С.Л. Василенко

Оценка шумовых воздействий на модель золотого сечения в рамках линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка

Аннотация. Показано, что введение в модель Фибоначчи $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ аддитивного воздействия ε_n с адекватным рассмотрением линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = \varepsilon_n$ в большинстве случаев всё также приводит к золотому сечению (ЗС). В частности, если дискретная переменная (по индексу n) $\varepsilon_n = P(n)$ – полином или $\varepsilon_n = b{\cdot}\beta^n$ – показательная функция при $\beta < \Phi$, где $\Phi \approx 1{,}618$ – константа ЗС. Суммирующая добавка ε_n к базовой рекурсии фактически является накладываемым "шумом", что в значительной мере приближает теоретическую модель к реальным физическим условиям, с наличием неконтролируемых факторов и/или возмущающих воздействий.

Даже слово "тишина" производит шум…
Ж. Батай

Исторический ракурс. Понятийный образ, называемый сегодня золотым сечением (ЗС) или золотой пропорцией, насчитывает не одно тысячелетие. Менялись времена, изменялись и смыслы, которые вкладывали в него ученые, начиная с древних веков.

Исторически задача восходит к античным сочинениям греческих математиков и наиболее системно впервые прозвучала в геометрических построениях, изложенных Евклидом в его знаменитых "Началах" [1].

Заметим, что слово *начала* не является признаком некоей узости сферы-области. Напротив, априори предполагает недосказанность-незавершенность, составляя основу-фундамент для дальнейшего широкого развития.

Начала Евклида сыграли важную идейно-методологическую роль в создании и развитии науки как образец трактата, строго и систематически излагающего основные положения математической науки. Они стали основой для последующих геометрических работ Архимеда, других античных авторов и в течение более двух тысячелетий (!) оставались базовым учебником геометрии.

Золотое сечение или в терминологии древних греков деление отрезка в среднем и крайнем отношении имело исключительно прикладное значение для геометрического построения правильного пятиугольника, а также Платоновых тел: икосаэдра и додекаэдра, имеющих возле каждой вершины соответственно по пять треугольных и три пятиугольных граней. Легко вычерчивался равносторонний треугольник, квадрат, шестиугольник. И только правильная пятиугольная звезда долгое время оставалась строптивой и непокорной.

Одна из форм ЗС связана с отношением и равенством площадей [1, с. 75]:

Предложение 2.11. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

То есть ограниченная линия разделяется таким образом, что больший отрезок является средней пропорциональной величиной между всей линией и меньшим отрезком.

В предлагаемой нами нумерации 2.11 первое число означает 2-ю книгу "Начал", второе число – 11-е предложение.

Другая форма ЗС известна как деление отрезка в крайнем и среднем отношении (КСО), с таким первым описанием:

Определение 6.3. Говорится, что прямая делится в *крайнем и среднем отношении*, если как целая <относится> к большему отрезку, так и больший отрезок – меньшему [1, с. 173].

Похожее на 2.11 построение приведено в предложении 6.30: данную ограниченную прямую рассечь в КСО [1, с. 213]. Хотя там используются другие буквенные обозначения, нежели в первой форме, а доказательство выполняется через пропорциональность смежных отрезков и нахождение большего из них.

Научившись строить правильный пятиугольник с помощью последовательных геометрических операций, причем исключительно циркулем и линейкой без делений, которые символизировали истинность математических построений, золотая модель была забыта учеными на века. В науке, под которой понималась математика (греч. *mathematike* – от *mathema* наука) выделялись четыре "матемы": арифметика, геометрия, гармония и астрономия. Платон к ним привязывал также стереометрию.

Позже в начале тринадцатого века задача получила свое неожиданное развитие-проявление в целочисленных рядах. Прежде всего, в числах, носящих имя Фибоначчи (1170–1240), – элементах рекуррентной последовательности (1, 1, 2, 3, 5, 8 ...), где каждое последующее число равно сумме двух предыдущих, начиная с априори заданной пары (1, 1).

Отношение соседних членов аддитивного ряда с ростом их номеров стремится к константе золотого сечения $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Но никогда с ней не совпадет абсолютно, поскольку иррациональное число Ф нельзя выразить отношением целых чисел.

Следует сказать, что сами числа Фибоначчи были хорошо известны ещё в Южной Азии [2, с. 126], в частности, древней Индии, где они применялись в метрических науках за много веков до того, как впервые стали известны в Европе с известной задачей о размножении кроликов. Тем не менее, появилось принципиально новое толкование ЗС.

Числа Фибоначчи до сих пор остаются одним из увлекательных разделов теории чисел, и сегодня мы часто наблюдаем их неожиданные проявления во многих важных исследованиях, формально никак не связанных с этими числами [3].

Среди них решение десятой проблемы Гильберта, явление филлотаксиса (расположение зерен подсолнуха, строение чешуек ананаса и др.), поиск экстремума унимодальных функций, определение точности представления чисел цепными дробями, выбор оптимальной стратегии движения автомобиля по сокращению расхода топлива, старинная китайская игра цзянь-шиц-зы и др.

Превратности судьбы. Итальянский ученый Леонардо Фибоначчи в своё время внес воистину существенный вклад в развитие и особенно популяризацию математических знаний. В частности, его "Книга об абаке" (1202) впервые познакомила Европу «с арабскими (точнее – индийскими) цифрами и одновременно с современной системой записи чисел» [3].

Но в наши дни он популярен больше потому, что известный французский математик Франсуа Люка (1842–1891) назвал его именем числовой ряд, который стал родоначальником целой теории, хотя и возник в довольно незамысловатой арифметической задаче о подсчете количества кроликов.

Для наглядности демонстрационного материала Фибоначчи выбрал некий абстрактный пример размножения неумирающих бесконечно-живущих кроликов по искусственной схеме, далекой от практики.

В контексте жизненности биологической популяции животных задача получилась, мягко говоря, маловразумительной и несхожей с реальной жизнью. Ибо в реальных условиях кролики размножаются совсем иначе: в других пропорциях, с иными сроками и т.д. До своего репродуктивного возраста слишком быстро не растут. Потомство у них всегда больше двух, чаще всего в окроле бывает 6–9 крольчат. Длинноухие животные долго не живут, в хозяйстве не скрещивают особей одного помета и т.п.

Но тем впечатлительнее вычислительные аспекты задачи, переводящие реальные вещи в абстрактно-отвлеченную математическую плоскость. Как пример отменной идеализации.

От кроликов Фибоначчи до алгебраической интерпретации. Легко показать, что аналитическое разрешение числовой последовательности Фибоначчи сводится к однородному линейному рекуррентному уравнению второго порядка $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, и решению характеристического уравнения $x^2 = x + 1$ с единичными коэффициентами.

Для этого достаточно разделить исходное уравнение (соотношение) на f_n, ввести обозначение $x = f_{n+1} / f_n$ и перейти к пределу $n \to \infty$.

Уместно напомнить, что квадратные уравнения умели решать еще древние вавилоняне [4, с. 42-46]. Они тогда еще не знали отрицательных и тем более комплексных чисел, поэтому рассматривали только уравнения с положительными корнями, которые записывали числами в 60-ричной системе счисления. Как ни удивительно, но их алгоритмы были основаны на подходе, известном сегодня как теорема Виета.

Евклид также «нигде не пользуется общей формулой решения квадратного уравнения даже в геометрической форме» [1, с. 438], включая задачи, потенциально сводимые к таким уравнениям. Хотя у него есть предложение 6.28, достаточно длинное в изложении [1, с. 209], но из которого может быть выведена основная формула вычисления корня в её современном представлении.

С точки зрения золотого сечения "обожествлять" нужно не столько числа Фибоначчи, сколько аддитивно-двухчленную процедуру их вычисления, которая при любых начальных условиях, не равных одновременно нулю, приводит к аттрактору в виде константы Ф – положительному корню квадратного уравнения.

Математическая форма $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ в классе аддитивных конструкций структурно отличается минимально допустимой простотой, имея принципиально отличительные особенности в правой формообразующей части [5, 6]:

– два слагаемых как наименьшая совокупность суммируемых величин, – меньше просто не бывает;

– два последовательно стоящих дискретных индекса (момента времени) n, n+1 с минимальными запаздываниями относительно n+2;

– два целочисленных единичных коэффициента при слагаемых.

Другими словами, налицо три пары «минимальных возможностей».

В контексте арифметических вычислений процесс формирования элементов последовательностей Фибоначчи напоминает итеративный процесс нахождения одного из корней алгебраического характеристического уравнения.

Поэтапное приближение происходит таким образом, что все промежуточные корни проскакиваются, а система сосредотачивается только на одном максимальном по модулю корне, – согласно теореме Бернулли. При этом отношения соседних членов любой последовательности формируют свой самостоятельный ряд чисел, в виде подходящих рациональных дробей к истинному решению – корню уравнения.

Анализ. Математически модель Фибоначчи – это сравнительно идеализированная конструкция. На физическом уровне – весьма отдаленная структура от реального проявления в природе, хотя бы потому, что не учитывают внешние возмущения, лимитирующие факторы и т.п.

В противном случае «Вселенная состояла бы из одних кроликов».

Понятно, что задача умозрительная, кролики вымышленные, популяция биологически нежизненная. Близкие к дворовому хозяйству люди при всём желании не могли взять в толк подобный способ размножения божьих тварей, их невероятное взросление, невообразимое скрещивание, вечную жизнь и т.п.

Если бы не Люка, то вспоминали бы сегодня Фибоначчи разве что как европейского популяризатора восточных знаний о числах.

Правильно утверждал русский математик В.Арнольд: если что-то названо именем кого-то, то этот "кого-то" имеет к названному предмету самое отдаленное отношение, во всяком случае, в математике.

Двучленно-аддитивная модель Фибоначчи описывает экспоненциальный рост, а точнее увеличение чисел (целых, вещественных, мнимых) согласно показательной функции β^n.

В частности, для чисел Фибоначчи верно $F_n \approx \Phi^n / \sqrt{5}$.

В чистом виде такая модель в природе практически не встречается, разве что только на первоначальной стадии развития, или слабо выражена.

Далее вступают в силу внешние воздействия и разного рода ограничения или лимитирующие факторы. Среди главных из них можно выделить фиксированную продолжительность биологической жизни, ограниченность потребляемых ресурсов и др.

Константа золотого сечение в задаче Фибоначчи о кроликах соответствует идеализированному случаю вечной жизни с неограниченным репродуктивным возрастом.

Однако кролики не бессмертны, поэтому, наравне с размножением, в модели следует учитывать процессы естественного или принудительного убывания взрослых особей (отмирания, истребления) и не только. Пространство состояний становится разомкнутым.

Математически это означает введение в уравнение элементов запаздывания, дополнительных аддитивных членов, нееденичных коэффициентов. При этом решение уходит от ЗС.

Постановка задачи и неоднородное уравнение. Чтобы сохранить "золотое поле Фибоначчи", по-прежнему оставим двучленно-аддитивную схему развития процесса без запаздывания с единичными коэффициентами. Но теперь модель дополним добавочным воздействием неконтролируемых факторов и шумов, что равносильно введению в рекурсию неоднородности ε_n типа $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + \varepsilon_n$.

Можно сказать, что исходная аддитивная форма $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ характеризует замкнутую систему. Всё "варится" в собственном соку.

Неоднородная система $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + \varepsilon_n$ описывает открытую систему, а слагаемое ε_n отображает динамическую связь системы с внешним миром.

Отдельные стороны данного подхода описаны в наших работах [7, 8] и требуют своего логического обобщения и систематизации с подведением итогов.

Решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим линейное неоднородное рекуррентное уравнение (НРУ)

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = \varepsilon_n .$$

С ним ассоциируется линейное однородное рекуррентное уравнение (ОРУ)

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$$

и его характеристический полином $h(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, корни которого равны

$$\lambda_{1,\,2} = (-\phi,\ \Phi) = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

По аналогии с методами решения дифференциальных уравнений, общее решение НРУ представляется [9, с. 315; 10, с. 671] в виде суммы его частного решения f_n'' и общего решения f_n' соответствующего ему однородного уравнения: $f_n = f_n' + f_n''$.

Общее решение ОРУ с произвольными начальными условиями $(f_0,\ f_1)$ записывается с использованием чисел Фибоначчи F_n

$$f_n' = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n ,$$

и формулы Муавра–Бине для их вычисления

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\phi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}},$$

C_1, C_2 – константы, $(\lambda_1, \lambda_2) = (-\phi,\ \Phi)$ – корни характеристического полинома.

В общем случае НРУ второго порядка имеет решение [11, п. 1.2]:

$$f_n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{n-k+1} F_k .$$

Кажущаяся простота записи решения обманчива, поскольку де-факто содержит сумму значительного числа слагаемых, особенно для больших значений n. Требуется сохранность в памяти всех чисел Фибоначчи и всех значений аддитивного воздействия ε_n.

С целью конкретизации расчетных форм, представляет интерес исследование наиболее характерных случаев, адекватных поставленной задаче об оценке шумовых воздействий на золотую модель.

Частное решение неоднородного рекуррентного соотношения обычно подбирается по виду правой части. Особенно удобно для правых частей вида $\beta^n \cdot P(n)$, содержащих показательную функцию β^n и/или полином (многочлен) $P(n)$.

1) Пусть правая часть НРУ является многочленом $\varepsilon_n = \sum\limits_{j=0}^{J} b_j n^j$ степени J.

Корни характеристического полинома $h(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ для однородного уравнения различны, то есть имеют кратность, равную 1, поэтому частное решение НРУ допустимо искать в виде многочлена той же степени J

$$f_n'' = \sum_{j=0}^{J} c_j n^j .$$

После его подстановки в неоднородное уравнение, получим основу-правило для вычисления коэффициентов многочлена

$$\sum_{i=0}^{I} a_i \sum_{j=0}^{J} c_j (n+i)^j = \sum_{j=0}^{J} b_j n^j ,$$

где $I = 2$ – порядок исходного уравнения, $(a_0, a_1, a_2) = (-1, -1, 1)$ – его коэффициенты.

Так, приравнивая коэффициенты в левой и правой части при членах, содержащих n^2, получаем

$$\sum_{i=0}^{I} a_i c_J n^2 = b_J n^J \quad \Rightarrow \quad c_J = b_J / h(1) = -b_J .$$

Остальные коэффициенты c_j находятся аналогично, путем приравнивания коэффициентов при степенях n^j.

2) Пусть неоднородность уравнения определяется показательной функцией $\varepsilon_n = b \cdot \beta^n$, где b – коэффициент, $\beta > 1$ – некоторое действительное число, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + b \cdot \beta^n$,

При $n \to \infty$ любая показательная функция β^n с основанием $\beta > 1$ растет быстрее любой степени $n^k, k > 0$, равно как и полинома k-го порядка. Действительно, при $n \to \infty$ предел функции n^k / β^n имеет тип ∞/∞. Применив k раз правило Бернулли–Лопиталя (предел отношения функций равен пределу отношения их производных), приходим к выражению $\dfrac{n!}{\beta^n (\ln \beta)^n}$, предел которого равен 0.

Это означает, что знаменатель β^n при $n \to \infty$ растет быстрее, чем числитель n^k.

Общее решение НРУ имеет вид

$$f_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + b\beta^n \cdot h^*,$$

$$h^* = \frac{1}{h(\beta)} = \frac{1}{\beta^2 - \beta - 1}.$$

Значения констант C_1, C_2 находятся исходя из начальных условий $f_0,\ f_1$:

$$\begin{cases} f_0 = C_1\lambda_1^0 + C_2\lambda_2^0 + \varepsilon_0 h^*, \\ f_1 = C_1\lambda_1^1 + C_2\lambda_2^1 + \varepsilon_1 h^*. \end{cases}$$

Определяем константы,

$$C_1 = \frac{f_0\Phi - f_1}{\sqrt{5}} - \frac{bh^*}{\sqrt{5}}(\Phi - \beta), \qquad C_2 = \frac{f_0\phi + f_1}{\sqrt{5}} - \frac{bh^*}{\sqrt{5}}(\phi + \beta).$$

Подставив их в исходное уравнение и выполнив некоторые преобразования, получаем окончательное решение НРУ в явном (не рекуррентном) виде:

$$f_n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n + b \cdot \frac{\beta^n - F_{n-1} - \beta F_n}{\beta^2 - \beta - 1}.$$

При больших значениях n числа Фибоначчи со сколь угодно высокой точностью стремятся к значениям $F_n \to \Phi^n / \sqrt{5}$. Тогда отношение $\frac{f_n}{f_{n-1}} \to \frac{c \cdot \Phi^n + \beta^n}{c \cdot \Phi^{n-1} + \beta^{n-1}} = \beta \frac{c \cdot v^n + 1}{c \cdot v^{n-1} + 1}$,

где $v = \frac{\Phi}{\beta}$, $c = \frac{\phi\, f_0 + f_1 - bh^*(\phi + \beta)}{bh^*\sqrt{5}}$ – конечный параметр.

Предел отношения f_n / f_{n-1} зависит от величины v:

- если $v < 1$, то $v^n \to 0$, и $\lim = \beta$;
- если $v > 1$, то $v^n \to \infty$, и $\lim = \beta \cdot v = \Phi$.

Окончательно имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \begin{cases} \Phi, & \text{если } \beta < \Phi; \\ \beta, & \text{если } \beta > \Phi. \end{cases}$$

Таким образом, для сохранения золотоносных свойств исходной модели, функция ε_n не должна расти со скоростью, превышающей скорость увеличения степенной функции Φ^n.

"Перебить" золотой аттрактор можно лишь такой функцией, возрастание которой происходит быстрее, чем Φ^n. Например, другая показательная функция $\varepsilon_n = \beta^n$ при $\beta > \Phi$.

В этом случае аттрактор Φ числовой последовательности сменяется на аттрактор β.

Другими словами, двучленно-аддитивная рекурсия f_n стремится к своему аттрактору золотого сечения Φ, если "мощность" обмена ε_n с окружающей средой не превышает Φ^n.

Примеры.

1. Предложим альтернативный способ решения НРУ.

Пусть $\varepsilon_n = b \cdot (n+1)$. Тогда $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + b \cdot (n+1)$ или $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + bn$.

Почленно вычитая два равенства, приходим к соотношению $f_{n+2} = 2 f_{n+1} - f_{n-1} + b$ или, уменьшив значение n на 1, $f_{n+1} = 2 f_n - f_{n-2} + b$.

Ещё раз почленно вычитая, получаем возвратную модель-рекурсию:

$$f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n - f_{n-1} + f_{n-2}$$

с характеристическим уравнением

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1 \;=\; (x-1)^2\left(x^2 - x - 1\right) = 0\,.$$

Из четырех корней уравнения $(1,\ 1, -\phi, \Phi)$ максимальный по модулю равен $\lambda_{\max} = \Phi$. Он же аттрактор числовой последовательности, к которому стремится отношение соседних элементов.

То есть, двучленно-аддитивная рекурсия дискретной переменной n с дополнительным слагаемым $b{\cdot}n$ всегда стремится к своему аттрактору – константе ЗС, независимо от пары начальных условий, не равных одновременно нулю.

2. Пусть $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + n^k$, где k – сколь угодно большое конечное число.

Если неоднородная часть уравнения равна нулю $\varepsilon_n = 0$, то числа Фибоначчи возрастают как значения степенной функции $\Phi^n/\sqrt{6}$, округленные до целого.

Сравним величины Φ^n и n^k. Их сопоставление более наглядно проявляется в логарифмических координатах (рис. 1).

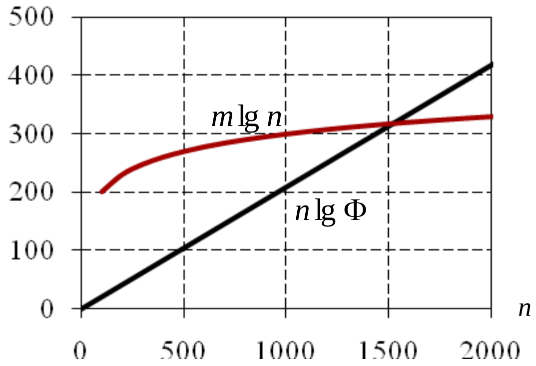

Рис. 1. Логарифмическое сравнение степеней Φ^n и n^k, $k = 100$

Как видно, независимо от значения степени k, функция Φ^n рано или поздно "перебивает" функцию n^k и становится главенствующей в их сумме.

Аналогичная картина наблюдается, если ε_n – любой алгебраический полином.

Следовательно, предельным отношением f_n / f_{n-1} или аттрактором последовательности является константа золотого сечения Φ.

Изменяется лишь скорость подхода числовых последовательностей к своему аттрактору (рис. 2), которая естественно становится выше с увеличением степени k в слагаемом n^k.

Рекурсия с добавкой. Итак, двучленно-аддитивная рекурсия с единичными коэффициентами независимо от пары исходных (начальных) значений всегда приводит к константе золотого сечения $\Phi \approx 1{,}618$, как предельному аттрактору рекуррентной последовательности в виде отношения соседних членов ряда.

Более того, в аддитивной последовательности допустимо добавлять всевозможные функциональные зависимости ε_n, образуя линейное неоднородное рекуррентное уравнение, и модель по-прежнему будет иметь золотой аттрактор [7, 8]. – Главное, чтобы эти слагаемые после некоторого значения индекса n возрастали не быстрее, чем Φ^n.

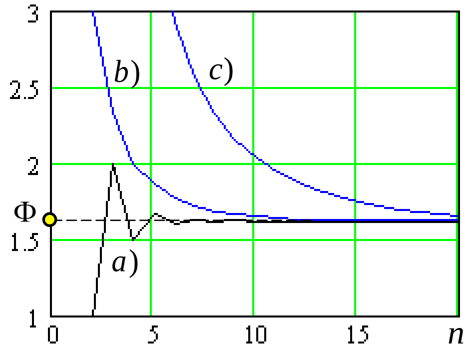

Рис. 2. Сходимость к аттрактору Φ:

a) $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$;

b) $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + n$;

c) $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + n^5$

Даже если, например $\varepsilon_n = n^{1000}$, то отношение соседних членов ряда $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n + \varepsilon_n$ всё равно сходится к золотому аттрактору, поскольку для $n > 20650$ выполняется неравенство $n \cdot \ln \Phi > 1000 \cdot \ln n$.

Но если положить $\varepsilon_n = 2^n > \Phi^n$, то золотоносность "сбивается", и новым аттрактором становится число 2. При $\varepsilon_n = 1{,}6^n < \Phi^n$ золотоносность сохраняется.

Добавку ε_n к базовой рекурсии можно рассматривать как некие шумы, накладываемые на основную модель. Что в значительной мере приближает теоретическую конструкцию к реальным условиям, с учетом наличия неконтролируемых факторов и/или возмущающих воздействий.

Не родившиеся кролики Фибоначчи. Представляет интерес один любопытный частный случай $b = 1$, $\beta = 2$ или $\varepsilon_n = 2^n$ с начальными условиями $(f_0,\ f_1) = (0,\ 1)$, как для чисел Фибоначчи. Решение НРУ имеет простую запись в явном виде $f_n = 2^n - F_{n+1}$, образуя числовой ряд [12, A027934]:

0, 1, 2, 5, 11, 24, 51, 107, 222, 457, 935, 1904, 3863, 7815, 15774, 31781, 63939, …

Его рекуррентная форма $f_n = 3f_{n-1} - f_{n-2} - 2f_{n-3}$ и характеристический полином

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 \ = \ (x-2)\left(x^2 - x - 1\right) \ = \ (x-2)(x+\phi)(x-\Phi)\,.$$

Аттрактор последовательности равен максимальному по модулю корню $x = 2$.

Золотые корни-константы $(-\phi, \Phi)$ в модели наличествуют, но сама она уже, увы, не золотая. Тем не менее, золотоносные свойства косвенно присутствуют: f_{n-1} – это количество несостоявшихся (из-за задержки созревания) пар кроликов Фибоначчи в начале *n*-го месяца. Благодаря этому и формируются числа Фибоначчи с золотым аттрактором.

$$2^0 - 0 = \mathbf{1},\ 2^1 - 1 = \mathbf{1},\ 2^2 - 2 = \mathbf{2},\ 2^3 - 5 = \mathbf{3},\ 2^4 - 11 = \mathbf{5},\ 2^5 - 24 = \mathbf{8},\ 2^6 - 51 = \mathbf{13},\ 2^7 - 107 = \mathbf{21},\ \ldots$$

Иначе говоря, берутся последовательные степени двойки, как в скульптуре «отсекается всё лишнее», – в результате получаются числа Фибоначчи с золотым аттрактором Φ.

Дискретная функция $f_n = 2^n - F_{n+1}$ имеет дополнительные интерпретации:

f_n – количество композиций из n, по крайней мере, с одной четной частью. В теории чисел композиция натурального числа – его представление в виде упорядоченной суммы натуральных слагаемых (частей). В отличие от разбиения, композиция учитывает порядок следования частей;

f_n – количество двоичных кортежей, которые содержат подстроку 11 или оканчиваются на 1, например, пять трехэлементных величин $f_3 = 5$: 001, 011, 101, 110, 111;

f_{n-1} – количество подмножеств $\{1, 2, ..., n\}$, которые одновременно содержат последнее число n и хотя бы одну пару последовательных целых чисел. В частности, для n = 5 имеем $f_4 = 11$ подмножеств: 45, 125, 145, 235, 245, 345, 1235, 1245, 1345, 2345, 12345.

Весьма эффектно выглядит матричное представление с возведением в степень:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & F_{n+1} & F_n \\ 0 & F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_n = 2^n - F_{n+1}.$$

Обнаруживаются также комбинаторные свойства, в частности:

$$f_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{k+j}.$$

Размышлизмы. Незамысловатая по форме модель Фибоначчи уводит нас в бесконечность не только во времени (по индексу n), но и относительно моделируемой переменной. Напрашивается аллегория: если бы так и было, то кролики уже давно заполнили Вселенную. На самом деле подобное не происходит, поскольку в реальных условиях срабатывает система ограничений и лимитирующих факторов.

Поразмыслим и кратко проанализируем три взаимосвязанных аспекта.

1) По иронии судьбы, известная задача Фибоначчи о феерическом размножении кроликов в определенной мере оказала медвежью услугу, отбросив назад на целые столетия истинное физическое понимание и толкование действительно мощного математического научного направления в виде аддитивно-рекуррентных числовых последовательностей.

Вымышленный и биологически неосуществимый рост популяции "ушастых" на многие века затуманил или просто свел на нет истинные комбинаторные истоки натуральных чисел в их взаимосвязи с числами Фибоначчи. Пожалуй, это исключительный случай в истории математики, когда взятый из жизни практический пример был трансформирован до фантасмагорической нереальности, по сути, отодвигая на задний план другие правдоподобные и логически обоснованные схемы формирования и толкования чисел. Без кроликов, их «ценного меха и диетического легкоусвояемого мяса» (из миниатюры В. Перцова).

Именно поэтому в средние века индийская и арабская математические культуры были на порядок выше европейской. Достаточно упомянуть арабские цифры, десятичную систему счисления и проч.

2) Практически любому алгебраическому уравнению можно сопоставить адекватное отображение в виде разностного уравнения с порождающей рекуррентной числовой последовательностью (лат. *recurrentis* – возвратной), в которой отношение соседних членов сходится к фиксированному аттрактору – максимальному по модулю корню.

Вследствие этого всевозможные обобщения золотого сечения "ОЗС", которые самозабвенно тиражируют отдельные авторы (А. Стахов, Э. Сороко, Г. Аракелян, В. Шенягин …), лишены смысловой нагрузки. Несмотря на их широкое международное представительство: Канада, Беларусь, Армения, Россия.

Навязчивое стремление к искусственному терминологическому золочению – есть подмена реалий субститутом в виде понятийно-надуманного суррогата "ОЗС" и характеризуется в работе [13] одним словом как "златобайство".

Ни тени зависти, ни тайного упрека (Халида Шариф), только одна констатация фактов. Как утверждал французский философ Жорж Батай (1897–1962) «Полностью мы обнажаемся лишь тогда, когда без малейшего лукавства идем навстречу неизвестности» [14, с. 21].

Квадратные уравнения с произвольными коэффициентами, и тем более полиномы общего вида, не имеют ничего общего с золотым сечением, кроме совместной принадлежности к бесконечному множеству алгебраических уравнений.

Золотое сечение уникально и единственно, не считая своего зеркального отражения. Кроме того, ЗС стопроцентно ассоциируется с конкретной математической константой Ф.

Но константы, как известно, не обобщаются!

Придуманные словесные уловки-зацепки, будто обобщается не число, а принцип его образования (модель), нисколько не изменяет положение. Поскольку фактически ведет к расширению квадратного уравнения до уровня алгебраического полинома общего вида n-го порядка, выходя далеко за рамки золотого сечения и сложившейся терминологии.

3) Вышеизложенный нами материал, конечно, не имеет ничего общего с порождением очередного пресловутого "ОЗС", ориентированного на новые алгебраические уравнения и константы, отличные от золотой пропорции.

Наоборот, цель поставленной задачи состоит в полной сохранности совершенства-безупречности базовой модели ЗС и одновременном приближении её непревзойденных свойств к реальным физическим условиям. Например, к природному филлотаксису в ботанике, когда в биологической системе могут происходить сбои в результате действия внешних факторов.

Действительно, двучленно-аддитивная рекурсия $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ с произвольными начальными условиями – типичная разновидность математической модели, которая в чистом виде на практике не встречается. Как минимум на неё накладываются неконтролируемые факторы и/или возмущающие воздействия.

Отсюда возникает проблематика: определить коридор и порог устойчивости золотой модели, которая бережно сохраняет свой аттрактор в виде золотой константы Ф.

На наш взгляд, это настоящее расширение-обобщение модели, а не поддельное типа фиктивных "ОЗС". Обобщение на случай, когда она подвержена атаке шумовых проявлений, подобно влиянию помех и шумов в радиолокации.

Поскольку исходная рекурсия является линейной, то с учетом принципа суперпозиции в первом приближении логично ограничиться анализом процессов, в которых накладываемое зашумление ε_n действует аддитивно, что приводит к рассмотрению линейного неоднородного разностного уравнения второго порядка $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = \varepsilon_n$.

Если дискретная переменная (по индексу n) $\varepsilon_n = P(n)$ – произвольный конечный полином, золотая модель остается по-прежнему устойчивой. Меняются только траектория и скорость асимптотического подхода-приближения к золотому аттрактору Ф, который остается непоколебимым.

Если накладываемый аддитивный шум имеет вид показательной зависимости $\varepsilon_n = b \cdot \beta^n$, которая экспоненциально устремляется в бесконечность по мере увеличения индекса n, то и в этих условиях золотая модель способна к "выживанию". Единственное требование: параметр β должен быть меньше золотой константы Ф.

То есть внешний "прессинг-давление" на золотую модель не должен превышать Φ^n.

В противном случае золотая конструкция рассыпается, и на её смену приходит иная структура, с другим аттрактором. Увы, уже не золотым. Как в подобных аналогах золотоискателей-алхимиков, которые вводят в свои псевдонаучные "ОЗС" произвольные элементы запаздывания, неединичные коэффициенты и проч.

Конечно, их модели имеют место быть. Однако никакого отношения к золотому сечению не имеют. Ни по существу, ни терминологически.

Как говорили на Руси, шуму много, проку мало.

Non omne quod nitet aurum est. – «Не всё то золото, что блестит» (Шекспир, Венецианский купец). А не блестит, тем более...

Литература:

1. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

2. Goonatilake S. Toward a global science: mining civilizational knowledge. – Bloomington: Indiana University Press, 1998. – 318 p.

3. Яглом И.М. Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики // Квант. – 1984. – № 7. – С. 15–17. – URL: http://kvant.mirror1.mccme.ru/1984/07/index.htm.

4. История математики: в 3-х томах. Т.1. С древнейших времен до начала нового времени / Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 352 с. – URL: math.ru/lib/book/djvu/istoria/istmat1.djvu.

5. Василенко С.Л. Периодические структуры на циферблате Фибоначчи // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15998, 14.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161676.htm.

6. Василенко С.Л. Кролики в год кролика, или вечная жизнь по золотому сечению // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16303, 18.01.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161767.htm.

7. Василенко С.Л. Новые рекуррентные формы золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 20.11.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.

8. Василенко С.Л. Обобщенные рекурсии с аттрактором золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=49&sm=2.

9. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

11. EqWorld: The World of Mathematical Equations. – URL: http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/fe/fe1202.pdf.

12. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – URL: research.att.com/~njas/sequences/.

13. Василенко С.Л. Триадная пропорционально-симметричная реконструкция деления целого пополам // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22568, 02.10.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163071.htm.

14. Батай Ж. Внутренний опыт. – СПб: Axioma/Мифрил, 1997. – 336 с.

freepng.ru

Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html

Приложение

Метод характеристических функций для решения линейных неоднородных рекуррентных уравнений (НРУ)

Этот метод практически полностью аналогичен методу решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Кратко алгоритм выглядит так:

1. Записать соответствующее однородное рекуррентное уравнение (ОРУ):

$$a_{n+k}\, f_{n+k} + a_{n+k-1}\, f_{n+k-1} + \ldots + a_n\, f_n = 0.$$

2. Составить для него характеристическое уравнение и найти его корни

$$a_{n+k}\,\lambda^k + a_{n+k-1}\,\lambda^{k-1} + \ldots + a_{n-1}\,\lambda + a_n = 0.$$

3. Выписать согласно полученным корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ общее решение ОРУ

$C_1\,\lambda_1^n + \ldots + C_k\,\lambda_k^n$ – для случая различных простых корней,

$C_1\,\lambda_1^n + C_2\, n\,\lambda_1^n + \ldots + C_m\, n^m\,\lambda_1^n + \ldots + C_k\,\lambda_k^n$ – для случая корня λ_1 кратности m.

4. Подобрать частное решение НРУ по виду правой части. Особенно удобно для правой части вида $\beta^n \cdot P(n)$, где $P(n)$ – многочлен от n.

5. Представить общее решение НРУ как сумму общего решения соответствующего ОРУ и частного решения НРУ.

6. Подставить начальные условия $f_0, \ldots, f_{k-1}$ и вычислить значения констант $C_1, \ldots, C_k$.