С.Л. Василенко

Золотое отношение, расширение его геометрического представления и окружность Аполлония

Как корабль назовешь, так он и поплывет
(Андрей Некрасов)

Золотое сечение и отношение

Притягательность феномена золотого сечения (ЗС) состоит, прежде всего, в его простоте, наглядности и одновременной фундаментальности.

Его применимость распространяется на соотношение целого и частей в широком смысле при системном подходе и отражает пропорциональное отношение между некоторой совокупностью предметов и отдельными предметами, образующими эту совокупность.

В золотом отношении могут находиться, например периметры многоугольников и отдельные отрезки, площади разнородных фигур и т.п. Трудно себе представить, что они являются единым целым, разделяемым золотым сечением.

Следует также признать, что золотое сечение – неудачный русскоязычный термин, но который основательно "прилип".

В модели золотого роста, присущей многим живым системам, вообще нет никакого сечения-разбиения, но есть приумножение, синтез на основе золотого отношения, которое носит созидательный характер. Вместо пресловутых разделений, разрезаний и расчленений.

Не случайно в англоязычной литературе практически повсеместно применяется термин золотого отношения (*gold ratio*), и это правильно!

Данный вопрос подробно исследован в нашей работе с Андреем Никитиным [1]. Разумно говорить о делении отрезка в заданном отношении, в конкретном случае – золотом. И тогда всё равно где лежит делящая точка: внутри отрезка или на его продолжении [2].

Деление внешним образом соответствует отрицательному корню соответствующего квадратного уравнения ЗС $x^2 \pm x - 1 = 0$, который обычно отбрасывается, и напрасно!

Про обобщение ЗС

Можно ли как-то обобщить золотое отношение? – Однозначно, нет. Хотя бы потому, что это математическая константа. Никто же не обобщает числа π или e.

Поэтому разные "обобщенные золотые" p-сечения, s-сечения и.т.п. (Г.Аракелян, Э.Сороко, А.Стахов, и др.) – нонсенс. Они содержат другие, менее значимые числа, которые никак не связаны с ЗС. Как говорят, в огороде бузина, а в Киеве – дядька.

Слово "золотое" автоматически подразумевает присутствие золотой константы и/или её целой степени. Всё остальное – от лукавого и научной этики исследователей.

Например, практически любому алгебраическому уравнению общего вида можно сопоставить деление фиксированного отрезка. Но никто не называет его обобщением ЗС на том основании, что оно включает и квадратное уравнение ЗС: $x^2 \pm x - 1 = 0$.

Если через концы отрезка AB и точку его золотого деления C провести параллельные прямые, то образуется золотой коридор, в котором любая прямая при пересечении с этими линиями будет также делиться (по теореме о проекциях) в золотом отношении.

Но никакого обобщения самого ЗС здесь, безусловно, нет.

Речь идет исключительно о расширении геометрического представления и/или развитии модели ЗС, в основе которых однозначно лежит константа золотого отношения Ф.

Попал в золотой коридор, золотое деление обеспечено. – Назвался груздем, полезай в кузов.

Предыстория вопроса

В наших статьях [3, 4] предложен способ формирования непрерывной линии, описываемой вершиной треугольника с изменяемой геометрией по заданному алгоритму.

Главная идея состоит в выходе за пределы <золотого> деления линейного отрезка на плоскость с формированием геометрически непрерывного множества треугольников с заданными свойствами.

Варьируется только априорная зависимость между длинами боковых сторон.

Насколько нам известно, это была пионерная работа по тематике золотой пропорции, когда её линейно-пропорциональные свойства распространялись на планиметрию через параметры треугольников с фиксированным основанием.

В исходном варианте [3] строятся гармоничные треугольники с использованием геометрической пропорции сторон: $a/b = b/c$ или $b^2 = ac$. Исходное деление-сечение выходит за пределы отрезка – вырожденного треугольника.

Точка деления отрезка становится вершиной плоского треугольника с единичным основанием и описывает ту или иную кривую из семейства резольвент Вассера – геометрического множества вершин треугольника с фиксированным основанием и априори заданной функциональной связью сторон.

Вид непрерывных линий разнообразен в зависимости от принятых соотношений между параметрами треугольника с изменяемой геометрией. В частном случае образуется золотая резольвента – с золотым отношением боковых сторон.

Вслед за электронной публикацией [3], быстро дошедшей до широкой общественности и научного сообщества, с интервалом в полгода вышла журнальная статья доктора физ.-мат. наук, профессора А.Шелаева [5].

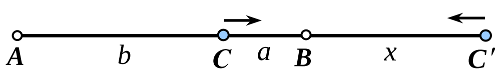
«Подробное изложение результатов <этой> работы» по словам автора позже приведено на страницах Академии [6]. В них изложен подход к вынесению золотой пропорции отрезка на плоскость, – в терминологии ломаной линии, опирающейся концами на фиксированный отрезок. Позже он утверждал [7], что им «была введена обобщённая геометрическая модель золотого сечения, в которой золотое сечение обобщается (?) от частного случая деления отрезка прямой линии до отношения длин отрезков ломаной линии, одни концы которых закреплены, а другие <совмещенные> движутся по окружности».

Конечно, обобщается не само ЗС, а лишь геометрическая модель или форма его представления – в виде окружности, как частного случая резольвент Вассера.

Что касается построения [5–7], то ему почти 2 тыс. лет, и такая окружность названа в честь его прародителя – величайшего древнегреческого математика Аполлония Пергского (наряду с Евклидом и Архимедом), который жил в III–II столетиях до нашей эры и ввел такие термины как эллипс, парабола, гипербола, асимптота, абсцисса, ордината и др.

Общие сведения и обозначения

Рассмотрим деление отрезка $AB = b + a = c$ в заданном отношении $k = b/a$.



Как корабль назовешь, так он и поплывет (А. Некрасов).

Многие авторы предпочитают располагать точку C правее от середины AB.

Тогда удобнее обозначить длину отрезка $AC = b$ (*big* – большой), – получается наглядно и легко удерживается в памяти. Соответственно $BC = a$ и $AB = c = a + b$.

Кроме того, ниже рассматриваются треугольники ΔABC_i, и здесь вступает в силу традиционное обозначение сторон: a – напротив вершины A, b – напротив вершины B.

Для единичного отрезка $c = 1$ и положительного значения $k \neq 1$ имеем:

$$\frac{AC}{CB} = k = \frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{1-b} = \frac{1+x}{x} \quad \to \quad b = \frac{k}{1+k}, \quad a = \frac{1}{1+k}, \quad x = \frac{1}{k-1}.$$

Частный "золотой" случай:

$$x = b \ \to \ \frac{1}{k-1} = \frac{k}{k+1}, \quad k^2 - k - 1 = 0, \quad k = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} = (\Phi, -\phi).$$

$C = g(AB)$ – операнд деления прямолинейного отрезка AB точкой C в золотом (*gold*) отношении $\frac{AC}{CB} = \Phi$, в том числе внешним образом, где $\Phi = \phi^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – константа ЗС.

Немного истории об истории

Математический объект, называемый сегодня золотым сечением, изучался ещё Евклидом, причем в двух формах, которые различны и довольно далеки друг от друга в глазах греческого ученого IV века до н. э. [8].

<u>Первая форма</u> связана с отношением и равенством площадей [9, с. 75]:

Предложение 2.11. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

<u>Вторая форма</u> известна как задача деления отрезка в крайнем и среднем отношении (КСО), и её описание звучит следующим образом:

Определение 6.3. Говорится, что прямая делится в крайнем и среднем отношении, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [9, с. 173].

Построение, похожее на 2.11, приведено в предложении 6.30: данную ограниченную прямую рассечь в крайнем и среднем отношении [9, с. 213]. Хотя там уже другие буквенные обозначения, нежели в первой форме, а доказательство приводится через пропорциональность отрезков и нахождение большего из них.

Словосочетание КСО приводит в недоумение многих людей.

На наш взгляд, всё просто. Приравниваются два отношения, которые определены:

- относительно края – весь отрезок и примыкающая к нему часть;
- относительно средины – примыкающие части.

Несколько расширим геометрическое представление деления отрезка в КСО (рис.1):

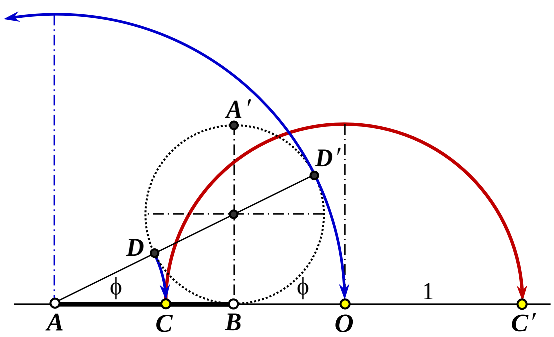


Рис. 1. Деление отрезка *AB* прямой в среднем и крайнем отношениях

$$AB = A'B = CO = C'O = 1;$$
$$AD' = AO = BC' = \Phi;$$
$$AD = AC = BO = \phi;$$
$$x^2 + x - 1 = 0 \ \to \ x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2} = (\phi, -\Phi);$$
$$\frac{AC'}{AO} = \frac{AO}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B} = \Phi = \phi^{-1}.$$

Точка C делит AB внутренним образом, C' – внешним образом;
$\widehat{O}(C, C')$ – золотая окружность Аполлония.

Окружность Аполлония

Окружность Аполлония – геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, отношение расстояний от которых до двух заданных точек – величина постоянная, не равная единице.

Другими словами, окружность Аполлония $\hat{O}(C)$ – множество всех точек C_n, удовлетворяющих условию

$$AC_n = k \cdot BC_n,$$

где $k > 0$ и $k \neq 1$ – фиксированное положительное число.

При $k = 1$ точки множества равноудалены от точек A, B и образуют серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Не разумно сразу назначать золотое отношение $k = \Phi$ и сваливать в одну кучу все свойства геометрической задачи. Сначала следует рассмотреть общие закономерности (а они есть!) любой окружности Аполлония и уже потом дополнять особенностями, которые привносят те или иные частные случаи, включая золотое отношение.

Напомним, как получается окружность, приняв без потери общности единичную длину отрезка $AB = 1$.

Геометрическое место точек $P(x, y)$, удаленных от концов этого отрезка с выполнением отношения $b/a = k = \text{const}$ (рис. 2), описывается равенством:

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{b^2} = k^2 \underbrace{\left\{(1-x)^2 + y^2\right\}}_{a^2}$$

или после раскрытия скобок и подстановки $z = \dfrac{k^2}{k^2 - 1}$: $x^2 - 2zx + y^2 = -z$.

Прибавив к обеим частям равенства величину z^2, получаем уравнение окружности

$$(x - z)^2 + y^2 = (z/k)^2$$

с центром в точке $O(z,\ 0)$ и радиусом z/k.

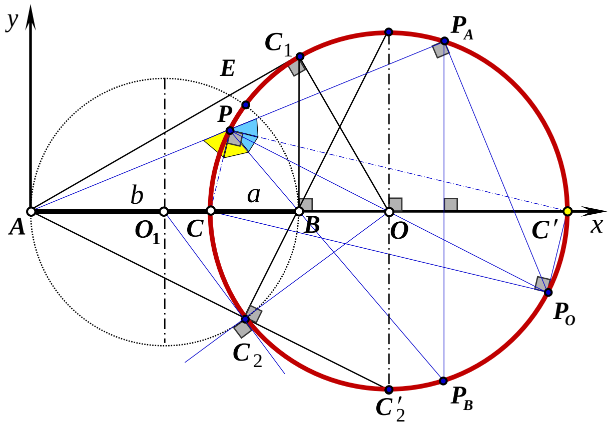


Рис. 2. Окружность Аполлония

Основные свойства окружности Аполлония для любого отношения $k = b/a \neq 1$ (рис. 2):

- $a = \dfrac{1}{1+k}c, \quad b = \dfrac{k}{1+k}c, \quad c = a + b$;
- для произвольной точки $P \in \hat{O}$, PC – биссектриса $\angle APB$, PC' – биссектриса $\angle BPP_A$, то есть отрезок между точкой P на окружности и точкой пересечения окружности с прямой AB является биссектрисой самого угла $\angle APB$ или угла, смежного с ним; биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны;
- треугольники подобны $\Delta POA \sim \Delta POB$, а точки C и C' симметричны относительно O, при этом C делит AB внутренним образом, C' – внешним образом:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B} = \frac{AO}{PO} = k, \qquad PO^2 = AO \cdot BO;$$

- радиус окружности Аполлония $r = \dfrac{k \cdot c}{k^2 - 1}$, центр O окружности $\widehat{O}$ лежит на прямой

AB, его координаты $O = (b + r,\, 0) = \left(\dfrac{k^2 \cdot c}{k^2 - 1},\, 0\right)$; точки A, B – фокусы $\widehat{O}$;

- C_1 – точка касания линии AC_1 и окружности $\widehat{O}$ такая, что $C_1 B \perp AB$, то есть точки C_1 и B находятся на одной вертикали;
- C_2 – узловая точка $C_2(\widehat{O}, \widehat{O}_1, AC_2')$, где $\widehat{O}_1$ – окружность на диаметре AB, а точка C_2' – на вертикальном диаметре $\widehat{O}$;

  O_1C_2 – касательная к окружности $\widehat{O}$, OC_2 – касательная к $\widehat{O}_1$, $O_1C_2 \perp OC_2$;

  $\widehat{O}$ и $\widehat{O}_1$ – ортогональные окружности; касательные в точке пересечения ортогональных окружностей проходят через их центры [10, с. 19];
- $(AC_1)^2 = AC \cdot AC' = AC_2 \cdot AC_2' = AP \cdot AP_A$ – по теореме о касательной и хорде;
- $P_A P_B \perp AC'$, $CPC'P_O$ – прямоугольник;
- $AO / BO = k^2$.

Определяющее условие окружности Аполлония является свойством окружности инверсии для точек A и B, что позволяет использовать все свойства инверсии относительно окружности.

В частности, $\widehat{O}$ и $\widehat{O}_1$ – ортогональны и $|AO| \times |BO| = r^2$.

Окружности Аполлония основаны на замечательной связи длин и углов:

> биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении длин прилежащих сторон [11, с. 20].

В работе [12] исследованы свойства упорядоченной четверки точек прямой $(A, B;\ C, C')$, которая названа гармонической тетрадой.

Окружность Аполлония находит применение при решении задачи сближения на плоскости с использованием стратегии параллельного сближения и связана со старинной задачей о перехвате флибустьерами испанского галеона, груженого золотом.

Золотая окружность Аполлония

Чтобы выделить особенности, которые привносит золотая константа $k = \Phi$ в окружность Аполлония, полезно воспользоваться обычным сравнением (рис. 3).

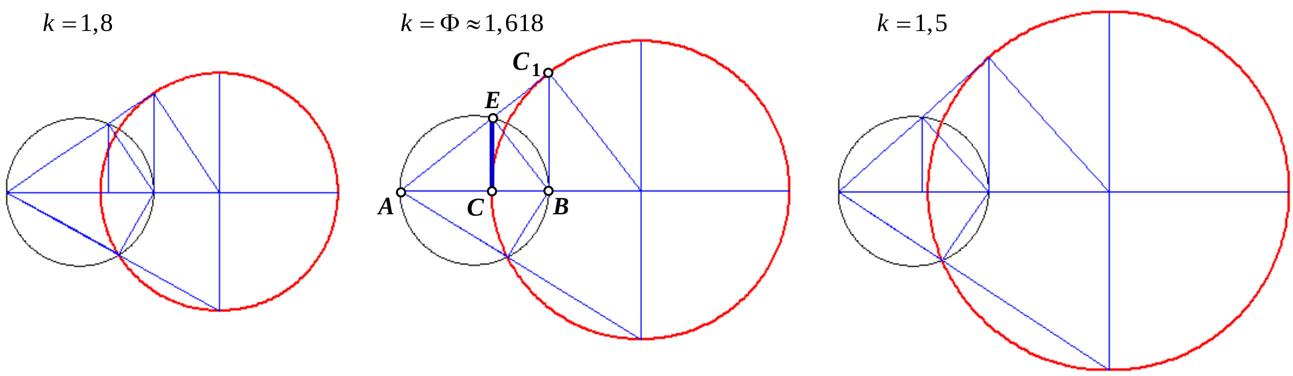


Рис. 3. Окружности Аполлония для разных значений k, близких к константе Φ

Как видим, для золотой окружности Аполлония главной отличительной чертой является расположение узловой точки $E\left(AC_1, EC, \hat{O}_1\right)$ при пересечении касательной $AC_1 \perp OC_1$ с окружностью $\hat{O}_1$: $EC \perp AB$.

То есть точки E и C расположены на одной вертикали.

Казалось бы, всего одна деталь, но она способствует формированию геометрических фигур с замечательными, уникальными особенностями.

Как говорится, мал золотник, да дорог.

Перечислим дополнительные свойства золотой окружности Аполлония для принятого отношения $k = b/a = \Phi$ (рис. 4):

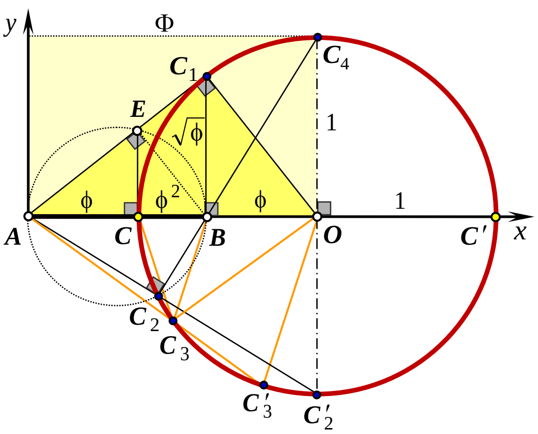


Рис. 4. Золотая окружность Аполлония

- радиус окружности равен длине исходного отрезка $r = OC = AB = 1$;
- отношение катетов подобных прямоугольных треугольников $\Delta\, ABC_2$, $\Delta\, AOC'_2$, $\Delta\, BOC'_2$ и $\Delta\, C_4C_2C'_2$ равно $1:\Phi$, как и в золотом прямоугольнике. Его отличительной особенностью является то, что после отрезания-удаления квадрата оставшаяся часть сохраняет прежнее отношение геометрических размеров и остается золотым прямоугольником. В результате бесконечного продолжения такого удаления, вершины квадратов образуют уникальную золотую спираль;
- $\Delta\, AOC_1$ – прямоугольный треугольник Кеплера с отношением сторон $\sqrt{\phi}:1:\sqrt{\Phi}$, высота BC_1 делит его на два треугольника, подобных исходному, отношение площадей равно константе ЗС;

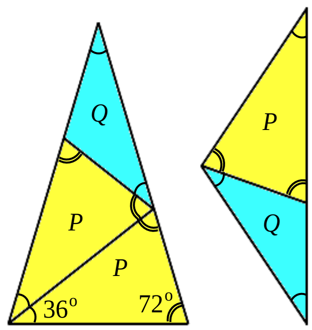


Рис. 5. Инфляция–дефляция треугольников Робинсона

- $\angle\, BAC_3 = 36^{\circ}$ – особый угол:

  $AC_3 = OC_3 = 1,\; CC_3 = BC_3 = \phi$;

  $\Delta\, C'_3OA, \Delta\, C_3OA$ – равнобедренные треугольники Робинсона (рис. 5) с углами $P(36^{\circ}, 72^{\circ}, 72^{\circ})$, $Q(108^{\circ}, 36^{\circ}, 36^{\circ})$ и отношением сторон соответственно $(1:\Phi:\Phi)$ и $(\Phi:1:1)$;

  $\Delta\, C_3BA, \Delta\, C_3CA$ – также треугольники Робинсона.

В книге Н.Воробьева [13, с. 100] они называются треугольниками золотого сечения. Тупоугольный треугольник $\Delta\, P$ называют также золотым гномоном [14, с. 79].

Из них складывается правильный пятиугольник с его симметрией пятого порядка [15].

Заключение: о преемственности знаний, предмете обобщения и научной этике

Обратимся к статьям [5, 6] на предмет преемственности понятий, формулировок и новизны. В них действительно развивается новый вектор исследований, связанный с расширением геометрической модели золотого сечения. Известное деление линейного отрезка в золотой пропорции распространяется на отрезки переменной длины, два конца которых закреплены, а другой движется по окружности.

В целом изложенный материал информационно насыщен, отличается строгостью изложения и заметно выделяется на общем фоне золотоискательских исследований.

Вместе с тем возникают дискуссионные моменты [16]. Они связаны с разноречивой терминологией, неточностью формулировок и полным отсутствием анализа предшествующих работ.

В частности, автор отмечает [6]: «до последнего времени и в течение многих веков существовала единственная геометрическая интерпретация золотого сечения, как деления отрезка длиной $a+b$ на 2 части a, b, связанные соотношением: $(a+b)/b = b/a$ ... автором статьи была введена [5] обобщенная геометрическая модель золотого сечения. При этом золотое сечение обобщается (?) от частного случая деления отрезка прямой линии до отношения переменных отрезков ломаной линии».

Наша работа [3] не упоминается. Об окружности Аполлония – ни слова. Литературные ссылки только на самого себя любимого.

Одновременно происходит смешение суждений.

Говорится о «геометрической модели обобщенных золотых сечений» так, что «геометрическое место точек на плоскости – окружность радиуса позволяет обобщить понятие (?) золотого сечения, как отношение отрезков переменной ломаной линии» [6].

То есть с одной стороны, «обобщенная геометрическая модель ЗС», с другой – «модель обобщенных золотых сечений».

Так, что же именно является предметом обобщения? – Похоже, математическая подготовка доктора наук немного сбилась в словах и причинно-следственных отношениях.

Сначала обобщается геометрическую модель, потом – само золотое сечение.

Что, конечно, не одно и то же. – Один трамвай зеленый, а другой свернул за поворот.

В реальности золотое сечение (золотая пропорция), равно как и золотая константа, остаются без изменения. На то она и константа!

Расширяется лишь геометрическая интерпретация. При этом изменяется целое (точнее его суммарная геометрическая длина), которое теперь проецируется как ломаная линия, составленная из двух отрезков – в их неизменном золотом отношении $1:\Phi$.

То есть обобщается не само ЗС, а его геометрическое представление! – Например, как в обобщенной модели золотого роста [17].

С таким же успехом вместо изменяющегося линейного отрезка можно использовать дугу с переменным радиусом кривизны. Или просто масштабировать в разных вариациях.

Грамматическая категория количества применима исключительно к одному числу ЗС.

Вопросы научной этики работ [5, 6] оставляем за скобками. Не обсуждаем и не осуждаем. – Do not discuss or judge... Они остаются в системе координат морали их автора.

Выражаем глубокую благодарность и признательность Андрею Ковалеву (г. Санкт-Петербург) за полезные обсуждения и дополнения к настоящей работе.

Литература:

1. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17972, 17.04.2013. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

2. Бескин Н.М. Деление отрезка в данном отношении. – М.: Наука, 1973. – 64 с.

3. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

4. Василенко С.Л. Пропорции в симбиозе золотоносных и гармоничных треугольников // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 30.01.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=95&sm=2.

5. Шелаев А.Н. Соотношения гармонии и экстремумы длин площадей и их производных в обобщённой модели золотого сечения // Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 6, С.162-164.

6. Шелаев А.Н. Обобщенная геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных // АТ. – М.: Эл. № 77-6567 публ.17431, 29.04.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321252.htm.

7. Шелаев А.Н. Обобщённая геометрическая модель золотых сечений, произведений и динамической системной гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23738, 16.09.2017. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163418.htm.

8. Василенко С.Л. "Золотой разговор" с Евклидом // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.

9. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

10. Жижилкин И.Д. Инверсия. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 72 с.

11. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.

12. Василенко С.Л. Гармоническая тетрадная модель целого // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.03.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=100&sm=2 / Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 11.02.2014. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13415.html.

13. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

14. Livio M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002. – 294 p.

15. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. 2018. – 458 с.

16. Василенко С.Л. О преемственности и единении знаний в золотоносной тематике // АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ.22441, 26.08.2016. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163036.htm.

17. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 12. Обобщенная модель золотого роста // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28412, 01.04.2023. – https://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165283.htm.

https://ru.freepik.com/