Математическое единство трех миров Учения Живой Этики

А.В.Левичев

Институт Математики СО РАН и
Boston University, U.S.A.

Установлено, что причинная структура стандартного пространства-времени (т.е. плоского мира Минковского) может быть реализована любым из трех искривленных метрических миров D, dense; L, light, non-heavy; F, fiery (других реализаций нет). На основе геометрических характеристик этих миров (путем сравнения с текстами "Живой Этики") делается вывод о том, что они являются простейшими математическими моделями плотного мира D, тонкого L и огненного F. Мир D является пространством-временем хронометрической теории И.Сигала (ее основы были заложены в 70-е гг.).

"Живая Этика"утверждает, что каждый предмет обладает $D-, L-$ и F-свойствами. Установленное (в 2003 году) DLF-единство является математической основой для (необходимого!) радикального пересмотра теории частиц и их взаимодействий. В частности, мир Минковского уступает главенствующую роль тройке D, L, F (примерно так же, как столетие назад пространство-время Ньютона было "оттеснено"миром Минковского).

Ключевые слова и фразы: относительность, хронометрическая теория, Учение Живой Этики.

Обозначим через M_0 мир Минковского, через M – унитарную группу $U(2)$. Образ $c(M_0)$ отображения Кэли c (см. [Se76], [Le95]) является открытым плотным множеством в M. Семейство $\{C_y : y \in M_0\}$ задает двусторонне-инвариантное поле конусов на M; здесь $C_y = y + C$, а $C : x_o^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$.

На универсальной накрывающей $\tilde{M}$ канонически определяются множества будущего J_x^+.

Напомним о (знаменитом !) дробно-линейном G-действии на M:

$$g(z) = (Az + B)(Cz + D)^{-1}$$

здесь блочная матрица

$$g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

принадлежит $G = SU(2,2)$. Это действие канонически задает $\tilde{G}$ -действие на $\tilde{M}$ (это последнее действие сохраняет причинную структуру).

Теорема 1 ([Se76], [Ад76]). *Пусть биекция f мира $\tilde{M}$ такова, что $f(J_x^+) = J_{f(x)}^+$ при всех x из $\tilde{M}$ (т.е. f сохраняет причинную структуру). Тогда f задается некоторым элементом $\tilde{g}$ из $\tilde{G}$.*

Как известно, при моделировании частиц мира $\tilde{M}$ можно большую часть определений формулировать в терминах (компактного !) мира M. Соответствующие результаты называются "автоматической периодичностью".

Универсальная группа $\tilde{P}$ дважды накрывает (пополненную гомотетиями) группу Пуанкаре P.

Теорема 2 ([PaSe82]). *Стационарная подгруппа $\tilde{G}_x$ изоморфна P.*

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{\tilde{g}} & M_0 \\ c\downarrow & & \downarrow c \\ M & \xrightarrow{\tilde{g}} & M \end{array}$$

коммутативна (здесь $\tilde{g}$ из $\tilde{P}$, а M_0 отождествляется с алгеброй Ли $u(2)$ с известным $\tilde{P}$-действием на ней).

Следующее утверждение также общеизвестно.

Теорема 3. *Метрика на группе Ли N двусторонне-инвариантна тогда и только тогда, когда (соответствующая) форма в алгебре Ли $\bar{\bar{n}}$ инвариантна.*

Замечание 1. Инвариантная невырожденая форма в простой алгебре Ли всегда пропорциональна форме Картана-Киллинга.

Теорема 4 ([ГуЛе84]). *В классе некоммутативных четырехмерных алгебр Ли лишь следующие три допускают инвариантную невырожденную форму лоренцевой сигнатуры: $m = u(2), \quad f = u(1,1), \quad l = osc$.*

Замечание 2. Первые две алгебры Ли хорошо известны (в размерности четыре нет других некоммутативных полупросттых алгебр). Присутствие в этом списке разрешимой алгебры l является определенной неожиданностью. Эта алгебра Ли задается следующими коммутационными соотношениями: $[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_3, \quad [e_4, e_3] = e_2$.

В контексте квантовой механики (и квантовой теории поля), волновые функции - это сечения (определенных) векторых расслоений над $\tilde{M}$ (т.н. "индуцированных расслоений", поскольку они задаются представлениями, индуцироваными конечномерными представлениями группы Пуанкаре). В случае скалярных частиц, слой (комплексный) одномерен, и т.д.

В хронометрии Сигала весь список известных в настоящее время частиц выводится математически. Одна хронометрическая частица ("эксон") пока не получила своего экспериментального подтверждения (см. [Se90]).

"Архитектура"скалярного расслоения определяется некоторым (конформно ковариантным) дифференциальным оператором второго порядка (т.н. "кривым волновым оператором"$\Box_m + 1$ - ср. с "плоским волновым оператором"$\Box_0 = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$). Здесь векторные поля $\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3$ порождают параллельные переносы в M_0. Скалярное расслоение (вместе с известными конечномерными $\tilde{P}$ - представлениями) определяет строение расслоений, моделирующих частицы более высоких спинов.

Чтобы задать $\Box_m$ формулой, начнем с Ли-алгебраической конструкции G-действия.

Пятнадцать генераторов $\mathbb{L}_{ij}$ (с условием $\mathbb{L}_{ij} = -\mathbb{L}_{ji}$) с коммутационными соотношениями $[\mathbb{L}_{is}, \mathbb{L}_{sk}] = -e_s \mathbb{L}_{ik}$ образуют базис в $su(2,2)$; здесь $e_{-1}, e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ это шестерка чисел $(1, 1, -1, -1, -1, -1)$.

G-действие задает векторные поля L_{ij} на M (те же буквы, что для генераторов, но нежирным шрифтом). В правых частях коммутационных соотношний надо сменить знак на противоположный.

Отображение Кэли переводит поля $\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3$ в

$$\begin{aligned} T_0 &= \tfrac{1}{2}(L_{-10} + L_{04}), \\ T_1 &= \tfrac{1}{2}(L_{-11} + L_{14}), \\ T_2 &= \tfrac{1}{2}(L_{-12} + L_{24}), \\ T_3 &= \tfrac{1}{2}(L_{-13} + L_{34}). \end{aligned}$$

Аналогично этому,

$$\begin{aligned} X_0 &= L_{-10}, \\ X_1 &= L_{14} - L_{23}, \\ X_2 &= L_{24} - L_{31}, \\ X_3 &= L_{34} - L_{12} \end{aligned}$$

являются векторными полями (левоинвариантными), порождающими M, а $\square_m = X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$ есть оператор Лапласа-Бельтрами. Необходимость постоянного слагаемого в (приведенной выше) формуле $\square_m + 1$ конформно-ковариантного оператора становится понятной после напоминания о следующем (тоже хорошо известном) результате:

Теорема 5 (см. [Or81]). *Пусть R - это (постоянная) скалярная кривизна четырехмерного конформно-плоского пространства-времени, а $\square$ - оператор Лапласа-Бельтрами в нем. Оператор $\square_m + \frac{R}{6}$ является конформно-ковариантным.*

В данном случае метрика определяется условием ортонормированности векторных полей X_0, X_1, X_2, X_3. Скалярная кривизна равна 6.

Глобально, мир $\tilde{M}$ есть универсальная накрывающая группы $U(2)$, $\tilde{M} = \mathbb{R}^1 \times S^3$, где S^3 сфера представлена группой $SU(2)$.

Огненный мир F – это универсальная накрывающая группы $U(1,1)$. Топологически F есть $\mathbb{R}^4$. Метрика фиксируется требованием ортонормированности следующих векторных полей:

$$\begin{aligned} H_0 &= L_{-10} - L_{12}, \\ H_1 &= L_{-12} - L_{01}, \\ H_2 &= L_{02} - L_{-11}, \\ H_3 &= L_{34}. \end{aligned}$$

Этот выбор уже задает (локальное) вложение группы $U(1,1)$ в $U(2)$ (при этом четыре векторных поля, поточечно, линейно независимы и световые конусы при этом вложении переходят друг в друга). Скалярная кривизна равна минус двум, поэтому соответствующий конформно-ковариантный оператор есть $\square_f - \frac{1}{3}$, здесь $\square_f = H_0^2 - H_1^2 - H_2^2 - H_3^2$.

Третий мир L есть $\mathbb{R}$, топологически. Его относительно компактная форма, четырехмерная орбита в $\mathfrak{U}(2)$, задается так:

$$\begin{aligned}
e_1 &= L_{-10} + L_{04} + L_{-11} + L_{14},\\
e_2 &= \tfrac{1}{2}(L_{-12} + L_{24} + 2L_{03} + 2L_{31}),\\
e_3 &= \tfrac{1}{2}(L_{-13} + L_{34} + 2L_{02} + 2L_{12}),\\
e_4 &= \tfrac{1}{8}(-5L_{-10} - 3L_{-11} + 3L_{04} + 5L_{14} + 4L_{23}).
\end{aligned}$$

Инвариантная форма $< e_2, e_2 >=< e_3, e_3 >= - < e_1, e_4 >= -1$ в L определяет двусторонне инвариантную метрику на группе. Скалярная кривизна равна нулю (изучению этого мира посвящена статья [Ле86], там было показано, что он является "плосковолновым решением"уравнений Эйнштейна общей теории относительности; все три мира обсуждались уже в [Ле85]). Соответствующий конформно-ковариантный волновой оператор таков:

$$\Box_e = 2e_1e_4 - e_2^2 - e_3^2.$$

Непосредственной проверкой (используя одну из основных хронометрических таблиц Сигала) устанавливается, что световой конус в единице группы $U(2)$ (т.е. в начале координат мира Минковского) - общий для всех рассматриваемых миров. Так как действие одно и то же (дробно-линейное), то и в других точках (событиях) световой конус общий (а выделение одного мира осуществляется лишь при выборе конкретного типа квантово-механического измерения - одного из трех возможных).

Первое публичное "DLF-представление"состоялось 30 августа 2003 года на заседании семинара Ньютон-Эйнштейн-Сигал (at Boston University), ровно пять лет спустя после перехода И.Сигала в мир L.

ЛИТЕРАТУРА

[Ad76] Александров, А.Д. Вестник Ленинградского Университета (1976), no.19 (Сер. Мат. Мех. Астр. вып. 4), 5-28; English transl. in Vestnik Leningrad Univ. Math. 9(1981).

[ГуЛе84] Гуц, А.К. и Левичев, А.В.; Докл. Акад. Наук СССР 277(1984), 253-257; English transl. in Soviet Math. Dokl. 30(1984).

[Ле85] . Левичев, А.В. В: Теоретико-групповые методы в физике. Труды III Международного Семинара, Юрмала, май 1985, том.1, Наука, Москва 1986, 145-150.

[Le86] Левичев, А.В. Сиб. мат. журн. 27(1986), no.2, 117-126. English transl. in Siberian Math. J. 27(1986), 237-245.

[Le95] Levichev, A.V. In: Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis, Eds.: Hofmann/Lawson/Vinberg; Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York (1995),77-103 (на web-странице http://math.bu.edu/people/levit)

[Or81] Orsted, B. J. Funct. Anal. 44(1981), 1-23.

[PaSe82] Paneitz, S.M. and Segal, I.E. J. Funct. Anal. 47(1982), 78-142.

[Se76] Segal, I. E. Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy. N.-Y.: Academic, 1976.

[Se91] Segal, I.E. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 88(1991), 994-998.