Беседа 2

1 Уравнения движения 4-D гироскопа

Напомню, что в первой беседе была исследована энергия свободной от внешнего воздействия механической системы, которая объединяет в себе свойства ротатора и осциллятора. Было показано, что энергия системы (4-D гироскопа) записывается как

$$L = T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + m(r^2\dot{\phi}^2 - 2r\dot{x}\dot{\phi}\sin\phi + \dot{x}^2) = \frac{1}{2}(M+2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega\sin\phi \quad (1)$$

или

$$T = \frac{1}{2}(M+2m)v_c^2 + mr^2\omega^2 - k^2\sin^2\phi mr^2\omega^2 \quad (2)$$

или

$$T = (M+2m)v_c^2 - \frac{1}{2}(M+2m)v^2 + mr^2\omega^2 + 2mrv_c\omega\sin\phi. \quad (3)$$

где

$$v_c = v(t) - \frac{2mr}{M+2m}\omega\sin\phi(t) = v(t) - B\omega\sin\phi(t). \quad (4)$$

скорость центра масс системы.

1.0.1 Поступательное уравнение движения

Для вывода уравнений движения свободного 4-D гироскопа мы используем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0\ , \quad (I)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0. \quad (II)$$

Обычно после написанного слушатели во время моего выступления задают вопрос.

Вопрос 1.

Что же в этой системе нового, если вы используете для вывода ее уравнений движения принятый в классической физике лагранжев формализм?

Ответ 1.

Лагранжев формализм - это универсальный метод вывода физических уравнений какой-либо теории. Все фундаментальные уравнения физики выводятся, как правило, с использованием этого формализма. При этом физическое содержание теорий может быть разным. Например, используя лагранжев формализм, можно вывести классические уравнения движения заряда (уравнения Лоренца) или уравнения движения заряда в квантовой электродинамике (уравнения Дирака). Это будут уравнения с различным физическим содержанием.

Подставляя лагранжиан (1) в уравнение (I), получим полный импульс системы

$$P = P_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + 2m)\dot{x} - 2mr\dot{\phi}\sin\phi, \tag{5}$$

совпадающий с импульсом центра масс. Действительно, умножив равенство (4) на полную массу системы $(M + 2m)$, получим написанное выше.

Соответственно, для сил, действующих на центра масс, имеем

$$(M + 2m)\dot{v}_c = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = (M + 2m)\ddot{x} - 2mr\dot{\omega}\sin\phi - 2mr\omega^2\cos\phi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

поэтому поступательное уравнение движения (I) имеет вид

$$(M + 2m)\dot{v}_c = (M + 2m)\dot{v} - 2mr\dot{\omega}\sin\phi - 2mr\omega^2\cos\phi = 0. \tag{6}$$

Из этого уравнения видно, что импульс центра масс свободного 4-D гироскопа постоянен.

Внимание!

Мы здесь опять столкнулись с необычной физической ситуацией. Смотрите, если скорость центра масс постоянна, то с ним можно связать инерциальную (в смысле механики Ньютона) систему отсчета.

Однако, уравнение (6) показывает, что в системе отсчета, связанной с центром масс четырехмерного гироскопа, на центр масс действуют три силы инерции :

1) в положительном направлении оси x действует поступательная сила инерции

$$F = (M + 2m)\ddot{x} \ ;$$

и две силы инерции действуют в отрицательном направлении это:

2) проекция на ось x центробежной силы инерции

$$G = -2mr\omega^2 cos\phi \ \ ;$$

3) проекция на ось x силы инерции, вызванной ускорением вращения

$$R = -2mr\dot{\omega}sin\phi \ .$$

Да, сумма все сил, действующих на центр масс, равна нулю

$$S = F + G + R = 0,$$

но они действуют! По определению, система отсчета является ускоренной, если в ней действуют силы инерции, пусть даже скомпенсированные.

Вывод 1.

В природе существуют ускоренные системы отсчета, которые движутся относительно друг друга прямолинейно и равномерно или покоятся.

У нас, впервые в физике, появляется возможность исключить из теории "такую нереальную вещь"(по выражению А.Эйнштейна), как инерциальная система отсчета в ньютоновском понимании. Мне представляется, что большинство проблем современной теоретической физики связано с использованием инерциальной системы отсчета в большинстве современных теорий.

В своей книге "Теория физического вакуума. Теория, эксперименты и технологии", Москва, Наука, 1997 г. я назвал систему отсчета, связанную с центром масс 4-D гироскопа *ускоренной локально инерциальной системой отсчета второго рода.*

Вопрос 2. Почему второго рода?

Ответ 2.

Ускоренная локально инерциальная система отсчета первого рода была введена А.Эйнштейном в его теории гравитации. Эта система отсчета связана с центром масс лифта, свободно падающего в гравитационном поле. В случае свободно падающего лифта на его центр масс действуют две скомпенсированные силы:

1) гравитационная сила притяжения Землей

$$F_g = Mg,$$

где M - масса лифта, g - ускорение свободного падения (считаем, что лифт падает вблизи поверхности Земли) и

2) сила инерции

$$F_{iner} = -Mg,$$

порожденная ускоренным движением лифта.

Сумма этих сил также равна нулю, поскольку локально они компенсируют друг друга. В этом и заключается суть явления невесомости внутри свободно падающего лифта или кабине космического корабля.

1.0.2 Вращательное уравнение движения

Подставляя лагранжиан (1) в уравнение (II), получим угловой импульс

$$L_\omega = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2mr^2\dot{\phi} - 2mr\dot{x}\sin\phi$$

и моменты сил инерции

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}) = 2mr^2\ddot{\phi} - 2mr\ddot{x}\sin\phi - 2mr\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -2mr\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi,$$

действующих в системе.

После необходимых преобразований вращательное уравнение движения запишется в виде

$$2mr^2\ddot{\phi} - 2mr\ddot{x}\sin\phi = 0 \tag{7}$$

или

$$\dot{\omega} - \frac{1}{r}\ddot{x}\sin\phi = 0. \tag{8}$$

Из поступательного уравнения (6) находим

$$\ddot{x} = B(\dot{\omega}\sin\phi + \omega^2\cos\phi), \quad B = rk^2. \tag{9}$$

Подставляя это соотношение в уравнение (8), получим

$$\dot{\omega} - k^2\frac{\sin\phi\cos\phi}{1-k^2\sin^2\phi}\omega^2 = 0 \ , \quad 1-k^2\sin^2\phi \neq 0. \tag{10}$$

С другой стороны, из уравнения (8) находим

$$\dot{\omega} = \frac{1}{r}\ddot{x}\sin\phi.$$

После подстановки этого соотношения в уравнение (9), имеем

$$\ddot{x} = \frac{B\omega^2\cos\phi}{1-k^2\sin^2\phi}. \tag{11}$$

Перепишем уравнения движения (8) и (9) 4-D свободного гироскопа в виде

$$r\dot{\omega} - \ddot{x}\sin\phi = 0, \tag{12}$$

$$\ddot{x} - B\frac{d}{dt}(\omega\sin\phi) = 0. \tag{13}$$

Умножим первое из этих уравнений на $2mr\omega$, второе на $(M+2m)\dot{x}$ и сложим. В результате преобразований мы приходим к закону сохранения полной энергии свободного гироскопа

$$\frac{d}{dt}T = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(M+2m)v^2 + mr^2\omega^2 - 2mrv\omega\sin\phi\right) = 0 \ . \tag{14}$$

2 Решение уравнений движения 4-D гироскопа

Решить уравнения движения (12) и (13) это значит ответить на вопрос, как меняется со временем:

1) угловая скорость $\omega(t)$;
2) угол поворота $\phi(t)$;
3) скорость центрального тела $v(t)$;
4) скорость центра масс v_c;
5) координата центрального тела $x(t)$;
6) координата центра масс x_c.

Мы начнем отвечать на эти вопросы с решения вращательного уравнения движения.

2.1 Решение вращательного уравнения

Перепишем вращательное уравнение (10) как

$$\dot{\omega} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{1/k^2 - \sin^2\phi}\omega^2 = 0.$$

Заменой переменной

$$z = \sin\phi$$

преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{z}{(1/k)^2 - z^2}dz \ .$$

При условии, что $(1/k)^2 > 1$ и $|z| < 1$, полученное уравнение легко интегрируется, и мы находим

$$\ln\omega = -\frac{1}{2}\ln|(1/k)^2 - z^2| + \ln c_1 \ , \qquad (15)$$

где c_1— константа интегрирования.

Запишем уравнение (15) как

$$\ln\frac{\omega}{c_1} = \ln\frac{1}{\sqrt{(1/k)^2 - z^2}}$$

или

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{c_1}{\sqrt{(1/k)^2 - z^2}} \ . \qquad (16)$$

Пусть в начальный момент t заданы начальные условия

$$\phi = \phi_0, \quad \omega = \omega_0 \ , \qquad (17)$$

тогда

$$\omega_0 = \frac{c_1}{k\sqrt{1 - k^2 sin^2\phi_0}}$$

и окончательно имеем решение для частоты вращения малых грузов

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-k^2 sin^2\phi_0}}{\sqrt{1-k^2 sin^2\phi}}. \tag{18}$$

Разделяя переменные в уравнении (16) и замечая, что $z = \sin\phi$, получим

$$\frac{1}{k}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}d\phi = c_1 dt \ .$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\frac{1}{k}E(\phi,k) = \frac{1}{k}\int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}d\phi = c_1 t + c_2 \ ,$$

где c_2—константа интегрирования, а $E(\phi,k)$—эллиптический интеграл второго рода.

Из этого соотношения следует, что для угла $\phi(t)$ вращательное уравнение движения не может быть проинтегрированно в элементарных функциях.

Используя начальные условия (17), получим частное решение для угла поворота $\phi(t)$ виде

$$E(\phi(t),k) = \omega_0 t\sqrt{1-k^2\sin^2\phi} + E(\phi_0,k) \ . \tag{19}$$

2.2 Решение поступательного уравнения

Для удобства решения, преобразуем поступательное уравнение движения к виду

$$\ddot{x} = B\frac{d}{dt}(\omega\sin\phi) = -B\frac{d^2}{dt^2}\cos\phi(t) \ .$$

Интегрируя дважды это уравнение, имеем

$$x = -B\cos\phi(t) + c_1' t + c_2' \ ,$$

где c_1' и c_2'—константы интегрирования. Используя в момент времени $t=0$ начальные условия

$$x = x_0, \qquad v = v_0, \phi = \phi_0, \quad \omega = \omega_0 \ ,$$

получим соотношение для координаты центрального тела

$$x(t) = A + v_0 t - B\cos\phi(t) \ , \tag{20}$$

и для его скорости

$$v = v_c + B\omega\sin\phi, \tag{21}$$

где

$$A = x_0 + B\cos\phi_0 = const \ , \qquad v_c = v_0 = B\omega_0\sin\phi_0 = const \ .$$

Используя соотношение $x_c = x(t) + B\cos\phi(t)$, находим частное решение для координаты центра масс четырехмерного гироскопа

$$x_c = A + v_0 t \ . \tag{22}$$

Соответственно скорость центра масс определяется как

$$v_c = B\omega_0 \sin\phi_0 = const \ . \tag{23}$$

Теперь мы знаем все ответы на поставленные вначале этого раздела вопросы. На эти вопросы отвечают формулы (18)-(23).

3 Торсионные силы

Мы обнаруживаем необычную для классической механики ситуацию - в случае нашей системы **энергия центра масс свободного 4-D гироскопа не обязана всегда сохраняться**. Всегда сохраняется лишь полная энергия, частью которой является энергия центра масс.

Действительно, подставим в соотношение (14) полную энергию в виде (2). В результате получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(M+2m)v_c^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(mr^2\omega^2(1-k^2\sin^2\phi)\right) \ . \tag{24}$$

Рассуждая теоретически, мы приходим к выводу, что изменение энергии центра масс свободного 4-D возможно только в том случае, если:

1. Внутри гироскопа действуют силы, не меняющие полную энергию гироскопа.

2. Эти силы меняют скорость центра масс.

Для теоретического доказательства принципиальной возможности существования таких сил, запишем уравнения движения (12) и (13) в виде

$$r\dot{\omega} - \ddot{x}\sin\phi = -\Phi\dot{x}, \tag{25}$$

$$\ddot{x}_c = \ddot{x} - B\frac{d}{dt}(\omega\sin\phi) = B\Phi\omega, \tag{26}$$

где ускорение $B\Phi\omega$ порождено внутренней силой

$$F_{int} = (M+2m)B\Phi\omega, \tag{27}$$

меняющей скорость центра масс.

Опять умножим уравнение (25) на $2mr\omega$, а уравнение (26) на $(M+2m)\dot{x}$ и сложим. В результате преобразований мы приходим к закону сохранения полной энергии свободного гироскопа (14), при этом энергия центра масс меняется в соответствии с уравнением (24).

Предварительные замечания:

Силу (27) мы будем называть **торсионной силой**. Ниже мы покажем, что торсионные силы порождаются торсионными полями. В механике торсионные силы интерпретируются как силы инерции. Со времен Ньютона эти силы представляют собой загадку для многих поколений физиков. Но еще боле впечатляет связь торсионных полей с волновой функцией квантовой механики.

Внимание!

Уравнения движения (25) и (26) **не следуют из обычного формализма Лагранжа.** Для описания локальных сил, меняющих скорость центра масс без изменения полной энергии системы, необходимо ввести **обобщенный формализм Лагранжа**, включающий эти необычные силы. Такой формализм мы рассмотрим в одной из последующих Бесед.

Вывод 1.

В природе существуют поля и силы, которые не меняют энергию системы, но меняют характер движения ее частей.

Предварительные экспериментальные доказательства этого теоретического вывода будут даны в Беседе 3.

В заключение этой Беседы я не могу не указать на некоторую аналогичную ситуацию из общепринятой физики.

Представьте себе фигуриста на катке, который вращается, прижав руки к торсу. Когда фигурист расслабит мышцы, его руки вытягиваются и угловая скорость уменьшается, при этом полная энергия системы сохраняется (хорошо известный переменный момент инерции). За уменьшение его угловой скорости вращения отвечают моменты сил инерции, которые действуют не меняя энергии системы, но меняют траекторию отдельных частей системы (например, кистей рук фигуриста). Но это всего лишь аналогия. В нашем случае все гораздо сложнее.