Семенюта Н.Ф.

О ВЗАИМОСВЯЗИ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация: Рассмотрены взаимосвязи золотого сечения, натуральных логарифмов и гиперболических функций.

Ключевые слова: золотое сечение, золотой вурф, натуральные логарифмы, гиперболические функции.

Содержание

Исходные положения

В статье рассмотрены взаимосвязи золотого сечения, золотого вурфа, натуральных логарифмов и гиперболических функций. Важность полученных результатов состоит в том, что золотое сечение, золотой вурф, натуральные логарифмы и гиперболические функции являются основными параметрами электрических моделей гармонических последовательностей чисел.

Начала исследования взаимосвязи золотого сечения и гиперболических функций в математической теории гармонии были изложены в 1971–1974 гг. в трудах Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта [1, 2, 3], С.-Петербургского государственного университета транспорта и других работах [4, 5, 6]. Настоящая статья является первой попыткой обобщения взаимосвязи этих параметров.

1. Золотое сечение

Золотое сечение (золотая пропорция, золотое число, деление в крайнем и среднем отношении) — отношение двух величин a и b ($a > b$), когда справедливо:

$$a/b = (a + b)/a = \Phi. \quad (1)$$

Иррациональное число Ф – золотое сечение, равно:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034..., \qquad \Phi^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618034... \quad (2)$$

На основе золотого сечения может быть образована золотая последовательность чисел с начальными числами $\Phi^0 = 1$ и $\Phi^1 = 1{,}618$:

...,Φ^{-4}	Φ^{-3}	Φ^{-2}	Φ^{-1}	Φ^{0}	Φ^{1}	Φ^{2}	Φ^{3}	Φ^{4} ...,
0,146	0,236	0,382	0,628	1	1,628	2,628	4,236	6,854…

нисходящая ветвь *восходящая ветвь*

Степени золотого сечения могут быть представлены также суммами чисел:

$$\Phi^1 = 1\Phi + 0, \qquad \Phi^{-1} = 1\Phi^{-1} - 0,$$
$$\Phi^2 = 1\Phi + 1, \qquad \Phi^{-2} = -1\Phi^{-1} + 1,$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 1, \qquad \Phi^{-3} = 2\Phi^{-1} - 1,$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2, \qquad \Phi^{-4} = -3\Phi^{-1} + 2,$$

$$\Phi^5 = 5\Phi + 3, \qquad \Phi^{-5} = 5\Phi^{-1} - 3,$$

2. Взаимосвязь золотого сечения и натуральных логарифмов

Простейшая связь золотого сечения и натуральных логарифмов:

$$\Phi = e^{\gamma}, \quad \ln \Phi = \gamma = 0{,}48128\ldots, \quad \Phi^{-1} = e^{-\gamma}, \quad \ln \Phi^{-1} = -\gamma = -0{,}48128\ldots, \qquad (3)$$

$$\Phi^2 = e^{2\gamma}, \quad 2 \ln \Phi = 2\gamma = 0{,}96256\ldots, \quad \Phi^{-2} = e^{-2\gamma}, \quad 2 \ln \Phi^{-1} = -2\gamma = -0{,}96256\ldots$$

где e – основание натуральных логарифмов, e = 2,71828…

Логарифмические функции золотого сечения могут быть представлены показательными функциями [7, 8]:

$$\ln\Phi = 2\left(\frac{\Phi-1}{\Phi+1} + \frac{(\Phi-1)^3}{3(\Phi+1)^3} + \frac{(\Phi-1)^5}{5(\Phi+1)^5} + \ldots\right) = 2\left(\frac{\Phi^{-1}}{\Phi^2} + \frac{\Phi^{-3}}{\Phi^6} + \frac{\Phi^{-5}}{5\Phi^{10}} + \ldots\right) =$$

$$= 2\left(\Phi^{-3} + \frac{\Phi^{-9}}{3} + \frac{\Phi^{-15}}{5} + \ldots\right), \qquad (4)$$

а также функциями:

$$\ln\Phi = (\Phi-1) - \frac{(\Phi-1)^2}{2} + \frac{(\Phi-1)^3}{3} - \frac{(\Phi-1)^4}{4} + \ldots = \Phi^{-1} - \frac{\Phi^{-2}}{2} + \frac{\Phi^{-3}}{3} - \frac{\Phi^{-4}}{4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\Phi^1} - \frac{1}{2\Phi^2} + \frac{1}{3\Phi^3} - \frac{1}{4\Phi^4} + \ldots, \qquad (5)$$

$$\ln\Phi^{-1} = (\Phi^{-1}-1) - \frac{(\Phi^{-1}-1)^2}{2} + \frac{(\Phi^{-1}-1)^3}{3} - \frac{(\Phi^{-1}-1)^4}{4} + \ldots = \Phi^{-2} - \frac{\Phi^{-4}}{2} + \frac{\Phi^{-6}}{3} - \frac{\Phi^{-8}}{4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\Phi^2} - \frac{1}{2\Phi^4} + \frac{1}{3\Phi^6} - \frac{1}{4\Phi^8} + \ldots, \qquad (6)$$

$$\ln\Phi = \frac{\Phi-1}{\Phi} + \frac{(\Phi-1)^2}{2\Phi^2} + \frac{(\Phi-1)^3}{3\Phi^3} + \frac{(\Phi-1)^4}{4\Phi^4} + \ldots = \Phi^{-1} - \frac{\Phi^{-2}}{2} + \frac{\Phi^{-3}}{3} + \frac{\Phi^{-4}}{4} + \ldots =$$

$$=\frac{1}{\Phi}-\frac{1}{2\Phi^2}+\frac{1}{3\Phi^3}+\frac{1}{4\Phi^4}+\ldots, \qquad (7)$$

$$\ln\Phi=\frac{\Phi^{-1}-1}{\Phi^{-1}}+\frac{(\Phi^{-1}-1)^2}{2\Phi^{-2}}+\frac{(\Phi^{-1}-1)^3}{3\Phi^{-3}}+\frac{(\Phi^{-1}-1)^4}{4\Phi^{-4}}+\ldots=-\left(\Phi^{-1}-\frac{\Phi^{-2}}{2}+\frac{\Phi^{-3}}{3}+\frac{\Phi^{-4}}{4}+\ldots\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{\Phi}-\frac{1}{2\Phi^2}+\frac{1}{3\Phi^3}+\frac{1}{4\Phi^4}+\ldots\right). \qquad (8)$$

3. Взаимосвязь золотого сечения и гиперболических функций

Одним из свойств золотого сечения является его связь с гиперболическими функциями:

$$\mathrm{sh}\,\gamma=\frac{1}{2},\qquad \mathrm{ch}\,\gamma=\frac{\sqrt{5}}{2},\qquad \mathrm{th}\,\gamma=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\mathrm{sh}^2\,\gamma=\frac{1}{4},\qquad \mathrm{ch}^2\,\gamma=\frac{5}{4},\qquad \mathrm{th}^2\gamma=\frac{1}{5},$$

$$ch\left(\frac{3}{2}\gamma\right)=\sqrt{\Phi},\qquad sh\left(\frac{3}{2}\gamma\right)=\frac{1}{\sqrt{\Phi}},\qquad th\left(\frac{3}{2}\gamma\right)=\frac{1}{\Phi},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\Phi^2+\Phi^{-2}}{2}=\frac{\Phi^2+\Phi^{-2}}{\Phi+\Phi^{-2}}=\frac{\Phi^2+\Phi^{-2}}{\Phi^2-\Phi^{-1}}=\frac{1+\Phi^{-4}}{1-\Phi^{-3}},$$

$$\mathrm{sh}\,\gamma+\mathrm{ch}\,\gamma=\Phi,\qquad \mathrm{sh}\,\gamma-\mathrm{ch}\,\gamma=-\Phi^{-1},$$

$$\mathrm{sh}^2\,\gamma+\mathrm{ch}^2\,\gamma=\frac{1}{2}ch\gamma,\qquad \mathrm{sh}^2\,\gamma-\mathrm{ch}^2\,\gamma=-1=-2sh\gamma.$$

$$(\mathrm{sh}\,\gamma+\mathrm{ch}\,\gamma)^2=\Phi^2,\qquad (\mathrm{sh}\,\gamma-\mathrm{ch}\,\gamma)^2=-\Phi^{-2}.$$

Из полученного также следует:

$$e^{\gamma}+e^{-\gamma}=\Phi+\Phi^{-1}=\sqrt{5}=2\mathrm{ch}\,\gamma,$$

$$e^{\gamma}-e^{-\gamma}=\Phi-\Phi^{-1}=1=2\mathrm{sh}\,\gamma,$$

$$\mathrm{ch}\,\gamma=\frac{e^{\gamma}+e^{-\gamma}}{2}=\frac{\Phi+\Phi^{-1}}{2},$$

$$\mathrm{sh}\,\gamma=\frac{e^{\gamma}-e^{-\gamma}}{2}=\frac{\Phi-\Phi^{-1}}{2}.$$

$$\text{ch } 2\gamma = \frac{e^{2\gamma} + e^{-2\gamma}}{2} = \frac{\Phi^2 + \Phi^{-2}}{2} \quad ,$$

$$\text{sh } 2\gamma = \frac{e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}}{2} = \frac{\Phi^2 - \Phi^{-2}}{2} \quad .$$

Приведенные гиперболические функции подобны классическим гиперболическим функциям, но в их основе лежит золотое сечение Ф.

4. Взаимосвязь золотого вурфа и натуральных логарифмов

Вурф определяется следующим отношением:

$$W = \frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)}.$$

где – *a, b, c* – величины соответствующих чисел Фибоначчи. При этом необходимое условие: величины *a, b, c* должны быть упорядочены либо по убыванию *(a > b > c)*, либо по возрастанию *(a < b < c)* [9]. Величина золотого вурфа, с учетом того, что $a = \Phi^0 = 1$, $b = \Phi^{-1}$, $c = \Phi^{-2}$, равна:

$$W = \frac{(\Phi^0 + \Phi^{-1})(\Phi^{-1} + \Phi^{-2})}{\Phi^{-1}(\Phi^0 + \Phi^{-1} + \Phi^{-2})} = \frac{\Phi^2}{2} = \frac{1+\Phi}{2}. = 1 + \frac{\Phi^{-1}}{2} = 1{,}309017\ldots . \qquad (9)$$

Простейшая связь золотого вурфа и натуральных логарифмов:

$$W = e^{\alpha}, \qquad \alpha = \ln W = 0{,}26927\ldots, \qquad (10)$$

или

$$\ln W = \ln\left(\frac{\Phi^2}{2}\right) = 2\ln\frac{\Phi}{\sqrt{2}}.$$

Логарифмические функции могут быть преобразованы в ряды золотого сечения:

$$\ln\Phi = \ln(1 + \frac{1}{\Phi}) = \frac{1}{\Phi} - \frac{1}{2\Phi^2} + \frac{1}{3\Phi^3} - \frac{1}{4\Phi^4} \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\Phi^m}, \qquad (11)$$

$$\ln\Phi^2 = -\ln(1 - \frac{1}{\Phi}) = 2\ln\Phi = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{2\Phi^2} + \frac{1}{3\Phi^3} + \frac{1}{4\Phi^4} \ \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Phi^n}. \qquad (12)$$

Сумма (11) и (12), образует ряд золотого сечения:

$$\ln\Phi^3 = 3\ln\Phi = 2(\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{3\Phi^3} + \frac{1}{5\Phi^5} + \ldots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\Phi^{2n-1}},$$

а разность (12) из (11) ряд золотого сечения:

$$\ln\Phi = \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{2\Phi^4} + \frac{1}{3\Phi^6} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Phi^{2n}}.$$

С учетом теоремы сложения гиперболических функций, получим:

$$sh(1\pm\Phi^{-1}) = sh1\cdot ch\Phi^{-1} \pm ch1\cdot sh\Phi^{-1},$$
$$ch(1\pm\Phi^{-1}) = ch1\cdot ch\Phi^{-1} \pm sh1\cdot sh\Phi^{-1}$$

$$sh(1\pm\Phi) = sh1\cdot ch\Phi \pm ch1\cdot sh\Phi,$$
$$ch(1\pm\Phi) = ch1\cdot ch\Phi \pm sh1\cdot sh\Phi.$$

5. Характеристические уравнения золотого сечения

Обозначив в (1) отношение $a/b = x$, получим приведенное квадратное уравнение «золотого» сечения

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad (13)$$

Численные значения корней уравнения, равны:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 = \Phi.$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618 = -\Phi^{-1}$$

$$x_1\, x_2 = -1 = \Phi(-1/\Phi).$$

С учетом (3) и (4), корни уравнения (13):

$$x_1 = \Phi = sh\,\gamma + \mathrm{ch}\gamma,$$

$$x_2 = -\Phi^{-1} = sh\gamma - ch\gamma,$$

$$x_1\, x_2 = \Phi(-1/\Phi) = -2sh\gamma = sh^2\gamma - ch^2\gamma.$$

.

Сумма и разность корней уравнения (13) соотаетственно, равны:

$$x_1 + x_2 = \Phi + (-\Phi^{-1}) = 1 = 2\mathrm{sh}\gamma,$$

$$x_1 - x_2 = \Phi - (-\Phi^{-1}) = \sqrt{5} = 2\mathrm{ch}\gamma.$$

Из полученных соотношений следуют связи экспонент и золотых сечений с гиперболическими функциями:

$$e^{\gamma} - e^{-\gamma} = \Phi - \Phi^{-1} = 1 = 2\mathrm{sh}\,\gamma,$$

$$e^{\gamma} + e^{-\gamma} = \Phi + \Phi^{-1} = \sqrt{5} = 2\mathrm{ch}\,\gamma,$$

а также формулы:

$$\text{ch}\,\gamma = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2} = \frac{\Phi + \Phi^{-1}}{2},$$

$$\text{sh}\,\gamma = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2} = \frac{\Phi - \Phi^{-1}}{2}.$$

6. Характеристические уравнения золотого вурфа

Приведенное квадратное уравнение золотого вурфа (8)

$$. \quad y^2 - y - \frac{\Phi}{4} = 0. \tag{14}$$

Численные значения корней уравнения, равны:

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{\Phi^2}}{2} = \frac{1+\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2} = 1{,}309 = W,$$

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{\Phi^2}}{2} = \frac{1-\Phi}{2} = -\frac{\Phi^{-1}}{2} = 1 - W = -0{,}309.$$

$$y_1\, y_2 = -\frac{\Phi}{4}. = -0{,}40448\ldots.$$

Из полученного следует:

$$y_1 = W = \frac{\Phi^2}{2} = \frac{1+\Phi}{2} = \frac{(sh\gamma + ch\gamma)^2}{2} = \frac{3sh\gamma + ch\gamma}{2} = 1{,}3$$

$$y_2 = -W^{-1} = -\frac{\Phi^{-1}}{2} = \frac{sh\gamma - ch\gamma}{2} = -0{,}309,$$

$$y_1\, y_2 = \frac{\Phi}{4} = \frac{sh\gamma + ch\gamma}{4}.$$

Сумма и разность корней уравнения (13) соотаетственно, равны:

$$y_1 + y_2 = W + (-W^{-1}) = 1 = 2\text{sh}\gamma,$$

$$y_1 - y_2 = \text{W} - (-W^{-1}) = \Phi = \text{sh}\gamma + \text{ch}\gamma.$$

Откуда

$$sh\gamma = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{W - W^{-1}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$ch\gamma = \frac{y_1 - 3y_2}{2} = \frac{W + 3W^{-1}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные функции золотого сечения, экспоненты и гиперболических функций являются основой теории электрических цепей и электрических моделей гармонических последовательностей чисел [12].

Прошу читателей и коллег, возникшие критические замечания и пожелания по изложенному материалу, сообщить по электронной почте: **nikolay.semeniuta@gmail.com.** Буду благодарен**.**

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенюта, Н. Ф. Свойства рекуррентных последовательностей, используемых для анализа электрических цепей / Н. Ф. Семенюта //Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, 1971. – Вып. 95. – С. 28–32.
2. Семенюта, Н. Ф. Анализ электрических цепей методом рекуррентных чисел / Н. Ф. Семенюта // Электрическая связь на железнодорожном транспорте: тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д. трансп. – Гомель: БелИИЖТ, 1974. Вып. 134. – С. 3–19.
3. Семенюта, Н. Ф. О связи рекуррентных числовых последовательных и гиперболических функций / Н. Ф. Семенюта // Применение АВМ и ЭЦВМ к решению некоторых задач механики деформируемых тел. – Гомель: БелИИЖТ, 1973. – Вып. 114. – С. 39–43.
4. Семенюта, Н. Ф. О связи параметров цепочечных схем с рекуррентными числовыми последовательностями / Н. Ф. Семенюта // Теоретическая электротехника. – Львов: Вища школа, 1974. – Вып. 17. – С. 23–25.
5. Семенюта, Н. Ф. Анализ однородных пассивных четырехполюсников с помощью многочленов Чебышева / Н. Ф. Семенюта: XII юбилейная науч.-техн. конф. – Гомель: БелИИЖТ, 1975. – С. 34–35.
6. Семенюта Н. Ф. Закономерности рекуррентных чиел Фибоначчи в лестничных электрических цепях / Н. Ф. Семенюта, С. А. Ясинский // Электрическая связь и радио на железных дорогах России. – СПб.: ПГУПС, 2000, – С. 40–45.
7. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев.– М.: Гостехиздат, 1955. – 608 с.
8. Brown, C. The Natural Logarithm of the Golden Section, Fibonacci Quart. V. 55. – №. 5, 2017. – P. 42–44.
9. Петухов, С. В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость / С. В. Петухов. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 316 с.
10. Семенюта, Н.Ф. Новое о золотом сечении / Н. Ф. Семенюта // XVII Международ. науч.-практич. конф: Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке: «Prospero», – № 5(17), 2015. – С.127–131.
11. Семенюта, Н. Ф. К тайнам золотого сечения. / Н. Ф. Семенюта // Евразийский союз ученых (ЕСУ). – № 4(13), 2015. – С. 119–122.
12. Семенюта, Н. Ф. Электрические модели рекуррентных последовательностей чисел / Н. Ф. Семенюта // De Lapide Philosophorum, – № III(019), 2019. – С. 92–117.