, — чем больше публикаций, тем меньше людей, желающих заняться такой интеграцией данных». Сходная в той или иной степени ситуация сложилась не только в медицине, но и в других науках о живом. Такое положение можно объяснить несколькими обстоятельствами. Глубокая специализация, повсеместное применение компьютеров и рейтинговая оценка по числу публикаций в престижных специализированных журналах итогов деятельности ученых, в конечном счете, приводят к тому, что профессионалы из разных областей биологии часто не в состоянии понять друг друга, да и не очень желают этого. Важные теоретические исследования нередко дублируются из-за того, что ученым неизвестны результаты, уже давно ставшие классическими в других областях науки.

Преодоление указанных трудностей возможно только на пути выработки универсальных подходов к исследуемым объектам. Необходим анализ рассматриваемой живой системы как единого целого специалистами разных наук. По нашему мнению, поиск универсального критерия гармонии, общего для всех биосистем, представляет значительный шаг в этом направлении.

В соответствии с современным учением о гармонии для того, чтобы «иерархическая система была устойчивой, каждый ее элемент на любом уровне ее организации должен быть «гармоничным — это главное положение научной парадигмы, восходящей к Пифагору и Платону» [51].

Возникает вопрос: «Можно ли говорить о присутствии гармонии «противоположностей» в любой живой системе, в частности, в ее параметрах? Ответ положителен, ибо «противоположности» имеют место в каждом параметре деятельности системы. Это обусловлено тем, что любой параметр имеет определенный физиологический диапазон значений, в пределах которого деятельность биосистемы сохраняется. Оптимальная величина параметра разделяет этот диапазон на два «противоположных» участка: участок больших и участок меньших допустимых значений. По отношению к оптимальной величине первый из них можно обозначить интервалом «положительных», а второй интервалом «отрицательных» приращений параметра. Известно, что живые организмы и их ведущие функциональные системы в процессе жизнедеятельности постоянно решают задачи поиска минимума затрат свободной энергии как при осуществлении своих специализированных функций, так и в процессе морфогенеза [60, с. 51].

При изменении внешнего «возмущающего» фактора происходит поиск новых оптимальных значений параметров за счет смещения или в сторону увеличения (положительное приращение) или в сторону уменьшения (отрицательное приращение). В результате «внутри» области возможных значений каждого параметра устанавливается новое соотношение оптимальных «противоположностей». Поддержание нергооптимального сопряжения «противоположностей» является условием эффективной работы «сложной» системы.

Следует отметить, живых систем, изученных достаточно глубоко и всесторонне, совсем немного. С этой точки зрения, сердце человека и млекопитающих является одним из живых объектов, наиболее пригодных для выявления универсальных критериев гармонии. В настоящее время этот орган достаточно хорошо изучен как по «вертикали» (иерархия систем), так и по «горизонтали» (множество параметров деятельности). Повышенный интерес в науке к сердечной тематике обусловлен широким распространением ишемической болезни сердца.

Это заболевание пожилых людей все более «молодеет» и принимает в наиболее развитых странах характер эпидемии. Одним из итогов международной кооперации ученых, занятых борьбой с этой «чумой» прошедшего и XXI века, явилось накопление огромного объема экспериментальных данных, отнесенных к самым различным сторонам деятельности сердца (особенно к обеспечению миокарда кровью и кислородом). К сожалению, вплоть до наших дней предпринимается мало попыток осмыслить это богатство, исходя из общих теоретических положений. Естественно, что гигантский объем накопленных «сердечных» данных представляет большой интерес для специалистов, занимающихся проблемами теоретической биологии. Изобилие экспериментального материала создает благодатную почву для поиска универсальных принципов гармонии.

По этой причине сердце представляет собою в настоящее время вполне подходящее «поле» для поиска не только своих собственных, «сердечных», но также, возможно, и общих, универсальных принципов гармонии биосистем различной сложности и назначения. Нами был произведен анализ сопряжения «простых» сердечных систем, функционально образующих ту или иную «сложную» кардиосистему [63, 64, 65]. В результате впервые была установлена энерго-

оптимальная основа сопряжения (гармонии) множества «простых» сердечных систем, совместно образующих «сложную» кардиосистему. Эта универсальная особенность сердечных систем получила обозначение «*принцип оптимального вхождения*». Сущность этого принципа заключается в следующем: **«Каждая из «простых» сердечных систем, совместно образующих «сложную» кардиосистему, включена в последнюю оптимальным образом, вследствие чего сложная система исполняет свою функцию с минимальным расходом энергии и строительного материала**». (Естественно, что понятия «простая» и «сложная» система относительны, поскольку простая система по отношению к «своим» «простым» системам предстает в качестве «сложной», а сложная система при вхождении в состав еще более сложной становится «простой».)

Золотая гармония «противоположностей» в структурах сердечных циклов

Система «Структура сердечного цикла (ССЦ)»

В сердечных процессах всегда существует точка качественного перехода из одной «противоположности» в другую. Эти «противоположности» обусловлены переходом сердечной мышцы из состояния напряжения (систола) в состояние расслабления (диастола). Периодическая смена этих «противоположностей» представлена нами в структурах сердечного цикла (ССЦ). Каждая ССЦ включает в себя «противоположные» (систолическое и диастолическое) значения того или иного сердечного параметра и их сумму. Вся-

кую ССЦ согласно общей теории систем (ОТС) Ю.А. Урманцева [59] можно представить как объект-систему («сложную» систему). **В каждой такой «сложной» системе необходимо выделить следующие аспекты:**

- 1) первичные элементы («простые» системы), рассматриваемые на данном уровне исследования как неделимые;
- 2) отношения единства между этими элементами;
- 3) законы композиции (организации), определяющие границы этих отношений.

Первичными элементами структур сердечного цикла (ССЦ) по основанию «противоположностей» является систолическое и диастолическое значения рассматриваемого параметра. Отношением единства между этими элементами является их функциональная связь, а законом композиции — математическое выражение определенного вида, связывающее эти «противоположные» элементы в единое целое. На основе 1) — 3) нами были построены временная, объемная, механическая и кровотоковая ССЦ, представляющие наиболее важные параметры деятельности сердца [63]. Временная ССЦ состоит из длительностей систолы, диастолы и кардиоцикла. Объемная ССЦ включает в себя объем изгнанной крови, объем оставшейся крови и конечнодиастолический объем левого желудочка. Механическая ССЦ представляет собою отнесенные к длительности сердечного цикла среднее систолическое и среднее диастолическое давления в аорте и среднее за сердечный цикл давление в аорте.

Кровотоковая ССЦ включает в себя отнесенные к длительности сердечного цикла средний систолический и средний диастолический коронарные кровотоки и средний за кардиоцикл коронарный кровоток.

Нами были рассмотрены структуры сердечного цикла здоровых людей и животных репродуктивного возраста.

та [63]. Люди и животные в течение экспериментов пребывали в естественных условиях (нормальные состав, влажность и давление вдыхаемого воздуха, естественная температура окружающей среды, нормальное питание и т.д.). В качестве «возмущающего» внешнего фактора, влияющего на величину параметров сердца, избрана градуированная физическая нагрузка. Для получения эмпирических зависимостей использованы среднестатистические данные параметров с погрешностью измерения не более $\pm 10\%$.

«Пространство» ССЦ

Совокупность всех реально существующих временных, механических, объемных и кровотоковых ССЦ животных различной массы (веса) в режимах физической нагрузки от покоя до максимума составляет некоторое «пространство» ССЦ. В общем виде, исходя из систолической и диастолических «противоположностей», структуру сердечного цикла любого j -параметра (j -ССЦ) этого «пространства» можно представить выражением:

$$C_{sj}(v, W_i) + C_{dj}(v, W_i) = C_j(v, W_i), \quad (1)$$

где v — частота сердцебиений за минуту,

W_i — вес i -животного,

$C_{sj}(v, W_i)$, $C_{dj}(v, W_i)$, $C_j(v, W_i)$ — систолическое, диастолическое и суммарное значения j -параметра, соответствующие величинам W_i и v .

Значения $C_{sj}(v, W_i)$, $C_{dj}(v, W_i)$ и $C_j(v, W_i)$ соответствуют установившимся режимам кровоснабжения организма в покое или при кратковременной градуированной нагрузке через 5-10 мин.

Систолическим, диастолическим и суммарным элементам механической и кровотоковой ССЦ в выражении (1) соответствуют средние систолические, средние диасто-

лические и суммарные величины, отнесенные к длительности кардиоцикла,

$$C_{sj}(v, W_i) = 1/T(v, W_i) \int_0^{t_s(v, W_i)} c_j(v, W_i, t) dt$$

$$C_{dj}(v, W_i) = 1/T(v, W_i) \int_{t_s(v, W_i)}^{T(v, W_i)} c_j(v, W_i, t) dt,$$

$$C_j(v, W_i) = 1/T(v, W_i) \int_0^{T(v, W_i)} c_j(v, W_i, t) dt.$$

где $t_s(v, W_i)$, $t_d(v, W_i)$, $T(v, W_i)$ — соответственно длительность систолы, диастолы и кардиоцикла, $c_j(v, W_i, t)$ — мгновенное значение j -параметра i -животного при сердечном ритме v .

Для объемной ССЦ значение $C_{sj}(v, W_i)$ равно объему изгнанной крови за одно сокращение, $C_{dj}(v, W_i)$ — объем оставшейся крови и $C_j(v, W_i)$ — полный (конечнодиастолический) объем левого желудочка i -животного при частоте сердцебиений v .

В дальнейшем величины $C_j(v, W_i)$ для механической, объемной и кровотоковой ССЦ будем обозначать «суммарными», а фазовые величины $C_{sj}(v, W_i)$ и $C_{dj}(v, W_i)$ соответственно «систолическими» и «диастолическими». Аналогичные обозначения будут использоваться также и для временной ССЦ.

Нами было показано [63], что для различных видов животных имеется своя «золотая» частота сердцебиений v_{3C} , при которой длительности систолы, диастолы и кардиоцикла соотносятся между собой по золотому сечению. «Золотая» частота сердцебиений v_{3C} приблизительно соответствует физиологическому покою организма (для человека $\delta_{3C} = 63$ уд./мин., для собаки $v_{3C} = 94$ уд./мин. и т.д.). Систолическое, диастолическое и суммарное значения для временной, механической, объемной и кровотоковой ССЦ при v_{3C} соотносятся по пропорции золотого сечения [63].

Режим кровоснабжения организма, связанный с золотой пропорцией, в дальнейшем будет обозначаться «золотым». Золотой режим кровоснабжения является исходным при анализе изменений, соответствующих вариации физической нагрузки. В пределах допустимой нагрузки величина сердечного выброса за минуту находится в линейном соотношении с изменением частоты сердцебиений, поскольку объем выброшенной крови за одно сокращение остается неизменным при любой нагрузке [75]:

$$\delta = Q(v, W_i) / Q(v_{3C}, W_i) = v / v_{3C}$$

где v — частота сердцебиений при фиксированной нагрузке, $Q(v_{3C}, W_i)$, $Q(v, W_i)$ — сердечный выброс i -животного за минуту в золотом режиме и при нагрузке. В дальнейшем в математических выражениях будем использовать символ δ , поскольку у различных видов животных при вариации физической нагрузки этот параметр приблизительно изменяется в одинаковых пределах: $\delta \approx 1 \div 4$ (в золотом режиме $\delta = \delta_{3C} = 1$).

В золотом режиме:

$$C_{sj}(\delta_{3C}, W_i) = 0,382 C_j(\delta_{3C}, W_i), \quad (2)$$

$$C_{dj}(\delta_{3C}, W_i) = 0,618 C_j(\delta_{3C}, W_i), \quad (3)$$

где $C_{sj}(\delta_{3C}, W_i)$, $C_{dj}(\delta_{3C}, W_i)$, $C_j(\delta_{3C}, W_i)$ — систолическое, диастолическое и суммарное значения j -параметра i -животного в золотом режиме ($\delta = \delta_{3C}$).

Исходя из (1)-(3), закон композиции ССЦ рассматриваемых параметров можно представить обобщенным выражением:

$$0,382 C_j(\delta_{3C}, W_i) + 0,618 C_j(\delta_{3C}, W_i) = C_j(\delta_{3C}, W_i), \quad (4)$$

В золотом режиме (покое) зависимость суммарных значений $C_j(\delta_{3C}, W_i)$ от веса i -животного представлена эмпирическими выражениями [65]:

$$C_j(\delta_{3C}, W_i) = a_j W_i^{b_j}, \quad (5)$$

где a_j , b_j — величины, соответствующие j -параметру сердца (эти величины имеют постоянные значения независимо от веса животных и величины нагрузки).

С учетом (5), закон композиции всех j -ССЦ (4) предстает в следующей форме:

$$0,382 a_j W_j^{b_j} + 0,618 a_j W_j^{b_j} = a_j W_j^{b_j}. \quad (6)$$

Отметим, незначительным изменением веса животного в течение кратковременной нагрузки в дальнейшем можно пренебречь. В (6) представлен «золотой» закон вхождения «простых» систем ($0,382 a_j W_j^{b_j}$) и ($0,618 a_j W_j^{b_j}$) в «сложную» ($a_j W_j^{b_j}$).

Влияние физической нагрузки на величину систолических, диастолических и суммарных элементов j -ССЦ представлено нами в обобщенной формуле [63]:

$$0,382 (\sqrt{\delta})^{k_j+1} a_j W_j^{b_j} + 0,618 (\sqrt{\delta})^{k_j-1} a_j W_j^{b_j} \cong (\sqrt{\delta})^{k_j} a_j W_j^{b_j}, \quad (7)$$

где k_j — величина, соответствующая j -параметру (эта величина постоянна и не зависит от уровня физической нагрузки и веса животных). Величины a_j , b_j , и k_j представлены в таблице 1.

Табл. 1. Коэффициенты «пространства» j -ССЦ млекопитающих (7)

j-ССЦ	j-коэффициенты		
	a_j	b_j	k_j
Временная	0,249	0,250	-2
Механическая	$1,47 \times 10^5$	0,033	1
Объемная	1,76	1,02	-1
Кровотоковая	7,48	0,81	2

Примечание. Во всех расчетах в (7) [W_j] принимается в кг, временная, механическая, объемная и кровотоковая ССЦ соответственно имеют размерности сек, $\text{дн}/\text{см}^2$, мл, мл/мин.

В (7) представлен обобщенный закон композиции «пространства» временных, механических, объемных и кровотоковых структур сердечного цикла. Естественно, что при $\delta = \delta_{3C} = 1$ выражение (7) предстает в виде (6). В выражении (7) отображена универсальная роль золотого сечения, а также отображено влияние веса животных и мышечной нагрузки на величину рассматриваемых параметров. Отметим при этом, что относительное расхождение между левой и правой частями приближительного тождества (7) в заданных пределах ($\delta = 1 \div 4$) составляет не более $(-3 \text{ — } +7)\%$. Эти величины находятся в пределах $\pm(5-6)\%$ -отклонения параметра от его оптимального значения, при котором оптимальность системы еще сохраняется [8].

Рассмотрим математические особенности «пространства» (7). В золотом режиме ($\delta = \delta_{3C}$) числа 0,382 и 0,618 представляют «золотую» гармонию вхождения «простых» систем (систолическое и диастолическое значения j -параметра) в «сложную» (суммарное значение j -параметра). В этом случае суммарное значение j -параметра обусловлено величинами W_j , a_j и b_j . В условиях физической нагрузки гармония «вхождения» «простых» систем в «сложную» дополнительно представлена числами k_j , k_j+1 , k_j-1 и $1 < \delta \leq 4$.

Каждой суммарной величине j -параметра в покое и при нагрузке соответствует «своя» гармония «противоположностей». В покое «вхождение противоположностей» представлено золотыми числами 0,382 и 0,618, а при нагрузке оптимальными отклонениями от этих чисел [63]. Поэтому можно говорить об оптимальной, «золотой» гармонии «противоположностей» на всем диапазоне $\delta = 1 \div 4$.

Установлено [63, 65], в покое и пределах нагрузки величины $0,382 (\sqrt{\delta})^{k_j+1} a_j W_j^{b_j}$, $0,618 (\sqrt{\delta})^{k_j-1} a_j W_j^{b_j}$ и $(\sqrt{\delta})^{k_j} a_j W_j^{b_j}$ равны энергооптимальным значениям. Таким обра-

зом, соотношение «противоположностей» во всех j -ССЦ всегда имеет «золотую», энергооптимальную основу. Отметим, что вес животных W_j также является энергооптимальной величиной [63].

Добавим, каждая j -ССЦ, в свою очередь, входит в качестве «простой» системы в более сложную систему («пространство» ССЦ). «Пространство» ССЦ составляет совокупность структур сердечного цикла всех рассматриваемых j -параметров для различных видов животных в покое и в допустимых пределах нагрузки. Величины 0,382, 0,618, a_j , b_j , k_j , k_j+1 , k_j-1 и $\delta = 1 \div 4$ образуют числовой каркас «пространства» (7). Этими числами представлена математическая связь между принципом оптимального вхождения и энергооптимальной гармонией «противоположностей».

Математические особенности гармонии «пространства» ССЦ

Обобщенный закон (7) можно представить в следующем виде:

$$[0,382\sqrt{\delta} + 0,618\sqrt{\delta}^{-1}](\sqrt{\delta})^{k_j} a_j W_j^{b_j} \cong (\sqrt{\delta})^{k_j} a_j W_j^{b_j}. \quad (8)$$

Очевидно, что в пределах нагрузки основу гармонии «противоположностей» для каждой j -ССЦ составляет приближительное тождество:

$$0,382\sqrt{\delta} + 0,618\sqrt{\delta}^{-1} \cong 1. \quad (9)$$

Первый член (9) представляет долю систолической «противоположности» j -параметра, а второй — долю диастолической (см. рис. 1). В (9) представлена основа золотой гармонии «противоположностей» сердечных параметров в покое и при различных уровнях нагруз-

В прошлом номере «De Lapide Philosophorum» было опубликовано исследование В. Белянина, Е. Романовой «Жизнь, молекула воды и золотая пропорция» (DLP, №IV, 2018. С.92 – 113). В этой статье речь шла об уникальном пространственном расположении трех атомов воды Н-О-Н в виде «золотого треугольника» с углом в 108°. При этом колебание широты угла в зависимости от различных состояний воды дает разницу от 109,5° до 104,5°, то есть величину $\pm 5^\circ$. Таким образом, расхождение от оптимального значения угла талой воды 108° составляет практически ту же величину, которую фиксирует в своем исследовании В.Д.Цветков. Эта корреляция позволяет говорить о существовании взаимосвязи между состояниями воды и режимами работы сердца. Так что состояние талой воды вполне можно уподобить состоянию пробуждения человека, когда сердце не испытывает дополнительного давления внешней среды, в то же время содержит значительный энергетический потенциал.

ки. Величины $n_s(\delta)$ и $n_d(\delta)$ являются **численной мерой** энергооптимальной гармонии «противоположностей» в ССЦ в покое и при каждом уровне нагрузки для всех животных.

$$0,382x + 0,618x^{-1} \cong x^0. \quad (10)$$

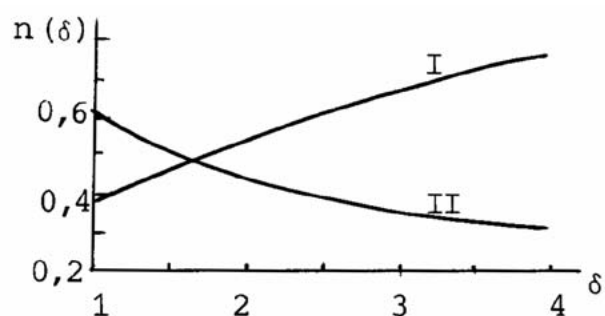


Рис.1. Золотые «противоположности» j -ССЦ
Кривые I и II представляют значения $n_s(\delta) = 0,382 \sqrt{\delta}$ и $n_d(\delta) = 0,618 \sqrt{\delta^{-1}}$.

В этом законе следует отметить интересные особенности.

1. В структуре (10) имеет место «пересечение» двух геометрических прогрессий: 1) $\Phi^{-2}, \Phi^{-1}, \Phi^0$ и 2) x^{-1}, x^0, x . Первая прогрессия, «золотая», представляет гармонию сердечных «противоположностей» при покое организма. Вторая «переплетена» с числами 0,382 и 0,618. Это «переплетение» обуславливает энергооптимальную гармонию «противоположностей» в физиологических пределах нагрузки [63].

2. Разность показателей крайних членов обеих прогрессий равна 2. Отношение $x_{\max}/x_{\min} = 2$ имеет характерную особенность: оно соответствует отношению верхнего и нижнего значений двух соседних октав ($\sqrt{2^{i+2}}/\sqrt{2^i}$). Это соотношение соответствует 2 интервалам качественной симметрии [30]. Таким образом, особенности компози-

ции (10) связаны с золотым числом Φ и числом 2, которое наряду с «особыми» числами π, e и i имеет широкое «представление» в законах физики [1].

В «пространстве» (7) представлены следующие особенности его структуры.

1. В каждом члене (7) имеет место перемножение двух сомножителей: $(\sqrt{\delta})^{k+1} a_j W_j^b$, $(\sqrt{\delta})^{k-1} a_j W_j^b$, $(\sqrt{\delta}^k) a_j W_j^b$. Первый из этих сомножителей представляет нагрузку, а второй – вес животного. Величины $a_j, b_j, k_j, k_j^{+1}, k_j^{-1}$ постоянны при любом весе животных и при любой нагрузке. Именно эти и золотые числа 0,382 и 0,618 обеспечивают энергооптимальный числовой «каркас» «пространства» (7).

Структуру (7) следует рассматривать как уникальную, обеспечивающую **энергооптимальную** работу сердца в пределах от покоя и до максимальной нагрузки. Максимальная эффективность сопряжения «противоположностей» имеет место в покое ($\delta = \delta_{3c} = 1$), минимальная при максимальной нагрузке ($\delta=4$).

2. В выражении (7) присутствует аспект симметрии. В пределах относительной нагрузки ($\delta=1 \div 4$) отношения «противоположностей» i -животного будут одними и теми же для всех рассматриваемых параметров (см. рис. 1). Симметричный «перенос» элементов каждой j -ССЦ от i - на n -животное происходит за счет «умножения» их значений на $(W_n/W_i)^{b_j}$. Таким образом, каждому j -параметру в пределах заданной нагрузки соответствуют аспекты симметрии: инвариантные величины (9) и «свой» закон преобразования $(W_n/W_i)^{b_j}$. Законы преобразования обеспечивают «перенос» гармонии и энергооптимальности каждого j -параметра от одного вида животных к другому. В этом феномене представлена математическая связь между гармонией «противоположностей» и энергооптимальностью j -ССЦ отдельного животного и симметрией их тиражирования для различных видов млекопитающих.

Золотая гармония и эстафета

«противоположностей» в сердечных процессах

Рассмотрим пример «использования» Природой восходящего ряда золотых чисел на примере временной структуры систолы [см. рис. 2]. Напряжение мышечных волокон миокарда в течение систолы разделяется на ряд активностных состояний: 1) асинхронное напряжение (0-1), 2) синхронное напряжение (1-2), 3) сокращение (2-3). Соответственно, 0-3 – длительность систолы, 0-4 – длительность кардиоцикла. Сегмент (0-2) соответствует подготовке к изгнанию крови из желудочков, он включает в себя противоположные формы напряжения волокон при неизменной длине.

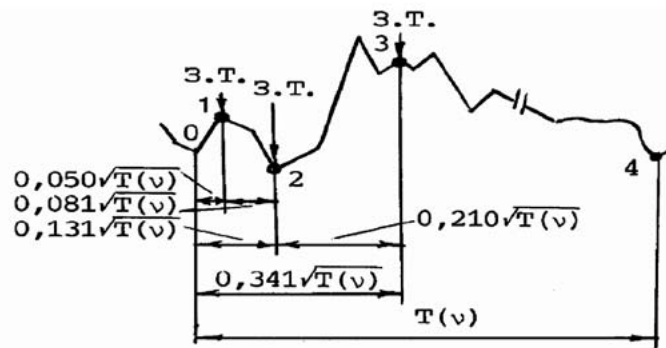


Рис. 2. «Золотая» динамокардиограмма человека [63].

v — частота сердцебиений;

$T(v)$ — длительность сердечного цикла при частоте v . З.Т.

— золотые точки интервалов 0-2 (т. 1), 0-3 (т. 2).

З.Т. 3 делит сердечный цикл 0-4 по золотому сечению только при $v = v_3$.

С активностной точки зрения интервалы (0-1) и (1-2) соответствуют «противоположностям»: асинхронное и синхронное напряжение волокон. Сегмент (2-3) соответствует времени изгнания крови из желудочков; этот сегмент соответствует укорочению сердечных волокон. Сегмент 0-3 (интервал подготовки + интервал изгнания) включает в себя две «противопо-

ложности» — постоянство и изменение длины мышечных волокон. Для человека интервал асинхронного напряжения, интервал синхронного напряжения, фаза напряжения при неизменной длине мышечных волокон, интервал сокращения и длительность систолы соответственно равны [63]: $0,050\sqrt{T(v)}$, $0,081\sqrt{T(v)}$, $0,131\sqrt{T(v)}$, $0,210\sqrt{T(v)}$, $0,340\sqrt{T(v)}$, где v — частота сердцебиений, $T(v)$ — длительность сердечного цикла, соответствующая частоте v . Очевидна аналогия представленного ряда длительностей восходящему ряду золотых чисел.

Временной интервал напряжения при постоянной длине сердечных волокон и длительности «противоположных» интервалов (асинхронного и синхронного напряжения) соотносятся по золотой пропорции:

$$0,131\sqrt{T(v)} : 0,081\sqrt{T(v)} = 0,081\sqrt{T(v)} : 0,050\sqrt{T(v)} = 1,62. \quad (11)$$

Аналогично систолу в целом можно представить также золотой пропорцией:

$$0,340\sqrt{T(v)} : 0,210\sqrt{T(v)} = 0,210\sqrt{T(v)} : 0,131\sqrt{T(v)} = 1,62 \quad (12)$$

В (11) и (12) представлена эстафета «временных» золотых сечений по всей систоле в соответствии с восходящим рядом золотых чисел: $0,050\sqrt{T(v)}$, $0,081\sqrt{T(v)}$, $0,131\sqrt{T(v)}$, $0,210\sqrt{T(v)}$, $0,340\sqrt{T(v)}$. Для систолы «золотая» гармония между «противоположностями» не зависит от длительности сердечного цикла и сохраняется при любой частоте сердцебиений. «Золотая» гармония «противоположностей» между систолой в целом и диастолой имеет место только при золотом сердечном ритме ($v = v_{3c}$). Таким образом, в золотом режиме кровоснабжения организма временная эстафета золотых «противоположностей» существует в течение всего кардиоцикла.

Установлено [4], что организация временной структуры работы сердца по золотой эстафете «противоположностей» соответствует минимуму кинетической энергии сердца.

Эстафета «объемных» золотых «противоположностей» имеет место в точках «качественного» перехода при наполнении и опорожнении предсердий и желудочков. Показано [82], что в покое за интервал раннего наполнения в левое предсердие человека поступает 37%, а в фазу позднего наполнения — 63% от общего количества крови, поступившей в предсердие за интервал закрытого митрального клапана; это соотношение практически соответствует золотому сечению.

Границей раздела «противоположных» состояний (раннего и позднего наполнения) служит момент, в который прекращается падение и начинается рост давления в левом предсердии. Следует отметить, что максимальный и минимальный объем обоих предсердий и их разность в течение сердечного цикла также приблизительно составляют золотую пропорцию [83]. **Через открытый митральный клапан в течение времени, когда предсердие представляет собою трубку, открытую с двух сторон, в левый желудочек поступает 60% крови от общего количества, а остальные 40% — в течение систолы предсердия [71].**

Соответственно, фазу изгнания крови из желудочков можно разделить на два противоположных периода: возрастающего и редуцированного изгнания. Объемы выброшенной крови в покое за эти периоды соотносятся по пропорции золотого сечения. Следует напомнить, что в покое отношение всего объема изгнанной крови, объема оставшейся крови и конечнодиастолического объема желудочков приблизительно соответствует золотой пропорции [72]. Итак, в золотом режиме кровоснабжения организма «объемная» картина наполнения и опорожне-

ния предсердий и желудочков, представленная с учетом «противоположностей» в этих процессах, неизменно связана с пропорцией золотого сечения. Установленные соотношения позволяют представить процесс наполнения и опорожнения предсердий и желудочков как гармонию последовательных золотых «противоположностей». Этот процесс имеет **энергооптимальную** основу [63].

Отметим также особенность структуры кровотоков в крупных коронарных артериях. Показано [78], что форма пульсации кровотока в этих артериях совершенно аналогична. Соотношение кровотоков в левой огибающей коронарной артерии и левой нисходящей артерии коронарной артерии в конце фазы напряжения (длина мышечных волокон постоянна) и в конце фазы сокращения (укорочение мышечных волокон) одинаково. **В обеих коронарных артериях отношение между кровотоками в точках перехода к «противоположное» состояние миокарда близко к золотому числу 1,618.** Поскольку отношения между значениями коронарного кровотока в характерных точках систолы не меняются [79], то золотое отношение является инвариантом количественной организации систолы кровотоковой ССЦ при любом уровне нагрузки.

Итак, рассмотренные «цепочки» «противоположностей» неизменно связаны с пропорцией золотого сечения и числами Фибоначчи. **Гармония их сопряжения в соответствии с принципом оптимального вхождения имеет энергооптимальную основу.**

Выводы:

1. Принцип оптимального вхождения — критерий энергооптимальной гармонии сердечных циклов человека и млекопитающих. Этот принцип является подтверждением универсальности принципа экономии энергии,

представленного в основных законах физики (принцип наименьшего действия).

2. Гармония «противоположностей» в структурах сердечного цикла важнейших сердечных параметров представлена уникальным **математическим соотношением** — пропорцией золотого сечения. За «удивительными», «загадочными», «таинственными» проявлениями золотой пропорции в системах сердца скрывается **внутренняя взаимосвязь между энергооптимальностью и золотой гармонией «противоположностей»**.

Золотая гармония «противоположностей» в сердечных системах является итогом стремления последних в течение эволюции к максимально возможной экономии энергии и строительного материала. Золотое сечение обеспечивает своего рода «резонанс» всех основных циклов деятельности сердца.

3. Произведенный анализ «мира экспериментального» (по Платону — мира вещей) с привлечением «мира математического» (по Платону — мира «идей») позволил установить следующий феномен: **золотая гармония является «математической идеей» предельного совершенства», воплощенной Природой в сердечных и, по видимому, во многих других биосистемах.**

4. Золотая гармония сердца составляет основу здоровья человека и млекопитающих. При конструировании искусственного сердца необходимо учитывать «золотые» соотношения во временной, механической и объемных структурах сердечных циклов. Такое конструктивное решение позволит в максимальной степени приблизиться к естественному кровоснабжению организма.

Литература

1. Аракелян Г.Б. Фундаментальные безразмерные величины. - Ереван, Изд-во АН Арм. ССР, 1981. 157 с.
2. Ассеев И.А. Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. Л., Изд-во ЛГУ, 1977.
3. Бакунинский А. Математика гармонии: позолоченные

сечения//«Академия Тринитаризма». М., эл. № 77-6567, публ. 16939, 05.11.2011.

4. Балакшин О.Б. Гармония саморазвития в природе и обществе. Подобие и аналогии. М., Изд-во ЛКИ, 2008. 344 с.
5. Блюменфельд Л.А. Проблемы биологической физики. - М., Наука, 1977. 336 с.
6. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов, Изд. «Свит», 1994.
7. Борн М. Физика в жизни моего поколения. М., Изд. иностр. лит., 1963. 535 с.
8. Бочков В.Г. Принцип оптимальности как основа исследования живых систем и некоторые вопросы их математического описания//Особенности современного научного познания. - Свердловск: УНЦ АН СССР, 1974. С. 161-178.
9. БСЭ. Т. 6. С. 128. М., Сов. Энци., 1971.
10. Бутусов К.П. «Золотое сечение» в Солнечной системе// Тр. ВАГО «Проблемы исследования Вселенной, - Л., 1978. Вып. 7. С. 475-499.
11. Варден Б.Л. ван дер. Пробуждающаяся наука. - М., Гос. изд-во Ф-МЛ, 1959. 146 с.
12. Вейль Г. Симметрия. М., Наука, 1968. 191 с.
13. Вигнер Е. Этюды о симметрии. М., Мир, 1971. 318 с.
14. Винер Н. Динамические системы физики и биологии// Вестн. АН СССР. 1964. № 7. С. 43-45 (перевод статьи в New Scientist, № 375. 1964).
15. Владимиров Ю. С. Метафизика. М., Бином. Лаборатория знаний. 2002. 534 с.
16. Волохонский А.Г. Генетический код и симметрия//Симметрия в природе. - Л., 1971. С. 371-375.
17. Волошинов А.В. Математика и искусство. М., Просвещение. 2000. 399 с.
18. Горбачев В.В. Концепции современного естествознания. М., 2003. 592 с.
19. Гратиа Д. Квазикристаллы//Успехи физических наук. 1988. Т. 156. Вып. 2. С. 347-363.
20. Гринченко С.Н., Загускин СЛ. Механизм живой клетки: алгометрическая модель. М., Наука, 1989. 232 с.
21. Дирак П.А.М. Воспоминание о необычной эпохе. Сборник статей. М., Наука, 1990.

22. Жирмунский А.В., Кузьмин В.И. Критические уровни в процессах развития биологических систем. - М., Наука, 1982. 178 с.
23. Иванус А.И. Код да Винчи в бизнесе или гармоничный менеджмент по Фибоначчи. М., Комкнига, 2006.
24. Клайн М. Математика. Поиск истины. М., Мир, 1988.
25. Коробко В.И. Золотая пропорция: некоторые философские аспекты гармонии. М., Изд-во АСВ, 2000. 208 с.
26. Лима-де-Фариа А. Эволюция без отбора. М., Мир, 1991. 455 с.
27. Лосев А.Ф. История философии как школа мысли. Коммунист. 1981. № 11.
28. Любищев А.А. Понятие сравнительной анатомии//Вопросы общей зоологии и медицинской паразитологии. - М., 1962. С. 189-214.
29. Ляпунов А.А. О кибернетических вопросах биологии//Проблемы кибернетики. М., 1972. Вып. 5. С. 5-40.
30. Марутаев М.А. Гармония как закономерность природы. //Золотое сечение. Три взгляда на природу гармонии. - М., Стройиздат, 1990. С. 130-233.
31. Мигдал А.Б. Физика и философия// Вопр. филос., 1990. № 1. С. 29
32. Овчинников Н.Ф. Принципы сохранения. М., Наука, 1966. 329 с.
33. Петрашов В.В. Глаза и мозг эволюции. Новая теория эволюции организмов. - М., 2006. 458 с.
34. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение//Метафизика. Москва, Бином, 2006. С. 216-250.
35. Планк М. Единство физической картины мира. М., Наука, 1966.
36. Пригожин И. От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках. М., Наука, 1985.
37. Пуанкаре А. О науке. М., Наука. 1990.
38. Рассел Б. История западной философии. Новосибирск, Сибир. унив. изд-во, 2003.
- Рашевский Н. Модели и математические принципы в биологии// Теоретическая и математическая биология. - М., Мир, 1968. С.48-66.

39. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. М., Мир, 1969. 216 с.
40. Розин Б. Золотое сечение – морфологический закон природы. 2003. <http://www.abcspeople.com/idea/zolotosech/rozin-ru/txt.htm>
41. Руденко А.П. Самоорганизация и прогрессивная эволюция в природных процессах в аспекте концепции эволюционного катализа// Российский химический журнал. 1995. Т. 39. № 2. С. 55-71.
42. Рыбин И.А. Психофизика: Поиск новых подходов//Природа. 1990. № 2. С. 19-25.
43. Свентицкий И.И. Энергосбережение в АПК и энергетическая экстремальность самоорганизации. М., 2007. 464 с.
44. Селье Г. От мечты к открытию. - М., Прогресс, 1987. 367 с.
45. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. М., Наука, 1980.
46. Соколов А.А., Соколов А.Я. Математические закономерности электрических колебаний мозга. - М., Наука, 1976. 97 с.
47. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. - Минск, Наука и техника, 1984. 264 с.
48. Стахов А.П. Введение в алгометрическую теорию измерения. М., Сов. радио, 1977.
49. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. - М., Радио и связь, 1984. 365 с.
50. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи//Доклады АН Украины. 1993. Т. 208. № 7. С. 9-14.
51. Стахов А.П. Гармония Мироздания и золотое сечение: древнейшая парадигма и ее роль в современной науке. 2006. (Сайт: <http://www.obretenie.narod.ru/txt/stakhov/harmony2.htm>)
52. Стахов А.П. Математика Гармонии как «золотая» парадигма современной науки //Академия тринитаризма. М., Эл. № 77-6567, публ.15999, 15.10.2009.
53. Стахов А.П. Математизация гармонии и гармонизация математики //«Академия тринитаризма». М., Эл. № 77-6567, публ. 16897, 16.10.2011.
54. Степанов И.Н. Формы в мире почв. - М., Наука, 1986. 190 с.

55. Суббота А.Г. «Золотое сечение» («sectio aurea») в медицине. - С.-Птб., Изд. Военно-мед. акад., 1994. 116 с.
56. Татаренко А.А. На пороге первого тысячелетия эры полигармонии мира// Труды международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого сечения в Природе, Науке и Искусстве». Винница, 2003.
57. Тяпкин А., Шибанов А.. Пуанкаре. М., Мол. Гвардия, 1982. 415 с
58. Уотермен Т. Заключительное слово// В кн.: Теория систем и биология. М., Мир. 1968 с. 431-442.
59. Урманцев Ю.А. Симметрия природы и природа симметрии. - М., Мысль, 1974. 229 с.
60. Хадарцев А.А., Тульян В.А., Зилов В.Г. и др. Теория и практика восстановительной медицины. Тула – Москва, 2004.
61. Хакен Г. Синергетика. М., Мир, 1980.
62. Харитонов А.С. Симметрия хаоса и порядка в круговороте энергии (Холистическая парадигма природы, человека и общества). М., Издательско-аналитический центр «Энергия», 2004.
63. Цветков В.Д. Сердце, золотое сечение и симметрия. Пущино, ПНЦ РАН, 1997. 170 с.
64. Цветков В.Д. Кислородное обеспечение сердца и принцип оптимального вхождения. Серпухов, ИП А.А. Кулаков, 2004. 152 с.
65. Цветков В.Д. Золотая гармония и сердце. Пущино, ООО «Фотон-век», 2008. 203 с.
66. Черепяхин Ю. Г. Парадигма Единой Жизни // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15670, 26.11.2009
67. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. М., Наука, 1973.
68. Якушко С.И. «Фибоначчиева» закономерность в периодической системе элементов Д.И. Менделеева // Академия Тританиризма. М., Эл. № 77-6567, публ.15695. 27.06.2010.
69. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine. 1957. N 31. P. 98-119.
70. Gazale M.J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princenton, New Jersey: Princeton University Press, 1999.
71. Grant C., Bunnell I.L., Green D.G. The reservoir function of

- the left atrium during ventricular systole//Amer. J. Med. 1964. V. 37. № 1. P. 36-43.
72. Holt J.P., Rohde E.A., Kines H. Ventricular volumes and body weight in mammals//Amer. J. Physiol. 1968. V. 215. № 3. P. 704-715.
73. Kamiya A., Togawa W. Optimal branching structure of the vascular tree // Bull. Math. Biophys. 1972. V. 34. N 4. P. 431-438.
74. Kappraff J. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific. 2001.
75. Khouri t.m., Gregg D.E., Rayford C. R. Effect exercise on cardiac output, left coronary flow and myocardial metabolism in unanesthetized dog //Circ. Res. 1965. V. 17. N 5. P. 427-437.
76. Plank M. Religion und Naturwissenschaft. - Leipzig, 1952.
77. Rashevsky N. Mathematical biophysics. Physico-mathematical foundations of biology. Vol. II. - New York: Dover, 1960. 462 p.
78. Ross G. Blood flow in the right coronary artery dog // Cardivasc. Res. 1967. V. 1. N. 2. P. 138-144.
79. Scholtholt J., Lochner W. Systolischer und diastolischer Anteil an Coronarsinusausfluss in Abhängigkeit von Grösse der mittleren Ausflusses //Pflüg. Arch. 1966. Bd. 290. N 4. S. 349-361.
80. Spinadel W. de. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998.
81. Stakhov A. The Mathematics of Harmony from Euclid to Comtemporary and Computer Science. Singapore, World Scientific, 2009.
82. Toma Y., Matsuda Y., Moritani K., Ogawa H. et al. Left atrial filling in normal human subjects : relation between left atrial contraction and atrial early filling//Cardiol. Res. 1987. V. 21. № 4. P.255-259.
83. Tsarikis A.G., Padiyar R., Gordon D.A., Lipton I. Left atrial size and geometry in the intact dog//Amer. J. Physiol. 1977. V. 232. № 2. P. H167-H172.
84. Uylings H.B. Optimization of diameters and bifurcation angles in lungs and vascular tree structures // Bull. Math. Biol. 1977. V.39. P. 509-520.
85. Zamir M. Optimality principles in arterial branching //J. Theor. Biol. 1976. V.62. N. 1. P. 227-251.

Н.Ф.Семенюта

**О взаимосвязи
гармонических
последовательностей чисел**

Исходные положения

Взаимосвязь (согласованность) гармонических последовательностей чисел, один из основных признаков гармонии [1, 2, 3]. В предыдущих работах автора были рассмотрены электрические модели гармонических последовательностей чисел, связи золотого сечения и параметров простейших лестничных электрических цепей и соответствующих им характеристические квадратные уравнения [4, 5, 6].

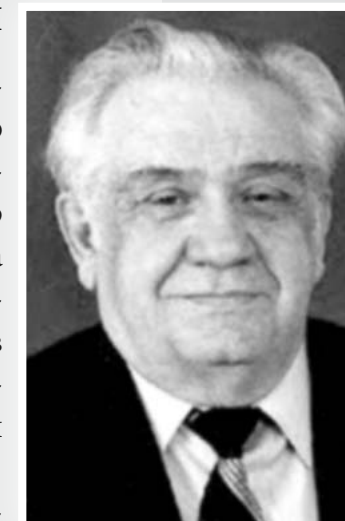
В настоящей статье приведены результаты новых исследований взаимосвязи гармонических последовательностей чисел на основе характеристических квадратных уравнений, вытекающих из электрических моделей гармонических последовательностей чисел [7, 8, 9]. Показаны взаимосвязи последовательностей **чисел Фибоначчи и Люка**, а также взаимосвязи практически отсутствующих в исследованиях по математической теории гармонии последовательностей **чисел Пелля и Пелля-Люка**. Сделана первая попытка обобщения взаимосвязи гармонических последовательностей чисел.

**Обобщенные последовательности
гармонических чисел**

В основе обобщенных последовательностей чисел лежит рекуррентное соотношение:

IN BREVI

Николай Филиппович Семенюта — действительный член Международного клуба Золотого Сечения, кандидат технических наук, профессор, почетный профессор Белорусского государственного университета транспорта (г. Гомель), академик Международной академии связи (г. Москва), специалист в области телекоммуникаций и телеинформатики (многоканальная связь, передача дискретной информации, теория электрической связи).



Профессиональные и научные интересы Николая Филипповича тесно связаны с прикладной математикой гармонии, историей и философией техники. Он является соавтором девяти учебников по телекоммуникации и телеинформатике для вузов железнодорожного транспорта, автором большого числа научно-методических и публицистических работ, включая пять учебных пособий по математике гармонии:

1. «Золотая пропорция в природе и искусстве», соавтор В.Л. Михаленко, 2002, 82 с.
2. «Фундаментальные основы красоты — гармонические пропорции», 2010, 177 с.
3. «Гармонические пропорции в науке и технике», 2012, 172 с.
4. «Принимая решение — начинай с золотого сечения», 2012, 68 с.
5. «Анализ линейных электрических цепей методом лестничных чисел», 2010, 110 с.

В своей новой статье Н.Ф. Семенюта устанавливает важные взаимосвязи между обобщенными рекуррентными последовательностями, выявляя целую область, в которой могут быть использованы данные взаимосвязи, приводящие к возникновению целостных гармонически устроенных систем.

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, \quad (1)$$

приведенное в работе [10]. Если обозначить $G_1 = p$ и $G_2 = q$, то обобщенная рекуррентная последовательность примет следующий вид:

$$p, \quad q, \quad p + q, \quad p + 2q, \quad 2p + 3q, \quad 3p + 5q, \quad 5p + 8q, \dots$$

Числа $G_1 = p$ и $G_2 = q$ своего рода гены обобщенных рекуррентных последовательностей, которые определяют значения всех последующих чисел. Из (1) следует, что последовательности обобщенных рекуррентных чисел соответствуют сумме чисел последовательностей Фибоначчи с учетом коэффициентов p и q :

$$G_n(p; q) = pF_{n-2} + qF_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

где F_{n-2} и F_{n-1} числа Фибоначчи.

В зависимости от значений начальных чисел $G_1 = p$ и $G_2 = q$ можно получить бесконечное множество частных последовательностей рекуррентных чисел. Простейшими частными являются случаи:

$$G_n(1; q) = qF_{n-1} + F_{n-2}, \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

числовые последовательности которых, равны:

$G_n(p; q)$	p	q	G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	...
$G_n(1; 1) = F_n(1; 1)$	1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	...
$G_n(1; 2) = F_n(1; 2)$	1	2	1	1	2	3	5	8	13	21	...
$G_n(1; 3) = L_n(1; 3)$	1	3	2	1	3	4	7	11	18	29	...
$G_n(1; 4)$	1	4	3	1	4	5	9	14	23	37	...

При $q = 1$ образуется основная последовательность Фибоначчи $G_n(1; 1) = F_n(1; 1)$, при $q = 2$ – укороченная последовательность Фибоначчи $G_n(1; 2) = F_n(1; 2)$, при $q = 3$

– последовательность Люка $G_n(1; 3) = L_n(1; 3)$, при $q = 4$ последовательность $G_n(1; 4)$ и т. д.

К простейшим частным случаям соотношения (1) относятся также последовательности чисел типа Пелля:

$G_n(p; q)$	q	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	...
$P_n(1; 1) = F_n(1; 1)$	1	0	1	1	2	3	5	8	13	...
$P_n(1; 2)$	2	0	1	2	5	12	29	70	169	...
$P_n(1; 3)$	3	0	1	3	10	33	109	360	1189	...
$P_n(1; 4)$	4	0	1	4	17	72	305	1292	5473	...

в основе которых лежит мультирекуррентное соотношение:

$$P_n = qP_{n-1} + P_{n-2}, \quad q = 1, 2, 3, \dots, \quad n > 2, \quad (4)$$

где q – множитель числа P_{n-1} ; P_1 и P_2 – начальные числа последовательности.

При $q = 1$ образуется последовательность, которая начинается числами $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$ и она совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи $F_n(1; 1)$. При $q = 2$ и начальных числах $P_1 = 1$ и $P_2 = 2$ образуются основная последовательности чисел Пелля $P_n(1; 2)$. При $q > 2$ образуются последовательности Пелля более высокого порядка [11, 12].

Разновидностью последовательности чисел Пелля являются числа Пелля-Люка ($q = 2$), которые образуются по соотношению:

$$PL_n = 2PL_{n-1} + PL_{n-2}, \quad n > 2, \quad (5)$$

с начальными числами $PL_1 = 2$ и $PL_2 = 6$:

PL_0	PL_1	PL_2	PL_3	PL_4	PL_5	PL_6	PL_7	...
2	2	6	14	34	82	198	478	...

Числа Пелля-Люка связаны с числами Пелля (4) соотношением:

$$PL_n = P_{n-1} + P_{n+1}, \quad n > 2,$$

с начальными числами $P_1 = 2$ и $P_2 = 2$.

Модифицированные числа Пелля образуются по соотношению:

$$PM_n = 2PM_{n-1} + PM_{n-2}, \quad n > 2 \quad (6)$$

и им соответствует последовательность чисел ($q = 2$):

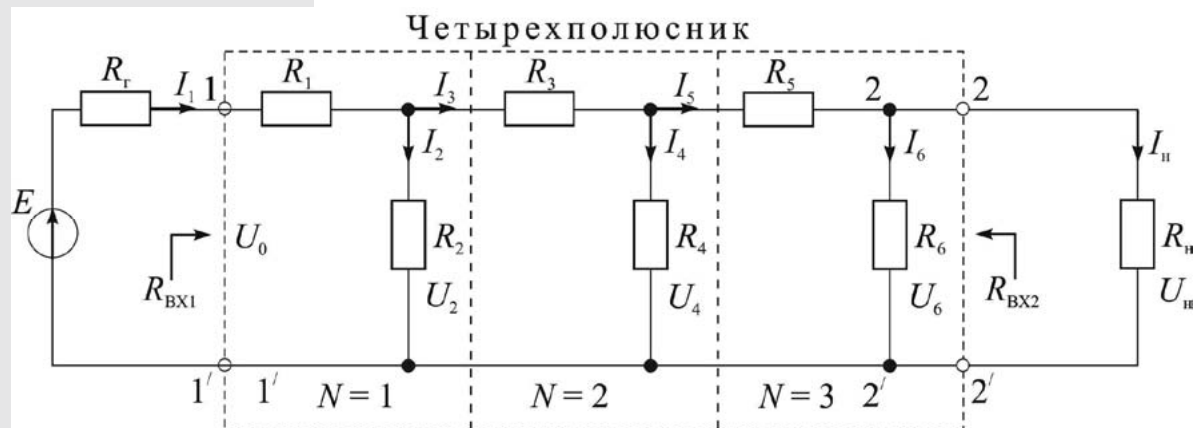
PM_0	PM_1	PM_2	PM_3	PM_4	PM_5	PM_6	PM_7, \dots
0	1	1	3	7	17	41	99 ...

с начальными числами $PM_1 = 1$ и $PM_2 = 1$, где $PM_n = PL_n / 2$.

Уравнения электрических моделей последовательностей чисел

Простейшей электрической моделью гармонических последовательностей чисел является однородная электрическая цепь (рисунок 1), состоящая из двух элементов – резисторов R_n и R_2 и нагрузки R_n .

(Рисунок 1)



В зависимости от величин резисторов R_n и нагрузки R_n можно образовать множество вариантов согласованных («золотых») электрических цепей. Условием согласования (гармонии) является равенство сопротивлений источника R_2 и нагрузки R_n или с учетом проходного четырехполюсника – равенство сопротивлений источника R_2 и входного сопротивления четырехполюсника $R_{вх1}$ которое должно быть равным также R_n и R_x [13].

Условие $R_{вх1} = R_n$ выполняется в единственном случае, когда R_n равно характеристическому сопротивлению R_x . Таким образом, для согласованной электрической цепи должно выполняться условие:

$$R_2 = R_{вх1} = R_x = R_n.$$

Значение R_x можно определить из цепной дроби, соответствующей электрической цепи, представленной на рисунке 1:

$$R_{вх} = R_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{R_5 + \dots}}}} \rightarrow R_x,$$

где $R_1 = R_3 = R_5$ – сопротивления продольных ветвей; $Y_2 = Y_4 = Y_6$ проводимости поперечных ветвей цепи ($Y_2 = 1/R_2$, $Y_4 = 1/R_4$, $Y_6 = 1/R_6$).

В свернутом виде цепные дроби можно представить уравнениями:

$$R_1 + \frac{1}{R_x} = R_x \quad \text{или} \quad R_x^2 - R_1 R_x - 1 = 0,$$

которое соответствует приведенному квадратному уравнению

$$x^2 - qx - 1 = 0, \text{ где } x = R_x, R_1 = q.$$

Для случая $q = 1$ входное сопротивление цепная дробь в пределе стремится к характеристическому сопротивлению:

$$R_{\text{вх}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803... \rightarrow R_x,$$

т. е. к вещественному корню $\Phi = 1,618$ уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Цепная дробь для случая $q = 2$ имеют вид:

$$R_{\text{вх}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \rightarrow \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} = 2,41422... \rightarrow R_x,$$

т. е. в пределе значение характеристического сопротивления равно $M = 2,414$ вещественному корню уравнения

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Цепная дробь для случая $q = 3$ имеют вид:

$$R_{\text{вх}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}} \rightarrow \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3,30278... \rightarrow R_x,$$

т. е. в пределе значение характеристического сопротивления равно $N = 3,303$ вещественному корню уравнения

$$x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Обратим внимание, что в случае $q = 1$ сопротивления продольных и поперечных ветвей равны друг другу ($R_1 = R_3 = R_5 = (R_2 = R_4 = R_6) = 1$) и электрическая цепь соответствует электрической модели рекуррентной последовательности чисел Фибоначчи. В случаях $q = 2$ и $q = 3$ сопротивления продольных и поперечных ветвей не равны ($R_1 = R_3 = R_5 \neq (R_2 = R_4 = R_6)$) и последовательность чисел становится мультирекуррентной [3].

При значениях $q = 1, 2, 3$ дискриминанты равны числам Фибоначчи $D = 5, 8, 13$. Причем, конкретному D , соответствуют две взаимосвязанные последовательности чисел. Так, случаю $q = 1$ ($D = F_5 = 5$) соответствуют последовательности чисел Фибоначчи и Люка, случаю $q = 2$ ($D = F_6 = 8$) – последовательности Пелля и Пелля-Люка, $q = 3$ ($D = F_7 = 13$) – последовательностям типа Пелля.

Взаимосвязь чисел Фибоначчи и Люка

Основной последовательности чисел Фибоначчи соответствует характеристическое уравнение:

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad q = 1. \quad (7)$$

Численные значения корней уравнения соответственно, равны:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618034... = \Phi, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,618034... = -\Phi^{-1}.$$

Значения степеней чисел Φ и Φ^{-1} приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Положительные и отрицательные степени числа $\Phi = 1,618$

n	0	1	2	3	4	5	6
Φ^n	$\frac{2+0\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+1\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+1\sqrt{5}}{2}$	$\frac{4+2\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$	$\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$	$\frac{18+8\sqrt{5}}{2}$
Φ^{-n}	$\frac{2-0\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+1\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3-1\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-4+2\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}$	$\frac{18-8\sqrt{5}}{2}$

Из таблицы 1 следует, что в общем случае n -я степень числа Φ может быть представлена выражением

$$\Phi^n = \frac{A_n + B_n \sqrt{5}}{2}, \quad (8)$$

где A_n и B_n являются числами из последовательностей, задаваемых соответственно таблицами 2 и 3.

Таблица 2 – Значения чисел последовательности A_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
A_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	123

Таблица 3 – Значения чисел последовательности B_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
B_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55

Из таблицы 2 следует последовательность чисел A_n для положительных значений n , которая совпадает с последовательностью чисел Люка $L_n(1;3)$:

$$A_n = \{L_0 \ L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4 \ L_5 \ L_6 \ L_7 \ L_8 \ L_9 \ L_{10} \dots, \{2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 11 \ 18 \ 29 \ 47 \ 76 \ 123 \dots\},$$

Последовательности чисел A_n с отрицательным значением n , представляет знакопеременную последовательность чисел Люка $L_n(-1;3)$:

$$A_{-n} = \{L_0 \ L_{-1} \ L_{-2} \ L_{-3} \ L_{-4} \ L_{-5} \ L_{-6} \ L_{-7} \ L_{-8} \ L_{-9} \ L_{-10} \dots, \{2 \ -1 \ 3 \ -4 \ 7 \ -11 \ 18 \ -29 \ 47 \ -76 \ 123 \dots\},$$

в которой каждое число A_{-n} равно сумме двух предыдущих чисел

$$A_{-n} = A_{-n(n+1)} + A_{-n(n+2)}.$$

Из таблицы 3 следует последовательность чисел B_n , которая совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи $F_n(1;-1)$:

$$B_n = \{F_0 \ F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6 \ F_7 \ F_8 \ F_9 \dots, \{0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 13 \ 21 \ 34 \dots\},$$

а последовательности чисел B_{-n} с отрицательными значениями n , представляет знакопеременную последовательность чисел Фибоначчи $F_n(1;1)$:

$$B_{-n} = \{F_0 \ F_{-1} \ F_{-2} \ F_{-3} \ F_{-4} \ F_{-5} \ F_{-6} \ F_{-7} \ F_{-8} \ F_{-9} \dots, \{0 \ 1 \ -1 \ 2 \ -3 \ 5 \ -8 \ 13 \ -21 \ 34 \dots\}$$

в которой каждое число B_{-n} равно сумме двух последующих чисел

$$B_{-n} = B_{-n(n+1)} + B_{-n(n+2)}.$$

Из приведенных последовательностей чисел следуют две формулы, устанавливающие связь степеней числа Φ с числами последовательностей A_n и B_n , соответствующие положительным значениям n :

$$A_n = L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}, \quad (9)$$

$$B_n = F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\Phi + \Phi^{-1}} = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}. \quad (10)$$

Соотношение (10) есть не что иное, как известная формула французского математика **Жака Бине** (1786–1856):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - \bar{\Phi}^{-n} \right],$$

$$\bar{\Phi} = -0,618, \text{ «фи с крышкой» [14].}$$

Формулы Бине (9), (10) для чисел Фибоначчи, а также чисел Люка более известны в таком виде:

– числа Фибоначчи:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad (11)$$

– числа Люка:

$$L_n = (1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n.$$

Значения суммы $x_1^n + x_2^n$ и разности $x_1^n - x_2^n$ корней уравнения (7) приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Сумма и разность степеней корней уравнения $x^2 - x - 1 = 0$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^n + x_2^n$	2	1	3	4	7	11	18	29	47
$x_1^n - x_2^n$	20	$1\sqrt{5}$	$1\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$	$5\sqrt{5}$	$8\sqrt{5}$	$13\sqrt{5}$	$21\sqrt{5}$

Из таблиц 4 следуют две последовательности чисел. Первая, состоит из последовательности чисел Люка $L(1;3)$:

$$L_0 \ L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4 \ L_5 \ L_6 \ L_7 \ L_8 \ L_9 \ L_{10} \dots, \\ 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 11 \ 18 \ 29 \ 47 \ 76 \ 123\dots,$$

а вторая – произведений чисел Фибоначчи $F(1;1)$ и числа $\sqrt{5}$:

$$F_0\sqrt{5} \ F_1\sqrt{5} \ F_2\sqrt{5} \ F_3\sqrt{5} \ F_4\sqrt{5} \ F_5\sqrt{5} \ F_6\sqrt{5} \ F_7\sqrt{5} \ F_8\sqrt{5} \dots, \\ 0 \ 1\cdot\sqrt{5} \ 1\cdot\sqrt{5} \ 2\cdot\sqrt{5} \ 3\cdot\sqrt{5} \ 5\cdot\sqrt{5} \ 8\cdot\sqrt{5} \ 13\cdot\sqrt{5} \ 21\cdot\sqrt{5} \dots$$

Значения чисел первой последовательности, начиная с некоторого n , становится мало отличным от значений чисел второй последовательности. Так, при $n > 10$, сумма $x_1^{11} + x_2^{11} = 198,959 + 0,005 = 198,964$ и разность $x_1^{11} - x_2^{11} = 198,959 - 0,005 = 198,959$, т. е. результат практически одинаков. В этом случае, числа последовательностей Фибоначчи и Люка связаны соотношениями:

$$L_n = F_n\sqrt{5}, \quad F_n = \frac{L_n}{\sqrt{5}}.$$

Числом, связывающим последовательности Фибоначчи и Люка, является коэффициент пропорциональности $\sqrt{5}$ [11]. Отсюда следует, что свойства последовательностей чисел Фибоначчи и Люка, за редким исключением, с точностью до коэффициента $\sqrt{5}$ совпадают. Так, например, тождество Кассини для чисел Люка и Фибоначчи связаны соотношением:

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5F_n^2 - 5F_{n-1}F_{n+1} = 5(F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}) = 5 \cdot 1 = 5.$$

Взаимосвязь чисел Пелля и Пелля-Люка

Для основной последовательности чисел Пелля (4) характеристическое уравнения имеет вид

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad q = 2 \quad (15)$$

и корни уравнения соответственно равны:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} = 2,41421\dots = M,$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} = -0,41421\dots = -M^{-1}.$$

$$x_1 + x_2 = M - M^{-1} = 2, \quad x_1 x_2 = M(-M^{-1}) = -1.$$

$$x_1 - x_2 = M - (-1/M) = M + 1/M = \sqrt{8}.$$

Значения степеней M и M^{-1} уравнения (14) приведены в таблице 6.

Таблица 6 – Положительные и отрицательные степени числа M

n	0	1	2	3	4	5	6
M^n	$\frac{2+0\sqrt{8}}{2}$	$\frac{2+1\sqrt{8}}{2}$	$\frac{6+2\sqrt{8}}{2}$	$\frac{14+5\sqrt{8}}{2}$	$\frac{34+12\sqrt{8}}{2}$	$\frac{82+29\sqrt{8}}{2}$	$\frac{198+70\sqrt{8}}{2}$
M^{-n}	$\frac{2-0\sqrt{8}}{2}$	$\frac{-2+1\sqrt{8}}{2}$	$\frac{6-2\sqrt{8}}{2}$	$\frac{-14+5\sqrt{8}}{2}$	$\frac{34-12\sqrt{8}}{2}$	$\frac{-82+29\sqrt{8}}{2}$	$\frac{198-70\sqrt{8}}{2}$

Из таблицы 6 следует, что в общем случае n -я степень числа M может быть представлена выражением

$$M^n = \frac{A_n + B_n \sqrt{8}}{2},$$

где A_n и B_n являются числами из последовательностей, задаваемых соответственно таблицами 7 и 8.

Таблица 7 – Значения чисел последовательностей A_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726
A_{-n}	2	-2	6	-14	34	-82	198	-478	1154	-2786	6726

Таблица 8 – Значения чисел последовательности B_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
B_{-n}	0	1	-2	5	-12	29	-70	169	-408	985	-2378

Из таблицы 7 следует последовательность чисел A_n для положительных значений n , которая совпадает с последовательностью чисел Пелля-Люка $PL_n(2;6)$:

$$A_n \quad \{ PL_0 \quad PL_1 \quad PL_2 \quad PL_3 \quad PL_4 \quad PL_5 \quad PL_6 \quad PL_7 \quad PL_8 \quad PL_9 \dots, \\ \{ 2 \quad 2 \quad 6 \quad 14 \quad 34 \quad 82 \quad 198 \quad 478 \quad 1154 \quad 2786 \dots \}.$$

Числа A_n с отрицательными значениями n представляет знакопеременную последовательность Пелля-Люка:

$$A_{-n} \quad \{ PL_0 \quad PL_1 \quad PL_2 \quad PL_3 \quad PL_4 \quad PL_5 \quad PL_6 \quad PL_7 \quad PL_8 \quad PL_9 \dots, \\ \{ 2 \quad -2 \quad 6 \quad -14 \quad 34 \quad -82 \quad 198 \quad -478 \quad 1154 \quad -2786 \dots \},$$

в котором каждое число A_n равно сумме двух предыдущих чисел.

Из таблиц 8 следуют две последовательности чисел. Первая, первая состоит из чисел Пелля $P_n(1;2)$

$$B_n \quad \{ P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \quad P_7 \quad P_8 \dots, \\ \{ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 12 \quad 29 \quad 70 \quad 169 \quad 408 \dots \} \quad q = 2.$$

Вторая последовательность с отрицательными значениями представляет знакопеременную последовательность чисел Пелля:

$$B_n \quad \{ P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \quad P_7 \quad P_8 \dots, \\ \{ 0 \quad 1 \quad -2 \quad 5 \quad -12 \quad 29 \quad -70 \quad 169 \quad -408 \dots \}$$

в котором каждое число B_n равно сумме двух предыдущих чисел.

Из приведенных последовательностей чисел следуют две формулы, устанавливающие связь степеней числа M с числами A_n и B_n , соответствующими положительными значениям n :

$$A_n = PL_n = M^n + (-1)^n M^{-n}, \quad (16)$$

$$B_n = P_n = \frac{M^n + (-1)^n M^{-n}}{M + M^{-1}} = \frac{M^n + (-1)^n M^{-n}}{\sqrt{8}}. \quad (17)$$

Из соотношений (16) и (17) также следуют также формулы типа Бине:

- числа Пелля:
$$P_n = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\left(\frac{2 + \sqrt{8}}{2} \right)^n - \left(\frac{2 - \sqrt{8}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right],$$

- числа Пелля-Люка
$$PL_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n.$$

Значения разности $x_1^n - x_2^n$ и сумм $x_1^n + x_2^n$ корней уравнения приведены в таблица 9.

Таблица 9 – Значения сумм и разностей корней уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^n + x_2^n$	2	2	6	14	34	82	198	478	1154
$x_1^n - x_2^n$	0	$1\sqrt{8}$	$2\sqrt{8}$	$5\sqrt{8}$	$12\sqrt{8}$	$29\sqrt{8}$	$70\sqrt{8}$	$169\sqrt{8}$	$309\sqrt{8}$

Из таблиц 9 следуют две последовательности чисел. Первая, первая состоит из чисел Пелля-Люка $PL_n(2;6)$:

$$\begin{array}{cccccccc} PL_0 & PL_1 & PL_2 & PL_3 & PL_4 & PL_5 & PL_6 & \dots \\ 2 & 2 & 6 & 14 & 34 & 82 & 198 & \dots \end{array}$$

и вторая последовательность состоит из произведения чисел Пелля и числа $\sqrt{8}$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} P_0\sqrt{8} & P_1\sqrt{8} & P_2\sqrt{8} & P_3\sqrt{8} & P_4\sqrt{8} & P_5\sqrt{8} & P_6\sqrt{8} & P_7\sqrt{8} & P_8\sqrt{8} & \dots \\ 0 & 1\cdot\sqrt{8} & 2\cdot\sqrt{8} & 5\cdot\sqrt{8} & 12\cdot\sqrt{8} & 29\cdot\sqrt{8} & 70\cdot\sqrt{8} & 169\cdot\sqrt{8} & 309\cdot\sqrt{8} & \dots \end{array}$$

При $n > 10$, числа Пелля P_n и Пелля-Люка PL_n связаны соотношениями:

$$PL_n = P_n \sqrt{8}, \quad P_n = \frac{PL_n}{\sqrt{8}}, \quad q = 2.$$

Числом, связывающим последовательности Фибоначчи и Люка, является коэффициент пропорциональности $\sqrt{8}$.

Взаимосвязь чисел

последовательностей типа Пелля

Последовательности чисел типа Пелля ($q = 3$) соответствует характеристическое уравнение

$$x^2 - 3x - 1 = 0, \quad (18)$$

корни которого соответственно, равны:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3,3028\dots = N,$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} = -0,30278\dots = -N^{-1},$$

а сумма и разность, и произведение корней уравнения (18):

$$x_1 + x_2 = N - N^{-1} = 3, \quad x_1 - x_2 = N - N^{-1} = \sqrt{13},$$

$$x_1 x_2 = N(-N^{-1}) = -1.$$

Значения степеней чисел N и N^{-n} приведены в таблице 10.

Таблица 10 – Положительные и отрицательные степени числа $N=3,303$

n	0	1	2	3	4	5
N^n	$\frac{2+0\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3+1\sqrt{13}}{2}$	$\frac{11+3\sqrt{13}}{2}$	$\frac{36+10\sqrt{13}}{2}$	$\frac{119+33\sqrt{13}}{2}$	$\frac{393+109\sqrt{13}}{2}$
N^{-n}	$\frac{2+0\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-3+1\sqrt{13}}{2}$	$\frac{11-3\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-36+10\sqrt{13}}{2}$	$\frac{119-33\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-393+109\sqrt{13}}{2}$

Из таблицы 10 следует, что n -я степень корней уравнения (22) может быть представлена формулой

$$N^n = \frac{A_n + B_n \sqrt{13}}{2},$$

где A_n и B_n являются числами из последовательностей, задаваемых соответственно таблицами 11 и 12.

Таблица 11 – Значения чисел последовательности A_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_n	2	3	11	36	119	393	1298	4287	14159	46794	154541
A_{-n}	2	-3	11	-36	119	-393	18	-29	47	-76	123

Таблица 12 – Значения чисел последовательности B_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	0	1	3	10	33	109	360	1189	4756	15497	61868
B_{-n}	0	1	-3	10	-33	109	-360	1189	-4756	15497	-61868

Из таблицы 11 следует последовательность чисел A_n с положительными значениями n , которая совпадает с последовательностью чисел Пелля $P_n(2;3)$

$$A_n = \{ \overset{P_0}{2} \overset{P_1}{3} \overset{P_2}{11} \overset{P_3}{36} \overset{P_4}{119} \overset{P_5}{393} \overset{P_6}{1298} \overset{P_7}{4287} \dots \}, \quad q=3.$$

Последовательности чисел A_n с отрицательным значением n , представляет знакопеременную последовательность чисел Пелля:

$$A_{-n} = \{ \overset{P_0}{2} \overset{P_1}{-3} \overset{P_2}{11} \overset{P_3}{-36} \overset{P_4}{119} \overset{P_5}{-393} \overset{P_6}{-29} \overset{P_7}{47} \dots \},$$

в которой каждое число A_{-n} равно сумме двух предыдущих чисел (9).

Из таблицы 12 следует последовательность чисел B_n , которая совпадает с последовательностью чисел Пелля ($q=3, P_1=1, P_2=3$):

$$B_n = \{ \overset{P_0}{0} \overset{P_1}{1} \overset{P_2}{3} \overset{P_3}{10} \overset{P_4}{33} \overset{P_5}{109} \overset{P_6}{393} \overset{P_7}{13} \overset{P_8}{2} \dots \},$$

а последовательности чисел B_{-n} с отрицательными значениями n , представляет знакопеременную последовательность чисел Пелля ($q=3, P_0=0, P_1=1$)

$$B_{-n} = \{ \overset{P_0}{0} \overset{P_1}{1} \overset{P_2}{-3} \overset{P_3}{10} \overset{P_4}{-33} \overset{P_5}{109} \overset{P_6}{-393} \overset{P_7}{13} \overset{P_8}{-21} \dots \},$$

в котором каждое число B_{-n} равно сумме двух последующих чисел.

Из значений последовательностей чисел следуют две формулы связь степеней числа N с числами A_n и B_n , соответствующим положительными значениям n :

$$A_n = P_n = N^n + (-1)^n N^{-n}, \quad (19)$$

$$B_n = P_n = \frac{N^n - (-1)^n N^{-n}}{N + N^{-1}} = \frac{N^n - (-1)^n N^{-n}}{\sqrt{13}}. \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) также следуют формулы типа Бине:

$$- \text{числа Пелля: } P_n = \frac{1}{\sqrt{13}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2} \right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2} \right)^n \right], \quad (21)$$

$$- \text{числа Пелля-Люка: } PL_n = (1 + \sqrt{13})^n + (1 - \sqrt{13})^n. \quad (22)$$

Значения разности и сумм степеней корней уравнения (18) приведены в таблице 13.

Таблица 13 – Сумма и разность степеней корней уравнения $x^2 - 3x - 1 = 0$

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^n + x_2^n$	2	3	11	36	119	393	1298
$x_1^n - x_2^n$	0	$1\sqrt{13}$	$3\sqrt{13}$	$10\sqrt{13}$	$33\sqrt{13}$	$109\sqrt{13}$	$360\sqrt{13}$

При $n > 10$ числа Пелля P_n и Пелля-Люка PL_n практически равны и связаны соотношениями:

$$PL_n = P_n \sqrt{13}, \quad P_n = \frac{PL_n}{\sqrt{13}}, \quad q = 3.$$

Число, связывающим последовательности Фибоначчи и Люка, является коэффициент пропорциональности $\sqrt{13}$.

Взаимосвязь чисел обобщенных последовательностей чисел

Значения обобщенных чисел (2) изменяются по линейному закону. Эта зависимость следует из соотношений чисел обобщенных последовательностей $G_n(1; q)$ к числам основной последовательности Фибоначчи $G_n(1; 1)$:

$$\rho = \frac{G_n(1; q)}{G_n(1; 1)}. \quad (23)$$

В результате анализа последовательностей обобщенных чисел, были получены следующие значения отношений:

q	1	2	3	4	5
ρ	1	$1+1 \cdot \Phi^{-1}$	$1+2 \cdot \Phi^{-1}$	$1+3 \cdot \Phi^{-1}$	$1+4 \cdot \Phi^{-1}$

Из полученных результатов следует:

$$\rho = \frac{G_n(1; q)}{G_n(1; 1)} = 1 + (q-1)\Phi^{-1}, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

В общем случае отношение (23) равно:

$$c = \frac{F_{n-1} + qF_n}{F_{n-1} + F_n} = \frac{1 + q\Phi}{1 + \Phi} = \Phi^{-2} + q\Phi^{-1}. \quad (24)$$

Таким образом, в зависимости от n , начиная примерно с $n = 10$ (в пределе $n \rightarrow \infty$) отношения ρ являются инвариантами золотого сечения Φ :

$$\begin{aligned} q = 1, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 1\Phi^{-1} = 1,000, \\ q = 2, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 2\Phi^{-1} = 1,618, \\ q = 3, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 3\Phi^{-1} = 2,236, \\ q = 4, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 4\Phi^{-1} = 2,854, \\ q = 5, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 5\Phi^{-1} = 3,472. \end{aligned}$$

Точкой отсчета соотношений является $q = 1$, т. е. последовательность чисел Фибоначчи. При этом коэффициент ρ в зависимости от значения q изменяется с шагом Φ^{-1} .

Полученные соотношения могут быть преобразованы также к виду:

$$\begin{aligned}
q = 1, & \quad \rho = 1 = \Phi^{-2} + 1\Phi^{-1} = \sqrt{5} - 2\cdot\Phi^{-1}, \\
q = 2, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 2\Phi^{-1} = \sqrt{5} - 1\cdot\Phi^{-1}, \\
q = 3, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 3\Phi^{-1} = \sqrt{5}, \\
q = 4, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 4\Phi^{-1} = \sqrt{5} + 1\cdot\Phi^{-1}, \\
q = 5, & \quad \rho = \Phi^{-2} + 5\Phi^{-1} = \sqrt{5} + 2\cdot\Phi^{-1}.
\end{aligned}$$

Точкой отсчета соотношений в этом случае является число $\sqrt{5}$ ($q = 3$), т. е. последовательность чисел Люка с сохранением шага Φ^{-1} . В этом проявляется взаимосвязь чисел Фибоначчи и Люка.

Из полученных взаимосвязей также следует, что формула Бине для $q = 1$ (10) может быть преобразована в формулу Бине-Семенюты для любых значений q [15, 16]:

$$G_n = \frac{\Phi^{-2} + q\Phi^{-1}}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - (-1/\Phi)^n \right]. \quad (25)$$

$$p = 1, \quad q = 1, 2, 3, \dots,$$

Формула (25) позволяет значительно расширить исследование в математической теории гармонии. Особо следует отметить значение формулы при исследовании процессов передачи энергии и сигналов в живой природе и других подобных системах.

Заключение

В статье установлена взаимосвязь последовательностей чисел Фибоначчи и Люка, Пелля и Пелля-Люка, чисел типа Пелля. Их взаимосвязи вытекают из приведенных квадратных уравнений соответствующих электрических моделей гармонических последовательностей чисел.

Простейшим электрическим моделям гармонических

последовательностей чисел соответствуют характеристические уравнения с одним неизвестным

$$x^2 - qx - 1 = 0, \quad q = 1, 2, 3,$$

корни которых соответственно, равны:

$$x_1 = \frac{q + \sqrt{D}}{2}, \quad x_2 = \frac{q - \sqrt{D}}{2}, \quad D = q^2 + 4,$$

где D – дискриминант корня уравнения.

В с $\sqrt{5}$ лучаях, когда значения дискриминантов определяются числами Фибоначчи ($D = 5, 8, 13$), корни уравнений, равны:

$$\Phi^n = \frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2},$$

$$M^n = \frac{PL_n + P_n \sqrt{8}}{2},$$

$$N^n = \frac{PL^n + \sqrt{13}}{2},$$

или в общем случае:

$$x_1 = \frac{A(q) + B(q)\sqrt{D(q)}}{2}, \quad x_2 = \frac{A(q) - B(q)\sqrt{D(q)}}{2}.$$

Из анализа степеней корней уравнения следует связь чисел последовательностей Фибоначчи, Люка, Пелля с коэффициентом q и дискриминантом D . Конкретному значению q характеристического квадратного уравнения соответствуют две взаимосвязанные последовательности гармонических чисел:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Фибоначи } \{F_n(1;1)\} \quad 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 13 \ 21 \dots, \\ \text{Люка } \quad \quad \quad \{L_n(1;3)\} \quad 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 11 \ 18 \ 29 \ 47 \dots, \end{array} \right\} q=1, D=5,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Пелля} \quad \quad \quad \{P_n(1;2)\} \quad 0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 12 \ 29 \ 70 \ 169 \dots, \\ \text{Пелля-Люка } \{PL_n(2;6)\} \quad 2 \ 2 \ 6 \ 14 \ 34 \ 82 \ 198 \ 478 \dots, \end{array} \right\} q=2, D=8,$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Пелля} \quad \quad \quad \{P_n(1;3)\} \quad 0 \ 1 \ 3 \ 10 \ 33 \ 109 \ 360 \dots, \\ \text{Пелля-Люка } \{PL_n(3;11)\} \quad 2 \ 3 \ 11 \ 36 \ 119 \ 393 \ 1298 \dots, \end{array} \right\} q=3, D=13,$$

которые можно представить соответственно в виде множества чисел A_n и B_n :

$$\left. \begin{array}{l} \{F_n(1;1)\} \quad 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 13 \ 21 \ \dots, q=1, \\ \{P_n(1;2)\} \quad 0 \ 1 \ 2 \ 5 \ 12 \ 29 \ 70 \ 169 \ 408 \dots, q=2, \\ \{P_n(1;3)\} \quad 0 \ 1 \ 3 \ 10 \ 33 \ 109 \ 360 \ 1189 \ 3927 \dots, q=3, \end{array} \right\} (A)$$

$$\left. \begin{array}{l} \{PL_n(1;3)\} \quad 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 11 \ 18 \ 29 \ \dots, q=1, \\ \{PL_n(2;6)\} \quad 2 \ 2 \ 6 \ 14 \ 34 \ 82 \ 158 \ 398 \ \dots, q=2, \\ \{PL_n(3;11)\} \quad 2 \ 3 \ 11 \ 36 \ 119 \ 393 \ 1298 \ 4287 \dots, q=3. \end{array} \right\} (B)$$

Числа множества A образуются по известному из дискретной математики соотношению чисел типа Фибоначчи:

$$G_n(1;q) = \frac{x_1^n - x_2^{-n}}{x_1 - x_2}, \quad q = 1, 2, 3, \dots,$$

а числа множества B образуются по соотношению чисел типа Люка:

$$G_n(1;q) = x_1^n + x_2^{-n}, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Из полученных результатов следует ряд новых свойств гармонических последовательностей чисел, которые будут рассмотрены в следующих работах.

Литература

1. Семенюта, Н. Ф. Свойства рекуррентных последовательностей, используемых для анализа электрических цепей / Н. Ф. Семенюта // Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, 1971. – Вып. 95. – С. 28–32.
2. Семенюта, Н. Ф. О связи параметров цепочечных схем с рекуррентными числовыми последовательностями / Н. Ф. Семенюта // Теоретическая электротехника. – Львов: Вища школа, 1974. – Вып. 17. – С. 23–25.
3. Семенюта, Н. Ф. Анализ линейных электрических цепей методом лестничных чисел / Н. Ф. Семенюта. – Гомель: БелГУТ, 2010. – 108 с.
4. Семенюта, Н. Ф. Моделирование линий с распределенными параметрами рекуррентными числами / Н. Ф. Семенюта // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: материалы V межгос. науч. конф. – Минск: БГУ, 1996. – С. 123–124.
5. Семенюта, Н. Ф. Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Н. Ф. Семенюта // Гармоничное развитие систем – третий путь человечества. – Одесса: ООО Институт креативных технологий, 2011. – С. 87–93.
6. Семенюта, Н. Ф. О связи рекуррентных числовых последовательных и гиперболических функций / Н. Ф. Семенюта // Применение АВМ и ЭЦВМ к решению некоторых задач механики деформируемых тел: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, – Вып. 114. 1973. – С. 39–43.

7. Семенюта, Н. Ф. О «золотых» режимах работы электрических моделей числовых последовательностей типа Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.19727, 05.11.2014.

8. Семенюта Н. Ф. К тайнам золотого сечения. Евразийский союз ученых (ЕСУ) // Н. Ф. Семенюта // – № 4 (13). 2015. – С. 119–122.

9. Семенюта, Н. Ф. Новое о золотом сечении / Н. Ф. Семенюта // XVII Международ. науч.-практич. конф.: Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке: «Prospero», – № 5 (17). 2015. – С.127–131.

10. Яглом, И. М. Как разрезать квадрат? (Математическая библиотека) / И. М. Яглом. – М.: Наука, 1968. – 87 с.

11. Hoggat, V. E. Fibonacci and Lucas Numbers / V. E. Hoggat. – Palo Alto: Houghton-Mifflin, 1969.

12. Dasdemiir, A. On the Pell, Pell-Lucas and Modified Pell Numbers by Matrix Method / A. Dasdemiir // Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, 2011, – №. 64, – P. 3173–3181.

13. Семенюта, Н. Ф. О «золотых» сечениях электрических моделей числовых последовательностей // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.24453, 27.04.2018

14. Грехем, Р. Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грехем, Д. Кнут, О. Поташник. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

15. Семенюта, Н. Ф. Решение обобщенных рекуррентных соотношений (формула Бине-Семенюты) / Н. Ф. Семенюта // De Lapide Philosophorum / – № 1 (009), 2016. – С. 116–126.

16 Семенюта, Н. Ф. Решение обобщенных рекуррентных соотношений (формула Бине-Семенюты) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.21925, 24.03.2016.

*Камень наш подобен человеку,
его телу, душе и духу*



Междисциплинарное периодическое издание
«De Lapide Philosophorum».

Дата публикации 01.11.2018.

Адрес редакции: www.de-lapide-philosophorum.umi.ru

Почтовый адрес: de.lapide.philosophorum@gmail.com

ISSN 2409-1022

Все авторские права на тексты и их содержание сохраняются за авторами. Авторские права редакции распространяются только на верстку, редакционные заметки и способ предоставления материалов в виде данного журнала.