

## Пирамида Хеопса. О пользе совпадений

*Один раз – случайность,  
раза – совпадение, а три – уже система!*

### **Вступление**

Пирамида Хеопса. Несмотря на различные, порой диаметрально противоположные взгляды на природу данного феномена, к ней всегда будут обращаться исследователи. Люди, живущие в разные эпохи, имеющие различное образование и интересы, не могли и, наверное, никогда не смогут равнодушно смотреть на это чудо. Пирамида Хеопса является одним из самых изучаемых объектов материальной культуры, оставшейся нам от прежних цивилизаций. Одним из самых изучаемых и одним из самых измеренных. Многие исследователи прошлого были твердо уверены в том, что в Великой пирамиде в зашифрованном виде сохранились древние знания. Возможность постичь логику формообразования пирамиды Хеопса значило для них получить некий ключ к знаниям, которые были забыты или утрачены. Откуда взялась эта уверенность? Что, в принципе, можно зашифровать в размерах пирамиды? Что могут значить несколько цифр? Длина основания, высота, апофема, площади, отношения достаточно хорошо изучены. В литературе они выражаются в метрической системе, в дюймах, парижских футах и туазах, в «королевских» локтях и так далее. Однако большинство исследователей обращает внимание на отношения, которые возникают при сопоставлении основных параметров пирамиды Хеопса, считая, что только безразмерные отношения смогут нам что-то подсказать.

В настоящее время у части исследователей сформировалось мнение о том, что в параметрах пирамиды зашифрованы отношения  $\Phi = 1,618034\dots$  (коэффициент «золотого сечения») и  $\pi = 3,1415926\dots$  (отношение длины окружности к её диаметру). Не так уж важно соответствует это истине или нет, важно, что распознать эти константы стало возможно потому, что наша цивилизация их уже знала достаточно давно. Дискуссия ведется только о том, когда, во времена великих математиков Древней Греции или несколькими столетиями после рождения Христа,  $\Phi$  и  $\pi$  вошли в повседневную жизнь нашей цивилизации. Таким образом, если речь идет только об этих константах, ключ к древним знаниям никогда не терялся, так как был обнаружен уже достаточно давно. Возможно, удастся обнаружить еще какую-нибудь константу, например  $e = 2,7182818\dots$ , но это не похоже на код. Возможно, мы чего-то не видим, и/или наша логика не применима к древним сооружениям и артефактам. Ведь, по большому счету, ничего из древних артефактов не вошло в научный и технический оборот. Человечество идет своим путем, темпы развития достаточно высоки, и оно уже не нуждается в «подсказках». А может быть мы уже эти знания, что называется, «освоили» даже не заметив?

Тем не менее, есть некоторые совпадения цифр, относящихся к теме «Пирамиды и математика», которые, по крайней мере, удивляют. Этим совпадениям и посвящена моя статья.

### **Пирамида Хеопса и сажени**

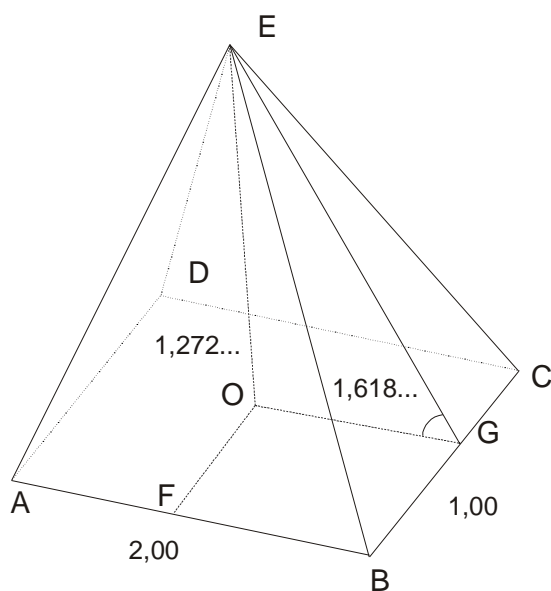
Вначале несколько слов о размерах пирамиды Хеопса и других «больших» пирамидах. В декабре 2012 года в рамках семинара, который проводила Лаборатория альтернативной истории в Египте, мне удалось в спокойной обстановке осмотреть и, что называется, потрогать руками каждую из пирамид. Поскольку в различных статьях высказываются разные мнения о состоянии и принципиальной возможности провести измерения основных параметров пирамид, мне важно было самому принять решение, насколько эти цифры надежны. Что я увидел. Я буду говорить о пяти больших пирамидах, исключая пирамиду в Мейдуме.

Часть пирамид покоятся на платформах. Платформы (Дж.Х.Коул называет их вымосткой) имеют небольшую высоту и выступают относительно облицовки на 30 – 40 см. Для пирамиды Хеопса этот отступ составляет от 38 до 48 см. У всех пирамид сохранилось достаточное количество облицовочных плит для замеров угла наклона облицовки, причем, многие плиты находятся в приличном состоянии. У пирамиды Хеопса по углам платформы вбиты металлические стержни (наверное, это сделали исследователи и/или археологи), что позволило четко определить

границу платформы. У остальных пирамид по углам видны раскопы, в которых можно увидеть углы платформ и линию соединения платформы и нижнего ряда блоков облицовки, правда, далеко не во всех случаях. Часть углов сильно разрушена. Но и этого достаточно, чтобы убедиться в том, что измерения размеров пирамид проводились, проводились по определенной методологии и цифры вполне надежны.

Большинство специалистов и исследователей при анализе основных параметров пирамиды Хеопса используют среднее значение стороны основания около 230,36 метра. Высота принимается около 146,6 метра, апофема – 186,5 метра. В различных источниках можно встретить значения, незначительные отклоняющиеся от указанных. Угол наклона граней пирамиды принимается равным  $51^{\circ}51'$ . В своих описаниях Египетских пирамид древнегреческий историк Геродот дал «подсказки», касающиеся размеров Великой пирамиды Хеопса. Ведутся дискуссии по качеству перевода этого фрагмента текста, а также интерпретации этих «подсказок» и возможности их использования для анализа. Но практически все исследователи используют в своих работах. Первая касается отношения площади боковой грани к высоте в квадрате, а вторая связывает площадь основания и высоту пирамиды.

Сводя эти параметры объекта, можно построить модель пирамиды для различных исследований, что и было сделано достаточно давно. Поэтому, в различных источниках можно встретить, так называемую «математическую модель пирамиды Хеопса».



### **Математическая модель пирамиды Хеопса**

Если принять сторону основания как 2, то высоту можно принять 1,2727..., и апофему – 1,6180...

Отношение высоты к апофеме равно 0,78615...

Угол наклона боковой грани составляет  $51,8273^{\circ}$  или  $51^{\circ}51'$

Первое условие Геродота «Площадь боковой грани равна высоте пирамиды в квадрате»:

$$1 * 1,618... \approx (1,2727...)^2$$

Второе условие Геродота «Периметр основания пирамиды при делении на удвоенную высоту дает  $\pi$ »:

$$2 * 4 / 2 * 1,2727... \approx 3,1428...$$

Насколько я понимаю, далеко не все согласны с такой моделью пирамиды Хеопса. Аргументы разные, но главное, и с этим трудно спорить: - «Какими средствами получен такой результат, учитывая принятый на сегодня уровень математических знаний древнего Египта?»

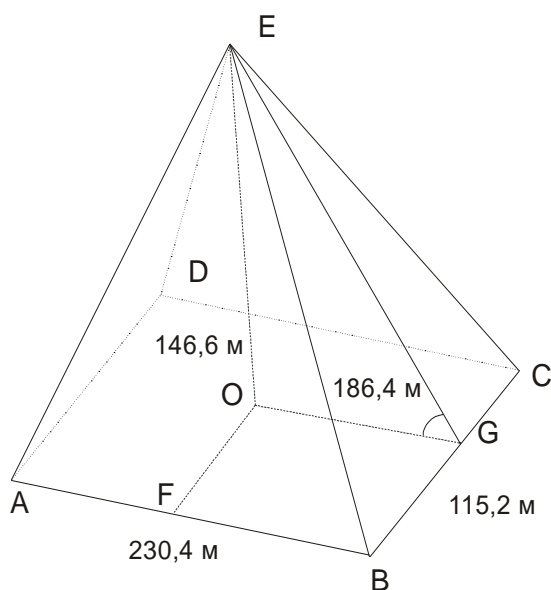
В этом месте сделаем отступление и обратим внимание на таблицу русских сажений. Можно взять эту таблицу из материалов А.А. Пилецкого, книг А.Ф.Черняева или из Википедии. Но в любом случае, существует сажень «греческая» равная 230,4 см. Умножив её на 100, получим 230,4 метра. Отклонение около 4 см от среднего значения или 0,013%. Ну что же, один раз случайность. Но в таблице русских сажений есть еще сажень «церковная» равная 186,4 см. Умножив её на 100, получим 186,4 метра. Эта величина практически равна апофеме. Интересно! Но мы применим условие – **«Один раз – случайность, два раза – совпадение, а три – уже система!»** Можем ли мы увидеть в таблице русских сажений третий параметр пирамиды Хеопса, её высоту? На первый взгляд – нет. Но при спокойном и внимательном рассмотрении, выясняется, что полусумма двух сажений, а именно, «малой» (142,4 см) и «простой» (150,8 см) при умножении на 100 дает искомый размер:

$$\frac{142,4 + 150,8}{2} * 100 = 14660 \text{ см} = 146,6 \text{ метра} \quad (1)$$

При этом, естественно, выполняются все обнаруженные исследователями отношения, а также «условия Геродота»:

- Отношение апофемы к половине основания составляет  $186,4/115,2 = 1,618055(5)$
- Отношение периметра основания к удвоенной высоте составляет  $3,143247(+)$
- Отношение площади боковой грани к квадрату высоты составляет  $21473,28/21494,56 = 0,99915 (+)$
- Угол наклона граней составляет  $51,84^\circ = 50^\circ 50,4'$

Следовательно, можно построить модель пирамиды Хеопса на базе сажений и продолжить исследование! При этом необходимо заметить, что сажени не имеют установившихся наименований и в данном исследовании это, скорее, часто встречающиеся названия устоявшихся размеров типа 230,4 см, 186,4 см, 142,4 см и так далее.



### Модель пирамиды Хеопса на основе сажений

Сторона основания равна 230,4 метра, высот – 146,6 метра и апофема – 186,4 метра.

Отношение высоты к апофеме равно 0,78648...

Угол наклона боковой грани составляет  $51,85783...^\circ$  или  $51^\circ 50,4'$ .

Первое условие Геродота:

$$115,2 * 186,4 = 21\,473,28 \text{ (метра}^2\text{)}$$

$$146,6^2 = 21\,491,56 \text{ (метра}^2\text{)}$$

Разница составляет 0,085 %

Второе условие Геродота:

$$230,4 * 4 / 146,6 * 2 = 3,143247 (+).$$

Таким образом, имеет место **совпадение I:**

**Основные параметры пирамиды Хеопса могут быть выражены сажнями 230,4 см; 186,4 см; 142,4 см и 150,8 см, при минимальных преобразованиях. Причем 230,4 см и 186,4 см берутся из таблицы «Матрешка» без изменения.**

При этом можно отметить **совпадение II:**

**Частное от деления 186,4 на 115,2 равно частному от деления 233 на 144. При этом 233 и 144 это числа Фибоначчи. Итак,  $186,4/115,2 = 233/144 = 1,618055(5)$ . Причем, без округлений!**

Поскольку в дискуссиях по теме «Пирамиды и математика» обязательно упоминаются числа Фибоначчи, рассмотрим числа Фибоначчи с учетом обнаруженных совпадений.

Числа Фибоначчи: 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 610; 987; 1597; 2584; 4181; 6765; 10946; ... и так далее.

Этот ряд публиковался несконечное число раз, да и таблица русских сажений была опубликована многократно. Однако при внимательном рассмотрении этих двух таблиц нас ожидает сюрприз! Назовем его **совпадением III:**

**Сажени «кладочная» 159,7 см и сажень (без названия) 258,4 см равны 18 и 19 числам Фибоначчи (выраженным в см).** Исследователи системы сажений уже достаточно давно обратили на это внимание, однако каким образом эти размеры были получены, тиражировались и применялись в прошлом остается непонятным.

Но мы знаем, два раза – совпадение, а три – система. Примем, что числа Фибоначчи некий размер в мм. При умножении 17-го числа Фибоначчи (987) на 2, получается следующий результат:  $987 * 2 = 1974 \text{ (мм)} = 197,4 \text{ см}$ . Это сажень «царская». Продолжим наш поиск и совпадения посыпались как из рога изобилия. Действительно:

$$610 * 4 = 2440 = 244,0 \text{ см} - \text{сажень «великая»}$$

$$\begin{aligned}
377 * 4 &= 1508 = 150,8 \text{ см} - \text{сажень «простая»} \\
233 * 8 &= 1864 = 186,4 \text{ см} - \text{сажень «церковная»} \\
144 * 16 &= 2304 = 230,4 \text{ см} - \text{сажень «греческая»} \\
89 * 16 &= 1424 = 142,4 \text{ см} - \text{сажень «малая»} \\
55 * 32 &= 1760 = 176,0 \text{ см} - \text{сажень «народная»} \\
34 * 64 &= 2176 = 217,6 \text{ см} - \text{сажень «казенная»} \\
21 * 64 &= 1344 = 134,4 \text{ см} - \text{сажень «без имени»} \\
13 * 128 &= 1664 = 166,4 \text{ см} \\
8 * 256 &= 2048 = 204,8 \text{ см} \\
5 * 256 &= 1280 = 128,0 \text{ см}
\end{aligned}$$

Для полноты картины добавим еще два числа Фибоначчи (20-е и 21-е), деленные на 2 и 4 соответственно:

$$\begin{aligned}
4181 / 2 &= 2090,5 = 209,05 \text{ см} \\
6765 / 4 &= 1681,25 = 169,125 \text{ см}
\end{aligned}$$

Отметим совпадение IV:

**Значительная часть, встречающихся в литературе русских сажений могут быть выражены произведением чисел Фибоначчи (выраженным в см.) на 2 в степени n.**

Теперь становится понятным, почему при исследовании параметров пирамиды Хеопса «всплывают»  $\Phi$  и  $\pi$ . Дело в том, что числовые значения основных параметров пирамиды Хеопса весьма близки к 186,4 метра (апофема) и 230,4 метра (сторона основания). И если даже будет доказано, что это случайность, отношение числа близкого к 186,4 к половине числа близкого к 230,4 будет все равно давать результат близкий к 1,6180...! Так всплывает  $\Phi$  и оно не может исчезнуть.

Что касается  $\pi$ . Рассмотрим отношение периметра основания к удвоенной высоте. Периметр основания весьма близок к 921,6 метра. Через числа Фибоначчи это выглядит как  $144 \text{ мм} * 16 * 4 * 100 = 921600 \text{ мм} = 921,6 \text{ метра}$ . А высота может быть выражена через сажени 142,4 см и 150,8 см. Преобразование дает:

$$\frac{89*16+377*4}{2} * 100 = (89 * 8 + 377 * 2) * 100 = 146600 \text{ мм} = 146,6 \text{ метра} \quad (2)$$

Разделив периметр на удвоенную высоту, получим:

$$\frac{144*16*4*100}{2*(89*8+377*2)*100} = \frac{144*16}{89*4+377} = 3,143247(+) \quad (3)$$

Тот же результат можно получить и иначе. Так как отношение

$$\frac{1508}{1424} = \frac{377*4}{89*16} = \frac{377}{89*4} = 1,059 (+), \text{ то полусумму можно представить как } 1424 * 1,0295 (+) \text{ мм.}$$

$$\text{Тогда } \frac{144*16*4*100}{2*89*16*100*1,0295...} = \frac{144*2}{89*1,0295...} = \frac{3,235955...}{1,0295...} = 3,14323 (+). \quad (4)$$

Расхождение в пятом знаке после запятой связано с тем, что 1,059... и, соответственно, 1,0295... - числа иррациональные.

Можно отметить, что число 1,059017... получается по формуле  $\frac{F_n}{4 * F_{n-4}}$ , где  $F_n$  - число Фибоначчи при достаточно больших  $n$  (его иногда называют «шаг Хеси Ра»).

Если принять, что параметры пирамиды Хеопса не будут пересмотрены кардинально, а для этого, похоже, нет оснований, отношение апофемы к половине стороны основания будет таким как сейчас  $\approx 1,618$ , а отношение периметра основания к удвоенной высоте будет около 3,1432!

Можно ли считать, что это реально  $\pi$ , как оно принимается в математике или это число просто «весьма похожее» на математическую константу, которая выражает отношение длины окружности к ее диаметру?

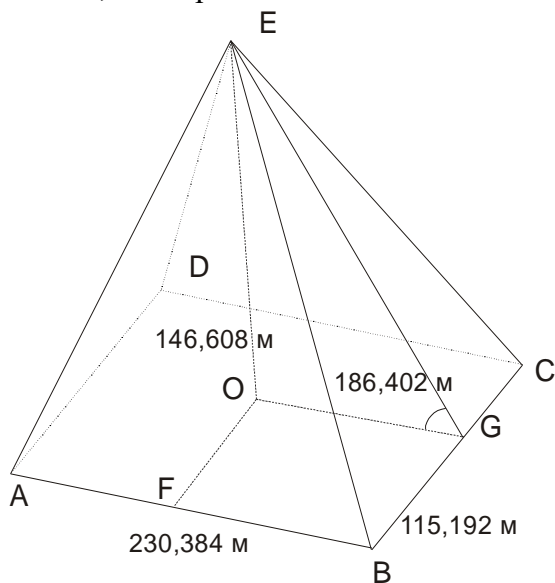
Но, продолжим.

### Вариант Ф. Питри

Существует и другой вариант представления основных параметров пирамиды Хеопса. Его можно назвать «вариант Ф. Питри».

Длина основания принимается как  $440 * 52,36 \text{ см} = 23038,40 \text{ см} = 230,384 \text{ метра}$ , где 52,36 – «королевский» локоть древнего Египта.

Апофема равна  $356 * 52,36 \text{ см} = 18640,16 \text{ см} = 186,402 \text{ метра}$ , а высота равна  $280 * 52,36 \text{ см} = 146,61 \text{ метра}$ .



### Модель пирамиды Хеопса в «традиционном» варианте (Ф. Питри)

Сторона основания равна 230,384 метра, высот – 146,608 метра и апофем – 186,402 метра.

Отношение высоты к апофеме равно 0,78651...

Угол наклона боковой грани составляет  $51,861182...^\circ$  или  $51^\circ 52'$ .

Первое условие Геродота:

$$115,192 * 186,402 = 21\,472,02 \text{ (метра}^2\text{)}$$

$$146,6^2 = 21\,491,56 \text{ (метра}^2\text{)}$$

Второе условие Геродота:

$$230,384 * 4 / 146,608 * 2 = 3,142857...$$

Совпадение красиво! Назовем его **совпадение V**:

**Интересно отметить, основные параметры и их соотношения для пирамиды Хеопса, полученные двумя принципиально различными способами, практически совпадают!**

Но оно становится еще более удивительным, когда мы увидим, что число локтей 440, 356 и 280 также выражаются через числа Фибоначчи. В данном случае результат достигается при помощи другой «четверки» последовательных чисел Фибоначчи — 34, 55, 89 и 144. Действительно:

$$440 = 55 * 8$$

$$356 = 89 * 4$$

Что касается высоты. Необходимо сделать отступление.

Для любых четырех последовательных чисел Фибоначчи ( $F_{n-2}; F_{n-1}; F_n; F_{n+1}$ ) выполняется

$$\text{следующее отношение: } F_n^2 \approx F_{n-1}^2 + \left( \frac{F_{n-2} + 2 + F_{n+1}/2}{2} \right)^2. \quad (5)$$

Отклонение правой части формулы в пределе стремится к 0,041%. Для практических целей это отклонение неумовимо.

В связи с данным свойством чисел Фибоначчи возникает **совпадение VI**. Всем хорошо известен «священный Египетский треугольник». Принято считать, что он получается возведением в квадрат трех последовательных натуральных чисел — 3; 4; 5. Но оказывается, что формула (5) для четырех последовательных чисел Фибоначчи — 2; 3; 5; 8, дает такой же результат! Правда, это совпадение не имеет отношение к теме данной статьи.

**Или имеет, и за этим стоит нечто большее?**

Однако вернемся к пирамиде Хеопса. Если основание и апофема могут быть выражены через числа Фибоначчи 55 и 89, то высоту можно получить через выражение  $(34*2 + 144/2)/2$ , что дает число 70. Хотя по Пифагору это выражение равно 69,97142...

**При этом необходимо заметить, что в общепринятой хронологии между Хеопсом и Пифагором около 17 веков!**

## Варианты

Итак, мы имеем два варианта интерпретации основных размеров пирамиды Хеопса.

Вариант	Модуль (см)	Количество (шт)	Результат (см)	Примечание
«Сажени»				Модуль - ЧиФ
Основание	230,4	100	23040	144 мм * 16
Апофема	186,4	100	18640	233 мм * 8
Высота	146,6	100	14660	(89*16+377*4)/2 мм
«Ф. Питри»				Модуль - кол-во
Основание	52,36	440	23038,4	55 * 8
Апофема	52,36	356	18640,16	89 * 4
Высота	52,36	280	14660,8	(34*2+144/2)/2=70*4

Наверняка у каждого из этих вариантов будут свои сторонники, но что-то подсказывает, что только один из них верный. Один является отражением другого и вот почему.

Дело в том, что частное от деления  $\frac{2F_n}{F_{n-1}}$  (одно из свойств чисел Фибоначчи) стремится к 5,236068... Поэтому  $2*144 = 288$ , а  $288/55 = 5,236$  (36), и тогда  $144 * 16 \approx 55 * 8 * 5,236$  или  $2304,0 \approx 2303,84!$

Почему так произошло? Наверное, только потому, что основные параметры пирамиды Хеопса могут быть с хорошим приближением представлены числами Фибоначчи 89; 144; 233 и 377. Поскольку исследователи рассматривали только отношение апофемы к половине основания, да и то не в «естественном» виде, а с округлением «около 1,618», то числа Фибоначчи «вышли из тени» и преподнесли всем нам сюрприз.

Интересно отметить следующее. При основании 230,4 метра и апофеме 186,4 метра «идеальная» высота составляет 146,54 метра. А для «идеального» отношения периметра основания  $230,4 * 4 = 921,6$  метра к удвоенной высоте (что бы получить  $\pi$ ) высота должна быть 146,6772 (+).

Есть на что посмотреть: **146,54 — 146,6 — 146,68!** Отклонение около 7 см в обе стороны или +/- 0,053%, а сколько было сломано копий!

### Подведем итоги

1. О том, что «арабские» цифры и числа Фибоначчи появились в Европе не раньше XII века хорошо известно. Мы используем для анализа древних сооружений метрическую систему, принятую в XIX веке. Наверное, если взять иную систему, например дюймы, цифры не будут выглядеть не так красиво, но все соотношения сохранятся.

2. Основные размеры пирамиды Хеопса (сторона основания, апофема и высота) **могут** быть выражены числами Фибоначчи 89; 144; 233 и 377. В этом случае выполняются «условия Геродота» об основных соотношениях параметров пирамиды. Даже если удастся доказать, хотя и не понятно — как, что Архитектор «не это имел в виду», указанные отношения останутся. То же самое касается и геометрических построений «вокруг» размеров пирамиды.

3. Что касается системы сажений. Учитывая, что все сажени, которые относятся к категории «русских сажений», могут быть выражены через числа Фибоначчи (в см) путем умножения их на 2 в степени  $n$  по определенным правилам, все равно предстоит выяснить, как такое могло случиться? Кроме того, при изучении локтей и/или полусаженей, которые получаются при делении сажений на 2; 4 и, иногда, на 8, получается много замечательных совпадений! Это и 83,2 см — возможно, «мегалитический ярд» А.Тома, и 44 см — «аттический» локоть, и 64,4 см и т. д. Кроме того есть два размера — 30,5 см и 29,65 см. Один из них, с высокой степенью вероятностью - «римский фут»

4. «Королевский» локоть или «локоть фараона». В литературе он встречается с различными цифровыми показателями, но раз уж мы коснулись чисел Фибоначчи, выраженным в миллиметрах, предлагаю обратить внимание на число Фибоначчи под номером 20. Если поделить

его на 8 то получим:  $4181/8 = 522,625$  мм или 52,26 см! В Лувре хранится египетский измерительный инструмент, который относится к XVIII династии, его размеры 52,3 см. Неплохое **совпадение VII**. А вот с локтем 52,36 см, похоже, нужно быть очень осторожным и помнить какой сюрприз он преподнес.

5. Для тех, кому интересно. Рекомендую в любой электронной таблице расположить по горизонтали числа Фибоначчи от 5 до 21-го включительно и дополнить таблицу последовательным умножением на 2; 4; 8 и так далее до 512, а так же поделить каждое число на 2; 4 и 8. Затем возьмите «русские сажени» из Википедии и сравните. Не пожалеете! Или можете использовать Таблицу «Матрешку» в Приложении 1.

6. Достаточно часто исследователей пирамиды Хеопса упрекают в том, что они слишком много внимания уделяют только ей и мало внимания уделяют остальным «большим» пирамидам. Особенно это касается тех исследователей, кто находит некие закономерности и/или соотношения в «Великой пирамиде», так как, по мнению оппонентов, обнаруженные закономерности, должны проявляться в остальных пирамидах. И они правы! Они в них действительно проявляются, причем еще интереснее. Но это уже другая история.