

## Деление пополам и золотая пропорция. Часть 19. Физические задачи: механика (продолжение)

Математика – это вам не физика,  
где можно химичить.

### Вместо вступления.

Математику и физику относят к точным наукам. Обе скрупулезно изучают количественные закономерности и строгие методы проверки гипотез. Однако общее поле точности соотносится только с употреблением количеств, выражаемых числами. При этом разброс точности у них невообразимо велик. Как между небоскребом и песчинкой.

Все собственные физические константы, включая эталонные единицы измерения, – приближенные и находятся экспериментально с весьма ограниченной точностью измерения.

Их главное предназначение – приемлемо описать данные опытов. Доли процента воспринимаются за счастье. Для практических целей этого вполне достаточно.

Километр плюс миллиметр для физика, по-прежнему, остается километром, поскольку вписывается в погрешность измерений.

Другое различие состоит в совершенно разном значении термина "размерности".

В математике размерность количественной меры выражается степенью  $y = x^n$ , где  $x$  – первичная или базовая мера-величина, размерность которой принимается равной 1.

Физическая размерность характеризует конкретное физическое качество реальности и семантику исследуемой физической величины: длины, массы, времени, температуры и т.д.

Царицей наук, как и во все времена, остается математика. Гениальный Ньютон, прежде всего математик, а уже потом ученый-естествоиспытатель. Не случайно его главная книга называется «Математические начала натуральной философии» (1687), то есть физики.

Например, вездесущее число "пи" только недавно приняло вполне осязаемый смысл в квантовой физике, отражая расположение всевозможных "орбит" (энергетических уровней) электронов в атоме водорода с их предельным вытеснением на "круговую траекторию".

Так появляется ниточка-связь между абстрактным миром математики и реальным миром физики. Не за горами время, когда и другие фундаментальные математические константы займут подобающее место и обретут адекватный физический смысл.

Ждут своего часа и колокола курант золотого сечения (ЗС).

В этой связи можно только приветствовать немногочисленных преподавателей физики, таких как David Morin из Гарвардского университета, которые не чураются собирать по крупинкам россыпи золотого сечения в разных областях современной физики и мотивируют молодых ученых к самостоятельной работе в этой области.

Ограниченное проявление золотого сечения в физике – скорее плюс в его пользу, а не минус. Больше реальное достоинство, чем мнимый недостаток.

Это говорит о его чрезвычайной значимости. – Появляться только в нужное время и в нужном месте, а не как попало. – Так предопределено природой, и тому есть объяснение.

Системы на основе ЗС способны быть суперустойчивыми и сверхстабильными.

А значит, "смертными", лишаясь важнейшего «вечного двигателя»: внутренних механизмов и стимулов к эволюции. Достигают абсолютного совершенства и безупречной организованности. А за ними прекращение развития-движения и последующее превращение в пыль-прах-небытие. Золотое сечение – это полная гармония ... только в сторону кончины системы, объекта. Почему и основано на самой медленной непрерывной (цепной) дроби.

Процессам просто суждено обходить ЗС стороной. Иначе конец динамизму и развитию.

Застывшее мумиё... Именно поэтому ЗС обычно обнаруживается в идеальных и/или идеализированных системах. В отсутствии заметных внешних сил-проявлений.

### 1.11. Расщепление цилиндров.

Многие могли наблюдать, как сложенные пирамидкой трубы без должного закрепления "самопроизвольно" раскатываются по поверхности.

Но мало кто подозревает, что в этом процессе сокрыто золотое сечение.

Итак, два гладких одинаковых цилиндра радиуса  $R$  прислонены к стенке. Система неустойчивая, поэтому нижний цилиндр подпирают снизу тормозным башмаком.

Уберем башмак. Стоит теперь нижнему цилиндру (Ц.) чуть колыхнуться-тронуться по горизонтальной плоскости, как верхний начинает опускаться (сползать) по вертикали и система приходит в равноускоренное движение (рис. 1.11) [17, с. 6, 51-52].

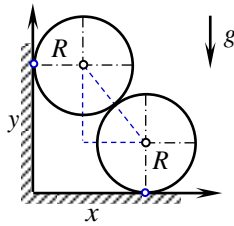


Рис. 1.11. Движение и расщепление цилиндров

Очевидно, что цилиндры расцепятся раньше, чем верхний из них успеет упасть.

Пусть:  $x$  – координата центра нижнего Ц.;

$y$  – высота центра верхнего Ц.

По теореме Пифагора центры цилиндров связаны равенством:

$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = (2R)^2. \quad (1)$$

Продифференцировав это равенство два раза, перейдем к скоростям  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  и ускорениям  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ :

$$\begin{cases} (x - R)\dot{x} + (y - R)\dot{y} = 0; \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (x - R)\ddot{x} + (y - R)\ddot{y} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В момент расщепления цилиндров ускорения (вторые производные) равны:

$\ddot{x} = 0$  – на нижний Ц. горизонтально ничто не давит;

$\ddot{y} = -g$  – на верхний Ц. действует только сила тяжести.

С учетом равенства (1) по закону сохранения энергии с превращением потенциальной  $mg \cdot 3R$  в кинетическую имеем:

$$mg(3R - y) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{mg}{2}(y - R).$$

Следовательно,  $6R - 2y = y - R$ , и это определяет высоту  $y_s = 7/3 \cdot R$ , при которой происходит расщепление-расхождение (*split*) тел. Подставляем это значение в (1) и находим

$$x_s = R + \frac{2}{3}\sqrt{5}R.$$

Подставив найденные величины  $x_s$ ,  $y_s$   $x$ ,  $y$  в (2), получаем соотношение между скоростями:

$$\dot{y} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\dot{x}.$$

Знак минус указывает направление вектора скорости вниз.

Таким образом, в момент расщепления цилиндров отношение скоростей связано с константами золотого сечения:

$$\boxed{\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \Phi - \frac{1}{2} = \phi + \frac{1}{2}}.$$

Далее скорость нижнего цилиндра не изменяется, а верхний цилиндр продолжает равноускоренное движение, пока не упадет на пол.

### 1.12. Закручивание частицы в конусе.

Неподвижный полый конус без трения расположен вершиной вниз.

На его внутренней поверхности частица массой  $m$  выходит из состояния покоя, соскальзывает и на полпути к вершине упруго отскакивает от платформы, расположенной на высоте  $h$  под углом  $45^\circ$  к образующей конуса.

Сначала частица отклоняется горизонтально вдоль поверхности конуса, а затем закручивается вверх и вокруг оси конуса, прежде чем снова падать вниз. Найдём максимальную высоту подъёма  $h_{\max}$  закрученной частицы (рис. 1.12) [5, с. 343].

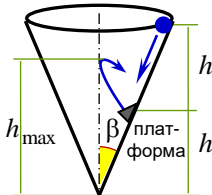


Рис. 1.12. Движение частицы по внутренней поверхности конуса

По закону сохранения энергии  $mgh = mv^2/2$  частица отскакивает от платформы со скоростью  $v_0 = \sqrt{2gh}$ .

Обозначим угол между образующей конуса и его осью как  $\beta$ .

Согласно закону сохранения углового момента и энергии частицы от платформы до вершины траектории, получаем:

$$\begin{cases} mv_0(h \operatorname{tg} \beta) = mv(h_{\max} \operatorname{tg} \beta) \rightarrow v = v_0 \cdot h/h_{\max}; \\ \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + mgh_{\max} \rightarrow v^2 = v_0^2 - 2g(h_{\max} - h). \end{cases}$$

Обозначив  $z = h_{\max}/h$ , находим  $z^3 - 2z^2 + 1 = (z^2 - z - 1)(z - 1) = 0 \rightarrow z = \Phi$ .

Корень  $z = 1$  означает закручивание частицы вокруг оси конуса по горизонтали (без подъёма), что не согласуется с условием задачи.

Итак, имеем исходное деление пополам общей высоты конуса и максимальный отскок тела на относительную величину  $\boxed{h_{\max}/h = \Phi}$ , равную константе золотого сечения.

### 1.13. Сползание гантели.

Гантель в виде тонкого легкого стержня длиной  $l$  и двух одинаковых маленьких шариков массой  $m$  на концах стержня стоит вертикально в углу, образованном двумя гладкими плоскостями.

Нижний шар чуть смещается по горизонтали, и гантель начинает двигаться (рис. 1.13).

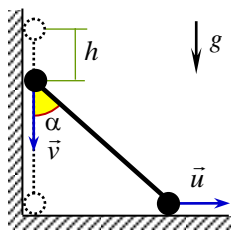


Рис. 1.13.

Сползание гантели

Через некоторое время верхний шар отрывается от вертикальной плоскости и тянется за отодвигающимся нижним шаром. Пусть в момент отрыва угол отклонения от вертикали равен  $\alpha$ , скорости шаров  $v, u$ .

По закону сохранения энергии

$$m(v^2 + u^2)/2 = mgh = mgl(1 - \cos \alpha).$$

Соединительный стержень жесткий, поэтому  $u \sin \alpha = v \cos \alpha$ .

После подстановки получаем  $u^2 = 2gl(z^2 - z^3)$ , где  $z = \cos \alpha$ .

До отрыва центр масс гантели двигался с горизонтальным ускорением, которое сообщалось силой нормальной реакции вертикальной стенки. В момент отрыва скорость  $u$  максимальна, чему соответствует равенство нулю производной:

$$(z^2 - z^3)' = 2z - 3z^2 = 0 \rightarrow z = \cos \alpha = 2/3 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}/2;$$

$$\boxed{\frac{v}{u} = \Phi - \frac{1}{2} = \phi + \frac{1}{2}}.$$

### 1.14. Плоское движение квадрата.

Любое плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела в каждый момент времени можно рассматривать как суперпозицию (наложение) поступательного и вращательного движений. При этом существует мгновенный центр вращения или мгновенный центр скоростей (МЦС) – единственная точка, связанная с телом, скорость которой равна нулю и вокруг которой вращается тело в данный момент времени. Например, при качении колеса по горизонтальной дороге МЦС находится в точке их касания.

Квадратная пластинка  $ABCD$  одной плоской гранью скользит на горизонтальном полу. В некоторый момент векторы скорости вершин  $A$  и  $B$  перпендикулярны друг другу, а вершина  $C$  движется со скоростью  $v_c$  под углом  $\theta$  к стороне  $CD$ ,  $\text{tg } \theta = 1/2$  (рис. 1.14).

Без потери общности примем единичный квадрат  $1 \times 1$ ;  $O$  – средняя точка стороны  $AB$ .

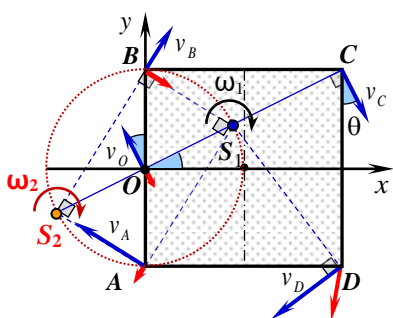


Рис. 1.14. Плоское движение квадрата

Определим МЦС. Поскольку скалярное произведение векторов равно нулю  $\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = 0$ , то эти векторы перпендикулярны. Следовательно, МЦС должен лежать на окружности, построенной на стороне  $AB$ , как диаметре.

МЦС также расположен на прямой  $CS \perp \vec{v}_C$ .

Пересечение данной прямой и окружности дает искомое местонахождение МЦС. Таких точек, удовлетворяющих условию, оказывается две:  $S_1$  – внутри и  $S_2$  – вне квадрата.

Поскольку  $\text{tg } \theta = 1/2$ , то прямая  $CS$  проходит через среднюю точку  $O$ .

Размеры отрезков:  $CO = \sqrt{5}/2$ ,  $CS_1 = \phi$ ,  $CS_2 = \Phi$ ;  $S_1 = g(S_2C)$  – золотое сечение.

Модули скоростей точек фигуры пропорциональны их расстояниям до МЦС.

Следовательно, имеем два решения, соответствующих условию задачи:

$$\frac{v_o}{v_c} = \frac{1}{2\phi} = \frac{\phi}{2}, \quad \frac{v_o}{v_c} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{\phi}{2}.$$

Заметим, что каждому решению соответствует своя угловая скорость.

Для сравнения в таблице 1 представлены расстояния от точек квадрата до МЦС, с учетом которых на рисунке 10 модули скоростей отражены в масштабе относительно скорости  $v_c$ ,  $\sin \theta = 1/\sqrt{5}$ ,  $\cos \theta = 2/\sqrt{5}$ .

Таблица 1

Расстояния от точек квадрата до МЦС

МЦС	$C$	$O$	$A$	$B$	$D$
$S_1$	$\phi$ 0,618	0,5	$1/\phi'$ 0,851	$1/\Phi'$ 0,526	$\sqrt{3}/\Phi'$ 0,911
$S_2$	$\Phi$ 1,618	0,5	$1/\Phi'$ 0,526	$1/\phi'$ 0,851	$\sqrt{3}/\phi'$ 1,473

Примечание:  $\phi' = \sqrt{1+\phi^2}$ ,  $\Phi' = \sqrt{1+\Phi^2}$ .

Как видим, задача свелась к простому геометрическому толкованию и непосредственно связана с классическим построением золотого сечения (ЗС) через диагональ прямоугольника с соотношением сторон  $1:2$ .

Составление уравнений движения относительно центра масс и последующее их решение [1] малоэффективно. Но главное, оно не объясняет появление константы ЗС.

**1.15. Скатывание и соскальзывание тел.**

Однородное тело (полый тонкостенный или сплошной цилиндр, тонкостенная сфера, шар) радиусом  $r$  самопроизвольно скатывается без проскальзывания с верхней точки цилиндрической горки радиусом  $R$  (рис. 1.15-а) [17, с. 6, 243-244].

Начальная скорость равна нулю.

По мере движения тело разгоняется и отрывается от горки. Определим условия отрыва.

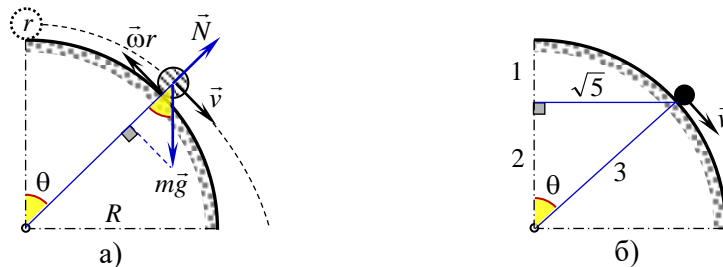


Рис. 1.15. Скатывание и скольжение тел правильной формы с цилиндрической горки:  
 а) скатывание без проскальзывания; б) скольжение без трения в момент отрыва

Тело прижимает к горке радиальная составляющая силы тяжести.

На него также действует сила нормальной реакции опоры  $N$ .

Касающаяся точка тела одновременно участвует в поступательном движении тела со скоростью  $v$  и во вращательном движении с противоположно направленной линейной скоростью  $\omega r$ . При отсутствии проскальзывания мгновенная скорость точки касания равна нулю, поэтому полная кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1+k}{2}mv^2,$$

где  $m$  – масса тела,  $v$  – скорость центра масс,  $J = kmr^2$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс,  $\omega$  – угловая скорость тела,  $k \leq 1$  – численный коэффициент, зависящий от формы тела.

Кинетическая энергия нарастает за счет уменьшения потенциальной составляющей, и по закону сохранения энергии имеем:

$$K = mg(r + R)(1 - \cos \theta).$$

Приравнявая  $T$ , получаем  $v^2 = \frac{2}{1+k} g(r + R)(1 - \cos \theta)$ .

В точке отрыва сила реакции  $N$  обнуляется, и центростремительное ускорение

$$a_c = \frac{v^2}{r + R} = \frac{2}{1+k} g(1 - \cos \theta)$$

создается только радиальной компонентой силы тяжести –  $mg \cos \theta$ .

Поэтому  $ma_c = mg \cos \theta$ , что дает:

$$\frac{2}{1+k}(1 - \cos \theta) = \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3+k}.$$

В таблице 2 представлены углы отрыва характерных однородных твердых тел правильной формы при их скатывании с верхней точки цилиндрической горки.

Таблица 2

**Моменты инерции  $J = kmr^2$  однородных твердых тел правильной формы и углы отрыва при их скатывании с верхней точки цилиндрической горки**

Параметр	Полый цилиндр	Тонкостенная сфера	Сплошной цилиндр	Шар	Соскальзывание тела без трения *
$k$	1	2/3	1/2	2/5	0
$\cos \theta = \frac{2}{3+k}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{2}{3}$
$\theta$ , град.	60	56,94	55,15	53,97	48,19

Примечание \*:  $k = 0$  соответствует соскальзыванию небольшого однородного тела (типа шайбы) без начальной скорости и без трения с верхней точки горки или вершины сферы, закрепленной на горизонтальной плоскости; по мере движения тело разгоняется, отрывается и далее летит по параболе (рис. 1.15-б).

Как видим, среди скатывающихся вращающихся тел наименьший угол отрыва имеет однородный шар с коэффициентом  $k = \frac{2}{5} = 2(\phi + \Phi)^{-2}$ . – С некоторой "натяжкой", но всё-таки просматривается пятый порядок и характерное наличие золотой константы.

Соскальзывание тела без трения и без осевого момента инерции ( $k = 0$ ) дает:

$$\cos \theta = 2/3 \rightarrow \boxed{\text{tg } \theta = \sqrt{5}/2 = \Phi - \frac{1}{2} = \phi + \frac{1}{2}}.$$

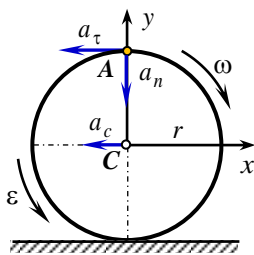
Таким образом, в рассмотренном физическом процессе пятый порядок и золотая константа проявляются дважды (дуально) с минимизацией угла отрыва:

- а) скользящего тела без вращения;    б) вращающегося тела без проскальзывания.

**1.16. Плоское движение колеса.**

Колесо катится равнозамедленно без скольжения по прямолинейному горизонтальному рельсу (рис. 1.16). Пусть скорость центра колеса  $v_c$  численно равна среднегеометрическому значению его ускорения  $a_c$  и радиуса  $r$ :  $v_c = \sqrt{a_c r}$  или  $t = \frac{r}{v_c} = \frac{v_c}{a_c}$ .

Из теоретической механики известно, что ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении фигуры вокруг полюса.



Приняв за полюс центр колеса  $C$ , находим ускорение  $\vec{a}$  верхней точки  $A$ :

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

- где  $a_\tau = \epsilon r$  – тангенциальное (касательное) ускорение;
- $a_n = \omega^2 r$  – центростремительное (нормальное) ускорение точки  $A$  во вращательном движении колеса вокруг полюса  $C$ ;
- $\omega = v_c / r$  – угловая скорость;  $\epsilon = a_c / r$  – угловое ускорение.

Проецируя ускорения на выбранные оси координат, находим:

$$a_x = -(a_c + a_\tau) = -(a_c + \epsilon r), \quad a_y = -a_n = -\omega^2 r;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(2a_c)^2 + (v_c^2 / r)^2} \rightarrow \boxed{a/a_c = \sqrt{5} = \phi + \Phi}.$$

Рис. 1.16. Плоское движение колеса

**1.17. Движение трех стержней с шарнирным соединением.**

В нашей работе [18] рассмотрен изящный способ исполнения золотой пропорции с тремя равными сегментами, их серединами и парой перпендикулярных линий.

Транспонируем геометрическую модель в механическое устройство.

Три одинаковых массивных шарика прикреплены к концам и середине легкого жесткого стержня *A* длиной *l*. Крайние шарики могут скользить по вертикальной и горизонтальной направляющим (рис. 1.17).

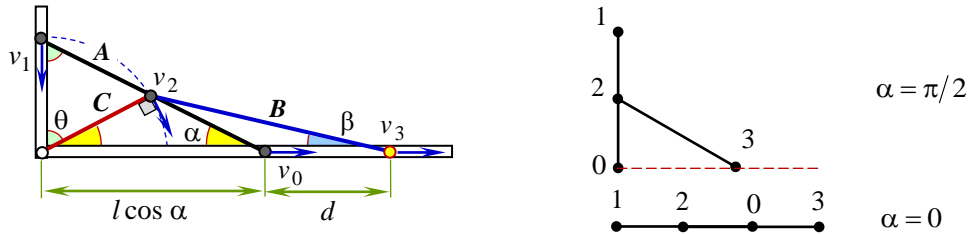


Рис. 1.17. Плоское движение стержней *A, B, C* с шариками одинаковой массы:  
 $v_0 \div v_3$  – скорости шариков

Средний шарик кратным шарниром соединен с двумя легким жесткими стержнями: *B* длиной *l*, второй конец скользит по той же горизонтальной направляющей; *C* длиной *l/2*, второй конец шарнирно прикреплен к перекрестью направляющих.

Трения нигде нет. Шарики свободно перемещаются по направляющим.

Вначале стержень *A* расположен вертикально. Затем его отпускают без начальной скорости. Под действием силы тяжести Земли система будет "складываться", стремясь принять горизонтальное положение.

Рассмотрим момент времени, когда стержень *A* расположен под углом  $\alpha$  к горизонту.

Проекции скоростей всех точек стержня *A* на ось, направленную вдоль него, совпадают:

$$v_0^A = v_1^A = v_2^A, \quad v_0^A = v \cdot \cos \alpha, \quad v = v_0;$$

$$v_1^A = v_1 \cdot \cos \alpha \rightarrow v_1 = v \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad v_2^A = v_2 \sin 2\alpha \rightarrow v_2 = \frac{v \cdot \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{v}{2 \sin \alpha}.$$

Аналогично совпадают проекции скоростей точек стержня *B* на его ось:

$$v_2^B = v_3^B, \quad v_2^B = v_2 \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{v \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha};$$

$$v_3^B = v_3 \cdot \cos \beta \rightarrow v_3 = \frac{v \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \cos \beta} = \frac{v}{2} \left( 1 + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{4 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

Для удобства изложения примем сначала массу шарика  $m_3 = 0$ . Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий материальных точек:

$$K = \frac{m}{2} (v^2 + v_1^2 + v_2^2) = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} \right) = \frac{5mv^2}{8 \sin^2 \alpha}$$

и появляется за счет убыли потенциальной энергии системы в поле тяжести

$$\Delta E = mgl \left( 1 - \sin \alpha + \frac{1}{2} - \frac{\sin \alpha}{2} \right) = \frac{3}{2} mgl (1 - \sin \alpha).$$

Приравняв энергии  $K = \Delta E$ , находим базовую скорость  $v = v_0$

$$v = 2k \cdot \sin \alpha \sqrt{1 - \sin \alpha}, \quad k = \sqrt{\frac{3gl}{5}},$$

а по ней и все остальные параметры системы, в частности, избавляемся от деления на  $\sin \alpha$ :

$$v_1 = 2k \cdot \cos \alpha \sqrt{1 - \sin \alpha}, \quad v_2 = k \sqrt{1 - \sin \alpha}, \quad K = \frac{5mk^2}{2}(1 - \sin \alpha).$$

Функция  $v(\alpha)$  в крайних точках равна нулю, а в точке с нулевой производной достигает максимума:

$$v'(\alpha) = 0 \rightarrow \sin \alpha = 2/3, \quad \boxed{\operatorname{tg} \theta = \sqrt{5}/2 = \Phi - \frac{1}{2} = \phi + \frac{1}{2}}.$$

Второй шарик движется по окружности. Если бы материальная точка соскальзывала без трения, то в этот момент времени она оторвалась бы от окружности (см. рис. 1.15).

По теореме синусов  $\frac{\sin \alpha}{l} = \frac{\sin \beta}{l/2} \rightarrow \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{2}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{4 - \sin^2 \alpha}}{2}.$

Расстояние до конца второго стержня (см. рис. 1.17) составляет  $d = l \cos \beta - \frac{l}{2} \cos \alpha.$

Находим соответствующее отношение  $\frac{d}{l \cos \alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 - \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{2},$  которое равно малой

золотой константе  $\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$  если  $\sin \alpha = \frac{1}{2}.$

При золотом сечении:  $v = \sqrt{\frac{3gl}{10}}, \quad v_1 = v\sqrt{3}, \quad v_2 = v, \quad v_3 = \frac{v}{\phi^2 + 1}, \quad K = \frac{3mgl}{4}.$

Добавление в систему шарика  $m_3 = m$  повлияет на формулу кинетической энергии, за счет дополнительного слагаемого  $mv_3^2/2,$  и соответственно величину скорости  $v = v_0.$

Выражения получаются громоздкими, поэтому не приводятся.

Потенциальная энергия системы и соотношения между скоростями остаются прежними.

Угол  $\sin \alpha = 1/2$  соответствует уменьшению высоты шариков  $m_1$  и  $m_2$  в два раза.

При этом исходная потенциальная энергия системы также уменьшается в два раза, разделившись поровну между оставшейся потенциальной и приобретенной кинетической энергией, и в геометрической модели появляется золотое отношение.

В итоге нижние концы стержней  $A$  и  $B$  образуют на горизонтали золотое сечение.

### 1.18. Поперечный изгиб балки: экстремальные напряжения.

Во многих сооружениях применяются строительные элементы, работающие на плоско-поперечный изгиб. Этот вид деформации возникает под действием сосредоточенной или равномерно распределенной нагрузки, направленной по нормали к продольной оси балки.

Внешними силами являются активные нагрузки и реакции опор. При этом внутри балки (в поперечных сечениях) возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила.

Обычно балка статически определима, так как реакции опор могут быть определены из уравнения статики.



Рассмотрим однопролетную балку постоянного сечения со свободно опертыми концами (рис. 1.18). Она находится в плосконапряженном состоянии под действием нагрузки, равномерно распределенной по длине пролета.

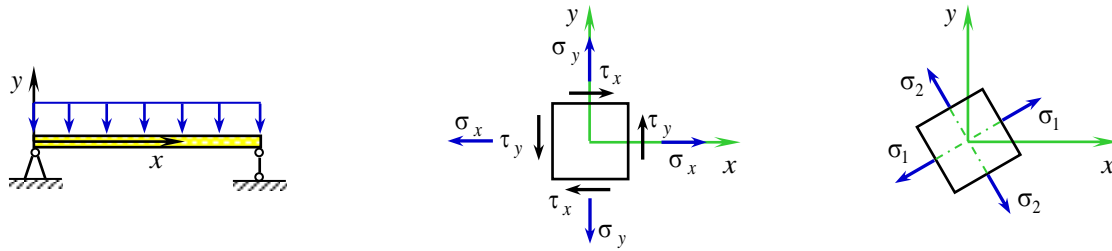


Рис. 1.18. Схема простой балки и плосконапряженного состояния

Точки опор – шарниры, так что концы балки при изгибе могут свободно поворачиваться. Одна из опор находится на катках и свободно двигается в горизонтальном направлении. Подразумевается, что шарниры не оказывают сопротивления вращению примыкающего к нему сечения балки.

В каждой точке сечения действуют возникающие факторы:

$\sigma$  – нормальное напряжение – интенсивность нормальных сил <отрыва или сжатия>;

$\tau$  – касательное напряжение – интенсивность касательных сил <сдвига>.

Нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y$  и напряжения сдвига  $\tau_x, \tau_y$  действуют, как показано на рисунке в данной системе координат  $x - y$ .

Нормальное и касательное напряжения являются составляющими полного напряжения  $p = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$  в рассматриваемой точке по данному сечению.

При расчете инженерных конструкций нет необходимости определять напряжения по всем площадкам, проходящим через данную точку. Достаточно знать экстремальные значения.

Максимальные и минимальные нормальные или главные напряжения  $\sigma_{1,2}$  (критические при расчете напряжений) и напряжения сдвига определяются по формулам [19, с. 50-51]:

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm R, \quad \tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = R,$$

где  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$  – радиус круга напряжений Морю.

Обычно поведение балки влечет за собой деформации изгиба и сдвига, при которых величина  $\sigma_y$  пренебрежимо мала по сравнению с другими напряжениями. То есть для всех практических целей  $\sigma_y = 0$ . Кроме того, для конкретных условий  $\sigma_x = \tau_x$ .

Отсюда получаем следующие соотношения для главных напряжений [20]:

$$\sigma_{\max} = \sigma_x \cdot (1 + \sqrt{5})/2 = \sigma_x \Phi - \text{растяжение};$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_x \cdot (1 - \sqrt{5})/2 = -\sigma_x \phi - \text{сжатие}.$$

Соответственно максимальное напряжение сдвига определяется по формуле:

$$\tau_{\max} = \sigma_x \cdot \sqrt{5}/2 = \sigma_x (\Phi - 1/2).$$

Таким образом, константа золотого сечения  $\Phi$  является определяющей при расчете экстремальных напряжений балки.

Заметим, что данная закономерность свойственна общей задаче, в которой нормальные и касательные напряжения действуют по двум перпендикулярным площадкам.

По мере усложнения исходных условий золотое сечение как бы "растворяется" исчезает, но всё равно незримо присутствует в глубине физического явления. – Образно говоря, на его «подсознательном уровне».

### 1.18. Изгиб балки под действием сосредоточенной нагрузкой.

В рамках теории Эйлера–Бернулли (инженерной или классической теории балки), начало которой восходит к первым экспериментальным исследованиям Леонардо да Винчи ещё до открытия закона Гука (1660), рассмотрим уравнение изгиба балки

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -q(x),$$

где  $D$  – жесткость балки на изгиб,  $w(x)$  – прогиб балки,  $q(x)$  – внешняя нагрузка.

Путем последовательного интегрирования исходного уравнения нетрудно получить общее выражение для прогиба  $w(x)$  [21, с. 8-15]:

$$w(x) = \frac{1}{6D} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + F(x), \quad F(x) = \frac{1}{D} \left( C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right),$$

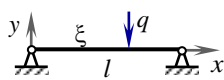
где постоянные интегрирования  $C_i, i = \overline{1, 4}$  определяются из условий на концах балки.

Пусть на балку приложена сосредоточенная сила  $q$  в точке  $x = \xi$ , то есть  $q(x) = q \cdot \delta(x - \xi)$ , где  $\delta(x - \xi)$  – импульсная единичная функция (функция Дирака).

Определим максимальные прогибы для разных видов опор на концах.

(a) Шарнир – шарнир. Граничные условия:  $x = 0, x = l \rightarrow w = 0, \dot{w} = 0$ :

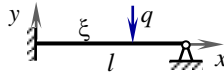
$$F(x) = \frac{1}{6Dl} \int_0^l x(x^2 - 2ls + s^2)(l-s) q(s) ds. \quad \text{Наибольший прогиб:}$$



$$x = \begin{cases} l - \sqrt{(l^2 - \xi^2)}/3, & \xi < l/2; \\ \sqrt{(2l\xi - \xi^2)}/3, & \xi > l/2; \end{cases} \rightarrow w_{\max} = -\frac{1}{48} \frac{ql^3}{D}, \quad \xi = l/2.$$

(b) Левое защемление – шарнир. Граничные условия:  $x = 0, w = \dot{w} = 0; x = l, w = \dot{w} = 0$ :

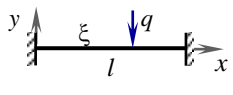
$$F(x) = \frac{x^2}{6Dl^2} \int_0^l \left( lx - 2ls + s^2 - \frac{x(l-s)^2}{3l} \right) (l-s) q(s) ds. \quad \text{Наибольший прогиб:}$$



$$x = \begin{cases} l \left( 1 - \sqrt{\frac{l-\xi}{3l-\xi}} \right), & \xi < l(2-\sqrt{2}); \\ \frac{2l\xi(2l-\xi)}{2l^2 + 2l\xi - \xi^2}, & \xi > l(2-\sqrt{2}); \end{cases} \rightarrow w_{\max} = \frac{ql^3}{D} \left( -\frac{17}{3} + 4\sqrt{2} \right), \quad \xi = l(2-\sqrt{2}).$$

(с) Защемление – защемление. Граничные условия:  $x = 0, x = l \rightarrow w = 0, \dot{w} = 0$ :

$$F(x) = \frac{x^2}{6Dl^3} \int_0^l (lx + 2sx - 3ls)(l-s)^2 q(s) ds. \quad \text{Наибольший прогиб:}$$



$$x = \begin{cases} l^2 / (3l - 2\xi), & \xi < l/2; \\ 2l\xi / (l + 2\xi), & \xi > l/2; \end{cases} \rightarrow w_{\max} = -\frac{1}{192} \frac{ql^3}{D}, \quad \xi = l/2.$$

Исходя из приведенных формул, определим условия проявления золотого сечения в рассматриваемой задаче, которые представим в таблице 3:

наибольший прогиб  $x_{\max}$ , когда сила приложена в точке золотого сечения  $\xi = \phi \cdot l$ ;

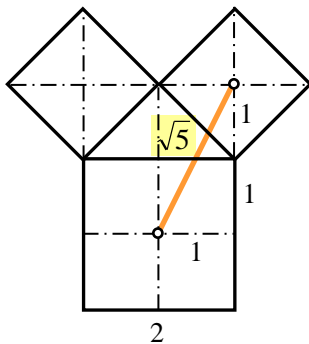
место  $\xi$  приложения силы, чтобы максимальный прогиб оказался в точке ЗС  $x_{\max} = \phi \cdot l$ .

Таблица 3

**Золотые модели прогиба балки с сосредоточенной нагрузкой**

Условие задачи:		Способы закрепления концов балки		
полагаем	находим	(a) Ш–Ш	(b) З–Ш	(c) З–З
$\frac{\xi}{l} = \phi$	$\frac{x_{\max}}{l} =$	$\sqrt{\Phi - \frac{4}{3}}$ ~ 0,5336	$\frac{2}{11}(1 + 6\phi^2)$ ~ 0,5985	$1 - 1/\sqrt{5} = \frac{2}{1 + \Phi^2}$ ~ 0,5528
$\frac{x_{\max}}{l} = \phi$	$\frac{\xi}{l} =$	–	$1 - \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}} = 1 - \text{tg} \frac{\pi}{10}$ ~ 0,6751	$\frac{\Phi}{2}$ ~ 0,8090

Примечание: Ш – шарнир, З – заделка (защемление).



Анализируя рассмотренные задачи по механике в целом, можно отметить частое появление в них золотого числа  $\frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi - \frac{1}{2} = \phi + \frac{1}{2}$  (см. задачи: 1.8, 1.11, 1.13, 1.15, 1.17).

Ранее данное число также встречалось в работе Василенко-Ковалева [22].

Оно появляется и в классическом фрактальном дереве Пифагора, как отношение расстояния между двумя последовательными квадратами центрами, деленное на длину исходного квадрата.

*To be continued...*

**Литература:**

1. QiLin Xue. The Golden Ratio In High School Physics Problems. – August 8, 2020. – <https://physoly.tech/static/files/golden.pdf>.
2. Василенко С.Л. Центр масс плоских фигур в точках золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15957, 20.06.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1661-vs.pdf>.
3. Василенко С.Л., Беянин В.С., Радзюкевич А.В. Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16023, 30.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm>.
4. Василенко С.Л., Беянин В.С., Радзюкевич А.В. Барцентры-аттракторы в многомерных пространствах с приложением об эволюции Вселенной // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16061, 05.09.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161696.htm>.

5. David Morin. Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions. – Harvard University, 2008. – 720 p. – <https://handoutset.com/wp-content/uploads/2022/07/Introduction-to-classical-mechanics-with-problems-and-solutions-David-Morin.pdf>.

6. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Ч. 8. Треугольные формы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28314, 30.01.2023. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165221.htm>.

7. Механика и теория относительности. Задачи и методы их решения: Учеб. пособие / Ю.Н. Колмаков, Ю.А. Пекар, В.А. Семин. – Тула: Тул. гос. ун-т, 2002. – 189 с. – [https://cdn.bc-pf.org/resources/physics/problem\\_sets/TulGU\\_Mekhanika\\_i\\_teoriya\\_otnositelnosti.pdf](https://cdn.bc-pf.org/resources/physics/problem_sets/TulGU_Mekhanika_i_teoriya_otnositelnosti.pdf).

8. Василенко С.Л. Последовательности кругов, вписанных в параболу, и золотая пропорция // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28133, 26.10.2022. – URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165132.htm>.

9. Taylor J.R. Classical Mechanics. – California: University Science Books, 2005. – 800 p. – <https://neuroself.files.wordpress.com/2020/09/taylor-2005-classical-mechanics.pdf>.

10. Moorman C.M., Goff J.E. Golden ratio in a coupled-oscillator problem // European J. of Physics, 28 (2007), 897-902.

11. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. – Ridero, 2023. – 398 с.

12. Хаджи П., Михайленко А. Маятник с несколькими грузами. – <http://kvant.mccme.ru/pdf/1998/03/kv0398khadji.pdf>.

13. Василенко С.Л. Разбиение целого на множество аддитивных пропорциональных частей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22071, 06.05.2016. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162943.htm>.

14. Levien R.V. Double pendulum: An experiment in chaos // American J. of Physics, 61 (11), 1993, 1038-1044. – <http://itl7.elte.hu/~zsolt/Oktatas/Klab/AJP001038.pdf>.

15. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. – В 10 томах. Т. 1: Механика. – 4-е изд., испр. – М: Наука, Физматлит, 1988. — 216 с. – <https://kzf.kpi.ua/wp-content/uploads/2021/09/landau1.pdf>.

16. Малые колебания. 1. Линейные колебания: учеб. пособие / А.С. Ковалев, Е.В. Езерская, З.А. Майзелис, Т.С. Чебанова. – Х.: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2013. – 112 с.

17. Силагадзе З.К. Механика и теория относительности. Задачи семинарских занятий с решениями. – Новосибирск, 2-17. – 260 с.

18. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Часть 8. Треугольные формы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28314, 30.01.2023. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165221.htm>.

19. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т.1. Элементарная теория и задачи: 2-е изд. – М.: Наука, 1965. – 364 с.

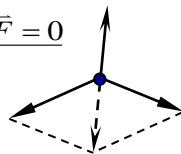
20. Borges R.F. The phi code in nature, architecture and engineering // Design and Nature II, M.W. Collins & C.A. Brebbia (Editors), 2004 WIT Press, 401-409. – <https://www.witpress.com/Secure/elibrary/papers/DN04/DN04040FU.pdf>.


21. Саакян А.А. Влияние граничных условий на изгиб и устойчивость прямоугольных пластин. Дис. ... кандидата физ.-мат. наук по спец. 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Ереван, 2018. – 103 с. – <https://etd.nla.am/7581/1/DissertaciaFull.pdf>.

22. Василенко С.Л., Ковалев А.Н. Золотые пропорции в арбелосе. Часть 1 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28420, 07.04.2023. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165291.htm>.



$$\sum \vec{F} = 0$$



© ВаСиЛенко, 2023   
Украина, Харьков