

Динамические модели троичности. Часть 2. Триадная кривая Коха, сетка Аполлония, треугольники Вассера.

Аннотация. Начиная с фрактальных объектов Коха и Аполлония, динамика тройственных образований расширяется на треугольные структуры с дугообразными линиями – треугольники Вассера. От модели абсолютно-идеального круга (окружности) к выпуклым треугольникам и далее через их вырожденный вариант в виде универсальной точки (модель "нечто") – к вогнутым инвариантам, за которыми следует разрыв видимых связей. Для интерпретации тройственных отношений в христианском богословии особый интерес представляет дугообразный треугольник с взаимно ортогональными сторонами.

Эх, тройка! птица-тройка!
кто тебя выдумал?
Н. Гоголь, Мертвые души.

Фрактальный код Вселенной.

Мы далеко от мысли, что исключительно тройка "правит" миром. Скорее всего, это удобная схема оперирования с целочисленными конструкциями, которая восходит к пифагорейцам с их фундаментальным тезисом: в синтезе трех миров кроется тайна космоса.

Рассматривая особенности иерархического устройства мироздания, неординарный исследователь Сергей Сухонос наделил Вселенную троичным кодом [1]. По его мнению, в масштабной гармонии задействованы все числа как обертоновый масштабный спектр, и в первую очередь целые числа. При этом косные объекты в основном имеют двоичные структуры иерархии, а живые – минимум троичные. То есть троичный код Вселенной – это в первую очередь принцип иерархического устройства с разбивкой структуры по классам – тройкам.

Одновременно остаются свойства объектов и систем, которые не связаны непосредственно с иерархией. Например, четыре стороны света, две руки, пять пальцев и т.п. В код могут также входить и неиерархические структуры, в частности, "префиксы", домены достоверности, задаваемые правилом или алгоритмом, и так далее.

Идея троичности с тремя метрическими иерархиями, конечно, очень интересна. Она донесена красиво, наглядно и достаточно просто: элементы – объекты – системы. Подобные начала теории вложенных иерархий комплексно и последовательно изложены в работах яркого философа современности Николая Александрова [2].

Но почему своё "трио" Сухонос называет именно кодом, сказать трудно. Возможно, это некий макет-образ, который необходимо дополнительно оплести паутиной системных связей, "навесить" на них законы физики и т.д. Тогда похожая схема заиграет новыми красками, как большущая молекула ДНК. Причем фрактального типа, подобно матрешке. Где каждый элемент может стать системой новых объектов и наоборот. Сродни бесконечно-фрактальной иерархии.

Поэтому невольно закрадывается мысль об искусственной подгонке упомянутого кода под троичность. Иначе говоря, сама по себе троичность или тринитарная идея не становится логически обусловленной и/или необходимым и достаточным условием.

Представляется, если речь идет о некоем фрактальном коде Вселенной, то с математической точки зрения он не обязательно выражается буквально целым числом *три*. За счет многократных вложений структур отдельные части могут быть фрагментами-составляющими разных уровней.

Тройка, как видимая структурообразующая и целочисленная форма как бы размывается и становится чем-то вроде чисел $e \approx 2,72$ и $\pi \approx 3,14$. – С их условно троичным спектром вокруг π : $0,28$ вниз и $0,14$ вверх, то есть $2 \cdot 0,14 + 1 \cdot 0,14 = 3 \cdot 0,14$.

Тренога (штатив, теодолит) никогда не шатается, в отличие от стола или стула о четырех ножках. Но устойчивой относительно опрокидывания всё же является 4-ножковая конструкция.

Не случайно три основных уровня всегда дополняются верхним завершающим – четвертым, который играет специфическую важную роль (исихазм, буддизм и др.).

Поэтому иерархическая схема детально может выглядеть как "3+1" в своем безграничном вложении. Есть о чём дополнительно поразмыслить.

А пока продолжим троичную проблематику...

Введение в тему.

В первой части нашей статьи [3] отмечалось, что известные троичные или триадные модели преимущественно носят статико-иллюстрационный характер. Они весьма наглядны, но отображаются как некие застывшие слепки, образы, символы, картинки или математические формулы. В то же время окружающий нас мир непостоянен и глубоко динамичен. Именно поэтому в настоящей работе внимание акцентируется на рассмотрении переменных структур – динамических моделей перманентных равновесий. Тройка в них как бы дышит, процессирует и развивается во времени, сохраняя общее единство и одновременно добавляя нечто новое более сложное, объединяя покой и подвижность, тождественность и различие.

В качестве троичной математической модели в работе [4] предложено рассматривать равносторонний сферический треугольник. Его отличительная особенность – объемно-трехмерное воспроизведение и взаимная ортогональность сторон, которая образует безупречное триединство.

В сферической геометрии нет понятия подобия, так как отсутствуют преобразования, изменяющие все расстояния в одинаковое число раз, не равное 1. Любое преобразование подобия является изометрическим. Поэтому на конкретной сфере можно построить единственный сферический треугольник с конкретными параметрами. Его местоположение на сфере не столь важно. В этом контексте он имеет исключительное значение, как совершенная модель троичности. Хотя бы в силу своей уникальности.

На плоскости тоже можно изобразить равносторонний "круговой" треугольник с прямыми углами. Он образуется дугами трех окружностей одинакового радиуса ρ , центры которых отстоят друг от друга на расстоянии $d = \rho \cdot \sqrt{2}$. Одна особенность: для плоскостных "круговых" треугольников сохраняется принцип подобия. Поэтому они отражают не столько "застывший" символ-образ в его статическом проявлении, сколько воспроизводят триаду в её динамике.

Но на этом процесс трансформации тройственной структуры, ход её движения, изменения и развития не заканчиваются. Вполне естественным выглядит перенос и обобщение модели пересечения трех окружностей на произвольное расстояние d между их центрами.

Рассматривая понятие троичности в контексте логики числа, Александров очень метко отмечал [2]: «Тройку мы должны начинать рассматривать именно в динамике... В статике можно постулировать, но невозможно полноценно понять статическую тройку без её динамического отображения... В статике троичность отображает иерархическую структуру системы. Иерархия – это, как минимум, три уровня. Почему структура системы именно иерархичная и именно трехуровневая? – Поскольку таков сам системный мир. Если брать пространственное выражение трехуровневости, это масштабы – макро, мезо, микро».

По следам дискуссионных вопросов.

Прежде чем погрузиться в новую тему и акцентировать внимание на новом материале позволим себе воспроизвести и прокомментировать некоторые критически-дискуссионные отклики. Один из них связан с христианской троицей богов, следующей из самого первого стиха Библии (Быт. 1:1), где употреблено слово אלוהים – Элохим, которое дословно означает "боги" во множественном числе.

Действительно, рассматривая троично-абстрактные модели, описывающие многие явления и процессы в мироздании, трудно обойти стороной триадный взгляд на структуру целого, широко представленный в христианской теологии. Как основополагающий канон веры и догмат одной из мировых религий. Хотя он и является продуктом условной договоренности, принятым большинством при обычном голосовании древних богословов и священников. В результате родилась сначала двоица, а затем троица богов с её немислимой потаенностью и неизреченностью, к которой наиболее точно подходит парафраз: «Умом триаду не понять, в триаду можно только верить».

1) В ответ на первую часть работы о динамических моделях троичности своими впечатлениями поделился один из авторов АТ – харьковчанин Игорь Лысенко. По его словам, как верующий человек он не мог не "клянуть" на наше утверждение о том, что «религия зиждется исключительно на безусловной вере, которая не требует доказательств и полностью отвергает само требование внятных адекватных подтверждений» [3].

Его мысли нам глубоко импонируют и состоят в следующем.

В безусловной вере без доказательств не всё соответствует истине. Если под доказательством понимать строгое формально-логическое обоснование какого-либо положения, то действительно, вера в бога не связана с таким доказательством [5]. Но это вовсе не означает, что в вопросе веры не задействуется разум, который ассоциируется с наукой и противопоставляется религиозной вере. – Такое противопоставление отражает поверхностный взгляд на существо проблематики.

По-настоящему верующий в бога человек отнюдь не удовлетворяется принятием тезиса «Бог существует» или «Библия – книга от бога» безо всякого свидетельства. Одним из таких подтверждений является личный опыт взаимоотношений человека с богом, существование которого нельзя доказать формально-логическим путем, ибо это всего лишь другой вид общего знания. Знания, которое достигается не аксиоматически-дедуктивным путем или в результате эксперимента, а получается непосредственно.

Разумеется, существование такого вида знания, точнее, способа его приобретения, можно оспаривать. Но это ровным счетом ничего не привносит в опыт отношений верующего человека с богом. Подобные отношения просто есть, как есть и уверенность в факте существования бога. Ньютон и Паскаль, Максвелл и Фарадей, Лейбниц, Планк и т.д. – яркие примеры ученых (наука – разум) экстра-класса, которые в то же время были верующими.

Также нельзя сказать, что вера полностью «отвергает само требование внятных адекватных подтверждений». Лысенко приводит любопытный пример на основе причинно-следственных связей: «Я, как верующий человек, обращаюсь к Богу в молитве с просьбой дать руководство, как поступить в той или иной ситуации, и, понимая, что Бог может ответить по-разному (через Библию, через людей или определенным образом сложившиеся обстоятельства), внимательно анализирую ситуацию, в результате чего понимаю, как следует поступить; затем поступаю соответствующим образом и, анализируя результат, прихожу к заключению, что это был оптимальный ход в сложившихся обстоятельствах».

Если такой подход к делу носит регулярный характер в жизни человека, то вполне можно говорить о том, что имеют место «внятные адекватные подтверждения» факта участия бога в личной жизни, что по принципу положительной обратной связи побуждает людей и дальше следовать такому направлению. Конечно, не обязательно рассматривать подобные рассуждения в качестве попытки апологии веры в бога. Если ему будет угодно, он даст веру в себя наиболее оптимальным способом.

2) Другой автор АТ Игорь Ерохов из Кривого Рога дает интересное дополнение, что не только число, представляющее греческое золотое сечение, разлагается в цепную (непрерывную) дробь, состоящую только из единиц. Так, в своей работе [6] он подробно описывает пример получения ветвящейся цепной дроби с единицами (форма Кауэра с единичными параметрами) на основе лестничных фильтров в электрических цепях переменного тока.

Триадная кривая Коха.

Число *три* имеет непосредственное отношение к делению целого на три части. Так, в статье [7] рассмотрены различные формы и интерпретации модели деления $1/3$ (одна треть) в математике, средствах массовой информации, статистике, экономике и проч. – в сравнении с половинным делением и золотой пропорцией. Главное достоинство структур состоит в их простоте и рациональности, на основе целых чисел и обыкновенных дробей. Среди них: таблица Никомаха, числа Якобсталя, пыль Кантора и др. И всё же в значительной мере они ближе к статичным образованиям. Динамика наиболее отчетливо проявляется во фрактальных объектах, к которым, в частности, относится триадная кривая Коха.

Прямолинейный отрезок условно единичной длины делится на три равные части.

На основании центральной части строится равносторонний треугольник, после чего центральный сегмент отбрасывается. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины $1/3$. На следующих шагах-итерациях данная операция повторяется для каждого из полученных звеньев.

В пределе получается триадная кривая Коха с фрактальной размерностью $\log 4 / \log 3$.

Данные кривые можно построить на базе каждой из трех сторон равностороннего треугольника, образовав замкнутой кривую – снежинку Коха, как это выполнил шведский математик в 1904 году. Полученная фрактальная кривая обладает рядом удивительных свойств и в своем роде уникальна. Она обладает вертикальной осью симметрии. Везде непрерывна, но нигде не дифференцируема, и к ней нигде нельзя провести касательную. Свободно уместаясь на небольшом листе бумаги, имеет в пределе бесконечную длину! То есть её периметр бесконечен, а охватываемая площадь конечна и равна $8/5 = 1,6$ площади исходного треугольника [8, с. 82], что весьма близко к константе золотого сечения Φ , как отношение двух соседних чисел Фибоначчи.

Если вместо деления отрезка в соотношении 1:1:1 использовать константу золотого сечения Φ :1: Φ , то полученная кривая имеет отношение к знаменитым мозаикам (плиткам) Пенроуза.

Можно использовать и другие кривые Коха с изменяющимся углом наклона в исходном треугольнике. В частности, для углов 36 и 72 градусов [9] получаем фрактальные размерности соответственно $\log 4 / \log(2+\Phi)$ и $\log 4 / \log(1+\Phi)$.

Всё это свидетельствует о возможности применения кода Фибоначчи к динамике фрактальных систем [10, 11].

Сетка Аполлония.

Этот фрактал образуется по трем попарно касающимся окружностям. Представляет собой предельное множество всевозможных последовательностей окружностей, каждая из которых касается трех уже построенных [12]. Построение начинается с трех окружностей, каждая из которых является касательной к двум другим. Далее к имеющейся фигуре рекурсивно добавляют окружности, которые касаются каких-нибудь трех уже имеющихся окружностей.

На первом шаге добавляются две, на втором шесть, и так далее. Продолжая построение, на n -м шаге мы добавляем $2 \cdot 3^n$ новых окружностей. Замыкание построенных окружностей называют сеткой Аполлония с фрактальной размерностью $\approx 1,305688$.

Определение параметров треугольника Вассера.

Именем Вассера мы в свое время уже называли отдельные виды резольвент [13] и пирамид [14]. Это своеобразный псевдоним, который объединяет сокращение от Василенко Сергей – гидролога, системотехника и связанного с ним немецкого слова *wasser* – вода, влага, жидкость. Выбор псевдонима обусловлен стремлением использовать "говорящее" имя, соответствующее избранному роду профессиональной деятельности.

Определение. Треугольник Вассера – плоская выпуклая геометрическая фигура в виде "кругового" равностороннего треугольника, образованного дугами трех одинаковых окружностей, центры которых лежат в вершинах правильного плоского треугольника.

Без потери общности рассуждений, радиусы окружностей примем равными единице $\rho = 1$.

Пусть d – расстояние между центрами трех окружностей.

Угол $\beta = \tau + \gamma$ находится из прямоугольного треугольника с катетом длиной $d/2$ и единичной гипотенузой (рис. 1): $\beta = \arccos d/2$.

Определяем углы τ и γ :

$$\tau = \pi/3 - \beta;$$

$$\gamma = \pi/3 - 2\tau = 2\beta - \pi/3.$$

При радиусе $\rho = 1$ сторона треугольника Вассера a численно равна центральному углу γ . Каждая из касательных к вершине угла "кругового" треугольника проходит под углом $\pi/2 - \beta$.

Угол между касательными равен углу "кругового" треугольника

$$\alpha = \pi - 2 \cdot (\pi/2 - \beta) = 2\beta.$$

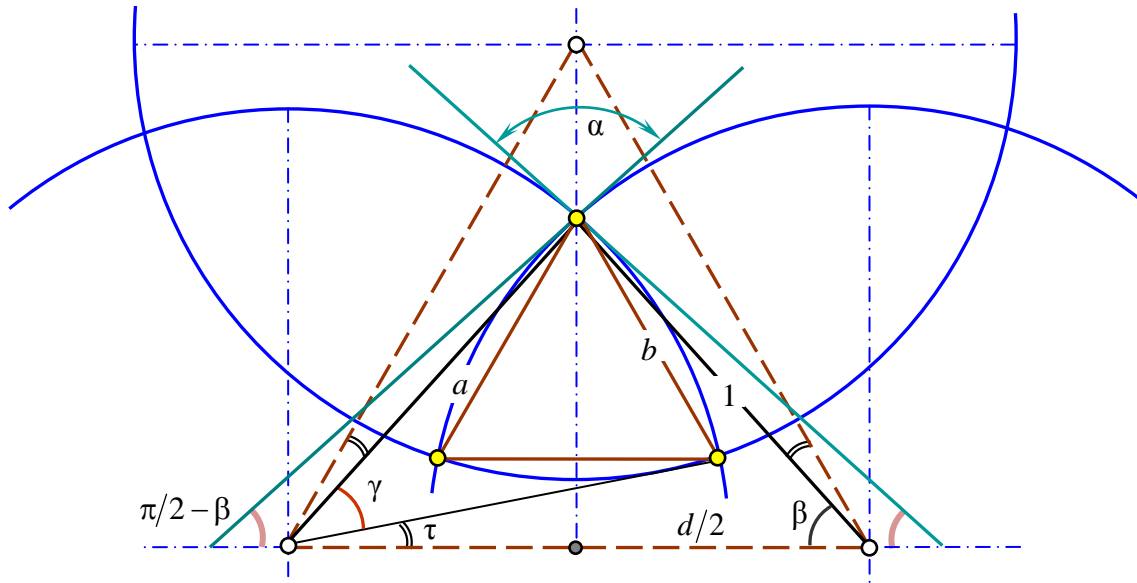


Рис. 1. Визуализация угловых и линейных величин для определения параметров выпуклого треугольника Вассера

Зная центральный угол γ в радианах, на окружности единичного радиуса вычисляем длину стороны "кругового" треугольника $a = \gamma$.

Длина стягивающей хорды или расстояние (по прямой) между вершинами треугольника

$$b = 2 \sin \gamma/2.$$

Площадь встроенного равностороннего треугольника со стороной b :

$$s_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = \sqrt{3} \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1 - \cos \gamma).$$

Площадь обрамляющего кругового сегмента

$$s_2 = \frac{\gamma - \sin \gamma}{2}.$$

Общая площадь треугольника Вассера $S = s_1 \pm 3s_2$, где знак "плюс" соответствует выпуклой фигуре $d < \sqrt{3}$, "минус" – вогнутой $d > \sqrt{3}$ (рис. 2).

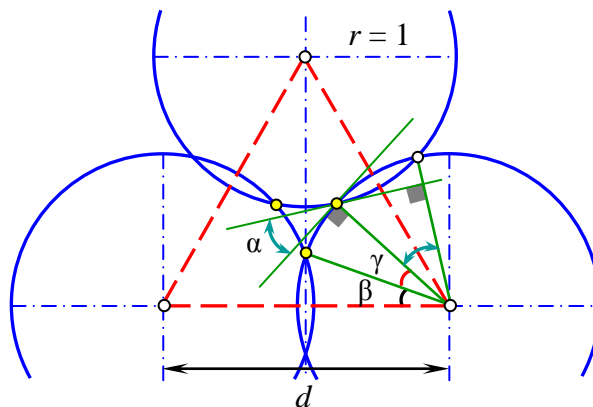


Рис. 2. Формирование вогнутого треугольника Вассера

В аналитических расчетах здесь удобно использовать "знаковую" кусочно-постоянную функцию $\text{sgn}x = \{ -1, x < 0; 0, x = 0; 1, x > 0 \}$. Тогда $S = s_1 + 3\text{sgn}(\sqrt{3} - d) \cdot s_2$.

Окончательно записываем формулы для равностороннего "кругового" треугольника, образованного тремя окружностями единичного радиуса, центры которых расположены в вершинах правильного треугольника со стороной d , ($\beta = \arccos d/2, \gamma = 2\beta - \pi/3$):

– угол при вершине $\alpha = 2\beta$;

– длина стороны $a = |\gamma| = |\alpha - \pi/3|$;

– периметр $p = 3a = |3\alpha - \pi|$;

– площадь $S = s_1 \pm 3s_2 = \frac{\sqrt{3} \cdot (1 - \cos \gamma) \pm 3 \cdot (\gamma - \sin \gamma)}{2}$;

– радиус описанной окружности R равен радиусу описанной окружности правильного треугольника со стороной b :

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}}b = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin \frac{\gamma}{2};$$

– радиус вписанной окружности r равен радиусу вписанной окружности правильного треугольника со стороной b с поправкой на высоту кругового сегмента с углом дуги γ .

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin \frac{\gamma}{2} \pm \left(1 - \cos \frac{\gamma}{2}\right).$$

Специфические равенства параметров.

Совмещенные графики изменения параметров треугольников Вассера (рис. 3) показывают, что в ряде случаев отдельные переменные становятся равными между собой.

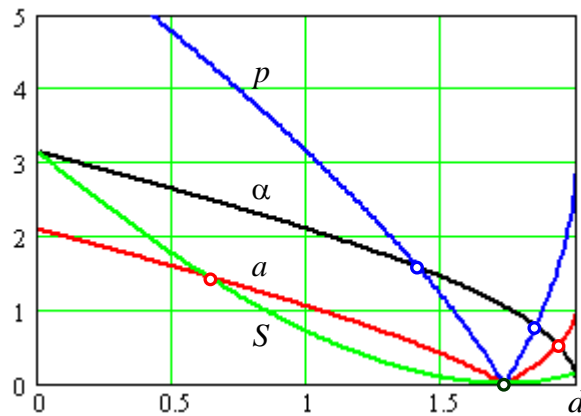


Рис. 3. Изменение параметров круговых треугольников Вассера в зависимости от расстояния d между центрами трех окружностей единичного радиуса $\rho = 1$

1) $S = a \approx 1,452 \Leftrightarrow d \approx 0,631$.

2) $\alpha = p = \sqrt{2} \approx 1,414 \Leftrightarrow d = \pi/2 \approx 1,571$.

3) $\alpha = p = \pi/4 \approx 0,785 \Leftrightarrow d = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2 \cos \pi/8 = \text{Re}(\sqrt[4]{i}) \approx 1,848$ – константа связности сотовой решетки [15] и максимальный корень тринома $x^4 - 4x^2 + 2$.

Это число также является отношением длины кратчайшей диагонали (не считая стороны) восьмиугольника к радиусу описанной окружности. Для самой длинной диагонали такое отношение равно 2. Здесь дважды проявляется своеобразная тройственность: $2^3 = 8$, а наименьшая диагональ и радиус описанной окружности образуют прямоугольный треугольник.

Величина $\pi/4$ – отношение площади круга к описанному квадрату и в общем случае отношение площади эллипса к описанному прямоугольнику, а также отношение объема цилиндра к описанному кубу.

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \sum_0^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n}{n} + \frac{1}{2} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n}.$$

4) $\alpha = a = \arctg 1/\sqrt{3} = \pi/6 \approx 0,524 \iff d = \sqrt{2+\sqrt{3}} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/2 \approx 1,932.$

Величина $\pi/6$ – отношение площади поверхности вписанной сферы к площади куба (правильного шестигранника – гексаэдра); объема вписанной сферы – к объему куба.

Причем данное свойство сохраняется при деформации сферы и куба вдоль трех взаимно перпендикулярных осей так, что отношение объема вписанного эллипсоида к объему кубоида также равно $\pi/6$.

5) $\alpha = S \approx 0,152 \iff d \approx 1,994.$

Семейство характерных треугольников.

Без потери общности рассуждений рассмотрим "круговые" треугольники, образованные тремя окружностями с радиусом единичной длины $\rho = 1$. Выберем характерные расстояния между центрами окружностей (рис. 4) $d = \sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$.

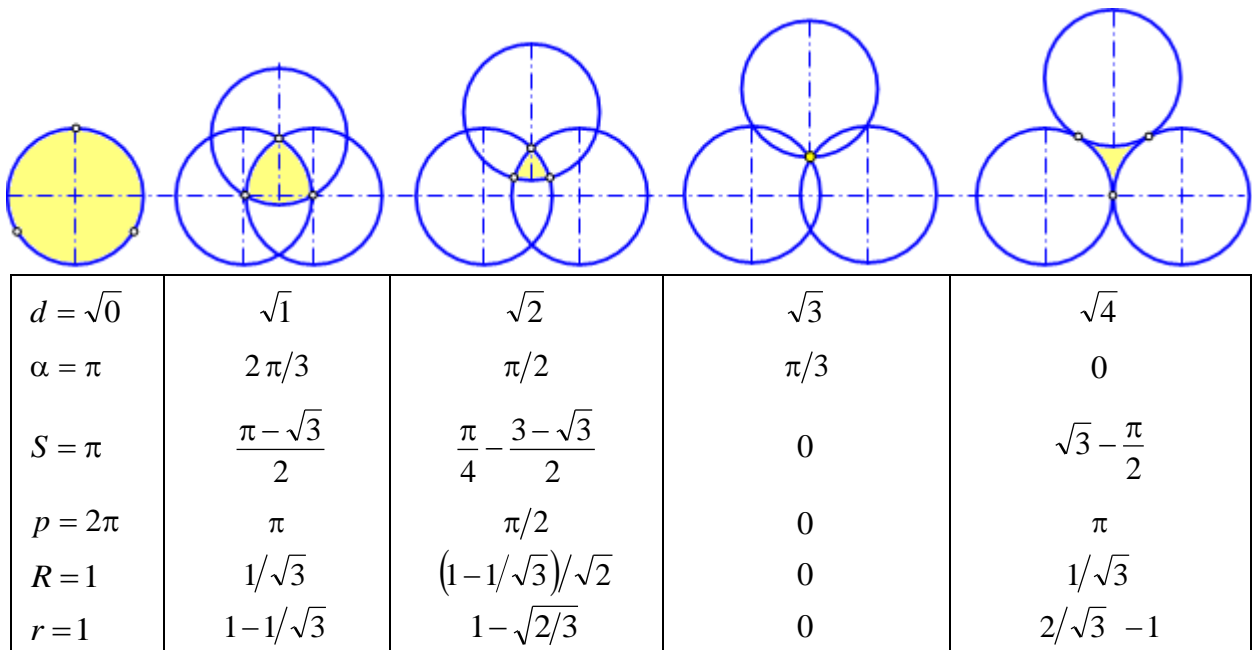


Рис. 4. Семейство характерных круговых треугольников Вассера

$d = 0$. Три круга совпадают. Треугольник трансформируется в окружность. Угол при вершине равен $\alpha = \pi = 180^\circ$.

Таким образом, окружность (круг) можно рассматривать как частный случай треугольника Вассера. Его внутренние и внешние углы численно равны π . Если принять радиус окружностей $\rho = 1$, то сумма углов $\Sigma\alpha = 3\pi$, периметр $p = 2\pi$, площадь $S = \pi$. То есть $(S, p, \Sigma\alpha) = \pi \cdot (1, 2, 3)$.

$d = \sqrt{1} = 1$. Расстояние между центрами равно радиусу окружностей. Получается известный треугольник Рело, который имеет широкое практическое применение. Угол $\alpha = 2/3 \cdot \pi = 120^\circ$.

$d = \sqrt{2}$. Стороны треугольника ортогональны. Имеем три прямых угла $\alpha = \pi/2 = 90^\circ$. Фигура не является фигурой постоянной ширины, в которой угол при вершине не может быть меньше 120 градусов. Единственная фигура постоянной ширины, имеющая углы, равные в точности 120° – это треугольник Рело.

$d = \sqrt{3}$. Примем $a = 2\beta - \pi/3 = 0$ или $\beta = \pi/6 = \arccos d/2$. Тогда $d = 2 \cos \pi/6 = \sqrt{3}$.

То есть треугольник вырождается в точку. В ней сконцентрированы три стороны и три угла. Образуется идеальная конструкция триады (троицы). Своего рода точка опоры мироздания.

Конечно, сама по себе точка не имеет дуг и внутренних углов. Однако её можно рассматривать как предельный аттрактор треугольника Вассера, в котором внутренние углы стремятся к углам обычного правильного треугольника $\alpha \rightarrow \pi/3 = 60^\circ$.

Сумма углов составляет $\pi = 180^\circ$. Развертка с выпрямлением сторон выражает прямую линию. Как символ бесконечно-длющегося движения, аккумулированный в одной точке [16].

$d = \sqrt{4} = 2$. Вогнутый треугольник. Окружности касаются друг друга. Угол $\alpha = 0$, то есть из каждой вершины стороны выходят параллельно, совпадая друг с другом.

При $\pi/3 < \alpha < \pi$ имеем выпуклые треугольники, при $0 \leq \alpha < \pi/3$ – вогнутые.

Три совмещенные окружности образуют предельный треугольник с углами $\alpha = \pi$.

Другой предельный случай – это правильный дугообразный вогнутый треугольник с нулевыми углами $\alpha = 0$, когда в точках касания линии (стороны) совпадают. Площадь образованного треугольника Вассера равна площади обычного равностороннего треугольника со стороной 2 за вычетом трех круговых секторов с углом 60° : $\sqrt{3} - 3\pi/6 = \sqrt{3} - \pi/2$. Периметр треугольника равен π и составляет половину длины каждой из образующих окружностей.

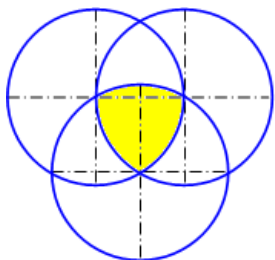
Далее с увеличением параметра $d > 2$ круги расходятся, не имея общих точек, а треугольник "разрывается", попадая в область сингулярности. Хотя по-прежнему через три дуги можно провести условно вписанную и описанную окружности.

Итак, от совмещенных трех окружностей ($\alpha = \pi$) через их пересечение в точке ($\alpha = \pi/3$) приходим до вогнутого треугольника с нулевой суммой углов ($\alpha = 0$). Плюс к этому ортогональный треугольник ($\alpha = \pi/2$).

Касающиеся круги с вогнутым треугольником ($d = 2$) в своем динамическом сжатии и вложении образуют двухмерный фрактал – сетку Аполлония, которая с точностью до конформного преобразования однозначно определяется любой тройкой попарно касающихся кругов в нём [17, с. 94]. Фрактал образуется путем заполнения пространства между смежными окружностями. Фрактальная Хаусдорфова размерность приблизительно равна 1,306 [18].

Треугольник Рело.

Остановимся несколько подробнее на случае, когда расстояние между центрами d равно радиусу окружностей $d = \rho = 1$. При этом треугольник Вассера становится треугольником Рело [19] – плоская выпуклая геометрическая фигура постоянной ширины w [20, с. 56-57]. Представляет собой область пересечения трех равных кругов с центрами в вершинах правильного треугольника и радиусом, равными его стороне $\rho = w$.



По сути, имеем правильный треугольник, каждая сторона которого выгибается в дугу окружности радиусом, равным его сторонам.

Если к треугольнику провести пару параллельных опорных линий (содержащих только одну точку треугольника), то расстояние между ними не будет зависеть от выбранных направлений. А сам треугольник при его вращении вокруг центра постоянно касается обеих прямых, вследствие чего получил широкое распространение в технике.

Треугольник строится с помощью одного циркуля путем проведения трех равных окружностей радиусом ρ : 1-центр выбирается произвольно, 2-центр – любая точка первой, 3-центр – любая из двух точек пересечения первых двух окружностей.

Для единичной ширины $w = \rho = 1$ имеем основные геометрические характеристики с использованием корня из трех: площадь – $S = (\pi - \sqrt{3})/2$, периметр – $p = \pi$, радиусы вписанной и описанной окружностей $1 - 1/\sqrt{3}$ и $1/\sqrt{3}$.

Существует бесконечно много кривых заданной постоянной ширины [21], равной, например единице $w = 1$. В частности, на любом правильном многоугольнике с нечетным числом вершин можно построить кривую постоянной ширины по схеме, аналогичной треугольнику Рело. По теореме Барбье все они имеют одинаковую длину (периметр) π .

Среди всех фигур постоянной ширины $w = 1$ треугольник Рело выделяется рядом экстремальных свойств:

- минимальная площадь $(\pi - \sqrt{3})/2 \approx 0,705$; при этом окружность ограничивает максимальную площадь $\pi/4 \approx 0,785$;
- минимально возможный внутренний угол при вершине, равный 120° ;
- наименьшая центральная симметрия;
- наибольший радиус описанной окружности $1/\sqrt{3} \approx 0,577$ и соответственно наименьший радиус вписанной окружности $1 - 1/\sqrt{3} \approx 0,423$.

Как и для всякой фигуры постоянной ширины, центры вписанной и описанной окружностей совпадают, а сумма их радиусов равна ширине кривой w . Сама фигура постоянной ширины может вращаться в квадрате $w \times w$, всё время касаясь каждой из сторон.

Так что имеем красивый математический объект, совершенно подходящий на роль троичной модели во главе с "богом математики" – вездесущим числом "пи".

Его экстремальные свойства становятся очень даже кстати. Наименьшая площадь ассоциируется с монадой. Минимально возможные углы при вершине воссоздают образ максимального сближения-тяготения вершин, символизирующих три ипостаси троичного бога.

И катится такое колесо между двумя параллельными прямыми ... в вечность.

Идею треугольника, составленного из равных дуг окружности, впервые продемонстрировал

Эйлер. Хотя подобную фигуру рисовал ещё Леонардо да Винчи в своих рукописях (XV век), в том числе при составлении карты мира.

В целом совершенно точно можно говорить о системной триаде, где три дуги – три равноправных элемента находятся на одном уровне общности. При этом триадой замыкается каждый из расходящихся углов.

Углы треугольника Рело можно скруглить, построив новые примеры кривых постоянной ширины (рис. 5). Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной b . Из каждой вершины внутри соответствующего ей угла проведем дуги радиуса r и сопряжем их дугами радиуса $b + r$. Полученная кривая будет по всем направлениям иметь ширину, равную сумме радиусов дуг, описанных из каждой вершины $w = b + 2 \cdot r$ [21, с. 91-92; 22, с.145]. При вращении внутри квадрата $w \times w$ она постоянно будет касаться всех его сторон

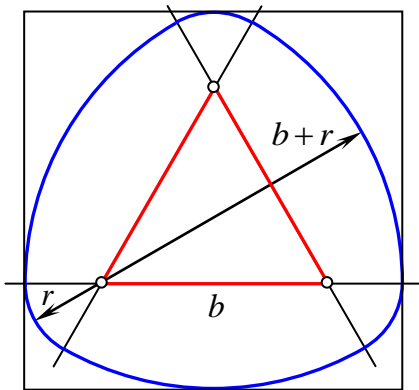


Рис. 5. Скругленная кривая постоянной ширины на основе правильного треугольника

"Золотые" особенности треугольники Вассера.

а) Каждый из перечисленных треугольников (рис. 4) в отдельности может по праву называться геометрической моделью троичности.

Вместе они образуют дискретные кадры-фрагменты единой непрерывно меняющейся динамической модели в её интегральном представлении.

Неравные нулю числа под знаком радикала в расстоянии d образуют знаменитый мистический символ – пифагорейский тетрактис – треугольную фигуру, составленную из десяти точек $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ в форме пирамиды, символизируя гармонию Вселенной, в том числе:

- четыре стихии – земля, воздух, огонь, вода;
- базовые понятия геометрии – точка, линия, плоскость, пространство;
- пропорциональные отношения 4:3, 3:2, 2:1, которые соответствуют основным музыкальным интервалам кварты, квинты и октавы.

Вместе с нулем группа чисел 0, 1, 2, 3, 4 составляют пентаду, что косвенно свидетельствует о незримом присутствии золотой пропорции.

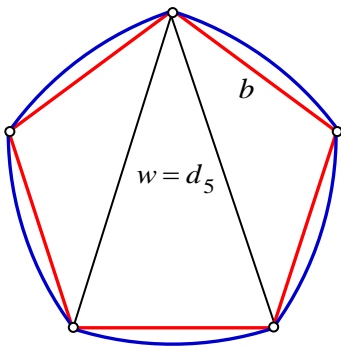
Следующим корнем следует $\sqrt{5} = \phi + \Phi$, где константы золотого сечения равны

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad \phi = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

То есть наша треугольная конструкция как бы устремляется к золотой модели. А сам треугольник рассыпается, уступая место золотому коду.

Об этом свидетельствует и числа $\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2$ – основополагающие величины в геометрическом построении золотого сечения, поскольку $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$.

б) Есть и другая особенность. Существует понятие многоугольника Рело – кривой постоянной ширины w , состоящей из конечного числа дуг окружностей радиуса w . Частным случаем является правильный многоугольник Рело, построенный аналогично треугольнику Рело на правильном многоугольнике с нечетным числом сторон.



Таким образом, после треугольника следующей правильной фигурой в этом ряду является пятиугольник Рело – выпуклый криволинейный пятиугольник, получаемый при пересечении пяти окружностей радиуса, равного диагонали правильного пятиугольника, центры которых лежат вершинах правильного пятиугольника напротив его сторон (см. рисунок).

Как известно, правильный пятиугольник буквально "нашпигован" константой золотого сечения. Например, если он вписан в окружность единичного радиуса, то его диагональ равна $d_5 = \sqrt{1 + \Phi^2}$, сторона $b = d_5 \cdot \phi = \sqrt{1 + \phi^2}$. Соответственно

постоянная ширины пятиугольника Рело $w = d_5$.

с) Константы золотого сечения могут принимать непосредственное участие и в качестве параметров треугольника Вассера.

Примем расстояние между центрами равным константе золотого сечения $d = \Phi$.

Внутренний угол и сторона треугольника Вассера соответственно равны

$$\alpha_\Phi = \frac{2}{5}\pi, \quad a_\Phi = \frac{1}{15}\pi.$$

При этом величины $\sin a$ и $\cos a$, входящие в формулу для площади треугольника равны:

$$\sin a_\Phi = \frac{(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3})}{8}, \quad \cos a_\Phi = \frac{(\sqrt{5} - 1) \cdot (1 + \sqrt{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}})}{8}.$$

Для малой константы золотого сечения $d = \phi$ величины параметров составят

$$\alpha_\phi = \frac{4}{5}\pi, \quad a_\phi = \frac{7}{15}\pi.$$

Как видим, "позолота" треугольников Вассера приводит к числу π , умноженному на рациональные дроби, содержащие в знаменателе число 5.

Ортогональный треугольник.

Если расстояния между центрами окружностей выбрать равными $\sqrt{2}$, то образуется ортогональный "круговой" треугольник, внутренние углы которого прямые.

Это наглядно видно из перпендикулярности радиусов и касательных, формирующих углы при вершинах треугольника Вассера (рис. 6).

Периметр треугольника численно равен углу α (в радианах) $\pi/2$.

Длина стягивающей хорды или расстояние (по прямой) между вершинами треугольника

$$b = 2 \sin \gamma/2 = 2r \cdot \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

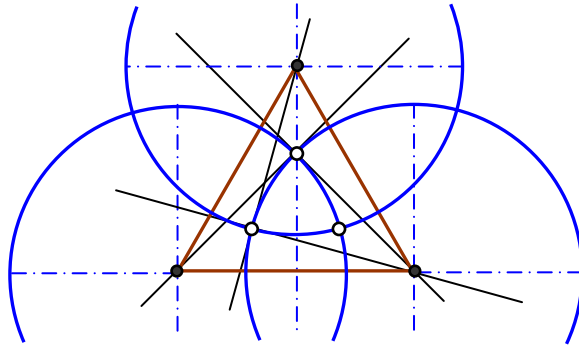


Рис. 6. Перпендикулярность касательных и радиусов при $d = \sqrt{2}$

Площадь встроенного равностороннего треугольника $s_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$.

Площадь обрамляющего кругового сегмента $s_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4}$.

Общая площадь треугольника Вассера $S = s_1 + 3s_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Высота сегмента $t = 1 - \cos \frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Высота правильного треугольника $h = \frac{\sqrt{3}}{2} b$.

Условная ширина треугольника Вассера равна $t + h$ или сумме радиусов вписанной и описанной окружностей $r + R$.

Касательные к вершинам углов "кругового" треугольника образуют равносторонний шестиугольник, в котором чередуются три прямых угла и три угла по $(720 - 270)/3 = 150$ градусов.

Некоторые построения треугольников демонстрируются на рис. 7.

Заключение.

Динамические модели троичности – это не просто искусственные объекты, призванные для "увечковечия" триады. Они находят широкое распространение в повседневной теории и практике человеческой деятельности.

Достаточно упомянуть триадное цветовое сочетание в полиграфии. Так, в классической художественной модели RYB первичными цветами считаются красный – Red, желтый – Yellow и синий (голубой) – Blue, на основе которых комбинируются другие цвета.

Или вспомнить гибкую модель тройственной ограниченности, которая описывает баланс

между содержанием проекта (объемом работ), стоимостью и временем. Позже к ним было добавлено качество. Альтернативный треугольник управления проектами содержит следующие три ограничения: финансы, время и человеческие ресурсы.

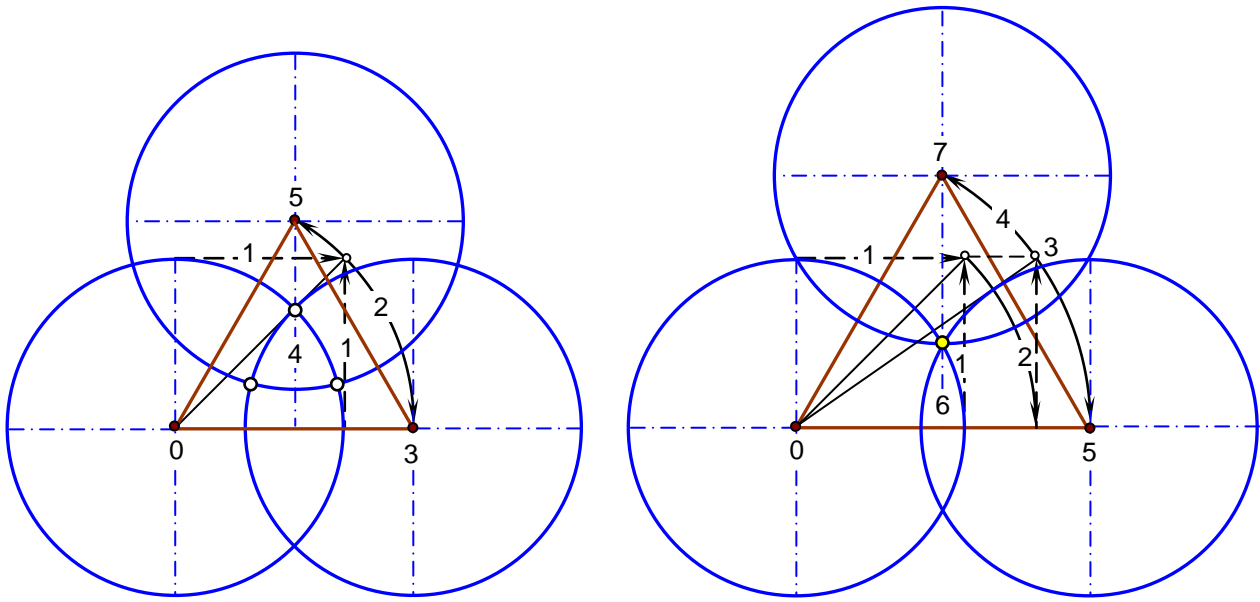


Рис. 7. Последовательность шагов построения круговых треугольников Вассера: ортогонального – $d = \sqrt{2}$ и предельно-точечного – $d = \sqrt{3}$

Нельзя обойти стороной и политико-правовое разделение властей, согласно которому государственная власть разделяется между независимыми друг от друга, но и в определенной мере динамично контролирующими друг друга ветвями: законодательной, исполнительной и судебной.

В геометрической трактовке динамических моделей троичности особое место занимают рассмотренные нами "круговые" треугольники Вассера. Как предтеча пульсирующей троичной модели, если её рассматривать в постоянном расширении и сжатии.

Пульсация имеет пять характерных стадий: окружность (круг) → выпуклый дугообразный треугольник → точка → вогнутый дугообразный треугольник → разъединение-разрыв трех дуг.

Таким образом, имеем явно выраженное движение от модели абсолютно-идеального круга (окружности) к выпуклым треугольникам и далее через их вырожденный вариант в виде универсальной точки – к вогнутым инвариантам, за которыми следует разрыв видимых связей. Хотя и после разрыва невидимые условные связи по-прежнему остаются, образуя в пределе – разрывной равносторонний треугольник, в вершинах которого вырезаны круговые сектора с единичным радиусом.


Для интерпретации тройственных отношений особый интерес представляет дугообразный треугольник на плоскости с взаимно ортогональными и равными сторонами. Он образуется дугами трех окружностей одинакового радиуса ρ , центры которых отстоят друг от друга на расстоянии $d = \rho \cdot \sqrt{2}$.

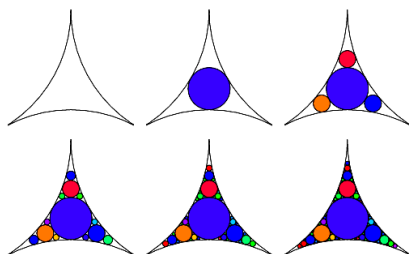
Прямые внутренние углы наряду с равными сторонами воссоздают безукоризненный образ троичной модели «дин в трех и три в одном» и хорошо дополняют математическую модель триады в виде равностороннего сферического треугольника. Его отличительная особенность – объемно-трехмерное воспроизведение и взаимная ортогональность сторон, которая образует безупречное триединство.

Литература:

1. Сухонос С.И. Троичный код Вселенной // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16882, 12.10.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161888.htm.
2. Александров Н.Н. Троичность и её выражение в различных явлениях культуры. Понятие троичности в контексте логики числа // АТ. – М., 2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261098.htm.

3. Василенко С.Л. Динамические модели троичности. Часть 1 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.25382, 23.04.2019. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001g/00164020.htm.
4. Василенко С.Л. Сферический треугольник как совершенная модель троичности // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.25165, 09.02.2019. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001g/00163938.htm.
5. Лысенко И.В. Можно ли доказать существование Бога? // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.23658, 22.08.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0017/001a/00171267.htm.
6. Ерохов И.В. Получение структур схемных функций // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14700, 24.01.2008. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321081.htm.
7. Василенко С.Л. «Одна или две трети», как простая модель рациональной пропорции // АТ. – М.: Эл. №77-6567, публ.23089, 23.02.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163219.htm.
8. Классические фрактальные кривые и множества / Новейшие методы обработки изображений / А.А. Потапов, Ю.В. Гуляев, С.А. Никитов и др. – М.: Физматлит, 2008. – 496 с.
9. Василенко С.Л. Золотое сечение в классических фракталах // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.08.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=36&sm=2 / АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17271, 30.01.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322144.htm.
10. Данг Н.Т., Герлейн О., Во Т.К. Применение кода Фибоначчи в динамике фрактальных систем // Молодой ученый. – 2010. – №7. – С. 12-15. – URL: https://moluch.ru/archive/18/1803/.
11. Василенко С.Л. Бифуркации в нелинейной динамической модели на основе "золотого" сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15232, 14.04.2009. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321095.htm.
12. Graham R.L., Lagarias J.C., Mallows C.M., Wilks A.R., Catherine H.Y. Apollonian Circle Packings: Number Theory // J. Number Theory, 100 (2003), 1-45.
13. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл. № 77-6567, публ. 17347, 06.03.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.
14. Василенко С.Л. Пирамиды Вассера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17321, 17.02.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161932.htm.
15. Hugo Duminil-Copin, Stanislav Smirnov. The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ // Ann. Math. 175 (2012), pp. 1653-1665.
16. Кашпур А.Д., Василенко С.Л. Размышления о точке... Часть 2 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24063, 13.12.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163543.htm.
17. Кириллов А.А. Повесть о двух фракталах. – 2-е изд., испр. – М.: МЦМНО, 2010. – 180 с.
18. Curtis T. McMullen. Hausdorff Dimension and Conformal Dynamics, III: Computation of Dimension // American J. of Mathematics. – Vol. 120. – P. 691-721.
19. Василенко С.Л. Формальные неединичные конструкции троичной структуризации // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17606, 04.08.2012. – URL: ru/rus/doc/0226/002a/02261113.htm.
20. Математическая составляющая / Редакторы-составители Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин. – М.: Фонд "Математические этюды", 2015. – 151 с. – URL: etudes.ru/ru/etudes/.
21. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. – М.-Л.: ГТТИ, 1951. – 343 с. – URL: http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/4-figures.htm.
22. Талалай П.Г. Начертательная геометрия на примерах. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 288 с.

© ВаСиЛенко, д.т.н., 2019 
Харьков, Украина



Авторские страницы:

<http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3>

<http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm>

<http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html>