

# 4D ГИРОСКОП В МЕХАНИКЕ ДЕКАРТА

Г.И.Шипов

shipov@aha.ru, website <http://www.shipov.com>

## Введение

В 1977 году вышла замечательная книга гениального Российского инженера Владимира Николаевича Толчина под названием "Инерцоид, силы инерции как источник движения"[1]. Уже само название книги вызвало бурю эмоций у научной общественности, особенно в стане противников работ В.Н.Толчина. Дело в том, что при теоретических рассуждениях силы инерции рассматриваются некоторыми учеными как "псевдоактивные силы", имеющие математическое происхождение [2].

Другая часть ученых считает силы инерции вполне реальными силами, способными изменять энергию системы в ускоренных системах отсчета [3]. Эти силы обладают оригинальным свойством - они не удовлетворяют третьему закону механики Ньютона, поскольку неизвестно со стороны каких тел они приложены [3].

Реальность сил инерции не подвергали сомнению такие известные механики как О.Хвольсон, Р.Поль, А.Вебстер, а среди физиков Нобелевские лауреаты М.Планк и А.Эйнштейн. Действительно, сильный принцип эквивалентности, которым руководствовался А.Эйнштейн при построении релятивистской теории гравитации, устанавливает эквивалентность не только однородных гравитационных полей с однородными полями инерции, но и эквивалентность сил, порожденных этими полями. М.Планк указывает на принцип Даламбера, когда силы инерции уравновешивают другие вполне реальные силы. Состояние невесомости, которое мы наблюдаем внутри космического корабля на стационарной орбите, было бы невозможным, если бы сила гравитации не была скомпенсирована силой инерции.

Оказывается, что вопрос о правильном понимании сил инерции вызывает не только академический интерес, но и имеет далеко идущие практические следствия. Пренебрежительное отношение к реальному проявлению сил инерции зачастую ведет к поломкам механизмов. Как отмечает Л.Б.Левенсон [4]: "С увеличением мощности и быстроты участились поломки машин. Стало особенно заметно давнее разногласие по существенному вопросу о силах инерции: на первых двух курсах студентов учили в теоретической механике, что силы инерции вовсе не существуют, что они лишь воображаемые и вводятся в расчет для удобства его, отнюдь не будучи реальными, что силы инерции условный геометрический вектор, математическая фикция и т.д. А через год в курсе тепловых двигателей их заставляли складывать действительные давления пара на поршень с несуществующей силой инерции движущихся частей, чтобы получить истинную результирующую силу. Всякое пренебрежение, всякий недоучет этой "вовсе не существующей" силы неизбежно влечет за собой поломки, крушения и тому подобные реальные последствия."

Итак, если силы инерции реальны, то вполне правомерно поставить вопрос об использовании этих сил (в механике известно четыре типа сил инерции [3]) для передвижения механических систем, что и делает В.И.Толчин.

Особо отметим, что силы инерции не удовлетворяют третьему закону механики Ньютона [3], поэтому на них не распространяются теоремы, которые доказаны с применением третьего закона - закона действия и противодействия. Например, теорема о сохранении импульса центра масс изолированной механической системы, которая доказывается при условии, что внутренние силы системы удовлетворяют третьему закону механики Ньютона. Более того, силы инерции невозможно отнести не к внутренним и не к внешним силам по отношению к некоторой механической системе. В связи с этим М.Планк разделяет силы, действующие на систему, на внутренние, внешние и силы инерции [5].

Мы не будем вступать в противоречие с логикой, если допустим возможность изменить импульс центра масс, изолированной от внешних сил системы, под действием сил инерции, искусственно созданных внутри самой системы. Именно это, в конечном счете, доказывают многочисленные эксперименты В.Н.Толчина, проведенные им с инерцоидами различного типа [1].

Совершенно очевидно, что теоретическое описание этого явления выходит за рамки механики Ньютона и требует использование новой механики, названной автором механикой Декарта. Первоначальный вариант механики Декарта опубликован в работе [6], а ее окончательные принципы и уравнения доложены в 2005 г. на Международной конференции, посвященной столетию специальной теории относительности [7].

Механика Декарта представляет собой четвертое обобщение механики Ньютона: первое обобщение - релятивистская механика Эйнштейна-Лоренца-Пуанкаре (1905 г.), второе - общерелятивистская механика Эйнштейна (1915 г.), третье - квантовая механика Бора-Шредингера (1926 г.). Принципиальные отличия механики Декарта от всех предыдущих это:

- 1) отсутствие понятия инерциальной системы отсчета;
- 2) замена материальной точки ориентируемой материальной точкой;
- 3) геометризация механики;
- 3) относительность всех видов полей и взаимодействий - Всеобщая относительность [8].

В настоящей работе будет показано, что разумное, согласующееся с экспериментальными данными, объяснение движения инерцоида Толчина возможно только в рамках механики Декарта, а не механики Ньютона. В научной литературе существуют теоретические работы, которые базируются на гипотезе движения инерцоида за счет сил трения [2], [9], однако детальное исследование этих работ показывает, что авторы либо описывают устройство, не совпадающее с конструкцией инерцоида (см.[2]), либо неправильно составляют уравнения движения (см.[9]). Кроме того, создается впечатление, что авторы указанных теоретических работ не знакомы с экспериментами В.И.Толчина или полностью игнорируют их. Всякий понимает, что одно дело теоретическая модель движения инерцоида, предполагающая его движение за счет сил трения [9], и совсем другое экспериментальные данные, полученные на прецизионной установке [10]. Несомненно, силы трения вносят определенный вклад в движение инерцоида, но не объясняют наблюдаемое движение во всех деталях [10].

# 1 Однотактный инерцоид Толчина

Когда смотришь на однотактный инерцоид Толчина, представленный на рис. 1 и 2, всегда удивляешься простоте и гениальности его устройства.



Рис. 1: Однотактный инерцоид Толчина с пружинным заводом

На металлической платформе 1 с тремя свободно вращающимися колесами 2, установлена пружина 6, которая служит источником внутренней энергии. Запасенная пружиной энергия через систему шестеренок 7 передается на два груза 5, вращающихся синхронно в противоположные стороны.

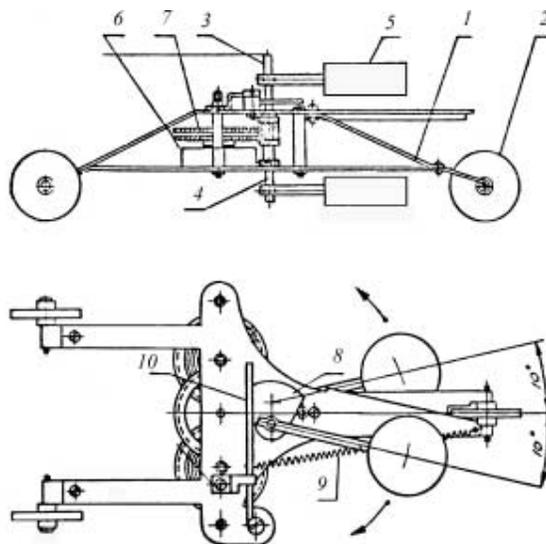


Рис. 2: Схематическое изображение однотактного инерцоида

Во время вращения кулачок 8, жестко закрепленный на оси вращения 3, набегают на планку 10, к которой прикреплена пружина 9. Кулачок 8 и пружина 9 в совокупности представляют собой мотор-тормоз. Назначение мотор-тормоза состоит в том, чтобы ускорять вращение грузов в секторе углов  $330^\circ - 360^\circ$  и замедлять в секторе углов  $150^\circ - 180^\circ$ . Этот существенный элемент инерцоида всегда опускался из рассмотрения оппонентами Толчина, поэтому уравнения движения инерцоида, исследованные, например, в статье Е.Л. Тарунина и др.[9] просто неверны.

На рис. 3 представлены поэтапные действия мотор-тормоза за один такт инерцоида. В действительности же на вращение грузов оказывает влияние как пружина 9, так и

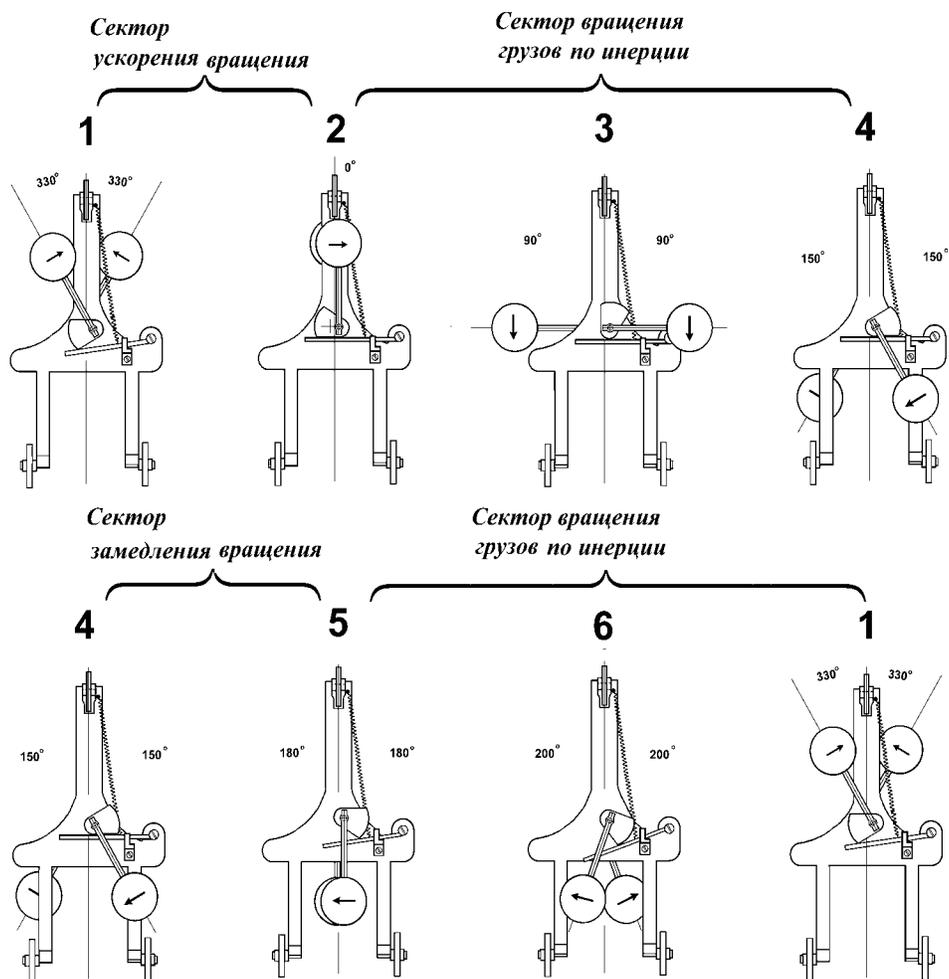


Рис. 3: Действие мотор-тормоза приводит к изменению частоты вращения грузов 5. В секторе углов  $330^\circ - 360^\circ$  угловая скорость увеличивается, а в секторе углов  $150^\circ - 180^\circ$  уменьшается

пружина 6. Разница в их действии состоит в том, что пружина 6 создает момент  $L_6$ , который почти на два порядка меньше момента  $L_9$ , создаваемого пружиной 9. Эксперимент показывает, что если убрать пружину 9, то энергии пружины 6 хватает только на поддержание вращения грузов 5, при этом инерцоид превращается в симметричный вибратор, центр масс которого покоится или движется с постоянной скоростью.

## 2 Экспериментальный график движения центра масс

Какие бы теоретические модели явления мы не строили, последнее слово, как всегда,

за экспериментом. На рис. 4 представлен типичный экспериментальный график движения центра масс однитактного инерцоида, изображенного на рис. 1.

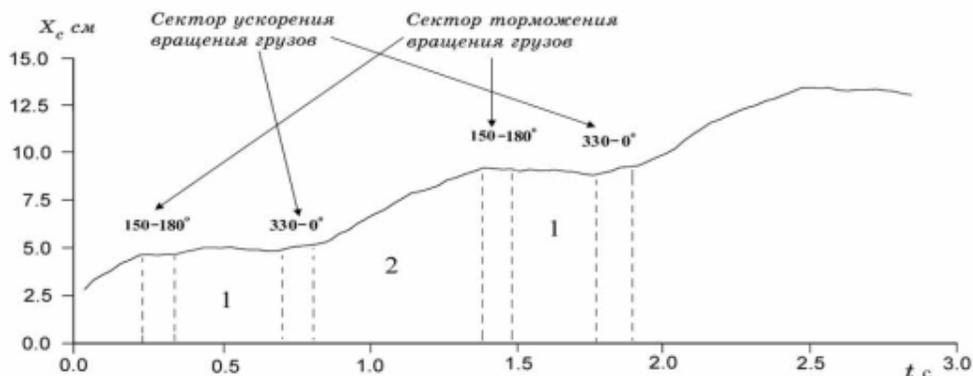


Рис. 4: Движения центра масс инерцоида

Данные, представленные на рис. 4 были получены с использованием следующей методики. На горизонтальной гладкой поверхности стола была прикреплена линейка с ценой деления 1 мм. Сверху на специальной рельсе, параллельной столу, укреплена кинокамера, производившая съемку движения инерцоида. Эксперименты по киносъемке движения инерцоида Толчина были проведены в 1983 г. А.П.Гладченко. Инерцоид был изготовлен по чертежам, опубликованным в книге [1]. После обработки киноплёнки с нее снимались следующие динамические переменные:

- а) координаты  $x_1(t)$  грузов 5;
- б) координата тележки  $x(t)$ .

По этим данным с помощью формулы

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (1)$$

вычислялась координата центра масс  $x_c$ . Из графика видно, что в тех угловых секторах, в которых мотор-тормоз не действовал (не работала пружина 9), инерцоид двигался как свободный симметричный вибратор, т.е. его центр масс покоился или двигался с постоянной скоростью. Изменения скорости центра масс наблюдалось тогда, когда включался в работу мотор-тормоз (работает пружина 9). Дальнейшие исследования показали, что характер движения центра масс определяется не столько силой трения колес с подстилающей поверхностью, сколько формой кулачка 8 (угловыми секторами ускорения и торможения вращения грузов 5) и жесткостью пружины 9.

График 4 получен для инерцоида, который стартует из состояния покоя (временной сектор 1 на графике). Движение корпуса инерцоида и его центра масс начинается в момент, когда мотор-тормоз ускоряет вращение грузов 5, что длится примерно 1/10 сек (весь период примерно 7/10 сек). После окончания действия мотор-тормоза центр масс начинает двигаться с (почти) постоянной скоростью 5.7 см/сек до тех пор, пока не начнет опять работать мотор-тормоз (временной сектор 2 на графике). Теперь мотор-тормоз начинает уменьшать угловую скорость вращения грузов 5, в результате чего

скорость центра масс падает до нуля. Этот процесс продолжается периодически до тех пор, пока завод пружины 6 поддерживает вращение малых грузов 5.

### **3 Силы, действующие на центр масс инерцоида**

Чтобы объяснить движение инерцоида, исследователи выдвигали различные гипотезы, указывая в них возможные источники сил, действующих на инерцоид. Наибольшее распространение получили три гипотезы, предполагающие что:

- 1) движение происходит под действием силы трения;
- 2) движение вызвано аэродинамическими эффектами;
- 3) инерцоид движется под действием силы инерции.

Для экспериментальной проверки этих предположений В.Н.Толчин изготовил различные варианты инерцоидов и провел с ними серию экспериментов [1], которые с большой степенью убедительности заставили его отказаться от первых двух гипотез.

#### **3.1 Исключение действия аэродинамических эффектов и обеспечение движения только вперед без остановки**

Предполагается, что аэродинамические эффекты могут возникнуть из-за неравномерности вращения грузов, т.е. грузы "гребут как весла", опираясь на окружающий воздух. Несуразность подобного утверждения очевидна, если учесть, что вес инерцоида, изображенного на рис. 1, составляет 900 г, при этом при перемещении его корпуса вперед создается тяга 80 г. Для создания такой тяги плотность воздуха должна быть огромной. Чтобы исключить эту гипотезу, В.Н.Толчин накрывает инерцоид легким кожухом, изготовленным из ватмана (см. рис. 5) .

Накрытый кожухом инерцоид движется точно так же, как и без него: корпус инерцоида продвигается относительно поверхности на 90 мм вперед и отступает на 30 мм назад. Таким образом, за такт центр масс инерцоида проходит 60 мм. Поскольку период составляет в среднем, в зависимости от настройки, 1 сек, то средняя скорость центра масс составляет 6 см/сек.

Многие полагают, что силы трения действуют на центр масс инерцоида только через поддерживающие корпус колеса. Заметим, что колеса вращаются свободно. Когда инерцоид движется вперед относительно подстилающей поверхности слева на право, то силы трения заставляют вращаться колеса по часовой стрелке. При отходе назад (движение справа на лево) колеса, соответственно, вращаются против часовой стрелки. При этом внутренняя энергия пружины расходуется на:

- 1) преодоление сил трения в осях колес;
- 2) преодоление сил трения в осях вращения грузов и механизма шестеренчатых передач;
- 3) преодоление тормозного момента, создаваемого мотор-тормозом;
- 4) преодоление сил трения между колесами и подстилающей поверхностью;
- 5) создание вращения грузов, которое порождает силы инерции, действующие на центра масс.

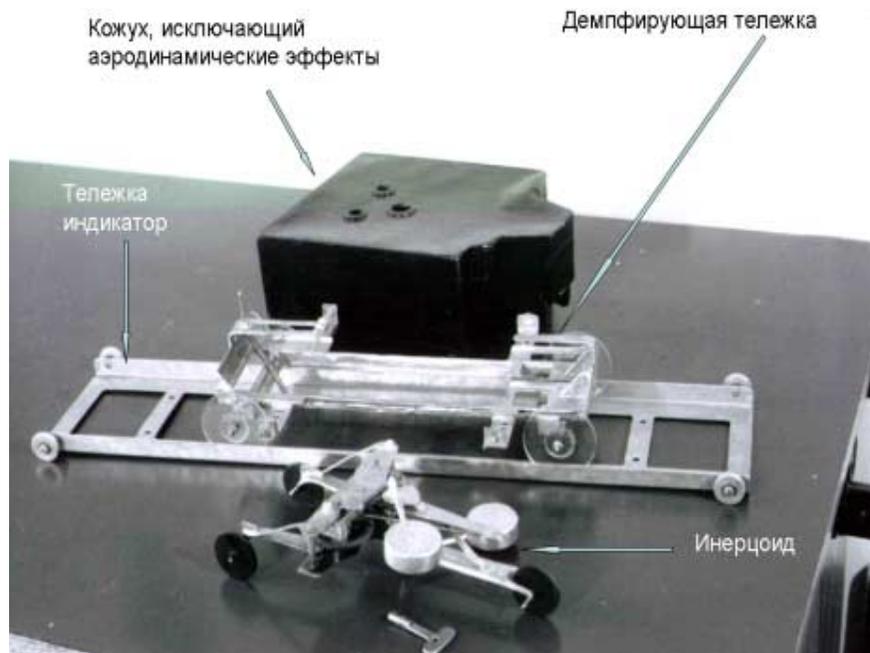


Рис. 5: Дополнительные устройства, исключающие действие сил трения и аэродинамики

Первые три пункта относятся к внутренним устройствам инерцоида и силы, действующие в них, являются внутренними силами, удовлетворяющими третьему закону механики Ньютона. Поэтому, для выяснения причины перемещения центра масс нам остается исследовать силы, действующие в пунктах 4) и 5), а именно, силы трения и силы инерции.

Когда движущееся средство имеем привод на колеса, например, как в автомобиле, то его движение обеспечивают силы трения между подстилающей поверхностью и поверхностью колес, причем силы трения направлены вперед по ходу движения. Если же привод на колеса отсутствует, то силы трения действуют назад против хода движения, заставляя колеса вращаться и оказывая сопротивление движению. Достаточно было создать движение инерцоида только вперед, как гипотеза, предполагающая движение инерцоида за счет сил трения, отпадает. Ведь в этом случае силы трения только тормозят движение системы. В.Н.Толчин находит простое решение - он устанавливает инерцид на демпфирующую тележку (см. рис. 5), которая, после удара инерцоида в ее стенку, поглощает часть направленного вперед импульса, обеспечивая непрерывное движение системы инерцид-тележка только вперед.

### 3.2 Демонстрация нарушения третьего механики Ньютона

Для демонстрации этого эффекта В.Н.Толчин изготовил тележку-индикатор весом 100 г, т.е. в девять раз легче, чем инерцид. Сила трения покоя тележки-индикатора составляла 6 г, в то время как сила трения покоя инерцоида была равна 25 г.

### 3.2.1 Инерциод на тележке индикаторе

Инерциод ставиться на тележку-индикатор, высота которой 1 мм (см.рис. 6). У противоположного конца тележки-индикатора расположена горизонтальная площадка, высотой также 1 мм (на рисунке 6 не показана). Инерциод запускается и движется по

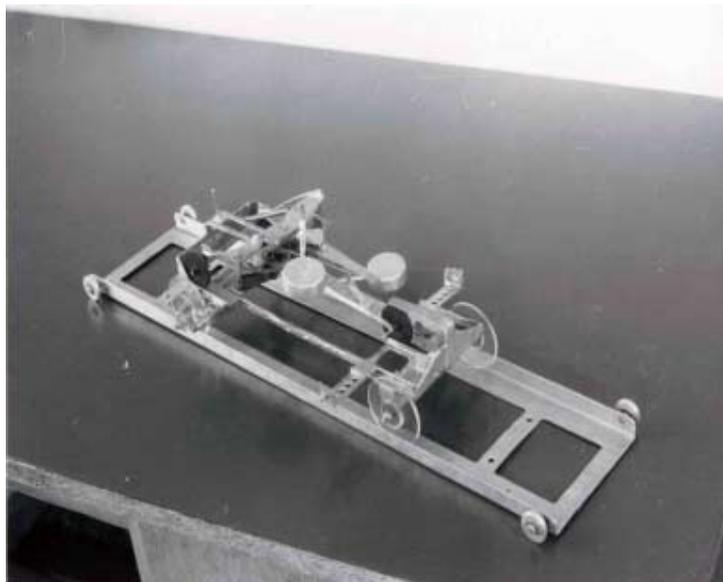


Рис. 6: Инерциод съезжает с тележки-индикатора, при этом тележка-индикатор остается неподвижной

тележке-индикатору. Тележка индикатор остается в покое, несмотря на разницу в весе в 9 раз (тележка легче) и на разницу в силах трения покоя более чем в 4 раза (у тележки сила трения меньше). Доходя до конца тележки-индикатора, он переходит на платформу, при этом тележка-индикатор остается в покое.

#### *КОММЕНТАРИИ:*

Если считать, что инерциод движется за счет сил трения, то при движении по тележке-индикатору она должна была бы двигаться в обратную сторону. Поскольку этого не происходит, то наблюдатель воспринимает наблюдаемое явление как нарушение закона действия и противодействия, т.е. третьего закона механики Ньютона.

### 3.2.2 Инерциод на качелях

Можно предположить (только предположить), что тележка-индикатор остается в покое из-за того, что силы трения колес тележки-индикатора и подстилающей поверхности настолько велики, что она не реагирует на движение инерциода. Это предположение можно проверить, если использовать тележку-индикатор в качестве платформы качелей. В этом случае колеса тележки-индикатора висят в воздухе, не соприкасаясь с подстилающей поверхностью. Поставленный на качели инерциод движется по ним не отклоняя

от положения равновесия. Более того, переходя с качелей на горизонтальную площадку, расположенную на уровне качелей, инерцоид не отклоняет качели из положения равновесия.

#### *КОММЕНТАРИИ:*

Наблюдатель опять воспринимает увиденное как нарушение закона действия и противодействия. Ведь качели весят в 9 раз меньше и по законам механики Ньютона при движении по ним инерцоида должны были отклониться от положения равновесия, а при сходе инерцоида на площадку должны были отклониться из положения равновесия в обратную сторону по отношению к движению инерцоида. Все происходит так, как будто инерцоид движется по качелям "по инерции". Но ведь он движется ускоренно, а ускоренное движение "по инерции" в механике Ньютона запрещено.

### **3.2.3 Инерцоид на подвесе**

В 2000 году я был участником Международной конференции по торсионным полям, проходившей в Сан-Франциско. Я привез в Америку инерцоид Толчина, демонстрировал его движение и дал соответствующие комментарии, подобные изложенным выше. После моего выступления слово взял ученик Де Бройля известный французский ученый Жан Поль Вижье. Он предложил провести эксперимент, изображенный на рис. 7. Ж.П.Вижье

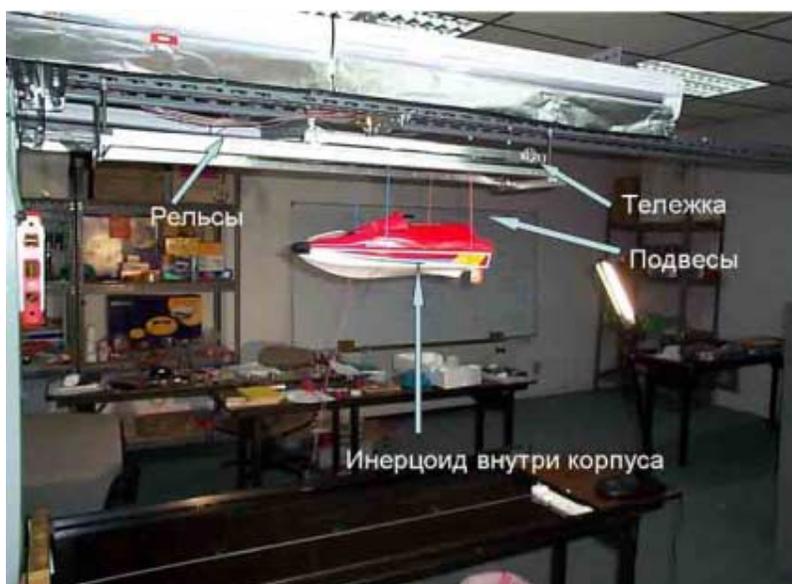


Рис. 7: Эксперимент, предложенный Ж.П.Вижье

предложил подвесить инерцоид на нитях, которые прикреплены к тележке, движущейся по горизонтальным рельсам поверх инерцоида. Если инерцоид потянет тележку в таком положении, то надо будет переписывать учебники, сказал Ж.П.Вижье.

По возвращении из Америки эксперимент Вижье был успешно осуществлен. Инерцоид, установленный внутри корпуса игрушечной моторной лодки, подвешенной на нитях, тянул за собой тележку наверху! Когда мы снимали лодку с подвеса и клали ее на тележку-индикатор, то она двигалась вместе с тележкой-индикатором по горизонталь-

ной поверхности. Если же лодку поместить в бассейн с водой, то она плавает за счет тяги, создаваемой инерцидом внутри ее.

*КОММЕНТАРИИ:*

Эксперимент Вижье полностью отвергает гипотезу о том, что причиной движения инерцида являются силы трения (пункт 4)), поэтому у нас остается только одна возможность - исследовать движение инерцида под действием сил инерции, которые создаются работой мотор-тормоза.

## 4 Различные модификации инерцидов

Чтобы избавиться от колес инерцида и еще раз экспериментально доказать непричастность сил трения к движению инерцида, В.Н. Толчин изготовил модели, демонстрирующие нарушение закона сохранения углового момента.

### 4.1 Демонстрация нарушения закона сохранения момента

На рис. 8 представлена установка, демонстрирующая поведение инерцида на крутильных весах. Крутильные весы представляют собой планку, установленную на игле, которой заканчивается опорный стержень. Обычно на одном конце планки устанавливается инерцид, а на другом уравновешивающий весы груз. Однако, для по-



Рис. 8: Инерцид на скамье Жуковского

вышения действия установки, вместо уравновешивающего груза В.Н.Толчин установил второй аналогичный инерцид (см. рис. 8 ), увеличив результирующую тягу вдвое. Для повышения чувствительности эксперимента к изменению вращательного момента, опорный стержень установлен в центре скамьи Жуковского. Когда руками вращается диск

скамьи Жуковского, на котором закреплен опорный стержень, то планка с инерцоидами остается в покое (грузы инерцоидов не вращаются). И наоборот, когда вращается руками планка, диск скамьи Жуковского остается в покое.

В качестве источников энергии, вызывающей вращение грузов инерцоида, использованы электромоторы постоянного тока, скорость вращения которых регулируется вручную с помощью реостата. Если отключить работу мотор-тормоза и запустить электромоторы, то, не смотря на вращение грузов, планка с инерцоидами остается на месте. Но как только начинает работать мотор-тормоз, вызывая неравномерное вращение грузов, планка начинает вращаться, при этом скамья Жуковского остается в покое. Это означает, что вращение планки не вызывает реакции противодействия на опорном стержне, т.е. силы трения между планкой и иглой на конце стержня не могут быть причиной движения планки.

*КОММЕНТАРИИ:*

Как и в случае прямолинейного движения инерцоида, мы здесь имеем нарушение третьего закона (действия и противодействия) механики Ньютона. Подвес планки с инерцоидами на игле исключает действие сил трения, о чем свидетельствует неподвижность скамьи Жуковского. Мы опять приходим к заключению, что движение планки вызвано действием сил инерции, созданных работой мотор-тормоза.

## 4.2 Мощные инерцоиды

Развитие инерцоидов Толчина шло, в основном, по пути увеличения тяги, которую

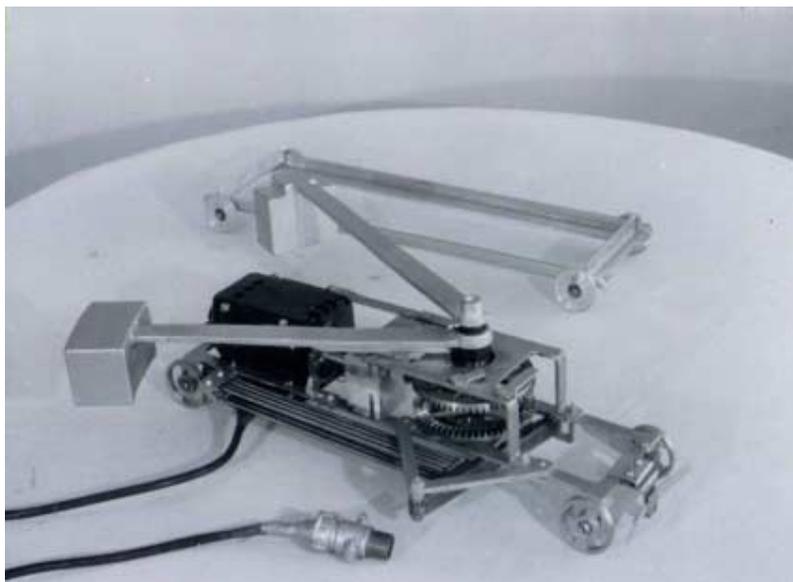


Рис. 9: Мощный инерцоид Толчина с максимальной тягой в импульсе 15 кг.

они создавали. У однотактного инерцоида эта тяга носит импульсный характер.

На рис. 9 представлена модель инерцоида со следующими характеристиками.

Общий вес инерцоида.....5,6 кг

Вес одного груза .....1,0 кг  
 Максимальный импульс тяги .....15 кг  
 Ход вперед за один такт .....45 см  
 Отход назад за один такт .....2 см

В Арзамасе 16 группой инженеров ,под руководством В.Коробко, был создан мощный инерцоид общим весом 60 кг и с весом груза 5 кг (см. рис 10). В качестве источников



Рис. 10: Мощный инерцоид с тягой в импульсе 11 кг.

энергии, обеспечивающих вращение столь массивных грузов, использовались аккумулятор и электромотор мощностью 1,75 кВт, составляющие значительную часть веса инерцоида. За один такт движение вперед составляло 11 см и отход назад 1 см.

### 4.3 Инерцоид, управляемый компьютером и движущийся только вперед

Анализ уравнений движения однитактного инерцоида позволил оптимизировать его движение с помощью компьютерной программы, которая управляла работой сервомотора (электромотора с обратной связью) ( рис. 11). В результате было достигнуто движение корпуса без остановки только вперед. Напомним, что в этом случае силы трения между колесами и подстилающей поверхностью действуют только назад, т.е. препятствуют движению вперед.

Действительно, были проведены эксперименты, когда инерцоид двигался по стеклу, смазанному маслом, при этом его движение незначительно ускорилось, поскольку произошло уменьшение сил трения. Инерцоид с непрерывным движением вперед имел полный вес 1,8 кг, вес грузов 300 гр, угловая скорость менялась от 4 рад/сек до 13 рад/сек, при этом средняя скорость центра масс составляла 30 см/сек.

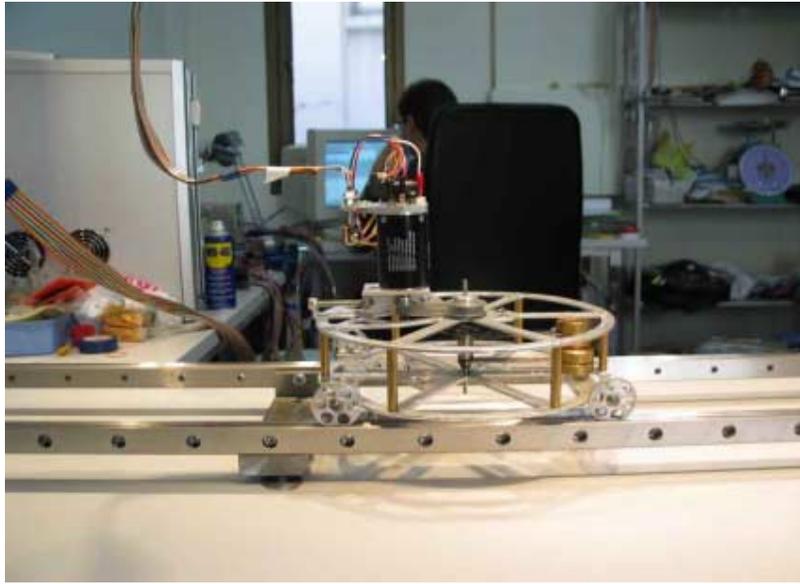


Рис. 11: Инерцоид с компьютерным управлением

#### 4.3.1 Компьютерное управление изменением направления тяги

Сервомотор на модели с компьютерным управлением заменил собой мотор-тормоз модели инерцоида Толчина. Это дает возможность создавать нужную программу для управления движением инерцоида. Для этого достаточно обеспечивать ускорение и торможение вращения грузов в нужном секторе углов. Более того, оказалось, что для смены направления движения инерцоида достаточно сменить сектора ускорения и торможения вращения грузов на обратные не меняя направления вращения самих грузов.

##### *КОММЕНТАРИИ:*

Для стороннего наблюдателя, который видит, что движущийся "черный ящик", на который не действуют внешние силы, вдруг меняет направление своего движения, его движение оказывается загадкой. С точки зрения наблюдателя, который знает только механику Ньютона, такая смена направления движения означает, что меняется величина и знак инертной массы. Иными словами инертная масса инерцоида зависит от вращательных процессов, происходящих внутри нее. Итак, причина движения инерцоида - изменения его инертной массы путем изменения вращения грузов внутри его, при этом инерцоид движется по "инерции" в соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dt}(m(t)v) = m(t)\frac{dv}{dt} + v\frac{dm(t)}{dt} = 0. \quad (2)$$

Это уравнение описывает реактивное движение без отбрасывания масс. Такое возможно, если инертная масса меняется периодически, при этом сила

$$F = -v\frac{dm(t)}{dt} \quad (3)$$

представляет собой ничто иное, как силу инерции, возникшую в результате работы сервомотора.

## 5 Теория инерциоида с точки зрения механики Ньютона

### 5.1 Свободный инерциоида

Прежде всего рассмотрим кинематику свободного от внешних сил инерциоида с отключенным мотор-тормозом. На рис. 12 изображена принципиальная схема свободного инерциоида, на которой отсутствуют колеса, что не принципиально в данном случае.

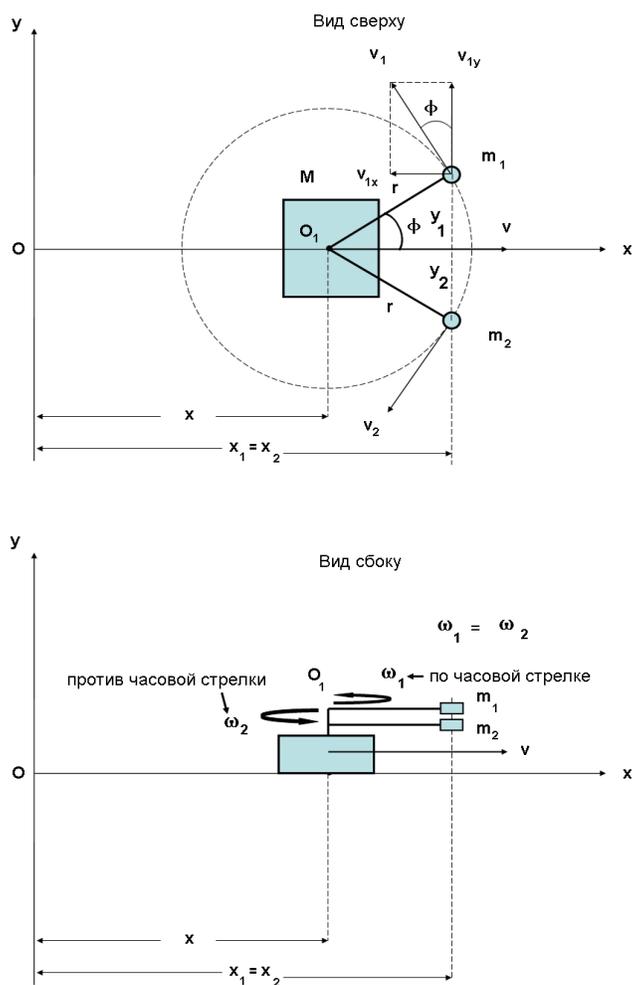


Рис. 12: Принципиальная схема 4-D гироскопа

Используя обозначения для координат и скоростей на схеме 12, запишем функцию Лагранжа системы трех тел в виде

$$L = \frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega \sin \phi, \quad (4)$$

где  $\omega = \dot{\phi}$  – угловая скорость вращения грузов,  $v$  – линейная скорость корпуса,  $r$  – радиус вращения грузов,  $M$  – масса корпуса,  $m$  – масса груза. Подставляя функцию Лагранжа (4) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2 ,$$

находим поступательное

$$(M + 2m)\dot{v} - 2mr\dot{\omega} \sin \phi - 2mr\omega^2 \cos \phi = 0 \quad (5)$$

и вращательное

$$2mr^2\dot{\omega} - 2mr\ddot{x} \sin \phi = 0 \quad (6)$$

уравнения движения инерцоида. После некоторых преобразований эти уравнения можно представить в виде

$$r\dot{\omega} - \ddot{x} \sin \phi = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{x} - B \frac{d}{dt} (\omega \sin \phi) = 0, \quad (8)$$

где  $B = 2m/(M + 2m)$ .

Умножим первое из этих уравнений на  $2mr\omega$ , второе на  $(M + 2m)\dot{x}$  и сложим. В результате преобразований мы приходим к закону сохранения полной энергии  $T$  свободного гироскопа

$$\frac{d}{dt} L = \frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega \sin \phi \right) = 0 , \quad (9)$$

$$T = \frac{1}{2} (M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega \sin \phi = const.$$

Интегрируя вращательное уравнение движения (7), находим

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_0}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} , \quad (10)$$

$$E(\phi(t), k) = \omega_0 t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} + E(\phi_0, k) , \quad (11)$$

где

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

– эллиптический интеграл второго рода,  $\phi_0$  – начальный угол и  $\omega_0$  – начальная частота.

Интегрирование уравнения (8) дает

$$x(t) = A + v_0 t - B \cos \phi(t) , \quad (12)$$

$$v = v_c + B\omega \sin \phi, \quad (13)$$

где

$$A = x_0 + B \cos \phi_0 = const , \quad v_0 = B\omega_0 \sin \phi_0 = const ,$$

$x_0$  – начальная координата корпуса,  $v_0$  – начальная скорость корпуса,  $v_c$  – скорость центра масс.

Используя соотношение  $x_c = x(t) + B \cos \phi(t)$ , которое следует из формулы (1), найдем частное решение для координаты центра масс четырехмерного гироскопа

$$x_c = A + v_0 t . \quad (14)$$

Соответственно скорость центра масс определяется как

$$v_c = B\omega_0 \sin \phi_0 = \text{const} . \quad (15)$$

Из этой формулы видно, что центр масс свободного инерцоида покоится или движется прямолинейно и равномерно.

## 5.2 Инерцоид под действием внешних сил

Предположим теперь, что на инерцоид действует внешняя сила (например, сила трения) и момент внешней силы (например, момент, создаваемый мотор-тормозом). Тогда, вместо уравнений (7) и (8), имеем

$$\frac{dv}{dt} - B \frac{d}{dt}(\omega \sin \phi) = \frac{F_x}{M + 2m}, \quad (16)$$

$$r \frac{d\omega}{dt} - \frac{dv}{dt} \sin \phi = \frac{L}{2mr}, \quad (17)$$

где  $F_x$  – внешняя сила, действующая на инерцоид вдоль оси  $x$  и  $L$  – момент, с создаваемый мотор-тормозом.

*КОММЕНТАРИИ:*

Удивительно, ни одна из существующих работ, дающих теоретическое обоснование движения инерцоида за счет сил трения, не использует систему уравнений (16) и (17). Например, в работе Е.Л.Тарунина и др. [9] выписано уравнение поступательного движения типа (16), в котором угловая скорость  $\omega$  постоянна, в то время как она находится из уравнения (17). Изменение угловой скорости происходит под действием момента  $L$ , который оппоненты В.Н.Толчина не учитывали ни в одной работе. Это элементарная, но грубейшая ошибка, не позволительная для ученого, наделенного многими высокими степенями и званиями.

Отметим так же, что сила  $F_x$  является действительно внешней силой по отношению к инерцоиду, чего нельзя сказать о моменте  $L$ , создаваемым мотор-тормозом. Действительно, накрывая инерцоид кожухом, мы получаем "черный ящик", внутри которого действует мотор-тормоз.

Анализ решений системы уравнений (16) и (17) проводился с помощью персонального компьютера в программе МатЛаб. В результате этого анализа было найдено, что если внешняя сила  $F_x$  равна нулю, то центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно, несмотря на действие момента  $L$ . Вывод таков: уравнения механики Ньютона не описывают наблюдаемые явления в экспериментах с инерцоидами.

Умножая первое из этих уравнений на  $(M + 2m)v$ , а второе на  $2mr\omega$ , и складывая их, получим закон изменения полной энергии инерцоида.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega \sin \phi \right) = F_x v + L\omega. \quad (18)$$

## 6 Геометризация кинематики свободного инерцоида

Основной задачей единой теории поля, выдвинутой А.Эйнштейном, является геометризация всех физических полей и взаимодействий. Это в полной мере относится и к классической механике. Метод геометризации уравнений движения системы  $n$  частиц можно найти, например, в книге П.К.Рашевского [11].

В классической механике движение механической системы  $n$  частиц, свободной от действия внешних сил, описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial T}{\partial u^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

где

$$T = T(x^i, u^i) = \frac{\mu}{2} g_{ij} u^i u^j$$

- нерелятивистская кинетическая энергия системы, зависящая от координат  $x^i$  и скоростей  $u^i$ ,  $\mu$  - полная масса системы,  $g_{ij}$  - метрический тензор конфигурационного пространства событий. Связь между метрикой конфигурационного пространства событий и нерелятивистской энергией системы  $n$  частиц имеет вид [11]

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \frac{2T}{\mu} dt^2,$$

где  $t$  - время.

Используя этот общий подход, запишем энергию  $T$ , равную функции Лагранжа (4), в виде

$$T = \frac{M + 2m}{2} (v_c^2 + k^2(1 - k^2 \sin^2 \chi/r)w^2) = \frac{M + 2m}{2} (v_c^2 + gw^2), \quad (20)$$

где

$$w = r\omega, \quad \phi = \chi/r, \quad k^2 = 2m/(M + 2m), \quad v_c = v - k^2 w \sin \chi/r, \quad g' = k^2(1 - k^2 \sin^2 \chi/r).$$

Вводя обозначения

$$v^1 = v_c, \quad v^2 = w$$

и метрический тензор

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}, \quad (21)$$

представим Лагранжиан системы как

$$T = \frac{M + 2m}{2} g_{ij} v^i v^j = \frac{M + 2m}{2} \dot{s}^2.$$

Здесь

$$\dot{s}^2 = g_{ij} v^i v^j = v_c^2 + gw^2 \quad (22)$$

и

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2T}{(M+2m)}} = \text{const.}$$

Поскольку

$$v_c = \frac{dx_c}{dt}, \quad w = r\omega = r \frac{d\phi}{dt},$$

то из (22) следует

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (23)$$

Будем рассматривать это соотношение как метрику некоторого конфигурационного двумерного риманова пространства с координатами

$$x_1 = x_c, \quad x_2 = r\phi = \phi'$$

и уравнениями геодезических

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad i, j, k \dots = 1, 2. \quad (24)$$

Введем обозначения

$$V_c = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx_c}{ds}, \quad \Omega = \frac{dx^2}{ds} = \frac{d\phi'}{ds}.$$

Подставляя метрический тензор (21) в определение символов Кристоффеля

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}), \quad ,k = \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k},$$

получаем

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'}.$$

Остальные компоненты равны нулю.

Из уравнений геодезических (24) следуют уравнения движения свободного инерцоида в виде

$$\frac{dV_c}{ds} = 0, \quad \frac{d\Omega}{ds} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = 0.$$

Переходя к дифференцированию по времени, получим из этих уравнений

$$\frac{dv_c}{dt} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} w^2 = 0. \quad (26)$$

Интегрируя полученные уравнения, имеем

$$v_c = \text{const}, \quad \omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_0}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}. \quad (27)$$

Легко видеть, что эти решения совпадают с решениями (10) и (15), полученными по классической схеме. Как и следовало ожидать, из решения (27) следует, что центр масс свободного гироскопа покоится или движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета.

При геометрическом описании справедливыми оказываются соотношения

$$v_c = \frac{du_c}{dt} = \frac{dx_c}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad w = \frac{d\phi'}{dt} = \frac{d\phi'}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad v_c = V_c \dot{s}, \quad w = \Omega \dot{s}.$$

Подставляя последние два равенства в формулу (22), имеем

$$\dot{s}^2 = V_c^2 \dot{s}^2 + g' \Omega^2 \dot{s}^2$$

или

$$V_c^2 + g' \Omega^2 = 1. \quad (28)$$

Используя это соотношение, выразим  $V_c$  и  $\Omega$  через некоторый угол  $\eta$  следующим образом

$$V_c = \cos \eta = a, \quad \sqrt{g'} \Omega = \sin \eta = b, \quad (29)$$

где  $a$  и  $b$  константы, удовлетворяющие условию

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Соотношение (28) можно рассматривать как закон сохранения энергии системы, при этом  $V_c$  и  $\sqrt{g'} \Omega$  могут принимать различные (постоянные) значения от нуля до единицы при одной и той же полной энергии.

## 7 Основы механики Декарта

### 7.1 Вращение и силы инерции

Перед созданием механики Ньютона (1687 г.) Рене Декарт отстаивал точку зрения, что всякое движение есть вращение. Мы уже отмечали, что вращение материальных объектов порождает в механике силы инерции. Действительно, в нерелятивистской механике известны четыре типа сил инерции [3]. Три силы связаны с вращением в трехмерном пространстве, а именно:

центробежная

$$\mathbf{F}_1 = -m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]], \quad (30)$$

сила Кориолиса

$$\mathbf{F}_2 = -2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}] \quad (31)$$

и сила, связанная с вращательным ускорением,

$$\mathbf{F}_3 = -m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]. \quad (32)$$

Четвертая сила инерции

$$\mathbf{F}_4 = -m\mathbf{W} \quad (33)$$

возникает при поступательном ускорении тела  $\mathbf{W}$  и также связана с вращением в пространственно-временных плоскостях. Более подробно это будет показано ниже.

## 7.2 Преобразования Галилея и неголономные угловые координаты

В основе механики Ньютона лежат нерелятивистские преобразования Галилея-Ньютона

$$x'_\alpha = x_\alpha - V_\alpha t, \quad t' = t \quad V_\alpha = const, \quad (34)$$

$$\check{\varphi}'_\beta = \check{\varphi}_\beta + \check{\nu}_\beta, \quad (35)$$

$$\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3.$$

Соотношения (34) обычно представлены во всех учебниках и трактуются как взаимные преобразования координат и времени двух инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью  $V_\alpha$ . Другое дело равенства (35), которые описывают поворот (а не вращение!) базисных векторов штрихованной инерциальной системы отсчета по отношению к исходной на постоянный угол  $\check{\nu}_\beta$ . В (35) круглые кавычки над углами поставлены для того, чтобы подчеркнуть, что конечные углы не образуют вектора, поскольку, в отличие от трансляционных координат  $x_\alpha$ , являются неголономными (не интегрируемыми) координатами. Математические и физические свойства голономных координат  $x_\alpha$  и неголономных координат  $\check{\varphi}_\beta$  различны.

Действительно, координаты  $x_1, x_2, x_3$  образуют полярный вектор, а координаты  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  не образуют вектора вообще. Вектор (аксиальный) образуют бесконечно малые приращения углов  $d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3$ .

В общем случае полярный и аксиальный вектора имеют различные законы преобразования; если любая из координат полярного вектора является скаляром, то координаты аксиального вектора являются псевдоскалярами. Это означает, что аксиальный вектор при поворотах преобразуется как полярный вектор при трансляциях, т.е. знак проекций этого вектора на координатные оси не меняется; при дискретном преобразовании, соответствующем инверсии координатных осей, проекции аксиального вектора не меняют своего знака, в то время как проекции полярного вектора меняют знак.

Координаты  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  с указанными свойствами называются неголономными координатами (матрицы преобразования поворотов на конечный угол не коммутируют друг с другом) в отличие от голономных координат  $x_1, x_2, x_3$ . При движении в неголономных координатах результат двух поворотов на конечные углы, вообще говоря, зависит от последовательности этих поворотов. Для иллюстрации этого утверждения, рассмотрим два последовательных поворота вокруг осей  $x$  и  $z$  на углы  $90^\circ$  (рис. 13, 14).

Из рисунков видно, что результат двух конечных поворотов вокруг осей  $x$  и  $z$  зависит от последовательности этих поворотов (положения квадрата со звездочкой в верхнем правом углу на рис.13,  $\nu$  и рис.14,  $\nu$  не совпадают).

Аксиальные вектора различаются ориентацией, и для их полного описания необходимо задавать ориентируемые многообразия, характеризуемые правыми и левыми системами отсчета. В ориентируемых многообразиях появляются правые и левые аксиальные

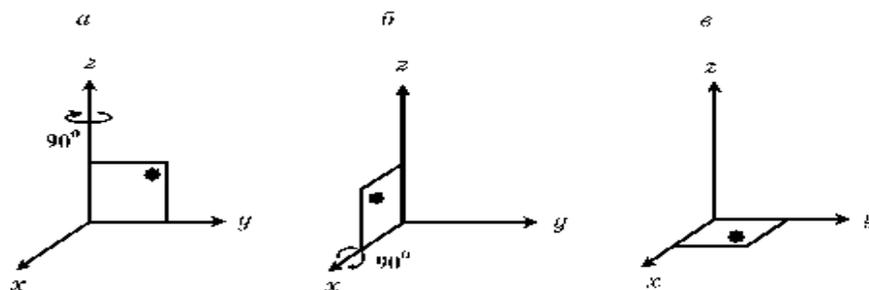


Рис. 13: Два последовательных поворота на угол  $180^\circ$  *a* – поворот на  $90^\circ$  по часовой стрелке вокруг оси *z*; *б* – то же, вокруг оси *x*; *в* – результат двух последовательных поворотов

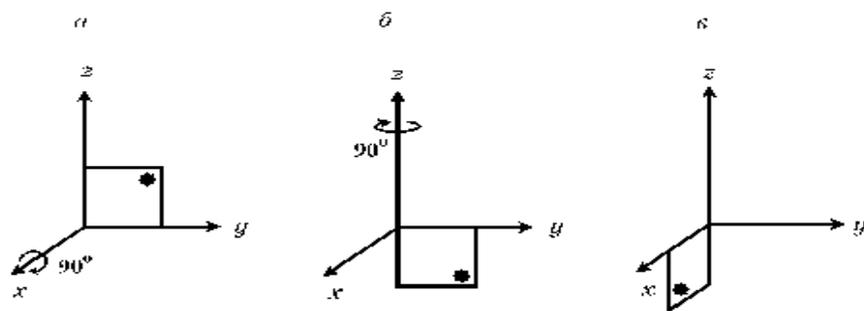


Рис. 14: Смена порядка последовательных поворотов на угол  $180^\circ$  *a* – поворот по часовой стрелке на угол  $90^\circ$  вокруг оси *x*; *б* – то же, вокруг оси *z*; *в* – результат двух последовательных поворотов

вектора и всякий нулевой аксиальный вектор можно представить как пару аксиальных векторов, проекции которых различаются знаками.

Примером аксиального вектора является трехмерная угловая скорость  $\omega$ , входящая во вращательные уравнения Эйлера. Этот вектор преобразуется не только в группе трансляций  $T_3$  Галилея–Ньютона (34), но и в группе трехмерных поворотов  $O(3)$ , действующей на многообразии угловых координат  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

### 7.3 Задание трансляционной скорости через псевдоевклидовы углы

Преобразования Галилея–Ньютона (34) и (35) имеют различную природу, а именно: трансляционные координаты  $x_\alpha$  преобразуются в группе трансляций  $T_3$ , тогда как угловые переменные  $\varphi_\beta$  образуют группу поворотов  $O(3)$ . Переход из одной группы в другую невозможен, поскольку углы и трансляционные координаты, как мы показали, принципиально отличаются друг от друга. Тем не менее, в механике принято переходить из инерциальных в ускоренные системы отсчета ( в том числе и во вращающиеся) с помощью трансляционных преобразований координат. Например, преобразования в ускоренную систему отсчета, которая движется с поступательным ускорением  $W_\alpha$  (преобразования Д’Аламбера), имеют вид

$$x'_\alpha = x_\alpha - \frac{W_\alpha t^2}{2}. \quad (36)$$

Очевидно, что эти преобразования совершаются в группе трансляций  $T_3$ .

Запишем теперь преобразования, которые соответствуют переходу из инерциальной системы отсчета во вращающуюся. Пусть оси  $z$  этих систем совпадают. Тогда обычно используют следующие координатные преобразования

$$x' = x \cos \Omega t - y \sin \Omega t, \quad y' = x \sin \Omega t + y \cos \Omega t, \quad z' = z, \quad (37)$$

где  $\Omega$  - угловая скорость вращения ускоренной системы отсчета относительно инерциальной. Если начало ускоренной системы отсчета связано с частицей массы  $m$ , то с помощью преобразований (36) и (37) получаем следующие уравнения движения [12]

$$m \frac{dv'_\alpha}{dt} = -mW_\alpha + 2m\Omega_{\alpha\beta}v'^\beta.$$

Казалось бы, что для перехода во вращающуюся систему отсчета нам необходимо использовать преобразования в группе вращений  $O(3)$ , однако нам оказалось достаточно трансляционных преобразований. Иными словами, переход в ускоренные системы отсчета, которые движутся с трансляционным и вращательным ускорением, совершается с помощью трансляционных координатных преобразований. Так дело обстоит в обычной классической механике, основанной на механике Ньютона.

Мы перейдем к построению нерелятивистской механики Декарта, в которой любое движение есть вращение, а переход к произвольно ускоренным системам отсчета происходит в группе вращений  $O(3.1)$ . Это группа вращений четырехмерного (по количеству трансляционных координат -  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  псевдоевклидова пространства с сигнатурой

(+ - -) и шестью углами, из которых три угла  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  пространственные и три угла  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , пространственно-временные.

Теперь нерелятивистская скорость  $v_\alpha$  будет задаваться как функция трех пространственно-временных углов  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Например, при движении вдоль оси  $x$  скорость  $v_x$  будет определяться через угол  $\theta_x$  как (см. рис. 15)

$$\frac{dx}{dt} = c \operatorname{th} \theta_x, \quad (38)$$

где  $c$  - скорость света.

Важно отметить, что механика Даламбера даже при скоростях, удовлетворяющих условию  $v/c \ll 1$  требует введения четырехмерного псевдоевклидова пространства и, соответственно, скорости света.

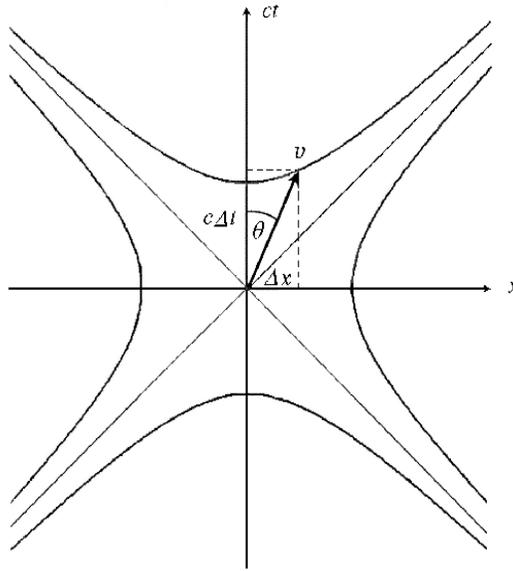


Рис. 15: Поступательное ускорение  $W_x = dv_x/dt = c(\operatorname{th}\dot{\theta}_x)$  вдоль оси  $x$  есть вращение в плоскости  $ct - x$

При движении с поступательным ускорением вдоль оси  $x$  в приближении  $v/c \ll 1$  мы имеем

$$W_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = c(\operatorname{th}\dot{\theta}_x) = c \frac{d\theta_x(t)}{dt}. \quad (39)$$

## 7.4 Инерциод Толчина как четырехмерный гироскоп

Используя (39), запишем уравнения движения свободного инерциода (5) и (6) в виде

$$(M + 2m) \left( c \frac{d\theta_x(t)}{dt} \right) - 2mr\dot{\omega} \sin \phi - 2mr\omega^2 \cos \phi = 0, \quad (40)$$

$$2mr^2\dot{\omega} - 2mr \left( c \frac{d\theta_x(t)}{dt} \right) \sin \phi = 0. \quad (41)$$

Очевидно, что в эти уравнения входят только угловые переменные, поэтому механика, в которой трансляции описываются как вращение в пространственно-временных плоскостях, была названа механикой Декарта, а инерциод - четырехмерным гироскопом (4D гироскопом).

В механике Декарта движение 4D гироскопа описывается двумя матрицами вращения, а именно, пространственное вращение грузов  $m$  задается матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi(t) & \sin \phi(t) & 0 \\ 0 & -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

а вращение в пространственно-временной плоскости  $-ct$ , т.е. движение вдоль оси  $x$ , описывает матрица

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -th\theta(t)_x & 0 & 0 \\ -th\theta(t)_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

Теперь становится понятно, почему такое простое механическое устройство, как инерциод Толчина, было названо *четырёхмерным гироскопом*. Дело в том, что все его элементы вращаются в  $4^X$  мерном пространстве механики Декарта.

В самом общем случае матрицы вращения 4D гироскопа имеют вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{xx} & \cos \theta_{xy} & \cos \theta_{xz} \\ 0 & \cos \theta_{yx} & \cos \theta_{yy} & \cos \theta_{yz} \\ 0 & \cos \theta_{zx} & \cos \theta_{zy} & \cos \theta_{zz} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где  $\cos \theta_{\alpha\beta}$  - направляющие косинусы пространственных углов, и

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где  $\beta_\alpha = v_\alpha/c = th\theta_\alpha$ , - "направляющие" гиперболические тангенсы,  $v_\alpha$  - компоненты скорости,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \quad (46)$$

- релятивистский фактор. При скоростях  $v/c \ll 1$  матрица (45) упрощается, приобретая вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_x & -\beta_y & -\beta_z \\ -\beta_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

Если скорость движения  $v_\alpha$  постоянна, то вместо преобразований Галилея-Ньютона (34) и (35) в механике Декарта мы имеем

$$x'_\alpha = x_\alpha - th\theta_\alpha t, \quad t' = t \quad \theta_\alpha = const, \quad (48)$$

$$\check{\varphi}'_\beta = \check{\varphi}_\beta + \check{v}_\beta, \quad (49)$$

$$\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3.$$

На первый взгляд кажется, что это просто другая запись преобразований Галилея-Ньютона в виде нерелятивистского предела преобразований Лоренца. На самом же деле, разница огромна:

1) Во-первых, в механике Даламбера в общем случае мы имеем десятимерное координатное многообразие, в котором имеется 4 голономных трансляционных координаты  $x_0, x_1, x_2, x_3$  и шесть неголономных углов  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

2) Во-вторых, пространство событий механики Декарта образуют не просто точки (как в механике Ньютона, специальной, общей теории относительности и квантовой механике) а *ориентируемые точки*.

3) В третьих, разница между преобразованиями Галилея-Ньютона (34), (35) и преобразованиями Декарта (48), (49) становится существенной, когда углы в матрицах (44) и (45) начинают зависеть от времени [13]. Именно на этом этапе даже в нерелятивистской механике Декарта появляются *торсионные поля* порождающие в механике силы инерции, представляющие для физиков загадку со времен Ньютона.

4) В четвертых, такая "простая физика на столе", которую экспериментально демонстрирует 4D гироскоп, находит разумное объяснение в рамках механики именно Декарта.

## 7.5 Трехмерная ориентируемая точка и вращательная метрика

Геометрия Евклида, лежащая в основе классической механики Ньютона, базируется на точечном многообразии. На таком многообразии существует только одна трансляционная метрика

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

С другой стороны, в механике Декарта вращение составляет ее основу, поэтому ее теоретическую базу невозможно построить, используя точечное многообразие механики Ньютона.

Что такое материальная точка в механике Ньютона? Представим себе шарик радиуса  $r$  и массы  $m$ . Устремим теперь радиус шарика к нулю, тогда в пределе мы будем иметь точку, совпадающую с центром масс шарика, в котором будет сосредоточена вся масса шарика  $m$ . С таким "идеальным" объектом работает механика Ньютона.

Понятно, что материальная точка Ньютона не в состоянии описывать собственное вращение точки. Поэтому в механике Декарта элементарным объектом является *ориентируемая материальная точка*. Что это такое? Представим себе тот же шарик, но мы теперь жестко свяжем с ним три единичных базисных вектора  $\mathbf{e}_A$ ,  $A = 1, 2, 3$ . Если шарик меняет свою ориентацию относительно какой-либо базисной системы, то это изменение можно выразить через изменение направления единичных векторов, связанных с ним. Опять устремим радиус шарика к нулю. В пределе мы получим ориентируемую точку. Многообразие ориентируемых точек механики Декарта гораздо богаче, чем точечное многообразие ньютоновской механики. Кроме того, на многообразии ориентируемых точек существует, дополнительно к трансляционной метрике  $dl^2$  вращательная метрика [8]

$$dv^2 = d\chi_{\alpha\beta}d\chi^{\alpha\beta}, \quad (50)$$

где  $d\chi_{\alpha\beta} = -d\chi_{\beta\alpha}$  - бесконечно малые изменения пространственных углов. Докажем это утверждение.

Под трехмерной ориентируемой точкой подразумевается точка, снабженная ортогональным репером. Такой объект можно наделить массой и моментом инерции, рассматривая его как вращающееся твердое тело бесконечно малых размеров.

Для описания пространства событий динамики ориентируемой точки рассмотрим шестимерное многообразие координат  $x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Его удобно представить как *векторное расслоение*<sup>1</sup> с базой, образованной трансляционными координатами  $x_1, x_2, x_3$  и слоем, заданным в каждой точке  $x_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) ортонормированными реперами

$$\mathbf{e}_A, \quad A = 1, 2, 3, \quad (51)$$

где  $A$  означает номер вектора репера. Фактически любой из реперов  $\mathbf{e}_A$  является математическим представлением трехмерной произвольно ускоренной системы отсчета - трехмерной ориентируемой точки.

Согласно теореме Эйлера, бесконечно малые повороты вокруг трех осей репера (51) можно заменить одним поворотом на угол  $d\chi$  вокруг определенной оси, проходящей через начало репера  $O$ . Бесконечно малый поворот (в отличие от конечного поворота) можно задать вектором

$$d\chi = d\chi \mathbf{e}_\chi,$$

где вектор  $\mathbf{e}_\chi$  направлен вдоль мгновенной оси вращения системы отсчета. Это направление выбирается так, что если смотреть с конца вектора  $\mathbf{e}_\chi$  на неподвижную точку  $O$ , то поворот совершается против часовой стрелки (правая система отсчета).

Бесконечно малое изменение векторов репера  $\mathbf{e}_A$  при повороте  $d\chi$  имеет вид

$$d\mathbf{e}_A = [d\chi \mathbf{e}_A]. \quad (52)$$

Если разделить (52) на  $dt$ , то мы получим

$$\frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = \left[ \frac{d\chi}{dt} \mathbf{e}_A \right] = [\omega \mathbf{e}_A], \quad (53)$$

<sup>1</sup>Термин «векторное расслоение» принят в математике.

где  $\omega = d\mathbf{x}/dt$  – трехмерная угловая скорость вращения системы отсчета относительно мгновенной оси. Выбирая ортогональный репер

$$a) \quad e^A_\alpha e^\alpha_B = \delta^A_B = \begin{cases} 1 & A = B \\ 0 & A \neq B \end{cases}, \quad (54)$$

$$б) \quad e^A_\alpha e^\beta_A = \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases},$$

$$A, B, \dots = 1, 2, 3, \quad \alpha, \delta, \beta = 1, 2, 3,$$

где  $\alpha, \delta, \beta, \dots$  – векторные индексы, а  $A, B, \dots$  – номер вектора, можно записать соотношения (52) и (53) как

$$de^A_\alpha = d\chi^\beta_\alpha e^A_\beta, \quad (55)$$

$$\frac{de^A_\alpha}{dt} = \frac{d\chi^\beta_\alpha}{dt} e^A_\beta. \quad (56)$$

Умножая равенство (55) на  $e^\beta_A$  и используя условия ортогональности (54), получим

$$d\chi^\beta_\alpha = e^\beta_A de^A_\alpha. \quad (57)$$

Дифференцируя условия ортогональности (54), получим

$$e^A_\alpha de_{\beta A} + e_{\beta A} de^A_\alpha = 0,$$

откуда

$$d\chi_{\alpha\beta} + d\chi_{\beta\alpha} = 0.$$

Следовательно,

$$d\chi_{\alpha\beta} = -d\chi_{\beta\alpha}. \quad (58)$$

Величины (58) описывают бесконечно малый поворот трехмерной системы отсчета и определяют трехмерную *вращательную метрику*

$$dv^2 = d\chi_{\alpha\beta} d\chi^{\alpha\beta}, \quad (59)$$

заданную на группе трехмерных вращений  $O(3)$ , действующей на множестве координат  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

Умножая (56) на  $e^\beta_A$  и используя условия ортогональности (54), находим

$$\frac{d\chi^\beta_\alpha}{dt} = e^\beta_A \frac{de^A_\alpha}{dt} = \omega^\beta_\alpha,$$

причем тензор угловой скорости вращения системы отсчета

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$$

связан с компонентами вектора  $\omega = d\mathbf{x}/dt = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  следующим образом:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} = - \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 8 Геометрия пространства событий и уравнения механики Декарта

В предыдущем разделе мы получили некоторые соотношения для трехмерной ориентируемой точки, например, матрицу трехмерного вращения. Но, как было показано выше, механика Декарта требует развития математического аппарата, описывающего не трехмерную, а четырехмерную ориентируемую точку. В полной мере этот аппарат развит в книге [8]. Здесь же мы дадим его краткое изложение.

Можно совершить формальный переход в соотношениях предыдущего раздела, заменив триаду  $e^A_\alpha$ ,  $A = 1, 2, 3$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  на тетраду  $e^a_i$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Не ограничивая общности потребуем, чтобы в произвольной системе координат тетрада  $e^a_i$  определяла метрический тензор

$$g_{ik} = \eta_{ab} e^a_i e^b_k, \eta_{ab} = \eta^{ab} = \text{diag}(1 - 1 - 1 - 1) \quad (60)$$

и риманову метрику

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (61)$$

пространства событий четырехмерной ориентируемой точки. Равенство (57) теперь запишется в виде

$$d\chi_j^i = e^i_a D e^a_j \quad a = 0, 1, 2, 3, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

где  $D$  - абсолютный дифференциал относительно символов Кристоффеля

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}), \quad , k = \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (62)$$

Перепишем это равенство как

$$d\chi_{ij} = e_{ia} D e^a_j = e_{ai} \nabla_k e^a_j dx^k = -d\chi_{ji} \quad (63)$$

и введем обозначение

$$T^i_{jk} = e^i_a \nabla_k e^a_j. \quad (64)$$

Здесь  $\nabla_k$  -ковариантная производная относительно символов Кристоффеля (62). В результате мы получим локальную связь между дифференциалами четырех координат базового пространства  $dx^i$  (трансляционными координатами) и дифференциалами шести неголономных координат касательного аффинного пространства  $d\chi_{ij}$  (вращательными координатами) в виде

$$d\chi^i_j = T^i_{jk} dx^k. \quad (65)$$

Тензор относительно координатных преобразований  $x^i$

$$T^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} T^k_{ij}$$

мы будем называть в дальнейшем *торсионным полем*. Это поле определяет вращательную метрику

$$d\tau^2 = d\chi^i_j d\chi^j_i = T^i_{jk} T^j_{in} dx^k dx^n, \quad (66)$$

которая задает квадрат бесконечно малого поворота тетрады  $e^a_i$ . Если торсионное поле  $T^i_{jk}$  равно нулю, то никакого вращения ориентируемой точки нет, и, следовательно, в механике Декарта нет никакого движения.

Раскрывая ковариантную производную в (64), получим соотношение

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk} = e^i_a e^a_{j,k}, \quad (67)$$

где величины  $\Delta^i_{jk}$  представляют собой связность геометрии абсолютного параллелизма  $A_4(6)$ . Эта аббревиатура означает, что наша геометрия имеет 4 голономных координаты в базе и 6 неголономных координат в слое.

Как и всякая связность, она имеет нетензорный закон преобразования относительно трансляционных (голономных) координатных преобразований

$$\Delta^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Delta^k_{ij}.$$

## 8.1 Уравнения движения четырехмерной ориентируемой точки

Разделим соотношение (63) на  $ds$  и, используя (64), получим шесть уравнений движения ориентируемой точки в механике Декарта

$$\frac{De^i_a}{ds} + T^i_{jk} e^j_a \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (68)$$

или

$$\frac{de^i_a}{ds} + \Gamma^i_{jk} e^j_a \frac{dx^k}{ds} + T^i_{jk} e^j_a \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (69)$$

Торсионное поле  $T^i_{jk}$  образовано кручением геометрии  $A_4(6)$

$$\Omega^{..i}_{jk} = e^i_a e^a_{[k,j]} = \frac{1}{2} e^i_a (e^a_{k,j} - e^a_{j,k}) \quad (70)$$

по следующему правилу [8]

$$T^i_{jk} = -\Omega^{..i}_{jk} + g^{im} (g_{js} \Omega^{..s}_{mk} + g_{ks} \Omega^{..s}_{mj}) = e^i_a \nabla_k e^a_j. \quad (71)$$

В научной литературе эти величины называются коэффициентами вращения Риччи. Они впервые были введенные итальянским математиком Г.Риччи в 1895 г. [14].

Уравнения движения механики Декарта (69) одновременно представляют собой обобщенные уравнения Френе для четырехмерного репера. Трансляционные уравнения (уравнения движения начала  $O$  репера) следуют из вращательных уравнений (69). Действительно, специализируем тетраду  $e^i_a$  таким образом, чтобы вектор  $e^i_0$  совпадал с касательной к мировой линии, т.е.

$$e^i_0 = u^i = \frac{dx^i}{ds},$$

тогда уравнения (69) принимают вид

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + T^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (72)$$

## 8.2 Связь торсионных полей с полями инерции

Угловую скорость четырехмерных вращений ориентируемой точки мы получим, разделив соотношение (65) на  $ds$

$$\Omega_{ij} = \frac{d\chi_{ij}}{ds} = e_{ia} \frac{De^a_j}{ds} = T_{ijk} \frac{dx^k}{ds} = -\Omega_{ji}. \quad (73)$$

Уравнения движения начала репера (72) теперь запишутся как

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \Omega^i_j \frac{dx^j}{ds} = 0. \quad (74)$$

Умножив уравнения (74) на массу  $m$ , мы получим трансляционные уравнения движения ориентируемой точки

$$m \frac{d^2x^i}{ds^2} + m \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + m \Omega^i_j \frac{dx^j}{ds}. \quad (75)$$

Дадим физическую интерпретацию компонентам матрицы  $\Omega_{ij}$ . Для этого перейдем в уравнениях (75) к нерелятивистскому пределу и в предположении, что метрика (61) совпадает с метрикой плоского пространства. При этих предположениях уравнения (75) принимают вид [8]

$$m \frac{du_\alpha}{ds_o} = -m \Omega_{\alpha o} \frac{dx^o}{ds_o} - 2m \Omega_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds_o}. \quad (76)$$

Поскольку эти уравнения описывают движение начала вращающейся четырехмерной системы отсчета, то силы, стоящие в правой части уравнений, должны быть силами инерции, порожденные вращением.

Из классической механики известно, что нерелятивистские уравнения движения начала  $O$  трехмерной ускоренной системы отсчета под действием одних только сил инерции имеют вид [3]

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m(-\mathbf{W} + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]), \quad (77)$$

где  $\mathbf{W}$  – вектор поступательного ускорения, а  $\boldsymbol{\omega}$  – вектор трехмерной угловой скорости вращения ускоренной системы отчета.

Записывая эти уравнения в виде

$$\frac{d}{dt}(mv_\alpha) = m \left( -W_{\alpha o} + 2\omega_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{dt} \right), \quad (78)$$

где

$$\mathbf{W} = (W_{10}, W_{20}, W_{30}),$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} = - \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

и, сравнивая их с уравнениями (76), получим

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ W_1 & 0 & -c\omega_3 & c\omega_2 \\ W_2 & c\omega_3 & 0 & -c\omega_1 \\ W_3 & -c\omega_2 & c\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Судя по этой матрице, четырехмерное вращение тетрады  $e^i_a$ , вызываемое кручением пространства  $A_4(6)$ , порождает в нерелятивистской механике поля инерции, связанные с поступательными и вращательными ускорениями.

### 8.3 Уравнения, описывающие динамику торсионных полей

Альтернируя уравнения (64) по индексам  $j$  и  $k$ , получаем структурные уравнения Картана локальной группы трансляций ( $T_4$ ) геометрии абсолютного параллелизма

$$\nabla_{[k} e^i]_a + T^i_{[jk]} e^j_a = 0. \quad (81)$$

Если теперь мы образуем с помощью связности (67) тензор кривизны, то он оказывается равным нулю [8]

$$S^i_{jkm} = 2\Delta^i_{j[m,k]} + 2\Delta^i_{s[k}\Delta^s_{j|m]} = 0. \quad (82)$$

Здесь квадратные скобки означают альтернацию по соответствующим индексам, а индекс, заключенный в вертикальные линии, не подлежит альтернации.

По определению, пространство с нулевым тензором кривизны называется *пространством абсолютного параллелизма*. Тензор  $S^i_{jkm}$  может быть представлен в виде суммы

$$S^i_{jkm} = R^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{j|m]} + 2T^i_{c[k} T^c_{j|m]} = 0, \quad (83)$$

где

$$R^i_{jkm} = 2\Gamma^i_{j[m,k]} + 2\Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{j|m]} \quad (84)$$

– тензор Римана пространства  $A_4(6)$ , а  $\nabla_k$  – ковариантная производная относительно символов Кристоффеля  $\Gamma^i_{jk}$ . Уравнения (83) представляют собой структурные уравнения Картана группы вращения геометрии  $A_4(6)$ . Из этих уравнений следует, что торсионные поля  $T^i_{jk}$  порождают риманову кривизну пространства  $A_4(6)$ . Частным случаем пространства абсолютного параллелизма является плоское псевдоевклидово пространство. Действительно, из формулы (65) видно, что когда вращение отсутствует ( $d\chi^i_j = 0$ ,  $dx^k \neq 0$ ), торсионное поле  $T^i_{jk}$  обращается в нуль, при этом  $R^i_{jkm} = 0$  и пространство абсолютного параллелизма переходит в псевдоевклидово.

Таким образом, пространство событий механики Декарта, описывает поступательные и вращательные степени свободы произвольно ускоренной четырехмерной системы отсчета. Оно наделено геометрией абсолютного параллелизма (геометрией  $A_4(6)$ ). В отличие от привычной нам поступательной теории относительности новая теория имеет две метрики: вращательную (66) и трансляционную (61). Эти метрики отражают существование соответственно вращательной и поступательной относительности для уравнений движения (69) механики Декарта. Кроме того, в механике Декарта существенную роль

играют поля инерции (или торсионные поля  $T^i_{jk}$ ) удовлетворяющие самосогласованной системе уравнений [7]

$$\nabla_{[k} e^a_{j]} + T^i_{[kj]} e^a_i = 0, \quad (A)$$

$$R^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{j]m} + 2T^i_{s[k} T^s_{j]m} = 0. \quad (B)$$

Поэтому механика Декарта представляет собой геометризацию полей и сил инерции, представляя новые возможности для описания механических систем.

## 8.4 Теория гравитации в механике Декарта

Наводящей физической идеей при построении теории гравитации Эйнштейна был сильный принцип эквивалентности, утверждающий эквивалентность действия на массу однородного поступательного поля инерции  $\mathbf{W}$  и однородного гравитационного поля  $\mathbf{g}$ . Экспериментальное проявление сильного принципа эквивалентности можно наблюдать в свободно падающем лифте или в кабине космического корабля, движущегося по стационарной орбите. Внутри лифта и космического корабля уравнения движения массы  $m$  имеют вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt^2} = m\mathbf{g} - m\mathbf{W} = 0, \quad (85)$$

где  $\mathbf{x}'$  – координаты относительно стенок лифта или космического корабля (локальные координаты). В уравнениях (85) гравитационная сила  $m\mathbf{g}$  скомпенсирована силой инерции  $-m\mathbf{W}$  благодаря локальной эквивалентности полей  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{W}$ . Фактически это известный в механике принцип Даламбера, но примененный в теории поля, а именно, в гравитации.

Американский математик Роберт Кин заметил, что уравнения для полей инерции (B) демонстрируют нам обобщенный сильный принцип эквивалентности. Действительно, их можно рассматривать как принцип Даламбера, но не для сил, а для полей, поскольку в этих уравнениях риманова кривизна компенсируется до нуля полями инерции и их производными.

Уравнения поля (A) и (B) могут быть представлены в виде расширенной, полностью геометризированной (включая источники) системы уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса [8]

$$\nabla_{[k} e^a_{m]} - e^b_{[k} T^a_{b]m} = 0, \quad (A)$$

$$R^a_m - \frac{1}{2} g^a_m R = \nu T^a_m, \quad (B.1)$$

$$C^a_{bjkm} + 2\nabla_{[k} T^a_{b]m} + 2T^a_{s[k} T^s_{b]m} = -\nu J^a_{bkm}, \quad (B.2)$$

$$i, j, k \dots = 0, 1, 2, 3, \quad a, b, c \dots = 0, 1, 2, 3$$

с геометризованным тензором энергии-импульса

$$T^a_m = g^{aj} T_{jm} = -\frac{2g^{aj}}{\nu} \{ (\nabla_{[i} T^i_{j]m} + T^i_{s[i} T^s_{j]m}) - \frac{1}{2} g_{jm} g^{pn} (\nabla_{[i} T^i_{p]n} + T^i_{s[i} T^s_{p]n}) \}, \quad (86)$$

стоящим в полностью геометризованных уравнениях Эйнштейна (В.1), и с геометризованным током

$$J^a{}_{bkm} = 2g_{[k}{}^{(a}T_{b)m]} - \frac{1}{3}Tg^a{}_{[m}g_{k]b}$$

в полностью геометризованных уравнениях Янга-Миллса (В.2).

Анализируя уравнения (А) и (В), можно увидеть, что они объединяют в себе общий принцип относительности с принципом вращательной относительности и калибровочным принципом. Из предыдущего изложения понятно, что калибровочной группой уравнений (А) и (В) является группа четырехмерных вращений  $O(3,1)$ , действующая на многообразии неголономных вращательных координат.

#### 8.4.1 Соответствие с теорией гравитации Эйнштейна

Прямого количественного соответствия уравнений (В.1) с уравнениями Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}$$

не существует, поскольку тензор энергии-импульса  $T_{ik}$  в уравнениях Эйнштейна имеет не геометрическую природу. Формальное соответствие имеет место только для вакуумных уравнений Эйнштейна  $R_{ik} = 0$ , когда торсионные поля в уравнениях (В.1) отличны от нуля, но удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_{[i}T^i{}_{|j|m]} + T^i{}_{s[i}T^s{}_{|j|m]} - \frac{1}{2}g_{jm}g^{pn}(\nabla_{[i}T^i{}_{|p|n]} + T^i{}_{s[i}T^s{}_{|p|n]}) = 0. \quad (87)$$

Уравнения движения ориентируемой точки (72) внешне совпадают с уравнениями движения теории гравитации Эйнштейна

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

при условии, что

$$T^i{}_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (88)$$

Решая эти уравнения относительно торсионного поля  $T^i{}_{jk}$ , находим, что это поле отлично от нуля и антисимметрично по всем трем индексам

$$T_{ijk} = -T_{jik} = -T_{ikj} = -\Omega_{ijk}. \quad (89)$$

Поскольку уравнения (В.1) не содержат никаких не геометрических величин и никаких произвольных констант (множитель  $\nu$  сокращается после подстановки (86) в (В.1)), то их следует рассматривать как вакуумные уравнения, обобщающие вакуумные уравнения Эйнштейна  $R_{ik} = 0$ .

Для решения уравнений (В.1) необходимо использовать всю систему уравнений (А), (В), применяя известный формализм Ньюмена-Пенроуза [15]. В общем случае в качестве искомого неизвестного в уравнениях (А),(В) выступают 6 независимых компонент тетрады  $e^a{}_i$ , 20 компонент тензора Римана  $R^i{}_{jkm}$  и 24 компоненты торсионного поля

$T^i_{jk}$ . Часть физически значимых решений уравнений (А),(В) и, следовательно, уравнений (В.1), приведены в книге [8].

Используя решение уравнений (В.1), с трансляционной метрикой Шварцшильда [8], запишем уравнения движения(72) в этой метрике в нерелятивистском приближении

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -mc^2 \Gamma^\alpha_{00} - mc^2 T^\alpha_{00} = m \frac{MG}{r^3} x^\alpha - m \frac{MG}{r^3} x^\alpha = 0. \quad (90)$$

Второй член в правой части этих уравнений, как это и следовало ожидать, представляет собой силу инерции, порожденную торсионной компонентой  $T^\alpha_{00}$ . Эта сила компенсирует гравитационную силу в уравнениях (90) до нуля, обеспечивая состояние невесомости в свободно падающем лифте Эйнштейна.

#### КОММЕНТАРИИ:

Уравнения (90) полностью эквивалентны уравнениям (85) и это означает, что аналитическая запись сильного принципа эквивалентности существует только в теории гравитации, основанной на механике Декарта. Действительно, в теории Эйнштейна для аналитического обоснования сильного принципа эквивалентности существует только левая часть уравнений (90), а явного описания полей инерции через торсионные поля не существует. Попытка А.Эйнштейна описать поля инерции, используя символы Кристоффеля, несостоятельна, т.к нарушается эквивалентность действия на пространство гравитационных полей и полей инерции В случае гравитационных полей в теории Эйнштейна тензор Римана  $R^i_{jkm}$  отличен от нуля, а для полей инерции в этой теории риманова кривизна пространства оказывается равной нулю.

### 8.4.2 Локально инерциальные системы отсчета первого и второго рода в механике Декарта

Из уравнений движения (72) следует два вида особого рода ускоренных систем отсчета - это локально инерциальные система отсчета первого и второго рода. Эти системы отсчета находятся из условия

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0. \quad (91)$$

Для уравнений (72) видно, что условие (91) выполняется в двух случаях:

1) когда внешние силы (например, гравитационные) скомпенсированы силами инерции

$$\Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + T^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0; \quad (92)$$

Примером такой локально инерциальной системы отсчета является свободно падающий лифт Эйнштейна или кабина космического корабля на стационарной орбите (см. рис. 16);

2) когда силы инерции компенсируют друг друга

$$T^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = g^{im} g_{gs} \Omega_{mk} \dots^s \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + g^{im} g_{ks} \Omega_{mj} \dots^s \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (93)$$

На рис. 17 приведены примеры ускоренных систем отсчета такого типа. Действительно, на центр масс свободно вращающегося симметричного трехмерного гироскопа

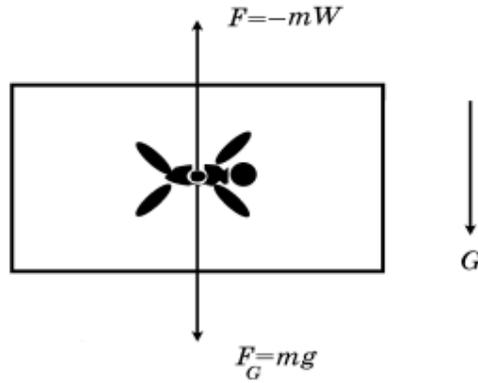


Рис. 16: Пример локально инерциальной системы отсчета первого рода

(например, однородного диска) по всем направлениям действуют скомпенсированные центробежные силы инерции. В этом случае центр масс гироскопа покоится или движется прямолинейно и равномерно. Если связать с центром масс гироскопа систему отсчета, то она будет вести себя как инерциальная система отсчета механики Ньютона, являясь при этом ускоренной. Ведь на нее действуют силы инерции! Другими примером

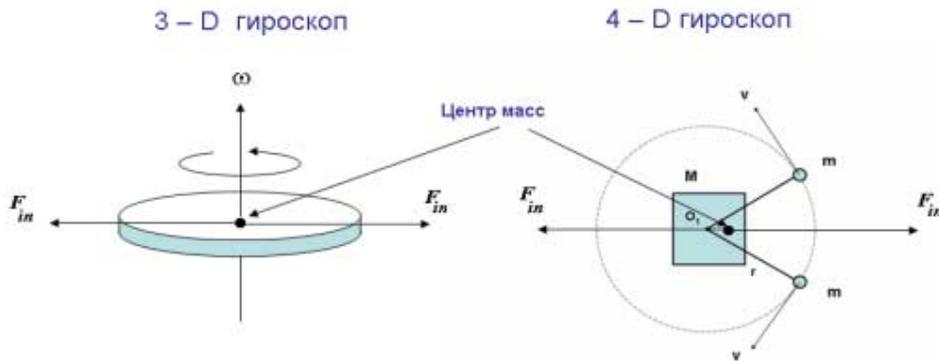


Рис. 17: Примеры локально инерциальной системы отсчета второго рода

ускоренной локально инерциальной системы отсчета второго рода является центр масс свободного 4D гироскопа. Действительно, уравнение движения центра масс свободного 4D гироскопа имеет вид

$$(M + 2m) \frac{d^2 x_c}{dt^2} = (M + 2m) \left( c \frac{d\theta_x(t)}{dt} \right) - 2mr\dot{\omega} \sin \phi - 2mr\omega^2 \cos \phi = 0, \quad (94)$$

где поступательная сила инерции  $(M + 2m)cd\theta_x(t)/dt$  скомпенсирована проекциями центробежной силы  $2mr\omega^2 \cos \phi$  и силы инерции, связанной с угловым ускорением  $2mr\dot{\omega} \sin \phi$ . Уравнение (94) позволяет нам связать с центром масс 4D гироскопа систему отсчета, которая ведет себя как инерциальная система механики Ньютона, будучи на самом деле ускоренной из-за действия на нее сил инерции.

### КОММЕНТАРИИ:

В свое время А.Эйнштейн заметил, что общая теория относительности представляет собой попытку исключить из теории поля такую "нереальную вещь", как инерциальная система отсчета механики Ньютона. Это в полной мере удалось осуществить в механике Декарта, путем замены инерциальной системы механики Ньютона ускоренной локально инерциальной системой отсчета второго рода. Такая система отсчета переходит в инерциальную систему ньютоновской механики, когда торсионные поля  $T^i_{jk}$  обращаются в нуль. В этом предельном случае пространство  $A_4(6)$  вырождается в псевдоевклидово пространство Минковского, а уравнения (А), (В) в тривиальные тождества вида  $0 = 0$ . Содержательные уравнения механики Декарта появляются при условии, что все системы отсчета являются ускоренными и всякое реальное движение есть вращение.

## 9 Свободный 4D гироскоп в механике Декарта

В механике Декарта геометризованные уравнения движения центра масс свободного 4D гироскопа мы будем искать, используя уравнения движения ориентируемой материальной точки (72)

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + T^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad i, j, k \dots = 1, 2 \quad (95)$$

Ведем в каждой точке пространства неголономную ортогональную диаду  $e^a_i$ , через которую метрический тензор (21) можно представить в виде

$$g_{ij} = \Lambda_{ab} e^a_i e^b_j, \quad i, j, k \dots = 1, 2, \quad a, b, c \dots = 1, 2,$$

где

$$\Lambda_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональная диада для данного метрического тензора зависит от времени  $t$  и определяется через переменные  $V_c(t)$  и  $g'\Omega(t)$  (см. соотношения (29)) следующим образом

$$V_c(t) = \cos \eta(t), \quad \sqrt{g'}\Omega(t) = \sin \eta(t). \quad (96)$$

Соответственно, для матриц  $e^a_i$  и  $e^i_a$ , имеем

$$e^a_i(\eta(t)) = \begin{pmatrix} \cos \eta & \sqrt{g'} \sin \eta \\ -\sin \eta & \sqrt{g'} \cos \eta \end{pmatrix}, \quad (97)$$

$$e^i_a(\eta(t)) = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \frac{1}{\sqrt{g'}} \sin \eta & \frac{1}{\sqrt{g'}} \cos \eta \end{pmatrix}, \quad (98)$$

$$g' = k^2(1 - k^2 \sin^2 \phi).$$

По известной диаде мы можем рассчитать связность абсолютного параллелизма двумерного пространства и найти уравнения геодезических (95). Используя соотношения (62), (70) и (71), получим из (95)

$$\frac{d^2 x_c}{ds^2} + \sqrt{g'} \frac{d\eta}{d\phi'} \Omega^2 = 0, \quad (99)$$

$$\frac{d^2 \phi'}{ds^2} - \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{d\phi'} \Omega V_c + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = 0, \quad (100)$$

Здесь  $\eta(\phi')$  -угловая переменная диады,  $\phi' = r\phi$ .

Производя преобразования, находим

$$\frac{dv_c}{dt} = -\sqrt{g'} \frac{d\eta}{dt} w, \quad (101)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} w^2 = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{dt} v_c, \quad w = r\omega. \quad (102)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (25) и (26) можно увидеть в правой части уравнений (101) и (102) дополнительные члены, которые порождены торсионным полем (кручением Риччи  $\Omega^i_{jk}$ ).

Введем обозначение

$$\Phi(t) = -\frac{\sqrt{g'}}{k^2} \frac{d\eta}{dt}, \quad (103)$$

тогда уравнения (101) и (102) принимают вид

$$\frac{dv_c}{dt} = B\Phi\omega, \quad (104)$$

$$\frac{d\omega}{dt} - k^2\omega^2 \frac{\sin\phi \cos\phi}{1 - k^2 \sin^2\phi} = -\frac{1}{rg} \Phi v_c. \quad (105)$$

Запишем уравнения движения 4D гироскопа с учетом действия локальных торсионных сил в виде

$$\ddot{x}_c = \ddot{x} - B \frac{d}{dt} (\omega \sin\phi) = B\Phi\omega, \quad (106)$$

$$r\dot{\omega} - \ddot{x} \sin\phi = -\Phi\dot{x}. \quad (107)$$

Из уравнения (106) видно, что торсионная сила  $(M+2m)B\Phi\omega$  изменяет скорость центра масс  $v_c$ . Точно также, из уравнения (107) следует, что торсионный момент  $-2mr\Phi\dot{x}$  меняет угловую скорость  $\omega$ .

Умножая уравнение (107) на  $2mr\omega$ , а уравнение (106) на  $(M+2m)\dot{x}$ , имеем

$$(M+2m)\dot{x}\ddot{x}_c = (M+2m)\dot{x}\ddot{x} - B \frac{d}{dt} (\omega \sin\phi) = (M+2m)\dot{x}B\Phi\omega,$$

$$2mr^2\omega\dot{\omega} - 2mr\omega\ddot{x} \sin\phi = -2mr\omega\Phi\dot{x}.$$

Поскольку  $B = 2mr/(M+2m)$ , то при сложении этих двух уравнений их правые части взаимно уничтожаются, а сумма левых преобразуется к виду

$$\frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (M+2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mr\omega\dot{x} \sin\phi \right) = 0. \quad (108)$$

Учитывая соотношение

$$T = (M + 2m)v_c^2 - \frac{1}{2}(M + 2m)v^2 + mr^2\omega^2 + 2mrv_c\omega \sin \phi,$$

имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}(M + 2m)v_c^2 \right) = -\frac{d}{dt} \left( mr^2\omega^2(1 - k^2 \sin^2 \phi) \right). \quad (109)$$

Эта формула весьма интересна. Она говорит о том, что система может иметь одну и ту же полную энергию, но различные энергии центра масс. Из нее так же следует, что при увеличении вращательной энергии (увеличении частоты вращения грузов  $m$ ) энергия центра масс уменьшается.

**КОММЕНТАРИИ:**

Согласно механике Декарта, в свободном 4D гироскопе действуют силы инерции и моменты сил инерции, которые меняют траекторию центра масс, не меняя при этом полной энергии системы. Они обеспечивают перераспределение между поступательной энергией центра масс и вращательной энергией 4D гироскопа.

Введем обозначение

$$w^* = r\omega\sqrt{g'}.$$

тогда уравнения движения (101) и (102) запишутся как

$$\dot{v}_c = k^2 \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} w^*, \quad (110)$$

$$\dot{w}^* = -\frac{\Phi}{\sqrt{g'}} v_c. \quad (111)$$

Умножая уравнение (110) на  $M + 2m$ , а уравнение (111) на  $2m$ , получим

$$\dot{p} = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} q, \quad \dot{q} = -k^2 \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} p,$$

где

$$p = (M + 2m)v_c, \quad q = 2mw^*.$$

Поскольку

$$\dot{p}q = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} q^2, \quad \dot{q}p = -k^2 \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} p^2,$$

то мы имеем следующий коммутатор

$$\dot{p}q - \dot{q}p = \frac{\Phi}{\sqrt{g'}} (q^2 + k^2 p^2) = \frac{4m\Phi}{\sqrt{g'}} T, \quad (112)$$

где  $T$  - полная энергия 4D гироскопа.

Из этой формулы следует, что *ускорение центр масс 4D гироскопа  $\dot{v}_c$  зависит от углового ускорения  $\dot{\omega}$* . Эта зависимость пропадает только в том случае, когда торсионное поле  $T^i_{jk}$  и, следовательно, функция  $\Phi$ , равно нулю.

## 9.1 Пространственно-временная прецессия свободного 4D гироскопа

Поскольку 4D гироскоп вращается не только в пространстве, но и в пространственно-временных плоскостях, то, с позиций механики Ньютона, его прецессия в пространственно-временных плоскостях выглядит просто невероятной. Действительно, прецессия вокруг пространственно-временной оси означает изменение скорости центра масс свободного 4D гироскопа вокруг некоторого первоначального значения (см. рис. 18). Покажем это аналитически. Уравнения (110) и (111) можно представить в виде

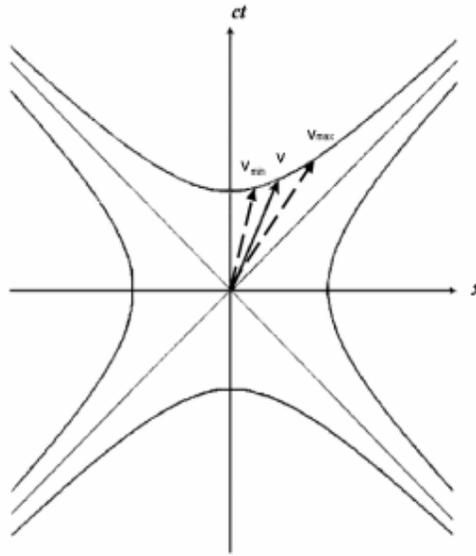


Рис. 18: Прецессия 4D гироскопа в плоскости  $ct - x$

$$\dot{v}_c^* = k^2 \Phi^* w,$$

$$\dot{w} = -\Phi^* v_c^*.$$

где

$$v_c^* = v_c - v_0, \quad \Phi^* = \frac{\Phi}{\sqrt{g}},$$

и  $v_0 = const$  - начальная скорость центра масс.

Предположим, что

$$\Phi^* = \kappa_0 = const.$$

Уравнения движения теперь принимают вид

$$\dot{v}_c^* = k^2 \kappa_0 w,$$

$$\dot{w} = -\kappa_0 v_c^*.$$

Продифференцируем первое уравнение и выразим угловое ускорение через  $v_c^*$

$$\ddot{v}_c^* = k^2 \kappa_0 \dot{w} = -k^2 \kappa_0^2 v_c^*$$

или

$$\ddot{v}_c^* = -k^2 \kappa_0^2 v_c^*.$$

Решение этого уравнения запишется как

$$v_c^* = A \cos(k\kappa_0 t) + C \sin(k\kappa_0 t).$$

Так как при  $t = 0$  скорость  $v_c^* = 0$ , то  $A = 0$  и  $C = v_0$ , поэтому

$$v_c = v_0 \sin(k\kappa_0 t) + v_0 = v_0 (1 + \sin(k\kappa_0 t)). \quad (113)$$

Подставляя это решение в уравнение для угловой скорости и интегрируя его по времени, имеем

$$w = \frac{v_0}{k} \cos(k\kappa_0 t) + (w_0 - \frac{v_0}{k}).$$

Учитывая, что  $w = \sqrt{g'} r \omega$ , получим следующее выражение для угловой скорости

$$\omega = \frac{v_0}{\sqrt{g'} r k} \cos(k\kappa_0 t) + \frac{r \omega_0 \sqrt{g'(\phi_0)} - v_0/k}{r \sqrt{g'}}. \quad (114)$$

Из формул (113) и (114) следует, что классическое решение получается из этих формул при  $v_0 = 0$ .

Решение (113) предсказывает изменение скорости центра масс свободного четырехмерного гироскопа при сохранении полной энергии системы и описывает пространственно-временную прецессию 4D гироскопа (см. рис. 18)<sup>2</sup>.

## 9.2 Эксперименты, подтверждающие пространственно-временную прецессию свободного 4D гироскопа

Из решения (113) следует, что пространственно-временная прецессия 4D гироскопа возникает только тогда, когда начальная скорость  $v_0$  отлична от нуля. Кроме того, скорость центра масс должна удовлетворять соотношению (113), т.е. изменяться по гармоническому закону. Это можно воспроизвести в эксперименте, если подействовать на корпус 4D гироскопа внешней силой, изменяющейся по гармоническому закону.

Мы наблюдали пространственно-временную прецессию 4D гироскопа во время исследования абсолютно упругого удара корпуса гироскопа о стенку. При этом, перед ударом корпус 4D гироскопа раскачивался по гармоническому закону и затем направлялся в

---

<sup>2</sup>Это решение впервые было получено Андреем Николаевичем Сидоровым в начале 2003 года во время работы группы российских исследователей в Тайланде.

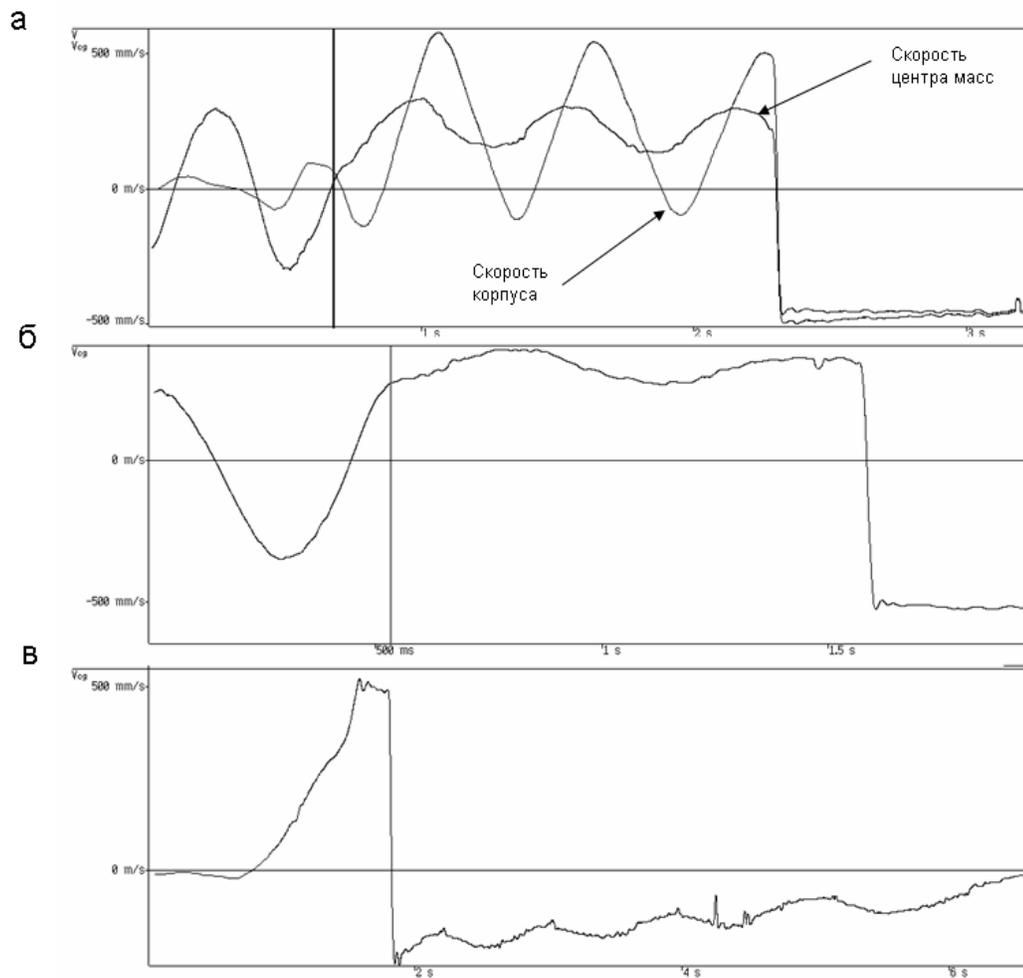


Рис. 19: Экспериментальные наблюдения пространственно-временной прецессии свободного 4D гироскопа в плоскости  $ct - x$  во время ударов корпуса о стенку: а) прецессия до удара (после вертикальной линии); б) тоже самое в другом эксперименте; в) прецессия после удара

сторону стенки. В разных сериях экспериментов длительность удара составляла 0.02 - 0.05 сек.

На рис. 19 представлены графики, на которых наблюдается пространственно-временная прецессия, т.е. периодическое изменение скорости центра масс свободного 4D гироскопа, до и после удара.

На рис. 19а на 4D гироскоп действует внешняя сила приблизительно по гармоническому закону до вертикальной черты. На графике видно, что когда под действием внешней силы корпус идет вперед, центр масс тоже идет вперед, при этом скорость центра масс превышает скорость корпуса. Затем внешняя сила перестает действовать (после вертикальной черты) и гироскоп свободно движется в направлении к стенке. При его свободном движении максимальная скорость корпуса становится больше скорости центра масс, при этом скорость центра масс осциллирует около некоторого среднего значения с амплитудой приблизительно 30 см/сек. Конечно, на 4D, корпус которого через колеса связан с подстилающей поверхностью, действуют силы трения. Однако из графика на рис. 19а видно, что при движении корпуса вперед центр масс тоже движется вперед, в то время как силы трения должны были двигать в этом случае центр масс назад. Кроме того, пространственно-временная прецессия свободного гироскопа возникала только при определенных углах удара. Для других углов мы наблюдали постоянство скорости центра масс как до, так и после удара. На рис. 19б изображен тот же самый процесс, но с меньшей амплитудой.

Наконец, на рис. 19в мы видим пространственно-временную прецессию 4D после удара. Представленные кривые необходимо рассматривать как предварительные экспериментальные результаты, который нуждаются не только в качественном, но и в количественном обосновании пространственно-временной прецессии свободного 4D гироскопа.

Отметим следующие общие свойства пространственной прецессии 3D гироскопа и пространственно-временной прецессии 4D гироскопа.

- 1) и в том и другом случае необходимо предварительно подействовать на гироскоп внешней силой;
- 2) эффективность прецессии зависит от длительности воздействия (лучший эффект оказывает короткий удар);
- 3) прецессия гироскопа зависит от анизотропии пространства, созданной вращением гироскопа (для 4D гироскопа, например, от угла удара).

## 10 4D гироскоп под действием внешних сил

Пусть теперь на 4D гироскоп действует внешняя сила  $F_x$  и внешний момент  $L$ . Тогда уравнения (106) и (107) принимают вид

$$\ddot{x}_c = \ddot{x} - B \frac{d}{dt}(\omega \sin \phi) = B\omega\dot{\phi} + \frac{F_x}{(M + 2m)}, \quad (115)$$

$$r\dot{\omega} - \ddot{x} \sin \phi = -\dot{\phi}\dot{x} + \frac{L}{2mr}. \quad (116)$$

Умножая уравнение (115) на  $(M + 2m)\dot{x}$ , а уравнение (116) на  $2mr\omega$ , и складывая их,

имеем после преобразования

$$\frac{dT(t)}{dt} = F_x v_c + L\omega, \quad (117)$$

где  $T(t)$  – полная энергия (вращательная + поступательная) системы.

## 10.1 Геометризация внешних сил

Для свободного гироскопа имеет место соотношение

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_c^2 + g'w^2} = \sqrt{\frac{T}{M + 2m}} = const,$$

где  $\dot{s} = ds/dt = const$ .

Если же на 4D действуют внешние силы или моменты, то его полная энергия перестает быть постоянной величиной и, соответственно, метрика конфигурационного пространства меняется с течением времени, т.е.

$$\dot{s} = ds/dt \neq const.$$

Покажем, что в этом случае изменение метрики оказывается связанным с внешними силами и моментами внешних сил, что дает возможность дать им геометрическое описание.

Опуская подробности, запишем уравнения движения 4D гироскопа (101) и (102) в виде

$$\frac{dV_c}{ds} + \sqrt{g'} \frac{d\eta}{ds} \Omega = 0, \quad (118)$$

$$\frac{d\Omega}{ds} - \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{ds} V_c + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} \Omega^2 = 0. \quad (119)$$

Для того, чтобы найти соответствие уравнений (118) и (119) с уравнениями (115) и (116), перейдем в них к производным по времени. Учитывая, что

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} \frac{d}{dt},$$

$$v_c = dx_c/dt, \quad w = r\omega = rd\phi/dt,$$

запишем уравнения (118) и (119) как

$$\frac{dv_c}{dt} + \sqrt{g'} \frac{d\eta}{dt} w - \frac{d \ln \dot{s}}{dt} v_c = 0, \quad (120)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} w^2 - \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{dt} v_c - \frac{d \ln \dot{s}}{dt} w = 0. \quad (121)$$

Представим эти уравнения в виде

$$\frac{dv_c}{dt} = A_x, \quad (122)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'} w^2 = A_{\phi'}, \quad (123)$$

где

$$A_x = -\sqrt{g'} \frac{d\eta}{dt} w + \frac{d \ln \dot{s}}{dt} v_c = \Phi(t)w + a_x, \quad (124)$$

- ускорение центра масс и

$$A_{\phi'} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{d\eta}{dt} v_c + \frac{d \ln \dot{s}}{dt} w = -\frac{1}{g'} \Phi(t)v_c + a_{\phi'}, \quad (125)$$

- угловое ускорение вращения грузов, причем ускорения

$$a_x = \frac{d \ln \dot{s}}{dt} v_c, \quad (126)$$

$$a_{\phi'} = \frac{d \ln \dot{s}}{dt} w. \quad (127)$$

порождены внешними силами и моментами, соответственно. В самом деле, умножим (124) на  $v_c$ , а (125) на  $g'w$  и результат сложим

$$\frac{d \ln \dot{s}}{dt} (v_c^2 + g'w^2) = a_x v_c + g' a_{\phi'} w$$

или

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{s}^2}{dt} = a_x v_c + g' a_{\phi'} w. \quad (128)$$

Умножая последнее соотношение на полную массу системы, имеем равенство (117), определяющее закон изменения механической энергии 4D гироскопа под действием внешних сил и моментов. Из него следует, что внешняя сила

$$F_x = (M + 2m)a_x \quad (129)$$

и

$$F_{\phi'} = (M + 2m)g'a_{\phi'} \quad (130)$$

меняют энергию системы, в то время как силы инерции

$$F_1 = (M + 2m)\Phi w \quad (131)$$

и

$$F_2 = -(M + 2m)\frac{1}{g'}\Phi v_c \quad (132)$$

энергию системы не меняют. Однако роль этих сил в системе значительна - *сохраняя полную энергию, они обеспечивают распределение этой энергии системы на вращательную и "поступательную"*.

Учитывая соотношения (126) и (127) представим внешние силы и моменты через изменение метрики пространства

$$F_x = (M + 2m)a_x = (M + 2m)\frac{d \ln \dot{s}}{dt} v_c, \quad (133)$$

$$F_{\phi'} = (M + 2m)g'a_{\phi'} = \frac{d \ln \dot{s}}{dt} w. \quad (134)$$

Эти формулы показывают, что управляя внешними силами и моментами, действующими на 4D гироскоп, можно управлять локальной метрикой конфигурационного пространства 4D гироскопа. Кроме того, в механике Декарта мы имеем новый подход, позволяющий геометривать силы, действующие на механическую систему - 4D гироскоп.

## 11 Явление механической индукции в механике Декарта

Пусть на 4D гироскоп действует только внешняя сила  $F_x$ , тогда уравнения (115) и (116) могут быть представлены в следующем виде

$$\ddot{x} - B\dot{\omega} \sin \phi - B\omega^2 \cos \phi = a_x + B\Phi\omega, \quad (135)$$

$$\dot{\omega} - \frac{1}{r}\ddot{x} \sin \phi = -\Phi\frac{v}{r}. \quad (136)$$

Поскольку из (136) следует

$$\dot{\omega} = \frac{1}{r}\ddot{x} \sin \phi - \Phi\frac{v}{r},$$

то, подставляя это соотношение в (134), мы имеем

$$\ddot{x} = \frac{B\omega^2 \cos \phi}{4 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{a_x}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + k^2 \Phi(t) \frac{r\omega - \dot{x} \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi}. \quad (137)$$

Подставляя (137) в (136), находим окончательно вращательное уравнение в виде

$$\dot{\omega} = \frac{k^2 \omega^2 \cos \phi \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{a_x \sin \phi}{r(1 - k^2 \sin^2 \phi)} + \frac{\Phi(t)}{r} \frac{B\omega \sin \phi - \dot{x}}{1 - k^2 \sin^2 \phi}. \quad (138)$$

Ускорение центра масс определяется соотношением

$$\dot{v}_c = \dot{v} - \frac{B\omega^2 \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi},$$

поэтому систему уравнений (137), (138) можно записать как

$$\dot{v}_c = \frac{F^*}{M + 2m},$$

$$\dot{\omega} - \frac{k^2 \omega^2 \cos \phi \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} = \frac{L^*}{2mr^2},$$

где

$$L^* = 2mr^2 \left( \frac{a_x \sin \phi / r}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{\Phi(t) B \omega \sin \phi - v}{r (1 - k^2 \sin^2 \phi)} \right)$$

- момент, наведенный внешней силой  $F_x$ , а

$$F^* = (M + 2m) \left( \frac{a_x}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + k^2 \Phi(t) \frac{r\omega - v \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \right)$$

- сила, действующая на центр масс.

Таким образом, если на корпус гироскопа действует сила  $F_x = (M + 2m)a_x$ , то центр масс движется с большим (чем по законам механики Ньютона) ускорением

$$a^* = \frac{a_x}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \geq a_x,$$

поскольку часть работы внешней силы идет на изменение угловой скорости вращения малых грузов. Это явление, наблюдаемое экспериментально при коротком ударе 4D гироскопа о стенку, было названо *механической индукцией*.

Таким образом, для внешнего наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчета, механическая индукция проявляется в отличии наблюдаемого в эксперименте ускорения центра масс системы от ускорения, рассчитанного по законам механики Ньютона. Увеличение ускорения можно интерпретировать как уменьшение инертной массы 4D гироскопа согласно соотношению

$$\overbrace{(M + 2m)}(t) = (M + 2m) (1 - k^2 \sin^2 \phi(t)). \quad (139)$$

## 12 Экспериментальное подтверждение явления механической индукции

Наиболее простым способом экспериментально проверить явление механической индукции является короткий (прядка 0.01 сек.) абсолютно упругий удар корпуса свободного 4D гироскопа о стенку. В этом случае происходит изменение поступательного импульса центра масс в результате перераспределения между вращательной и поступательной энергией 4D гироскопа. При неизменной полной энергии 4D гироскопа, поступательный импульс центра масс  $P_c = (M + 2m)v_c$  и вращательный импульс  $K = -2mr\omega \sin \phi$  - (вращательная часть поступательного импульса) до и после удара определяются уравнениями

$$\begin{aligned} P'_c &= -P_c(1 - 2k^2 \sin^2 \phi) + 2K(1 - k^2 \sin^2 \phi), \\ K' &= K(1 - 2k^2 \sin^2 \phi) + 2P_c k^2 \sin^2 \phi, \end{aligned}$$

где штрихованные величины соответствуют значениям после удара.

Для проверки действия явления индукции при коротком ударе была создана экспериментальная установка, позволяющая исследовать изменение импульса центра масс (или, что одно и то же, энергии центр масс, поскольку  $P_c = \sqrt{2E_c}$ ) 4D гироскопа.

В установку входили:

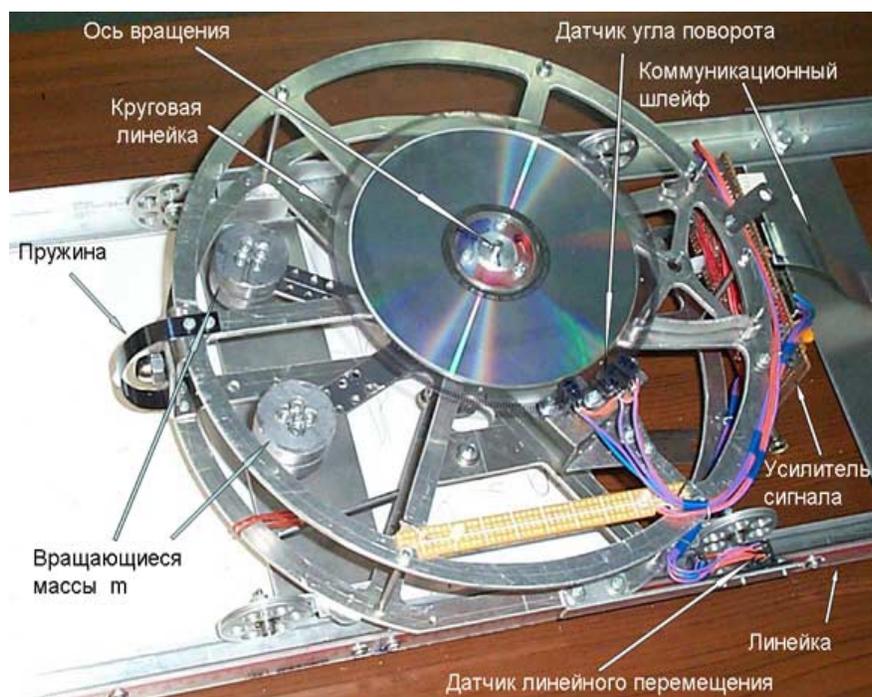


Рис. 20: Четырехмерный гироскоп с системой регистрации движения

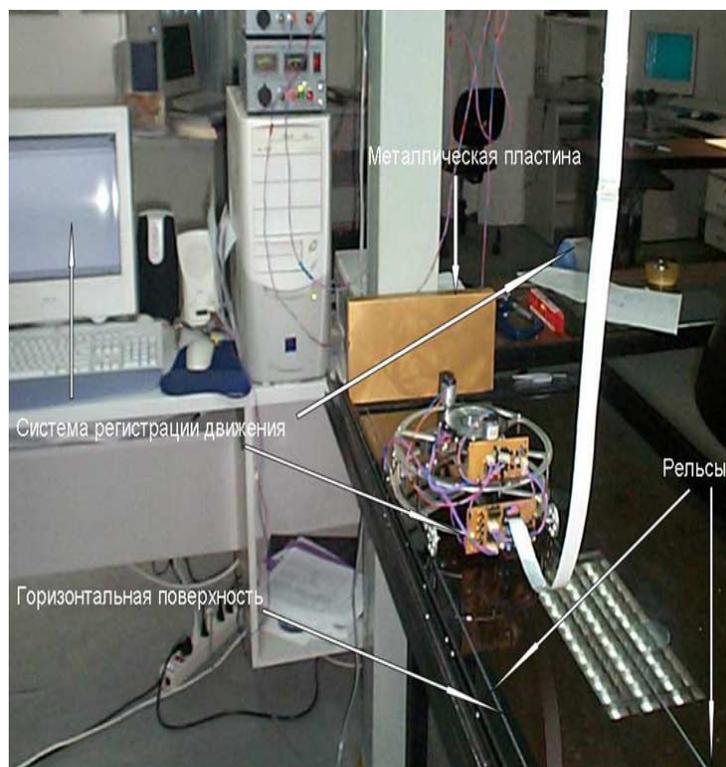


Рис. 21: Стенд для изучения короткого удара

1. 4D гироскоп с установленной на нем измерительной аппаратурой (рис.20);
2. Ударная плита;
3. Горизонтально выставленная стеклянная поверхность с направляющими рельсами (рис.21);
4. Компьютер;
5. Программное обеспечение для обработки результатов измерения.

На центральном валу гироскопа был расположен дифференциальный механизм, который обеспечивал синхронное вращение малых масс  $m$  в разные стороны. Вес каждой массы  $m$ , поддерживаемой рычагом длиной 10 см, был равен 160 гр. Ударной частью гироскопа является стальная пружина, которая была достаточно жесткой, чтобы обеспечить длительность удара порядка 0.01 - 0.02 сек. На валу гироскопа была закреплена круговая линейка, с которой (при вращении) снимались значения углов  $\phi(t)$  с помощью установленных на ней фотодиодов. При поступательном движении гироскопа происходила регистрация значения координаты  $x(t)$  с помощью фотодиодов, закрепленных на нижней части корпуса. Корпус двигался поступательно на колесах, которые свободно вращались на подшипниках. Информация, полученная с фотодиодов поступала на электронный блок для усиления и преобразования.. Вес корпуса со всеми устройствами (центрального тела  $M$ ) составлял 850 гр. Полный вес гироскопа  $M + 2m = 1170$  гр.

Проведенные измерения сил трения показали, что сила трения покоя между колесами и стеклянной поверхностью составляла величину порядка 5 гр., сила трения качения - порядка 3.8 гр.

Сигналы, содержащие информацию об экспериментальных значениях  $x(t)$  и  $\phi(t)$ , поступали с электронного блока 4D гироскопа на компьютер. Используя эти данные, компьютер рассчитывал значения  $\omega$ ,  $v$ ,  $v_c$ , а также ускорение центра масс  $A_c$ , угловое ускорение  $\epsilon$  и полную энергию системы  $T$  в режиме реального времени. Все эти величины наблюдались на мониторе компьютера. Полученные таким путем экспериментальные данные сравнивались с теоретическими расчетами, полученных с помощью приведенных выше формул.

## 12.1 Короткий удар, демонстрирующий переход поступательной энергии центра масс во вращательную энергию

Для демонстрации этого эффекта необходимо расположить малые грузы под некоторым углом к направлению движения. Наибольший эффект достигается, когда угол составляет величину  $90^\circ$  или  $270^\circ$  по отношению к направлению движения. После этого, необходимо (медленно ускоряя гироскоп) сообщить ему некоторую скорость  $v_c$  по направлению к стенке. Медленно ускоряя 4-D гироскоп, мы создавали направленное движение его к стенке, не позволяя малым грузам преодолеть внутренние силы трения на оси вращения. В результате гироскоп двигался в сторону стенки, при этом угловая скорость вращения грузов  $\omega$  перед ударом оставалась равной нулю. Таким образом, перед ударом мы имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}(M + 2m)v_c^2 \right) = 0 .$$

После удара малы грузы приобретают угловую скорость вращения  $\omega'$ , а скорость центра масс  $v'_c$  уменьшается в соответствии с формулой

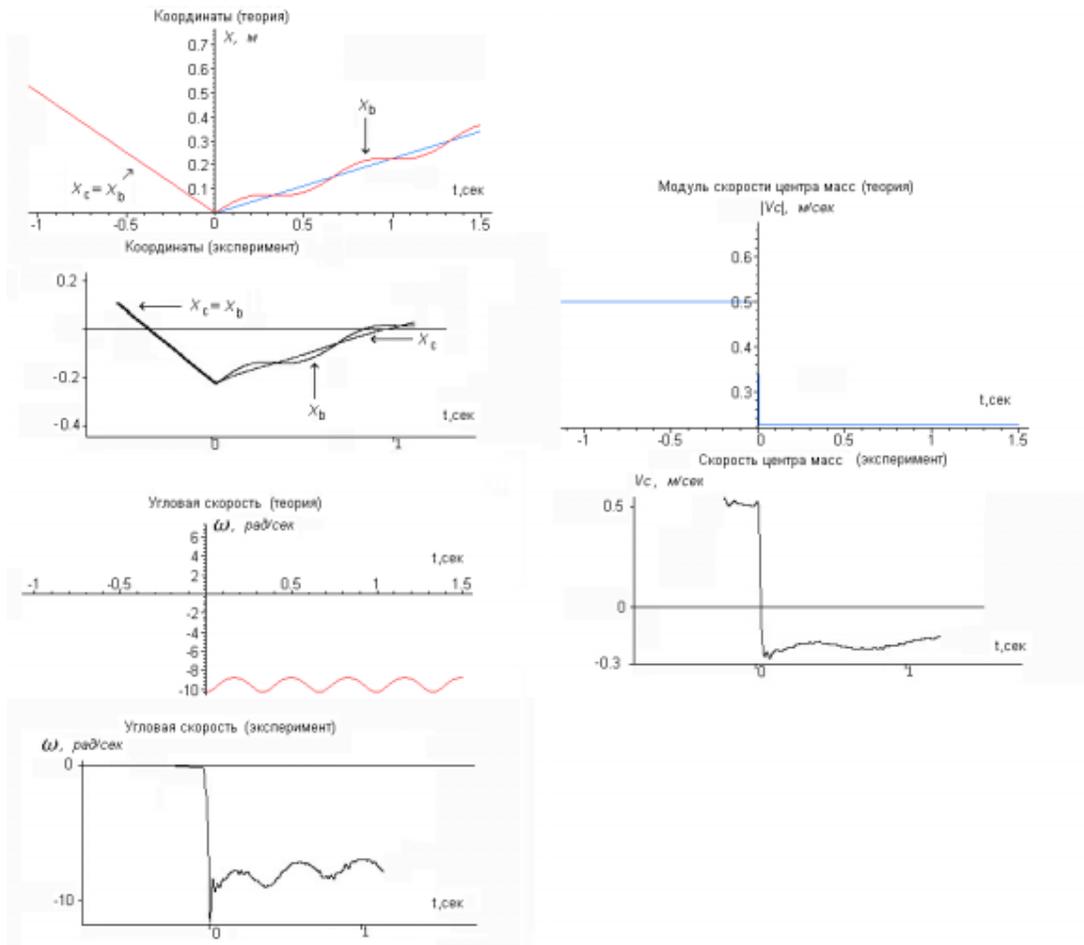


Рис. 22: Сравнение теоретических и экспериментальных данных по короткому упругому удару 4D гироскопа, преобразующему энергию центра масс во вращательную энергию

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (M + 2m) (v'_c)^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left( m r^2 (\omega')^2 (1 - k^2 \sin^2 \phi) \right),$$

поскольку в системе в момент удара действуют торсионные силы. Система скачком переходила в новое состояние, но с той же энергией.

На рис. 22 представлены основные теоретические и экспериментальные графики по абсолютно упругому удару четырехмерного гироскопа, при котором происходит преобразование энергии центра масс во вращательную энергию. Из сравнения теоретических и экспериментальных графиков видно, что, в пределах ошибки эксперимента, теория правильно описывает эксперимент. Большая часть наблюдаемого отклонения экспериментальных данных от теоретического предсказания объясняется отсутствием учета сил трения, действующих внутри и вне четырехмерного гироскопа.

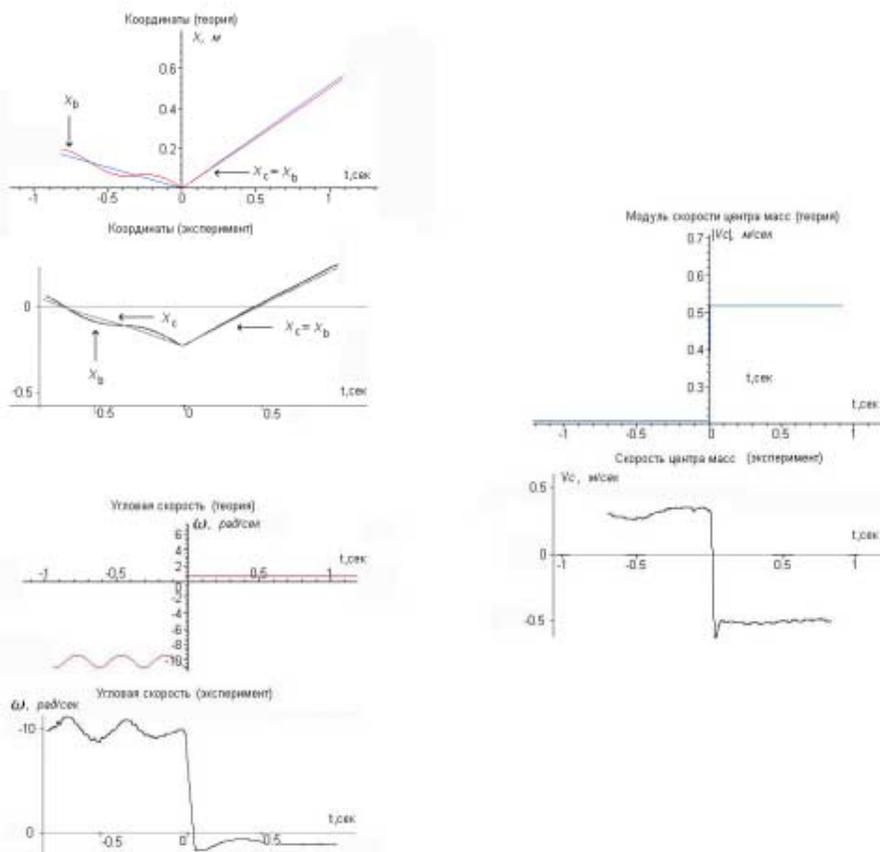


Рис. 23: Сравнение теоретических и экспериментальных данных по короткому удару 4D гироскопа, преобразующему вращательную энергию в поступательную энергию центра масс

## 12.2 Короткий удар, демонстрирующий переход вращательной энергии в энергию центра масс

В этом случае, перед тем, как направить гироскоп на стенку, необходимо сообщить малым грузам вращательное движение. Лучше всего это можно сделать "резонансным" способом, т.е. раскачивая центральное тело вдоль оси  $x$ . После того, как грузы начали вращаться, гироскопу необходимо придать некоторую скорость в направлении стенки с тем, чтобы произошло его столкновение со стенкой. Делая эту процедуру несколько раз, необходимо добиться ситуации, когда после столкновения угловая скорость вращения грузов обратится в нуль.

На рис. 23 представлены теоретические и экспериментальные графики, показывающие преобразование вращательной энергии 4D гироскопа в поступательную энергию центра масс. Из сравнения графиков видно, что теория хорошо описывает экспериментальные данные, конечно, с учетом ошибки эксперимента.

### 12.3 Многократный короткий удар 4D гироскопа

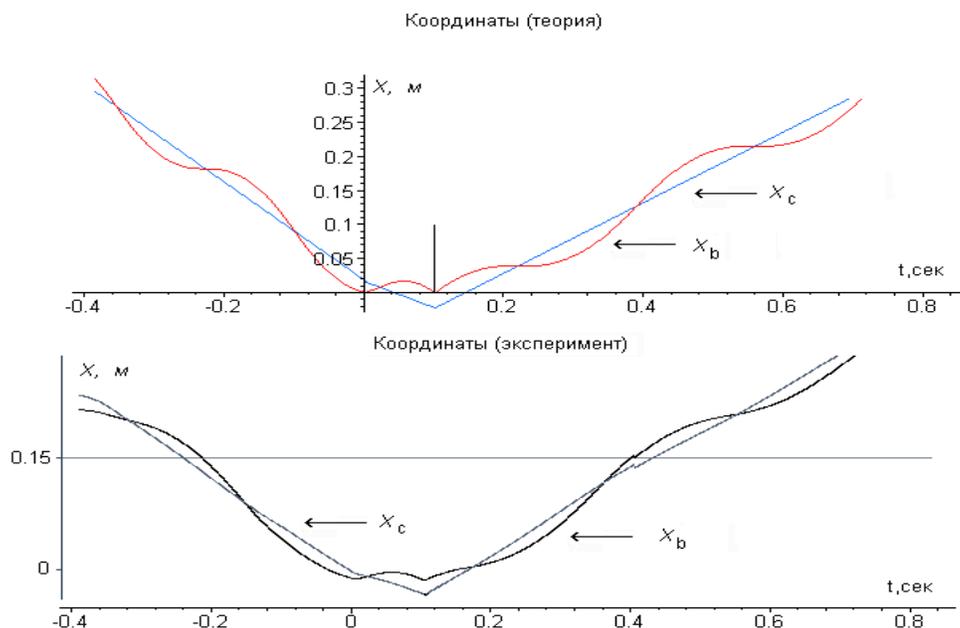


Рис. 24: Теоретический и экспериментальный графики двойного удара

Из формул, описывающих короткий удар следует, что при коротком ударе 4D гироскоп способен преобразовывать внутреннюю вращательную энергию в поступательную энергию центра масс и наоборот. Это свойство позволяет ему после первого удара продолжать двигаться в направлении стенки и совершить второй, третий и т.д. удары. Множественные удары происходят до тех пор, пока скорость центра масс не изменит своего знака на противоположный и масса  $M$  не отойдет от стенки на расстояние большее, чем  $B$ . На нашей установке мы наблюдали двойные, тройные, максимально шестикратные удары, прежде чем гироскоп окончательно отходил от стенки. На рис. 24 сравниваются теоретический и экспериментальный графики двойного короткого удара. Эксперименты по двойным ударам четырехмерного гироскопа показали (пока качественно), что скорость центра масс между ударами не остается постоянной, хотя в этот момент гироскоп оказывается свободным.

На рис. 25 представлен двойной короткий удар четырехмерного гироскопа. На верхнем графике, сильно растянутом по времени, представлены координата центра масс  $x_c$  (слева в начале графика верхняя линия) и координата корпуса  $x$ .

На самом нижнем графике представлено ускорение центра масс  $A_c$ . Первый удар соответствует отрицательному ускорению в районе 1 сек. Второй удар отрицательному ускорению в районе 1.2 сек. На втором сверху графике представлена угловая частота вращения грузов  $\omega$ . Из графика видно, что до первого удара она была равна 8.5 рад/сек и после удара оказалась равной 13 рад/сек. На втором графике снизу представлена скорость центра масс  $v_c$ . До первого удара она была равна 41 см/сек. После удара она

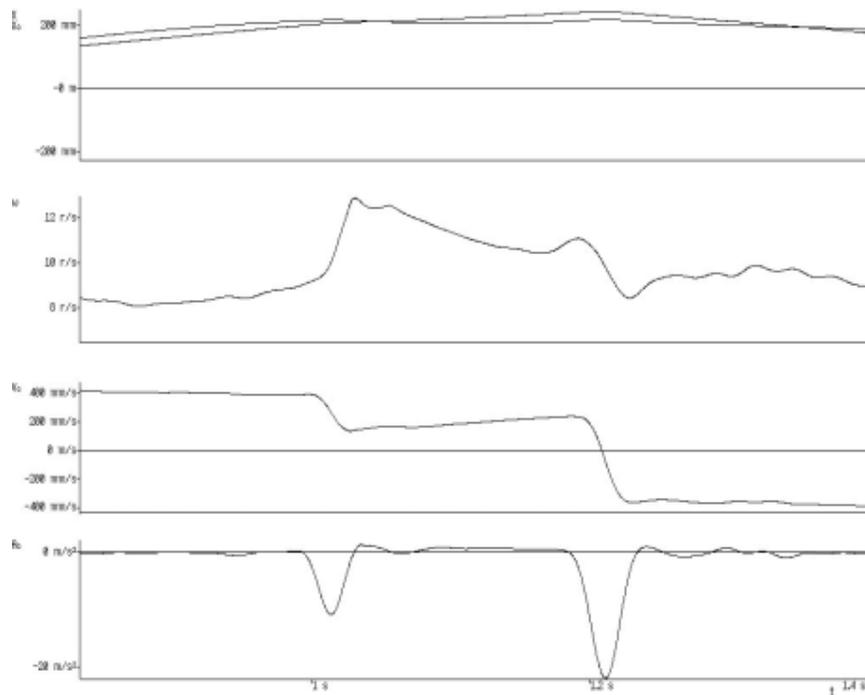


Рис. 25: Двойной удар, демонстрирующий изменение скорости центра масс свободного гироскопа после первого удара

оказалась равной 16 см/сек, а не - 41/см/сек, как того требует механика Ньютона. Но вот что интересно, из графика видно, как за очень короткое время между ударами (порядка 0.2 сек) происходит уменьшение угловой частоты вращения грузов с 13 рад/сек до 10 рад/сек и возрастание скорости центра масс с 16 см/сек до 30 см/сек. Это изменение можно объяснить действием между ударами торсионных сил - сил инерции при постоянстве полной энергии. Из уравнения (14) видно, что при уменьшении частоты вращения малых грузов  $\omega$  скорость  $v_c$  должна расти, что и наблюдается в эксперименте. Этой Беседа сопровождается фильмом, в котором демонстрируется двойной удар 4D гироскопа о стенку.

В общепринятой механике (классической или квантовой) при внешнем воздействии на сложную систему или при ее спонтанном переходе в новое состояние происходило *изменение ее полной энергии и, соответственно, энергии центра масс*. В нашем случае мы имеем наглядный пример механической системы, в которой происходит изменение ее состояния под действием внутренних сил инерции, но при этом *полная энергия системы сохраняется, а энергия центра масс меняется*.

## 13 Движение 4D гироскопа под действием внешнего момента

Здесь мы должны дать пояснение, что означает слова "действует внешний момент" на 4D гироскоп. Это означает, что на оси гироскопа установлено устройство, которое может менять угловую скорость вращения малых грузов  $m$ , ускоряя или замедляя вращение.

Представим, что 4D гироскоп с таким устройством на оси (мотор-тормозом) заключен в "черный ящик", на который не действуют внешние силы. Тогда все, что происходит внутри "черного ящика" описывается внутренними силами этой системы. Мы опять сталкиваемся с необычной ситуацией: для 4D гироскопа, как для механической системы, мотор-тормоз является внешним устройством. С другой стороны, для внешнего наблюдателя, который следит за движением "черного ящика", действие мотор-тормоза на 4D гироскоп представляется как проявление внутренних сил. Он вдруг видит, что "черный ящик" движется под действием сил, действующих внутри "черного ящика". Понятно, что в рамках классической механики Ньютона это невозможно.

### 13.1 Явление механической самоиндукции в механике Декарта

Предположим, что на 4D гироскоп действует только внешний момент  $L$ , тогда уравнения (115) и (116) могут быть представлены как

$$\frac{dv}{dt} - B \frac{d}{dt}(\omega \sin \phi) = B\Phi\omega, \quad (140)$$

$$r \frac{d\omega}{dt} - \frac{dv}{dt} \sin \phi = \frac{L}{2mr} - \Phi v. \quad (141)$$

Умножая первое из этих уравнений на  $(M + 2m)v$ , а второе на  $2mr\omega$ , и складывая их, получим закон

$$\frac{dT(t)}{dt} = L\omega,$$

описывающий изменения полной энергии системы под действием только внешнего момента. Из этого закона видно, что торсионный момент

$$L_{iner} = 2mrv\Phi$$

не меняет энергии системы, хотя активно участвует в перераспределении энергии между вращательными и поступательными движениями масс внутри 4D гироскопа.

Действуя подобным образом, как мы это делали при выводе уравнений движения (137) и (138), мы получим

$$\ddot{x} = \frac{B\omega^2 \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{BN \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + k^2 \Phi(t) \frac{r\omega - \dot{x} \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi}, \quad (142)$$

$$\dot{\omega} = \frac{k^2 \omega^2 \cos \phi \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{N}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{\Phi(t)}{r} \frac{B\omega \sin \phi - \dot{x}}{1 - k^2 \sin^2 \phi}. \quad (143)$$

или

$$\dot{v}_c = \frac{F_L}{M + 2m} = a_L,$$

$$\dot{\omega} - \frac{k^2 \omega^2 \cos \phi \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} = \frac{L_N}{2mr^2},$$

где

$$F_L = (M + 2m) \left( \frac{BN \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + k^2 \Phi \frac{r\omega - \dot{x} \sin \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \right)$$

- сила наведенная моментом  $L$  и действующая на центр масс.

$$L_N = 2mr^2 \left( \frac{N}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{\Phi}{r} \frac{B\omega \sin \phi - \dot{x}}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \right) \quad (144)$$

- истинный момент, изменяющий угловую частоту вращения.

Изменение механической энергии в данном случае происходит под действием внутреннего момента  $L$

В соответствии с законами классической механики вся работа внешнего момента должна идти на изменение угловой скорости вращения грузов. Однако эксперимент показывает, что это не так, поскольку часть работы внешнего момента идет на изменение скорости центра масс всей системы.

Из формулы (144) видно, что истинное угловое ускорение  $N^*$  удовлетворяет соотношению

$$N^* = \frac{N}{1 - k^2 \sin^2 \phi} \geq N,$$

поскольку часть работы, совершаемой моментом, расходуется на ускорение центра масс. Это явление, наблюдаемое экспериментально, мы назвали *механической самоиндукцией*. С точки зрения классической механики перераспределение энергий при механической самоиндукции выглядит как уменьшение момента инерции в соответствии с формулой

$$\bar{J} = \overline{2mr^2} = J(1 - k^2 \sin^2 \phi) = 2mr^2(1 - k^2 \sin^2 \phi).$$

Поскольку радиус  $r$  в наших экспериментах величина постоянная, то можно трактовать наблюдаемое явление самоиндукции как изменение массы вращающихся грузов по закону

$$\widehat{m}(t) = m(1 - k^2 \sin^2 \phi(t)). \quad (145)$$

## 14 Внутренний удар 4D гироскопа. Экспериментальная проверка явления самоиндукции

Чтобы простейшим образом проверить явление самоиндукции на эксперименте, нами на 4D гироскопе была установлена пружина, потенциальная энергия которой переходила

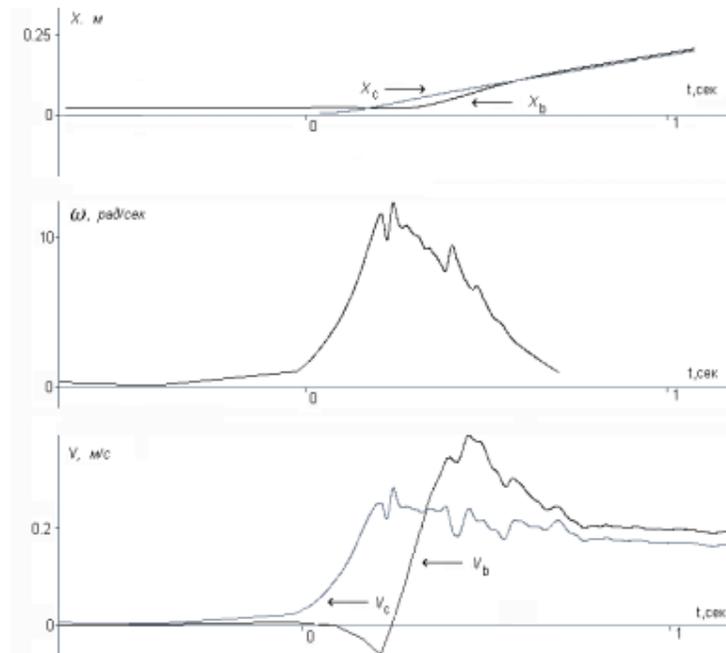


Рис. 26: Экспериментальные графики внутреннего удара 4D гироскопа.  $v_c$  - скорость центра масс,  $v_b$  - скорость корпуса,  $\omega$  - угловая частота вращения грузов

во вращательную энергию малых грузов в момент ее срабатывания. Кроме пружины, на гироскопе стоял тормоз, тормозящий грузы.

Эксперимент проходил следующим образом. Гироскоп стоял на горизонтальной поверхности со взведенной пружинной. Грузы занимали положение  $225^\circ$  по направлению оси симметрии. С помощью электромагнитного реле, срабатывающего от дистанционного датчика, пружина освобождалась и ее потенциальная энергия переходила во вращательную энергию малых грузов, при этом угловая частота  $\omega$  увеличивалась от 0 до величины порядка 12 рад/сек (см. рис.26). Увеличение частоты происходило до угла  $0^\circ$ , а затем начинал работать тормоз, который останавливал вращение, когда угол был порядка  $135^\circ$ . Все это происходило за относительно короткий промежуток времени. В конечном результате мы наблюдали, с помощью нашей измерительной системы, как центр масс покоящегося 4D гироскопа начинал двигаться со скоростью порядка 0.3 м/сек и это движение продолжалось до тех пор, пока это позволяла длина нашего экспериментального стенда.

На (рис.27) представлены результаты экспериментов, демонстрирующих явление самоиндукции в механике Декарта.

Эксперименты были подобны тем, как мы это было делали на горизонтальной поверхности. Отличие в том, что 4D гироскоп не касался колесами стенда и мог свободно раскачиваться на подвесе.

Из графика видно, что после срабатывания пружины центр масс 4D гироскопа уходил из положения равновесия и, затем начинал колебаться на подвесе под действием сил тяжести. Как и в экспериментах на горизонтальной поверхности, мы наблюдали на подвешенном гироскопе явление самоиндукции, которое имеет место благодаря действию локальных торсионных сил.

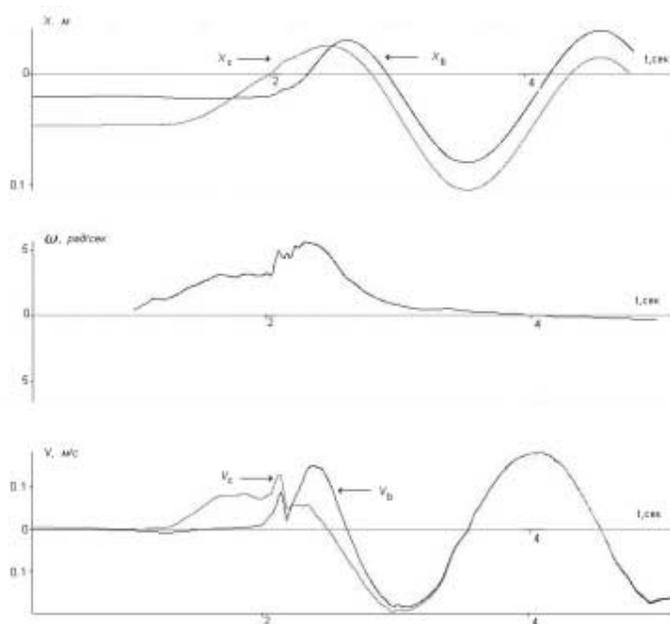


Рис. 27: Экспериментальные графики внутреннего удара 4D гироскопа на подвесе.  $v_c$  - скорость центра масс,  $v_b$  - скорость корпуса,  $\omega$  - угловая частота вращения грузов

## 15 Некоторые модели 4D гироскопов, демонстрирующие явление самоиндукции

### 15.1 Модель № 1 с пружинным заводом

В первой модели в качестве источника энергии использовалась пружина, завода которой хватало на 10-14 срабатываний мотор-тормоза. Этого оказалось достаточным для того, чтобы центр масс четырехмерного гироскопа весом 1700 гр. двигался с постоянной (в среднем) скоростью порядка 8 см/сек (см. рис. 28).

### 15.2 Модель № 2 с электрическим приводом

Для более эффективного движения четырехмерного гироскопа за счет организации внутренних ударов была разработана модель, в которой в качестве источника энергии использовался электрический двигатель. Увеличение и уменьшение угловой скорости вращения происходило электромагнитным образом с помощью датчиков, которые включали электродвигатель или осуществляли торможение электродвигателем в нужный момент времени и в нужном секторе углов.

Соответствующие экспериментальные графики приведены на рис. 29. Для стороннего наблюдателя корпус четырехмерного гироскопа движется со средней скоростью около 10 см/сек. При этом за один цикл корпус отстает на 2 см назад и продвигается вперед

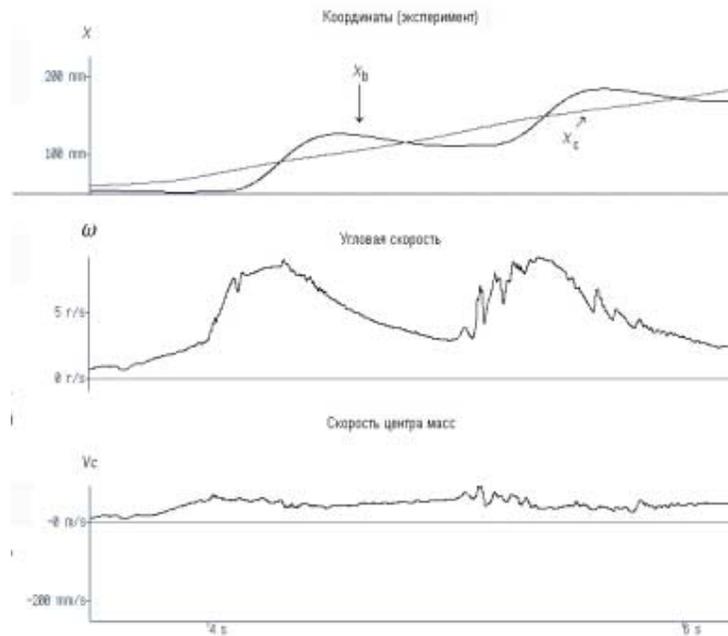


Рис. 28: Экспериментальные графики множественных внутренних ударов 4D гироскопа с пружинным заводом

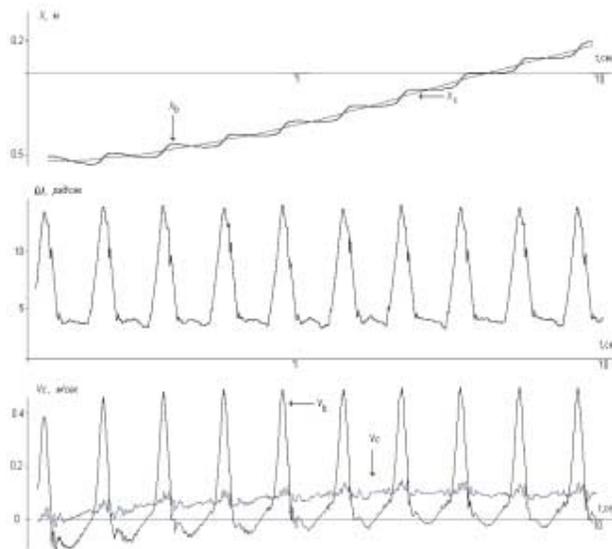


Рис. 29: Экспериментальные графики множественных внутренних ударов 4D гироскопа с электроприводом

на 12 см. Это отступление назад породило у некоторых оппонентов представление, что при движении колес назад на центр масс действуют силы трения между колесами и подстилающей поверхностью, движущие центр масс вперед.

Чтобы проверить это утверждение, мы провели расчеты по оценке работы сил трения. Прямые измерения показали, что силы трения покоя между колесами гироскопа и подстилающей поверхностью не превышали 6 гр. Соответственно, силы трения движения заведомо меньше этой величины. Используя эти значения и данные эксперимента по динамике четырехмерного гироскопа, мы показали, что работа сил трения на порядок меньше, чем работа сил, обеспечивающих перемещение центра масс гироскопа. Поэтому силы трения если и оказывают влияние на движение системы, то это влияние незначительно. Причина же движения связана с явлением самоиндукции, возникающим под действием внутренних ударов.

### 15.3 Модель № 3 с управлением движением через компьютер

Поскольку характер движения полностью определяется законом изменения частоты вращения малых грузов, то есть смысл управлять этим процессом через компьютер. Кроме того, для полного исключения влияния сил трения на движения центра масс системы вперед, необходимо обеспечить движение корпуса гироскопа и, следовательно, поддерживающих его колес, только вперед. В этом случае силы трения будут всегда препятствовать движению центра масс вперед, замедляя его движение.

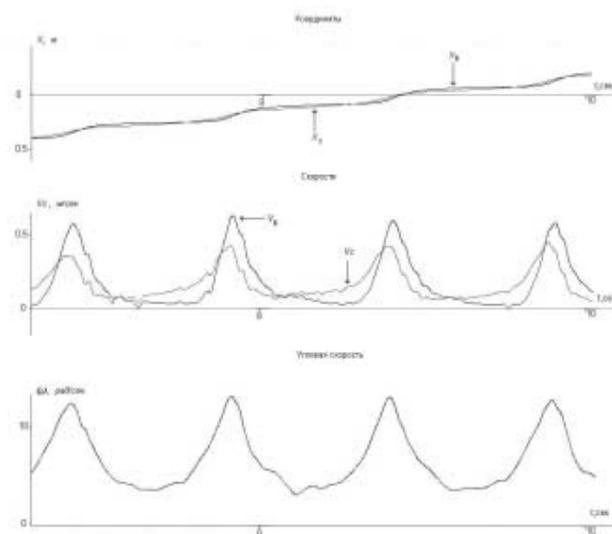


Рис. 30: Экспериментальные графики движения при управлении 4D гироскопом через компьютер

Была создана модель, в котором вращение грузов осуществлялось с помощью сервомотора. Управление этим мотором происходило через компьютер по специально разработанной программе. Программа позволяет ускорять и замедлять вращение малых грузов в нужном секторе углов.

На графике скоростей движения (рис. 30) корпуса и центра масс видно, что в данном случае *корпус движется только вперед*. Соответственно, колеса, поддерживающие его так же движутся только вперед, при этом силы трения между подстилающей поверхностью и колесами работают против движения и никак не могут быть причиной передвижения центра масс.

## 16 Новое представление об инерционной массе в механике Декарта

Одним из замечательных следствий механики Декарта является новое представление о природе инерционной массы материальных объектов. В механике Ньютона инерционная масса покоя  $m_0$  трактуется как мера инерции и аналитически записывается как коэффициент, стоящий перед ускорением в левой части уравнений движения

$$m_0 \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = F_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

При обобщении этих уравнений на случай больших скоростей в специальной теории относительности Эйнштейном была найдена зависимость массы от линейной скорости  $v$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где  $c$  - скорость света. С точки зрения механики Декарта эта формула может быть переписана в виде

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (tn\theta_\alpha)^2}}, \quad (146)$$

где  $\theta_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  - псевдоевклидовы углы. Эта формула показывает зависимость массы от угловых переменных, заданных в псевдоевклидовой плоскости.

Покажем, что в механике Декарта формула (146) обобщается, поскольку инерционная масса  $m_0$  в новой механике определяется через поля инерции  $T^i_{jk}$  и начинает зависеть не только от пространственно-временных углов, но и от пространственных углов  $\varphi_\alpha$   $\alpha = 1, 2, 3$ , угловой скорости  $\omega_\alpha$  и углового ускорения  $\dot{\omega}_\alpha$ .

### 16.1 Инерционная масса как мера поля инерции

Из этой формулы (86) видно, что *любая материя в механике Декарта порождена торсионными полями  $T^i_{jk}$ , т.е. вращением*. Поэтому, дополняя Декарта, мы можем сказать что не только любое движение есть вращение, но и любая материя есть особая форма вращательного движения.

Определяя плотность материи как

$$\rho = T/c^2, \quad (147)$$

где

$$T = g^{jm} T_{jm}, \quad (148)$$

находим из соотношений (86), (147) и (148)

$$\rho = \frac{2g_{jm}}{\nu c^2} (\nabla_{[i} T^i_{|j|m]} + T^i_{s[i} T^s_{|j|m]}). \quad (149)$$

Через плотность (149) определяем инерционную массу покоя объекта как

$$m_0 = \int \rho (-g)^{1/2} dV, \quad (150)$$

где

$$g = \det g_{jm}, \quad dV = dx^1 dx^2 dx^3,$$

а плотность  $\rho$  определяется согласно (149). Окончательное выражение для инерционной массы покоя объекта в механике Декарта имеет вид

$$m_0 = \frac{2}{\nu c^2} \int (-g)^{1/2} \{ g^{jm} (\nabla_{[i} T^i_{|j|m]} + T^i_{s[i} T^s_{|j|m]}) \} dV. \quad (151)$$

Это соотношение показывает, что инерционная масса покоя в механике Декарта *является мерой поля инерции*, образующего плотность его материи. Поскольку поле инерции  $T^i_{jk}$  порождено вращением материи (согласно Э.Картану), то инерционные свойства массы покоя зависят от состояния вращения материи, образующих данную систему. Например, не вращающийся 3D гироскоп по своим инерционным свойствам отличается от вращающегося, поскольку при вращении твердого тела возникает пространственная анизотропия, выраженная в способности вращающегося 3D гироскопа сохранять направление оси вращения. Из-за этой анизотропии одинаковое внешнее воздействие на не вращающийся и вращающийся 3D гироскоп вызовет различную реакцию гироскопа. Вот, что пишет по этому поводу в книге "Гироскоп теория и применение." М.: Мир, 1974, с. 526, известный специалист по теории гироскопов К.Магнус:

«Чтобы объяснить поведение вращающегося тела, часто проводят аналогию между вращательным движением тела и движением материальной точки. Однако эта аналогия в теории гироскопа скорее вредна, чем полезна, так как область, в которой она справедлива, кончается как раз там, где начинаются типичные гироскопические явления.»

## 16.2 Реактивное движение без отбрасывания массы

Зависимость инерционных свойств массы покоя системы от характеристик вращения внутри ее не только предсказывается формулой (151), но и наблюдается экспериментально.

Для начала рассмотрим следующий мысленный эксперимент<sup>3</sup>. Пусть где-то в космосе, где отсутствуют внешние силы, имеется "лесенка", построенная из покоящихся друг относительно друга масс  $m$  (см. рис. 31).

Человек взбирается по этой "лесенке", отталкиваясь от масс. В результате он получает импульс  $MV = 2mv$  (положим, что он оттолкнулся всего от двух масс), при этом центр масс всей системы (ее границы определяют штрихованные линии) остался

<sup>3</sup>А.Эйнштейн ставил мысленный эксперимент наравне с обычным.

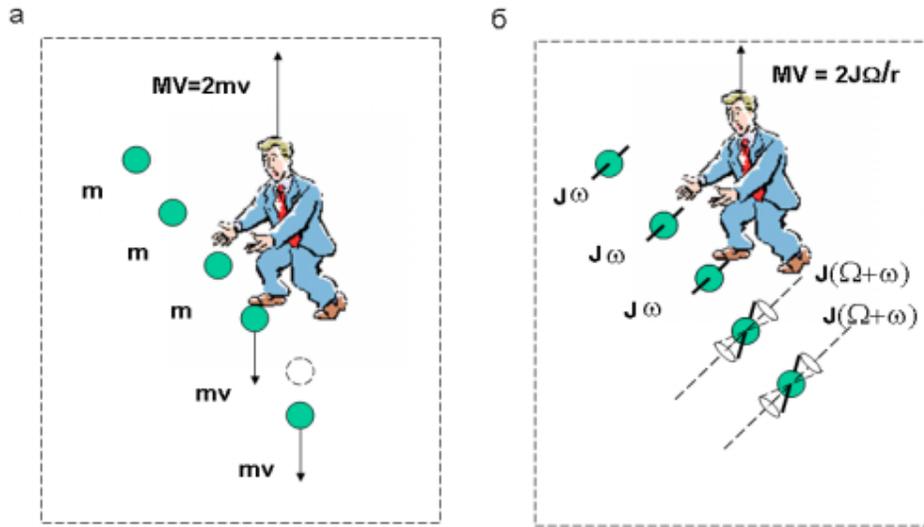


Рис. 31: При отталкивании от не вращающихся масс  $m$  цент масс всей системы не меняет своего положения (а); при отталкивании от металлических осей вращающихся масс  $m$  можно переместить цент масс всей системы (б)

на месте (см. рис. 31а). Рассмотренный нами случай описывает "реактивное" движение человека за счет отбрасывания массы.

Пусть теперь массы вращаются как 3D гироскопы с одинаковой угловой скоростью, причем на них имеются стержни, направленные вдоль оси вращения (см. рис. 31б). Теперь человек взбирается по "лестнице", ступеньки которой "вморожены" в пространство, при этом, после отталкивания, центр масс 3D гироскопа остается на месте, но его ось начинает прецессировать вокруг старого направления с угловой частотой  $\Omega$ . Человек получает линейный импульс  $MV = J\Omega/r$ . Если до этого центр масс всей системы покоился относительно некоторой, теперь уже ускоренной локально инерциальной системы отсчета, то после отталкивания он получит некоторый импульс, т.е. начнет двигаться с некоторой скоростью. Фактически сейчас мы описали другой вариант явления самоиндукции в механике Декарта. Для внешнего наблюдателя этот мысленный эксперимент воспринимается так, как будто при изменении вращательных свойств внутри системы, ее инерционная масса начинает зависеть (в общем случае) от времени  $t$ . Нерелятивистский закон сохранения линейного импульса для такой системы запишется как

$$\frac{d}{dt} (m_0(t)v_\alpha) = 0$$

или

$$m_0 \frac{d}{dt} (v_\alpha) = -v_\alpha \frac{d}{dt} m_0.$$

Мы получили уравнения движения центра масс системы, представляющие собой некий аналог уравнения реактивного движения с отбрасыванием массы. Однако в нашем случае сила в правой части последних уравнений вызвана изменением вращательных параметров внутри системы и, соответственно, изменением инерционных свойств ее полной мас-

сы. Таким образом, эти уравнения описывают что то наподобие "реактивного движения без отбрасывания массы", при этом масса покоя становится относительной величиной, зависящей от вращения составляющих ее элементов.

### 16.3 Эксперименты Н.В. Филатова, подтверждающие возможность реактивного движения без отбрасывания массы

Прямые эксперименты, показывающие справедливость высказанных выше утверждений, были проведены в конце 60-х годов доцентом кафедры теоретической механики Тверского политехнического института Н.В.Филатовым

В эксперименте Н.В.Филатова исследовалось столкновение двух массивных тел, установленных на тележках (рис. 32). Одно из тел представляло собой вращающиеся гироскопы. Вращение гироскопов происходило в разные стороны с одинаковой угловой скоростью, обеспечивая тем самым равенство нулю полного момента системы.

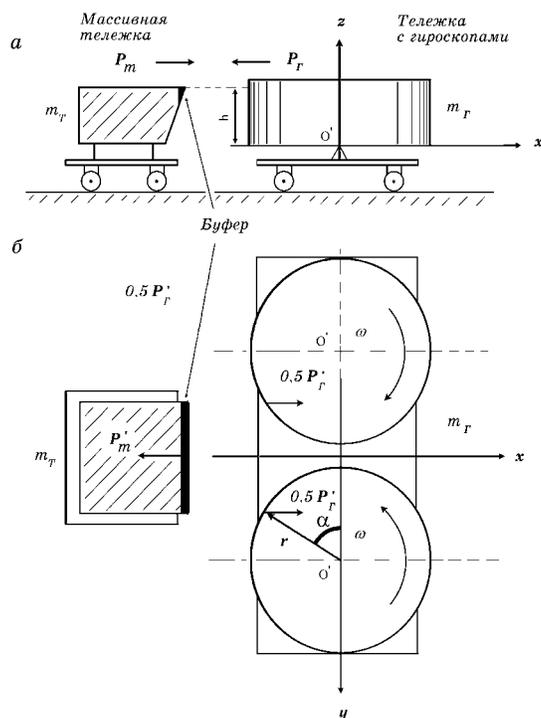


Рис. 32: Столкновение двух гироскопов  $m_G$  с массой  $m_T$  а – вид сбоку; б – вид сверху

Чтобы в момент столкновения гироскопов с другой массой проскальзывание отсутствовало, по ободу гироскопов были укреплены выступающие короткие штыри. Кроме того, гироскопы были закреплены в кардановых подвесах и могли прецессировать.

Процесс столкновения вращающихся гироскопов с обычной массой снимался на киноплёнку со скоростью 2000 кадров в секунду и затем подвергался обработке с целью определить скорость центра масс системы до и после столкновения.

В результате большого числа экспериментов было установлено, что в случае, когда после удара гироскопы начинали прецессировать, центр масс системы изменял свою скорость. Результаты некоторых экспериментов представлены в табл. 1. В этой таблице

Таблица 1:

Буфер	Массы $m_T, m_\Gamma$	$v_c$	$n_1$	$n_2$	$v'_c$
Метал	$m_T = m_\Gamma$	-0,196	1093	272	-0,326
"	"	-0,31	1000	231	-0,16
Метал	$2m_T = m_\Gamma$	-0,0208	1253	263	-0,167
Резина	"	0,23	1078	253	0,154
Метал	$m_T = 2m_\Gamma$	0,233	1153	82	0,0532
"	"	0,402	922	87	0,181
Резина	"	0,446	840	50	0,196

$v_c$  и  $n_1$  – скорость центра масс системы и число оборотов гироскопов до удара. Их значения после удара обозначены соответственно как  $v'_c$  и  $n_2$ . Из приведенных данных видно, что после столкновения скорость центра масс системы меняла свое значение.

Н.В.Филатов приводит следующую формулу для изменения скорости центра масс системы

$$v'_c = v_c + \frac{J\omega\omega'\tau m_T}{h(m_T + m_\Gamma)^2},$$

где  $v'_c$  и  $v_c$  – скорости центра масс после и до удара;  $h$  – плечо удара, вызывающего прецессию;  $\omega'$  – угловая скорость прецессии;  $\omega$  – угловая скорость вращения роторов;  $m_\Gamma$  – масса тележки с гироскопами;  $m_T$  – масса тележки с буфером;  $J$  – момент инерции гироскопов;  $\tau$  – время удара.

Из формулы Филатова видно, что обычный закон сохранения импульса для данной изолированной механической системы выполняется только в частном случае, когда прецессия гироскопов отсутствует. Эксперименты Н.В.Филатова подтверждают выводы, сделанные на основе анализа свойств инерционной массы в механике Декарта. Они также подтверждают возможность создания транспортного средства для передвижения в космосе и других средах, используя реактивное движение без отбрасывания массы.

## 17 Управление кручением, римановой метрикой и кривизной локального пространства

Умножая уравнение (115) на  $\sin\phi$  и складывая его с уравнением (116), находим

$$r \frac{d\omega}{dt} - B \frac{d}{dt}(\omega \sin\phi) = \frac{F_x \sin\phi}{M + 2m} + Nr - \Phi(v - B\omega \sin\phi). \quad (152)$$

Производя в этом уравнении и в уравнении (115) замену

$$v_c = v - B\omega \sin\phi,$$

имеем

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{F_x}{M + 2m} + B\Phi\omega, \quad (153)$$

$$r \frac{d\omega}{dt} g - B(\omega^2 \sin\phi \cos\phi) = \frac{F_x \sin\phi}{M + 2m} + Nr - \Phi v_c, \quad (154)$$

где

$$g = 1 - k^2 \sin^2 \phi.$$

Введем обозначения

$$\psi = \frac{\Phi}{g}, \quad w = gr\omega$$

и перепишем уравнения (153) и (154) в виде

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{F_x}{M + 2m} + k^2 \psi w, \quad (155)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{F_x \sin\phi}{(M + 2m)g} + \frac{Nr}{g} - \psi v_c. \quad (156)$$

Умножим первое из этих уравнений на  $w$ , а второе на  $-v_c$  и сложим их, тогда имеем

$$w \frac{dv_c}{dt} - v_c \frac{dw}{dt} = -\frac{F_x \sin\phi v_c}{(M + 2m)g} - \frac{Nrv_c}{g} + \frac{F_x w}{M + 2m} + \psi(k^2 w^2 + v_c).$$

Поскольку полная энергия 4D гироскопа равна

$$T = \frac{1}{2}(k^2 w^2 + v_c^2),$$

то мы имеем своеобразный коммутатор

$$w \frac{dv_c}{dt} - v_c \frac{dw}{dt} = -\left\{ \frac{F_x \sin\phi}{(M + 2m)g} + \frac{Nr}{g} \right\} v_c + \frac{F_x w}{M + 2m} + \frac{2T\psi}{M + 2m}.$$

Умножая уравнение (155) на  $(M + 2m)v_c$ , а уравнение (156) на  $2mw$  и складывая их, получим закон изменения полной энергии 4-D гироскопа под действием внешних сил и моментов

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}(M + 2m)v_c^2 + (1 - k^2 \sin^2 \phi)mr^2\omega^2 \right\} = F_x v_c + BF_x \omega \sin\phi + L\omega \quad (157)$$

или

$$\frac{d}{dt} T(t) = F_x v_c + BF_x \omega \sin\phi + L\omega. \quad (158)$$

Поскольку

$$T(t) = \frac{M + 2m}{2} (\dot{s}(t))^2 = \int_0^t (F_x v_c + BF_x \omega \sin\phi + L\omega) d\tau,$$

то

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2T}{M + 2m}} \neq const$$

и метрика  $ds^2$  становится зависимой от внешней силы  $F_x$  и момента  $L$

$$ds^2(t) = \frac{2T(t)}{M+2m} dt^2 = \frac{2}{M+2m} \left\{ \int_0^t (F_x v_c + BF_x \omega \sin \phi + L\omega) d\tau \right\} dt^2 \neq inv. \quad (159)$$

Эта формула замечательна тем, что внешние силы и моменты могут изменять метрику локального пространства событий и, следовательно, кривизну этого пространства. Ранее была установлена связь внешних сил и моментов с кручением пространства абсолютного параллелизма. В результате мы получаем следующую логическую цепочку, поясняющую движение 4D гироскопа (см. рис. 33):

УПРАВЛЯЕМОЕ ВРАЩЕНИЕ ГРУЗОВ  $\implies$  КРУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА  $\implies$   
РИМАНОВА КРИВИЗНА ПРОСТРАНСТВА  $\implies$  ДВИЖЕНИЕ 4D ГИРОСКОПА



Рис. 33: Движение 4D гироскопа в результате управления локальной метрикой кривизной и кручением пространства событий

До сих пор мы описывали 4D гироскоп в рамках "упрощенной" механики Декарта, в которой время не выступало как самостоятельная координата. Однако с самого начала было ясно, что "правильное" описание этого механизма надо проводить в рамках теории, в которой время (умноженное на скорость света) выступает как самостоятельная трансляционная координата. Этому требует, хотя бы тот факт, что трансляционное ускорение рассматривается нами как вращение в пространственно-временных плоскостях.

Для технических приложений наибольший интерес вызывает изменение локальной метрики под действием мотор-тормоза, меняющего угловое ускорение  $N$ . Рассмотрим пространство событий с координатами

$$x_0 = ct, \quad x_1 = x_c, \quad x_2 = r\phi.$$

Выберем метрический тензор этого пространства в виде

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 2k^2 r^2 U(\phi)/c^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2(1 - k^2 \sin^2 \phi) \end{pmatrix}, \quad (160)$$

где "потенциал"

$$U(\phi) = \int_{\phi_0}^{\phi} N d\phi \quad (161)$$

порожден угловым ускорением  $N = L/2mr^2$ . Управляя с помощью мотора этим ускорением, мы управляем метрическим тензором (160) и, следовательно, локальной метрикой и римановой кривизной пространства событий.

### 17.1 Локальное кручение и кривизна пространства, создаваемая угловым ускорением $N$

Релятивистские уравнения 4D гироскопа в механике Декарта запишутся теперь как

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + T_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad i, j, k = 0, 1, 2. \quad (162)$$

Используя метрический тензор (160), находим отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля

$$\begin{aligned} \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 &= -\frac{k^2 r N}{c^2 - 2k^2 r^2 \int N d\phi}, & \Gamma_{00}^2 &= -\frac{r N}{c^2(1 - k^2 \sin^2 \phi)}, \\ & & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{k^2 \sin \phi \cos \phi}{r(1 - k^2 \sin^2 \phi)}. \end{aligned} \quad (163)$$

Если предположить, что уравнения (162) совпадают с уравнениями теории гравитации Эйнштейна, то, в нерелятивистском пределе, мы получаем из них уравнения движения 4D гироскопа, следующие из механики Ньютона

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= 0, \\ \frac{d\omega}{dt} g - k^2 \omega^2 \sin \phi \cos \phi &= N. \end{aligned}$$

Как было показано выше, эти уравнения не в состоянии описать наблюдаемое в экспериментах явление самоиндукции, т.е. управляемое движение 4D гироскопа.

Поскольку уравнения (162) представляют собой уравнения геодезических (прямейшие) пространства абсолютного параллелизма  $A_3(2)$ , то мы должны найти кручение Риччи этого пространства, исходя из требования, чтобы в нерелятивистском пределе кручение  $\Omega_{ijk}$  должно приводить к известным нам уравнениям движения

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= r k^2 \Phi \omega \\ \frac{d\omega}{dt} g - k^2 \omega^2 \sin \phi \cos \phi &= N - \Phi v_c, \end{aligned} \quad (164)$$

описывающим явление самоиндукции.

Этому требованию удовлетворяют следующие отличные от нуля компоненты  $\Omega_{ijk}$

$$\Omega_{02}^1 = -\Omega_{20}^1 = k^2\Phi/2c, \quad \Omega_{01}^2 = -\Omega_{10}^2 = -\frac{\Phi}{2c(1 - k^2 \sin^2 \phi)}. \quad (165)$$

Рассчитывая коэффициенты вращения Риччи по формуле (71), находим

$$T_{20}^1 = -k^2\Phi/c, \quad T_{10}^2 = \frac{\Phi}{c(1 - k^2 \sin^2 \phi)}. \quad (166)$$

Подставляя соотношения (163) и (166) в уравнения (162), получим, в нерелятивистском приближении уравнения (164). Иными словами, кручение Риччи (165) в нерелятивистском пределе удовлетворяет принципу соответствия с нерелятивистскими уравнениями движения механики Декарта.

До сих пор функция  $\Phi(t)$  определялась согласно соотношению (103), при этом ее явный вид оставался неопределенным. Чтобы найти явный вид этой функции, воспользуемся уравнениями поля (В). В эти уравнения входят компоненты тензора Римана  $R^i_{jkm}$ , компоненты торсионного поля  $T^i_{jk}$  и их ковариантные (относительно  $\Gamma^i_{jk}$ ) производные.

Вычисляя с помощью (163) компоненты тензора Римана, находим следующие, отличные от нуля компоненты тензора Риччи  $R_{jm} = R^i_{jim}$

$$R_{00} = -\frac{r^2 k^2 U_\phi^2}{c^2 g (c^2 - 2k^2 r^2 U)} - \frac{k^2 U_\phi \sin \phi \cos \phi}{c^2 g^2} - \frac{U_{\phi\phi}}{c^2 g}, \quad (167)$$

$$R_{22} = -\frac{k^2 c^2 g}{c^2 - 2k^2 r^2 U} R_{00}.$$

Поскольку скалярная риманова кривизна определяется как  $R = g^{jm} R_{jm}$ , то мы находим

$$R = \frac{2c^2}{c^2 - 2k^2 r^2 U} R_{00}. \quad (168)$$

Из этих формул следует, что локальная кривизна Римана пространства обращается в нуль, если обращается в нуль угловое ускорение  $N$ , создаваемое мотором.

Для того, чтобы найти зависимость функции  $\Phi$  от углового ускорения  $N$ , мы используем скалярную часть уравнений (В)<sup>4</sup> В частности, из уравнений (83) имеем

$$S = g^{jm} S_{jm} = g^{jm} (R_{jm} + P_{jm}) = R + P = 0. \quad (169)$$

Подставляя (168) и (166) в (169), получим

$$R + \frac{k^2 \Phi^2}{2g(c^2 - 2k^2 r^2 U)} = 0, \quad (170)$$

откуда

$$\Phi(t) = \sqrt{-\frac{2Rg}{k^2} (c^2 - 2k^2 r^2 U)}. \quad (171)$$

<sup>4</sup>Идея использовать для расчета функции  $\Phi(t)$  уравнения поля была предложена впервые А.Н.Сидоровым

Используя соотношение (168), получим из (171) в нерелятивистском приближении

$$\Phi(t) = 2\sqrt{\frac{N \sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{N_\phi}{k^2}}, \quad N_\phi = \frac{\partial N}{\partial \phi}. \quad (172)$$

Подставляя это соотношение в уравнения движения (164), мы находим следующее выражение для нескомпенсированной силы инерции, действующей на центр масс 4D гироскопа

$$F_{in} = 2(M + 2m)B\omega\sqrt{\frac{N \sin \phi \cos \phi}{1 - k^2 \sin^2 \phi} + \frac{N_\phi}{k^2}}. \quad (173)$$

Эта сила порождена локальным кручением пространства, которое, в свою очередь, создает его локальную риманову кривизну и вызывает изменение скорости центра масс.

## Заключение

Подводя итоги, перечислим основные положения механики Декарта и результаты ее применение к теоретическим и экспериментальным исследованиям 4D гироскопа:

1. Всякое реальное движение в механике Декарта является четырехмерным вращением.
2. Все системы отсчета в механике Декарта оказываются ускоренными, при этом в качестве инерциальной системы отсчета выступает ускоренная локально инерциальная система отсчета второго рода.
3. Основным объектом механики Декарта является ориентируемая материальная точка, имеющая 10 степеней свободы: 4 внешних и 6 внутренних.
4. Пространство событий механики Декарта представляет собой расслоенное 10-мерное многообразие с четырьмя трансляционными координатами базы  $x_0, x_1, x_2, x_3$  и шестью неголономными вращательными координатами слоя, из которых три угла  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  пространственные и три угла  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , пространственно-временные.
5. 10-мерное расслоенное пространство событий механики Декарта наделено геометрией абсолютного параллелизма  $A_4(6)$ , обладающей трансляционной метрикой Римана  $ds^2$  в базе и вращательной метрикой  $d\tau^2$  в слое. В общем случае, пространство событий наделено кривизной Римана и кручением Риччи.
6. Уравнения поля механики Декарта описывают динамику полей инерции и совпадают со структурными уравнениями Картана геометрии  $A_4(6)$ .
7. Поля инерции в механике Декарта имеют локальную природу и порождены торсионным полем  $T^i_{jk}$ .
8. Уравнения движения механики Декарта позволяют дать теоретическое обоснование наблюдаемому в экспериментах с 4D гироскопом явлению механической индукции, которое заключается в том, что при воздействии на 4D гироскоп внешней силой он движется с большим ускорением, чем это предсказывает механика Ньютона.
9. Уравнения движения механики Декарта позволяют дать теоретическое обоснование наблюдаемому в экспериментах с 4D гироскопом явлению механической самоиндук-

ции, которое заключается в том, что при воздействии на 4D гироскоп внешним моментом он получает большее вращательное ускорение, чем это предсказывает механика Ньютона.

10. Торсионное поле  $T^i_{jk}$  позволяет объяснить явление пространственно-временной прецессии свободного 4D гироскопа, которое демонстрирует ускоренное движение центра масс гироскопа без воздействия на него внешних сил.

11. Механика Декарта позволяет дать геометрическую интерпретацию внешним силам и моментам сил, т.е. фактически геометризовать эти силы.

12. Уравнения движения и уравнения поля механики Декарта показывают возможность управлять с помощью 4D гироскопа вращательной и трансляционной метриками пространства событий, а также кручением Риччи и тензором кривизны Римана, обеспечивая контролируемое движение транспортного средства во всех средах, включая космическое пространство.

Все перечисленные свойства механики Декарта и ее экспериментальные следствия указывают, на то, что эта механика является четвертым обобщением механики Ньютона с большими перспективами для ее практического использования в различных разделах науки и техники.

## Список литературы

- [1] *В.Н. Толчин* Инерцоид, силы инерции как источник движения, Пермь, 1977.
- [2] *Э.Р. Гольник* "Автоскольжение тела с вращающимся эксцентриком по шероховатой поверхности горизонтальной плоскости. (К вопросу о движении "инерцоидов", о силах инерции и о надежности механики Ньютона)". Сб. научно-методических статей по теоретической механике, Вып. 10, 1980.
- [3] *И.И. Ольховский* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. с. 184.
- [4] *Л.Б. Левенсон* Вестник инженеров и техников, №6, 1936, сс. 378-382.
- [5] *М. Планк* Введение в теоретическую физику, ч.1, 193. С. 79.
- [6] *Г.И. Шипов* // Изв. вузов. Физика. 1985. №3. С. 74.
- [7] *G. Shipov* Decartes' Mechanics - Fourth Generalization of Newton's Mechanics. In "7<sup>th</sup> Intern.Conference Computing Anticipatory Systems- НЕС - ULg, Liege, Belgium, 2005. P. 36.
- [8] *Г.И. Шипов* Теория физического вакуума, М., Наука, 1997. с. 340.
- [9] *Е.М. Жуховицкий, Е.Л. Татунин, И.Г. Шапошников* К теории инерцоида. В сб. "Ученые записки." ПГУ, №257, 1971, сс. 89-98.
- [10] *Шипов Г.И., Сидоров А.Н.* Теоретические и экспериментальные исследования реактивного движения без отбрасывания массы. В сб. "Физика взаимодействия живых объектов с окружающей средой", Москва, 2004, сс. 87-120.

- [11] *П.К. Рашевский* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964. 504 с.
- [12] *Е.Лифшиц, Л.Ландау* "Механика", М., Наука, 1988.
- [13] *Е.А. Губарев* Динамика ориентируемой точки и инерция. Препринт № 15, МИТПФ РАЕН, М., 2004.
- [14] *Ricci G.* Mem. Acc. Linc. 1895. Vol. 2. Ser. 5. P. 276-322.
- [15] *Newman E., Penrose R.* // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3, №3. P.566 – 587.