Беседа 6

1 Геометризация физических взаимодействий

Я извиняюсь перед читателями за то, что мне приходится переходить на довольно абстрактный язык современной теории относительности, но я вынужден это делать, поскольку для понимания новой физики необходимо:

1. Дать геометрическое описание всех видов физических взаимодействий, включая нерелятивистскую механику.

2. Сформулировать все физические теории без использования при их построении не существующей в природе инерциальной системы отсчета.

1.1 Геометризация гравитационного взаимодействия

Работа по геометризации физических взаимодействий начинается с геометризации гравитационных полей. Как нам известно, это было сделано А.Эйнштейном в 1915 г. Опуская эвристические соображения (слабый и сильный принципы эквивалентности), мы сразу перейдем к самой технике геометризации.

Предположим, что мы рассматриваем гравитационное взаимодействие двух тел, одно из которых имеет массу m, а другое массу $M \gg m$. Пусть малое тело m движется с кинетической энергией T в гравитационном поле большого тела M, имея потенциальную энергию

$$U_g = -\frac{mMG}{r}, \tag{1}$$

где G - гравитационная постоянная.

Для описания движения частицы мы представим функцию Лагранжа в виде

$$L = T - U_g. \tag{2}$$

Используя (2), мы можем записать релятивистски инвариантное действие как

$$S = -mc\int ds = \int L dt, \tag{3}$$

где c - скорость света и

$$ds = (g_{ik}dx^i dx^k)^{1/2} \quad i, j, k = 0, 1, 2, 3 \tag{4}$$

- бесконечно малый интервал **между двумя точками пространства событий.**

Внимание!

А.Эйншейн делает следующее. Он полагает, что:

1. Если гравитационное взаимодействие отсутствует (нет тела M или оно удалено на бесконечность от тела m), то тогда интервал (4) совпадает с интервалом плоского пространства

$$ds_0 = (\eta_{ik} dx^i dx^k)^{1/2}, \tag{5}$$

где

$$\eta_{ij} = diag(1 - 1 - 1 - 1)$$

- метрический тензор пространства Минковского. Если же тела взаимодействуют гравитационно, то пространство событий искривлено и интервал (4) описывает искривленное Риманово пространство с метрическим тензором

$$g_{ij} = g_{ij}(x^i, U_g),$$

зависящим от потенциала взаимодействия U_g.

Из формул (2) и (3) следует

$$L = -mc \left(g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} = T - U_g \tag{6}$$

или

$$ds = -\frac{L}{mc} dt. \tag{7}$$

В самом деле, поскольку гравитационное поле массы M на бесконечности исчезает, то потенциальная энергия взаимодействия между частицей и массой M обращается в нуль.

$$U_\infty = 0.$$

Следовательно, на бесконечности имеем

$$L_\infty = -mc \left(\eta_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} = T, \tag{8}$$

где η_{ik} – метрический тензор пространства Минковского. Преобразуя (8), находим

$$ds_0 = -\frac{T}{mc} dt. \tag{9}$$

Из соотношений (6) и (8) видно, что получается связь между потенциальной энергией взаимодействия и метрикой пространства Римана

$$U_g = T - L = L_\infty - L = -mc \left[\left(\eta_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} - \left(g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right)^{1/2} \right], \quad i,k = 0,1,2,3. \tag{10}$$

Нет искривления пространства - нет гравитационного потенциала взаимодействия и, наоборот, нет гравитационного потенциала - нет искривления пространства. В этом вся суть теории гравитации Эйнштейна.

В нерелятивистском приближении из формулы (10) следует

$$U_g = -mc^2(\sqrt{\eta_{00}} - \sqrt{g_{00}}) = -mc^2(1 - \sqrt{g_{00}}),$$

откуда находим

$$\sqrt{g_{00}} = \left(1 + \frac{U_g}{mc^2}\right).$$

Если взаимодействие между частицами слабое, то выполняется условие

$$\frac{U_g}{mc^2} \ll 1, \tag{11}$$

поэтому в области, где наблюдается слабое гравитационное взаимодействие, можно записать

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2U_g}{mc^2}\right) = \left(1 + \frac{2\varphi_g}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \tag{12}$$

где $r_g = 2MG/c^2$ - гравитационный радиус массы M.

Эйнштейн получил это выражение задолго до того, как были написаны знаменитые уравнения Эйнштейна (1915 г.), решение которых для g_{00} дает такое же соотношение, которое мы только что рассчитали.

В нашем простом случае связь между гравитационным ньютоновским потенциалом φ_g и g_{00} компонентой метрики g_{ik}, имеет вид

$$\varphi_g = \frac{c^2(g_{00} - 1)}{2},$$

поэтому в теории гравитации Эйнштейна роль потенциала гравитационного поля играет метрика g_{ik}.

Используя вариационную процедуру для действия (3), А. Эйнштейн находит уравнения движения пробной массы m в произвольном гравитационном поле в виде уравнений геодезических риманова пространства

$$m\frac{d^2x^i}{ds^2} + m\Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \qquad i, j, k = 0, 1, 2, 3. \tag{13}$$

В данном случае величина

$$F^i = m\Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

представляет собой четырехмерную гравитационную силу, где символы Кристоффеля $\Gamma^i{}_{jk}$, определяемые как

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}(g_{jm,\kappa} + g_{km,j} - g_{jk,m}), \quad ,k = \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k,}$$

выступают в роли напряженностей гравитационного поля. Во многих учебниках показано (и я не буду это повторять), что в слабом гравитационном поле и при нерелятивистской скорости частицы m, уравнения (13) переходят в уравнения движения, подобные ньютоновским. Я не случайно написал "подобные ньютоновским". У Ньютона пространство плоское, и если мы потребуем,чтобы пространство было плоским в уравнениях движения (13), то мы обратим гравитационную силу в нуль.

Такая же ситуация с гравитационными уравнениями Эйнштейна

$$R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{jm}, \tag{14}$$

- в слабых полях и при нерелятивистских скоростях массы M, создающей гравитационное поле, они переходят в уравнение, подобное гравитационному уравнению Ньютона:

уравнения Эйнштейна –> уравнение, подобное уравнению Ньютона, + добавки.

Слово "подобное"означает, что мы получаем уравнение, формально похожее на уравнение Ньютона, но его правая часть обращается в нуль, как только мы потребуем, чтобы пространство было плоским. Это говорит о том, что, вообще говоря, никакого принципа соответствия между уравнениями теории гравитации Эйнштейна и Ньютона нет. Это качественно разные теории Уверяю вас, что научное сообщество никогда бы не признала теорию Эйнштейна, если бы не те добавки к уравнению "подобному уравнению Ньютона", которые позволили теоретически объяснить три наблюдаемых в Солнечной системе явления:

1) смещение перигелия Меркурия;
2) отклонение лучей света далеких звезд, проходящих вблизи солнечного диска и
3) изменение частоты электромагнитного излучения в гравитационном поле.

Другим очень важным достижением А.Эйнштейна является введенный им в физику новый класс ускоренных систем отсчета. Это - ускоренные локально инерциальные системы отсчета, связанные со свободно падающими в гравитационном поле лифтами. Из классической механики мы знаем, что в ускоренных системах действуют силы инерции. И вот когда силы инерции в ускоренной системе скомпенсированы гравитационными силами, то локально такая ускоренная система отсчета ничем не отличается от инерциальной. В Беседе 2 я уже упоминал об этой системе отсчета. Я назвал ее **ускоренной локально инерциальной системой отсчета первого рода**. А. Эйнштейн показал, что ускоренные локально инерциальные системы отсчета первого рода движутся бессиловым образом в соответствии с геодезическими риманова пространства (13). В самом деле, в плоском пространстве Евклида, которое лежит в основе механики Ньютона, бессиловым геодезическим движением является прямолинейное и равномерное движение. Согласно Ньютону, это есть движение по инерции. В теории Эйнштейна бессиловое геодезическое движение относится к классу ускоренных. Действительно, если мы перейдем к системе отсчета, связанной со свободно падающим лифтом, то символы Кристоффеля в уравнениях (13) обратятся в нуль и локально мы получим инерциальное движение. Поскольку такое инерциальное движение выполняется в любой точке траектории,то оно должно выполняться вдоль всей кривой, по которой движется пробная частица.

Вывод 1. В искривленном пространстве теории гравитации Эйнштейна представление Ньютона о движении по инерции обобщается - оно становится ускоренным в соответствии с уравнениями геодезических риманова пространства.

Для себя этот вывод я сделал давно, когда я был еще студентом физфака МГУ. Он был для меня одним из ориентиров при решении первой проблемы эйнштейновской единой теории поля - геометризации электромагнитных полей.

1.2 Геометризация электромагнитного взаимодействия

Поступая подобно А.Эйнштейну с другими физическими полями, я нашел обобщенные римановы геометрии, которые описывают электромагнитные, сильные и слабые (торсионные) взаимодействия (см. Г.И. Шипов, "Теория физического вакуума, теория эксперименты и технологии, Москва, Наука, 450 сс).

Формулы (10) и (12) дают хорошую подсказку, каким образом геометризовать другие типы физических взаимодействий. Они говорят, что надо подобрать соответствующее риманово пространство.

Предполагая, что в нерелятивистском приближении для любого типа физического взаимодействия частицы массы m с полем, обладающим потенциальной энергией U, имеет место соотношение

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{mc^2}, \tag{15}$$

можно подобрать соответствующую риманову геометрию.

Пусть, например, мы имеем электромагнитное взаимодействие заряда $+e$ с массой M, с зарядом $-e$ массы m, причем $M \gg m$. Потенциальная энергия только электромагнитного взаимодействия имеет вид

$$U_e = -\frac{e^2}{r}.$$

Подставляя это соотношение в (15), получим

$$g_{00} = 1 + \frac{2U_e}{mc^2} = 1 - \frac{2r_e}{r}, \tag{16}$$

где $r_e = e^2/mc^2$ - классический радиус электрона.

Взаимодействие подразумевает участие в действии, как минимум, двух объектов. В нашем случае это пробная частица массы m и с зарядом $-e$ и создающая статическое сферически симметричное поле частица с массой M и зарядом $+e$. Поэтому геометрия пространства событий должна всегда обладать характеристикой обоих взаимодействующих объектов. Именно такими свойствами обладает параметрическая риманова геометрия, описывающая чисто электромагнитные взаимодействия - ее геометрия зависит не только от заряда, который создает поле, но и от отношения $-e/m$ пробного заряда. Это следует из соотношения (16).

В случае чисто гравитационного взаимодействия пробной гравитационной массы m_g и большой массы M "удельный заряд"гравитационного взаимодействия задан отношением

$$\frac{m_g}{m_i},$$

где m_g - гравитационная , а m_i - инерционная масса пробной частицы. Поэтому, в общем случае, вместо (12) надо писать

$$g_{00} = \left(1 + \frac{2U_g}{m_i c^2}\right) = \left(1 - \frac{2m_g MG}{m_i c^2 r}\right). \tag{17}$$

До сих пор все гравитационные эксперименты показывали справедливость отношения

$$\frac{m_g}{m_i} = 1,$$

но это совсем не означает, что так будет всегда.

В теории гравитации Эйнштейна зависимость геометрии от пробной массы отсутствует. Это частный случай геометризации физических взаимодействий. В общем случае все гораздо сложнее.

Другим наводящим соображением для меня была возможность двигаться заряженной частице в римановом пространстве ускоренно, но по инерции в обобщенном смысле. Это значит, что если с зарядами в геометризированной электродинамике будут связаны ускоренные локально инерциальные системы отсчета первого рода, то они будут двигаться в центрально симметричном электромагнитном поле ускоренно, но без излучения. Но ведь это наблюдается в квантовых экспериментах с атомными системами. Значит при построении модели атома в геометризированной электродинамике нам не надо будет вводить дополнительно постулат Бора о существовании стационарных орбит электронов в атомных система. Этот постулат будет просто следствием теории.

Внимание!

Здесь мы уловили определенную связь геометризированной электродинамики с квантовой теорией атома.

Надо отметить, что как классическая электродинамика Максвелла-Лоренца, так и квантовая электродинамика Дирака, сформулированы в "не существующих в природе инерциальных системах отсчета"(слова А.Эйнштейна). Поэтому формулировка уравнений электродинамики в ускоренных локально инерциальных системах отсчета - это переход от уравнений узкой теории электромагнетизма к уравнениям более широкой теории.

Опуская подробности, я запишу уравнения движения пробного заряда и уравнения поля геометризированной электродинамики в следующем виде

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \frac{e}{mc^2}E^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{18}$$

$$R_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}R = \frac{8\pi e}{mc^4}T_{jm}, \tag{19}$$

где тензор энергии-импульса заряженной материи записывается как

$$T_{jm} = \rho_e c^2 u_j u_k \ , \qquad u^i u_i = 1. \tag{20}$$

Здесь плотность заряженной материи ρ_e, представлена через трехмерную δ-функцию Дирака

$$\rho_e = e\delta(\mathbf{r}). \tag{21}$$

В уравнениях (18) симметричные по нижним индексам величины $E^i{}_{jk} = E^i{}_{kj}$, определяемые через метрический тензор общерелятивистской электродинамики

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \frac{e}{m} a_{ik} \tag{22}$$

как

$$E^i{}_{jk} = -\frac{c^2}{2} g^{im}(a_{mj,k} + a_{mk,j} - a_{jk,m}), \tag{23}$$

образуют риманову кривизну

$$R^i{}_{jkm} = -\frac{2e}{mc^2} E^i{}_{j[m,k]} + \frac{2e^2}{m^2c^4} E^i{}_{s[k} E^s{}_{|j|m]} \tag{24}$$

пространства событий общерелятивистской электродинамики и интерпретируются как напряженности сильных электромагнитных полей.

Из формула (22) видно, что метрика геометризированной электродинамики параметрически зависит от величины пробного заряда. Таким образом, мы вводим новый класс римановых геометрий, которые мы будем называть параметрическим.

Так же, как и при геометризации гравитационного поля, соответствие уравнений геометризированной электродинамики с классической электродинамикой Максвелла-Лоренца имеет место для слабых полей и для не слишком больших скоростей. В результате соответствующих преобразований можно показать, что

уравнения геометризирровaной электродинамики –>

уравнения, подобные уравнениям Максвелла, + добавки.

Здесь, как и в случае теории гравитации Эйнштейна, мы получаем уравнения, "подобные уравнениям Максвелла", поскольку при точном переходе к плоскому пространству исчезают геометризированные электромагнитные поля.

Конечно, все эти выкладки можно было бы рассматривать как некоторую интеллектуальную гимнастику для ума, если бы не полученные нами добавки к уравнениям, подобным уравнениям Максвелла. С моей точки зрения эти добавки представляют ценность не только для науки, но и для человечества в целом. Объясню, почему.

1. Уравнения геометризированной электродинамики (19) и уравнения Эйнштейна (14) **совпадают** вне источников электромагнитного и гравитационного поля. В этом случае те и другие уравнения записываются как вакуумные уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} = 0. \tag{25}$$

Совпадают не только уравнения, но их общие решения. Например, общее решение уравнений (25), описывающее сферически симметричные поля точечных источников (решение Шварцшильда), имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (26)$$

где C -константа интегрирования. Из общего соотношения (15) находим

$$C = \frac{2Ur}{mc^2}.$$

Подставляя в эту формулу U_g, получим

$$C_g = \frac{2U_g r}{mc^2} = \frac{2MG}{c^2} = r_g$$

и метрика (26) в этом случае описывает гравитационные взаимодействия. Для геометрического описания электромагнитных взаимодействий мы имеем

$$C_e = \frac{2U_e r}{mc^2} = \frac{2e^2}{mc^2} = 2r_e.$$

Из наших рассуждений следует, что вакуумные уравнения (25) представляют собой простейшие уравнения единой теории поля, объединяющей геометризированные гравитационные и электромагнитные взаимодействия.

2. Мы только что показали, что решение вакуумных уравнений (25) позволяет дать геометрическое описание кулоновской и ньютоновской потенциальной энергии. Однако в научной литературе известны другие решения вакуумных уравнений (25), например, решение Ньюмена-Унти-Тамбурино, позволяющее описывать геометризированные потенциальные энергии следующего вида

$$U = -\frac{mc^2}{2}\left(\frac{C_1}{r} + \frac{2C_2}{r^2}\right), \qquad (27)$$

где C_1 и C_2 - константы интегрирования. Первый член в правой части этого уравнения описывает кулон-ньютоновскую потенциальную энергию, а второй - короткодействующую добавку к ней. В теории гравитации Эйнштейна эта добавка столь несущественна, что ее экспериментальное подтверждение до сих пор не найдено. Совсем другое дело, когда речь идет о геометризированной электродинамике. В электродинамике это будет короткодействующая добавка к кулоновскому потенциалу. Все, кто знаком с азами ядерной физики знает, что в начале прошлого века (1919 г.) Э.Резерфорд обнаружил короткодействующие добавки к кулоновскому потенциалу. Он рассеивал α - частицы (заряд +2e) на ядрах золота (заряд +79e) и обнаружил, что на расстояниях много больших, чем 10^{-12} см. взаимодействие частиц описывается кулоновским потенциалом. Если же α - частицы проходили на расстояниях порядка 10^{-12}, то наблюдалось отклонение от кулоновского взаимодействия. Это отклонение было приписано действию новых феноменологических ядерных сил. С тех и до сегодняшнего дня не существует в ядерной физике фундаментальных уравнений, решение которых давало короткодействующие ядерные потенциалы. **Все ядерные потенциалы являются подгоночными, их много и все они вводятся в теорию руками**.

У читателя сразу же возникает вопрос: а не описывает ли решение вакуумных уравнений (25) с потенциальной энергией (27) ядерные взаимодействия частиц?

Ответ на этот вопрос дали ответ двое моих коллег и близких друзей - физик-теоретик Губарев Евгений Алексеевич, выпускник физтеха, и математик Сидоров Андрей Николаевич - выпускник Тюменского госуниверситета. Ими была проделана большая работа по классическому и квантовому расчету рассеяния нейтральных и заряженных частиц в метрике с потенциальной энергией (27). Было показано достаточно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных кривых. Один из многих графиков, демонстрирующих сравнение теоретических расчетов и экспериментальных данных, приведен на (рис.1).

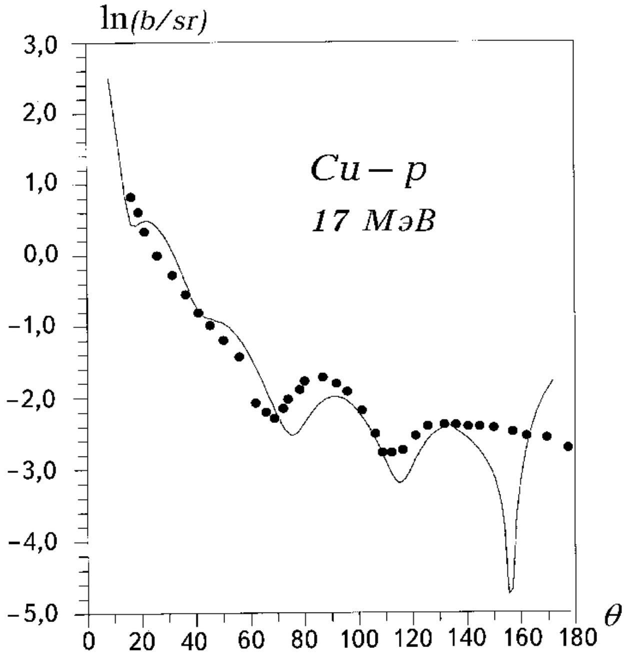

Рис. 1: Упругое рассеяние протонов с энергией 17 Мэв на ядрах меди

Несмотря на то, что эти результаты были получены почти 17 лет назад, опубликованы во многих трудах

(см., например,

Губарев Е.А.,Сидоров А.Н. // Гравитация и фундаментальные взаимодействия, М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1988. С. 92.

Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И. // Актуальные проблемы фундаментальных наук. М.: Изд-во МГТУ, 1991. Т. 3. С. 102–105.

Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И. Фундаментальные модели элементарных взаимодействий и теория физического вакуума. М., 1992. 68 с. Препринт МНТЦ ВЕНТ; №17.

Губарев Е.А., Сидоров А.Н., Шипов Г.И. // Тр. V семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны». Дубна. 1993. С. 232–238.

Шипов Г.И.// Тр. VI семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны». Дубна. 1994. С. 141–145.

Губарев Е.А., Сидоров А.Н. // Там же. С. 146–152.)

и обсуждались на многих теоретических семинарах и конференциях, специалисты по теории ядерных взаимодействий и физики-теоретики продолжают описывать ядерные взаимодействия с помощью феноменологических потенциалов, введенных теорию руками.

Когда мы после нашего выступления подходили к специалистам по ядерным взаимодействиям и спрашивали их мнение о нашей работе, они отвечали, примерно, так: "Зачем нам ваши потенциалы, мы и со старыми хорошо живем."

Такой ответ звучал бы безобидно, если бы дело не касалось весьма важной для общества проблемы - получение управляемой термоядерной энергии. Любой здравомыслящий человек понимает, что феноменологический подход к этой проблеме чреват весьма плачевными последствиями. И дело тут не в том, что уже около полувека тратятся впустую деньги налогоплательщика, а дело в том, что это просто опасно. Ситуация аналогична следующей. Ребенок нашел артиллерийский снаряд. Он не знает, как устроен снаряд, но зато знает, что в нем есть тротил, который ему надо достать. Что из этого может получится - понятно без комментариев.

2 Геометрическое описание свободного 4-D гироскопа в рамках классического подхода

Как можно геометризировать механические системы, мы покажем на примере 4-D гироскопа. Для сокращения Беседы 6 мне придется использовать сухой язык формальных выкладок.

В случае свободного 4-D гироскопа его Лагранжиан совпадет с его кинетической энергией

$$L = T.$$

Мы так же знаем, что, хотя 4-D гироскоп и свободен, внутри его действуют силы, образованные его внутренними связями. Движение отдельных частей гироскопа ускоренное, поэтому его внутреннее конфигурационное пространство обладает метрикой, отличной от метрики пространства Евклида

В классической механике движение механической системы n частиц, свободной от действия внешних сил, описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial T}{\partial u^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = 0 \qquad i = 0, 1...n-1, \tag{28}$$

где

$$T = T(x^i, u^i) = \frac{\mu}{2} g_{ij} u^i u^j$$

- нерелятивистская кинетическая энергия системы, зависящая от координат x^i и скоростей u^i, μ - полная масса системы. Связь между метрикой конфигурационного пространства событий и нерелятивистской энергией системы n частиц имеет вид

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \frac{2T}{\mu}dt^2,$$

где $g_{ij} = g_{ij}(x^i)$ - метрический тензор локального пространства, t - время.

Используя этот общий подход, запишем функцию Лагранжа свободного 4-D гироскопа в виде

$$T = \frac{M+2m}{2}\left(v_c^2 + k^2(1-k^2\sin^2\chi/r)w^2\right) = \frac{M+2m}{2}\left(v_c^2 + gw^2\right), \qquad (29)$$

где

$$w = r\omega, \quad \phi = \chi/r, \quad k^2 = 2m/(M+2m), \quad v_c = v - k^2 w\sin\chi/r, \quad g' = k^2(1-k^2\sin^2\chi/r).$$

Вводя обозначения

$$v^1 = v_c, \qquad v^2 = w$$

и метрический тензор

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}, \qquad (30)$$

представим лагранжиан системы как

$$T = \frac{M+2m}{2}g_{ij}v^i v^j = \frac{M+2m}{2}\dot{s}^2.$$

Здесь

$$\dot{s}^2 = g_{ij}v^i v^j = v_c^2 + gw^2 \qquad (31)$$

и

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{2T}{(M+2m)}} = const.$$

Поскольку

$$v_c = \frac{dx_c}{dt}, \qquad w = r\omega = r\frac{d\phi}{dt},$$

то из (31) следует

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \qquad (32)$$

Будем рассматривать это соотношение как метрику некоторого конфигурационного двумерного риманова пространства с координатами

$$x_0 = x_c, \quad x_2 = r\phi = \phi'$$

и уравнениями геодезических

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \qquad i,j,k... = 1,2. \tag{33}$$

Введем обозначения

$$V_c = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx_c}{ds}, \quad \Omega = \frac{dx^2}{ds} = \frac{d\phi'}{ds}.$$

Подставляя метрический тензор (30) в определение символов Кристоффеля

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}(g_{jm,\kappa} + g_{km,j} - g_{jk,m}), \quad ,k = \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k},$$

получаем

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'}.$$

Остальные компоненты равны нулю.

Из уравнений геодезических (33) следуют уравнения движения свободного гироскопа в виде

$$\frac{dV_c}{ds} = 0, \quad \frac{d\Omega}{ds} + \frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'}\Omega^2 = 0.$$

Переходя к дифференцированию по времени, получим из этих уравнений

$$\frac{dv_c}{dt} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\sqrt{g'}}\frac{d\sqrt{g'}}{d\phi'}w^2 = 0. \tag{35}$$

Интегрируя полученные уравнения, имеем

$$v_c = const, \quad \omega = \omega_0\frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi_0}}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}.$$

Легко видеть, что эти формулы совпадают с формулами (23) и (18) Беседы 2, т.е. наши решения совпадают с полученным нами ранее. Они описывают движение свободного четырехмерного гироскопа, с центром масс которого связана ускоренная локально инерциальная система отсчета второго рода, при этом на центр масс действуют скомпенсированные силы инерции. Центр масс свободного гироскопа покоится или движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета.

При геометрическом описании справедливыми оказываются соотношения

$$v_c = \frac{du_c}{dt} = \frac{dx_c}{ds}\frac{ds}{dt}, \quad w = \frac{d\phi'}{dt} = \frac{d\phi'}{ds}\frac{ds}{dt}, \quad v_c = V_c\dot{s}, \qquad w = \Omega\dot{s}.$$

Подставляя последние два равенства в формулу (15), имеем

$$\dot{s}^2 = V_c^2\dot{s}^2 + g'\Omega^2\dot{s}^2$$

или

$$V_c^2 + g'\Omega^2 = 1. \tag{36}$$

Используя это соотношение, выразим V_c и Ω через угол некоторый угол η следующим образом

$$V_c = \cos\eta = a, \quad \sqrt{g'}\Omega = \sin\eta = b, \tag{37}$$

где a и b константы, удовлетворяющие условию

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Соотношение (36) можно рассматривать как закон сохранения энергии системы, при этом V_c и $\sqrt{g'}\Omega$ могут принимать различные значения от нуля до единицы.

Группу движений метрики g_{ij} для различных V_c и $g'\Omega$ определяет матрица

$$a^i{}_j = \begin{pmatrix} \cos\eta & \sqrt{g'}\sin\eta \\ -\frac{1}{\sqrt{g'}}\sin\eta & \cos\eta. \end{pmatrix}$$

В следующей Беседе 7 будет показано, какую геометрию надо использовать, чтобы на геометрическом языке описывать вращательное движение в механике. Именно в этом случае в механике возникают торсионные поля и силы.