Беседа 1

1 Механическая система, представляющая собой осциллятор и ротатор одновременно

В классической и квантовой физике две элементарные механические системы играют важную роль- это осциллятор и ротатор.

1. Простейший осциллятор можно представить в виде массы m, подвешенной на пружине в гравитационном поле Земли. В состоянии равновесия, когда вес массы $P = mg$ уравновешен упругой силой пружины $F = kx_0$, масса m находится в покое. Если сместить массу в вертикальном направлении из положения равновесия, то она, как нам хорошо известно, начнет совершать колебательные движения относительно положения равновесия.

2. Простейший ротатор можно представить в виде двух масс m, соединенных между собой нерастяжимым стержнем длинны l, и вращающихся вокруг оси, проходящей через их общий центр масс.

Мы будем рассматривать механическую систему трех тел, которая совмещает в себе ротатор и осциллятор (см. (рис.1)). Я предложил называть такую механическую систему 4-D гироскопом (четырехмерным гироскопом), в отличие от обычного 3-D гироскопа, представляющего собой вращающееся твердое тело. Почему дано такое название станет ясно из следующих бесед.

Замечание. Задача о движении вращающегося твердого тела (3-D гироскопа) вокруг неподвижной точки не решена окончательно до сих пор, хотя ее решали такие известные ученые как Л.Эйлер, С.Ковалевская и др. В этой задаче не найден один из интегралов движения (или один из законов сохранения).

Итак, мы имеем механическую систему, состоящую из трех тел: центральное тело с массой M и два малых тела с одинаковыми массами m. В центре большой массы M установлена ось O_1, на которой закреплены два нерастяжимых стержня длинны r. На концах этих стержней находятся массы m. Стержни могут свободно вращаться вокруг оси O_1, при этом они вращаются в разные стороны, синхронно и с равной по модулю угловой скоростью.

Вопрос 1.

Что произойдет с системой, если придать массам вращательное движение вокруг оси O_1?

Ответ 1.

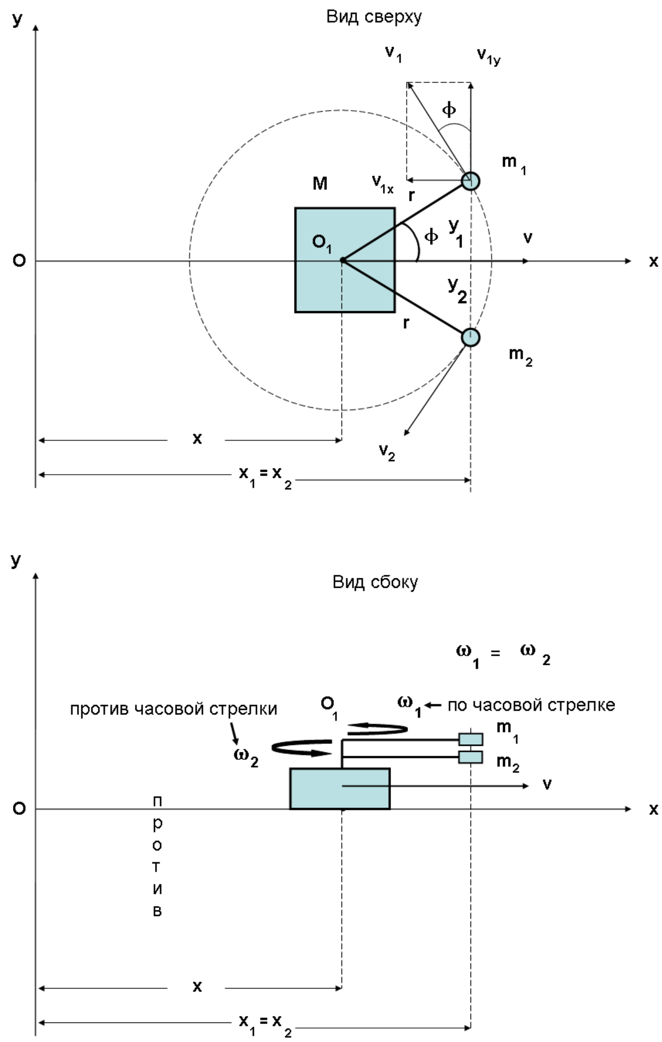

Рис. 1: Принципиальная схема 4-D гироскопа

В силу симметрии системы относительно оси x, большая масса M будет совершать колебательные движения относительно центра масс системы, двигаясь с переменной скоростью $v(t)$ вдоль оси x, а малые массы m будут вращаться вокруг оси O_1 с переменной угловой частотой $\omega(t)$.

Таким образом, **мы имеем механическую систему, элементы которой совершают колебательные и вращательные движения одновременно.**

Прежде, чем показать это аналитически попытаемся ответить на некоторые вопросы, относящиеся к физике системы.

Вопрос 2.

Чтобы описать аналитически эту систему надо использовать механику Ньютона (механику точки в инерциальных системах отсчета)?

Ответ 2.

Нет, механику точки использовать нельзя, поскольку это система тел, внутри которой имеется вращение ее частей.

Вопрос 3.

Тогда, возможно, необходимо использовать механику твердого тела Эйлера-Ньютона?

Ответ 3.

Нет, механику твердого тела использовать нельзя, поскольку расстояния межу массами внутри системы меняется. В твердом теле расстояние между массами постоянно.

И, наконец, самый главный

Вопрос 4.

Будут ли элементы системы двигаться ускоренно сколь угодно долго, если пренебречь трением и не действовать на систему внешними силами?

Ответ 4.

Да, центральная масса будет совершать колебательные движения, а малые массы вращаться вокруг оси, поскольку, как мы покажем ниже, полная внутренняя энергия системы в идеальном случае сохраняется.

Вывод.

Оказывается, что существуют такие механические системы, внутри которых совершается ускоренное движение масс "по инерции"в обобщенном понимании этого явления.

Бесконечно долгое вращение свободного 3-D гироскопа представляет собой частный случай такого обобщенного понимания движения по инерции.

2 Энергии 4-D гироскопа

Найдем координаты элементов системы относительно инерциальной системы отсчета:

1. Координата центрального тела, изображенной на (рис.1) системы, запишется как

$$x,$$

координата x_1 массы m_1

$$x_1 = x + rcos\phi,$$

координата x_2 массы m_2

$$x_2 = x + rcos\phi.$$

Соответственно, для координат y_1 и y_2, находим

$$y_1 = -y_2 = rsin\phi.$$

Скорость центрального тела находим как

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Компоненты скоростей вращающихся тел имеют вид

$$v_{1x} = v_{2x} = \dot{x} - r\dot{\phi}\sin\phi,$$

$$v_{1y} = \dot{y_1} = r\dot{\phi}cos\phi, \quad v_{2y} = \dot{y_2} = -r\dot{\phi}cos\phi.$$

Квадраты линейных скоростей вращающихся тел равны и определяются как

$$v_1^2 = v_2^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2,$$

Подставляя сюда значения скоростей, находим

$$v_1^2 = v_2^2 = r^2\dot{\phi}^2 - 2r\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi + \dot{x}^2.$$

Полная энергия системы теперь записывается в виде кинетической энергии движения составляющих ее масс

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}2mv_1^2. \quad (1)$$

Эта энергия одновременно является функцией Лагранжа системы и, при использовании полученных выше соотношений для скоростей движения, может быть записана в виде

$$L = T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + m(r^2\dot{\phi}^2 - 2r\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi + \dot{x}^2)\ ,$$

или

$$L = T = \frac{1}{2}(M+2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega\sin\phi, \quad (2)$$

где $\omega = \dot{\phi}$.

Из этих соотношений следует пять типов энергий четырехмерного гироскопа:

1) внутренняя энергия поступательного движения

$$E = \frac{(M+2m)v^2}{2} \ ;$$

2) внутренняя энергия вращательного движения

$$W = mr^2\omega^2 = \frac{J\omega^2}{2} \ ; \qquad J = 2mr^2$$

3) внутренняя энергия взаимодействия между поступательным и вращательным движениями

$$H = -2mrv\omega \sin\phi \ ;$$

4) полная внутренняя энергия

$$T = E + W + H \ . \tag{3}$$

Координата центра масс системы N тел находится из соотношения

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}.$$

Используя (рис.1), находим

$$x_c = \frac{Mx + 2m(x + r\cos\phi)}{M+2m} = x(t) + \frac{2mr}{M+2m}\cos\phi(t). \tag{4}$$

Дифференцируя это соотношение по времени, получим

$$v_c = v(t) - \frac{2mr}{M+2m}\omega \sin\phi(t). \tag{5}$$

Используя это соотношение,находим
5) энергию центра масс системы (или внешнюю энергию)

$$E_c = \frac{(M+2m)v_c^2}{2} = \frac{P_c^2}{2(M+2m)} \ . \tag{6}$$

Полную энергию можно так же представить в виде

$$T = E_c + W + H_c \ , \tag{7}$$

где

$$H_c = -k^2 \sin^2\phi mr^2\omega^2. \tag{8}$$

Из формулы (5) находим

$$\omega = \frac{v - v_c}{B\sin\phi}, \qquad B = k^2 r = \frac{2mr}{M+2m}.$$

Подставляя это соотношение в формулу (8) и совершая необходимые преобразования, имеем

$$H_c = -\frac{1}{2}(M+2m)(v-v_c)^2.$$

Снова используя формулу (5), получим окончательно

$$H_c = -\frac{1}{2}(M+2m)(v^2-v_c^2) + (M+2m)v_c\omega B\sin\phi. \tag{9}$$

В этом соотношении энергия

$$H_{int} = (M+2m)v_c\omega B\sin\phi = 2mrv_c\omega\sin\phi \tag{10}$$

отвечает за взаимодействие между поступательным движением центра масс v_c и угловой скоростью ω вращения малых масс m.

Именно она позволяет преобразовывать поступательную энергию центра масс во внутреннюю вращательную и наоборот, что делает исследуемую систему исключительно своеобразной, поскольку в большинстве случаев внутренняя вращательная энергия и внешняя поступательная аддитивны.

Подставляя (10) в формулу (7), получим следующее выражение для полной энергии свободного 4-D гироскопа

$$T = (M+2m)v_c^2 - \frac{1}{2}(M+2m)v^2 + mr^2\omega^2 + 2mrv_c\omega\sin\phi. \tag{11}$$

Предварительные замечания:

1. Полная энергия свободного от внешних воздействий 4-D гироскопа сохраняется.

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(M+2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega\sin\phi\right) = 0,$$

что можно показать путем дифференцирования этого соотношения.

2. Скорость центра масс свободного постоянна

$$v_c = const$$

и эффективный обмен между энергией центра масс и внутренней вращательной энергией происходит в момент внешнего воздействия на 4-D гироскоп.

Это будет показано (теоретически и экспериментально) в последующих беседах.