Беседа 7

Прошло 317 лет с тех пор, как мы описываем нерелятивистские механические эксперименты, происходящие "на столе" с помощью механики Ньютона. И хотя механика Ньютона обобщалась уже трижды; при создании специальной теории относительности, общей теории относительности и квантовой механики, существует возможность для ее дальнейшего обобщения.

Все новое - это хорошо забытое старое. Перед созданием основ механики Ньютона (1687 г.) Рене Декарт отстаивал точку зрения, что всякое движение есть вращение. Возрождая идеи Р.Декарта, построим нерелятивистскую (в смысле малых скоростей, по сравнению со скоростью света) механику, в которой все движения сводятся к вращению.

1 Преобразования Галилея и неголономные угловые координаты

В основе механики Ньютона лежат нерелятивистские преобразования Галилея-Ньютона

$$x'_\alpha = x_\alpha - V_\alpha t, \qquad t' = t \qquad V_\alpha = const, \tag{1}$$

$$\breve{\varphi}'_\beta = \breve{\varphi}_\beta + \breve{\vartheta}_\beta, \tag{2}$$

$$\alpha, \beta, ... = 1, 2, 3.$$

Соотношения (1) обычно представлены во всех учебниках и трактуются как взаимные преобразования координат и времени двух инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью V_α. Другое дело равенства (2), которые описывают поворот (а не вращение!) базисных векторов штрихованной инерциальной системы отсчета по отношению к исходной на постоянный угол $\breve{\vartheta}_\beta$. В (2) круглые кавычки над углами поставлены для того, чтобы подчеркнуть, что конечные углы не образуют вектора, поскольку, в отличие от трансляционных координат x_α, являются неголономными (не интегрируемыми) координатами. Математические и физические свойства голономных координат x_α и неголонмных координат $\breve{\varphi}_\beta$ различны.

Действительно, координаты x_1, x_2, x_3 образуют полярный вектор, а координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ не образуют вектора вообще. Вектор (аксиальный) образуют бесконечно малые приращения углов $d\varphi_1, d\varphi_2, d\varphi_3$.

В общем случае полярный и аксиальный вектора имеют различные законы преобразования; если любая из координат полярного вектора является скаляром, то координаты аксиального вектора являются псевдоскалярами. Это означает, что аксиальный вектор при поворотах преобразуется как полярный вектор при трансляциях, т.е. знак проекций этого вектора на координатные оси не меняется; при дискретном преобразовании, соответствующем инверсии координатных осей, проекции аксиального вектора не меняют своего знака, в то время как проекции полярного вектора меняют знак.

Координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ с указанными свойствами называются неголономными координатами (матрицы преобразования поворотов на конечный угол не коммутируют друг с другом) в отличие от голономных координат x_1, x_2, x_3. При движении в неголономных координатах результат двух поворотов на конечные углы, вообще говоря, зависит от последовательности этих поворотов. Для иллюстрации этого утверждения, рассмотрим два последовательных поворота вокруг осей x и z на углы 90° (рис. 1, 2).

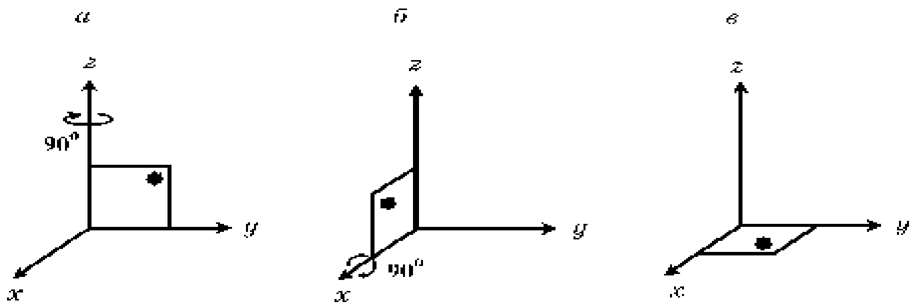

Рис. 1: Два последовательных поворота на угол 180° *а* – поворот на 90° по часовой стрелке вокруг оси z; *б* – то же,
вокруг оси x; *в* – результат двух последовательных поворотов

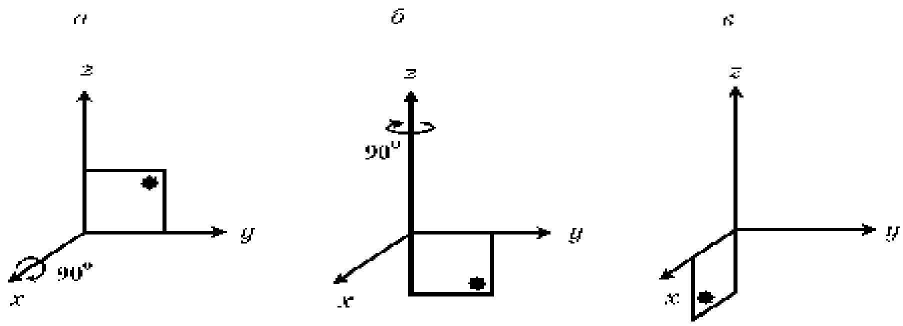

Рис. 2: Смена порядка последовательных поворотов на угол 180° *а* – поворот по часовой стрелке на угол 90° вокруг оси x; *б* – то же,
вокруг оси z; *в* – результат двух последовательных поворотов

Из рисунков видно, что результат двух конечных поворотов вокруг осей x и z

зависит от последовательности этих поворотов (положения квадрата со звездочкой в верхнем правом углу на рис.1, *в* и рис.2, *в* не совпадают).

Аксиальные вектора различаются ориентацией, и для их полного описания необходимо задавать ориентируемые многообразия, характеризуемые правыми и левыми системами отсчета. В ориентируемых многообразиях появляются правые и левые аксиальные вектора и всякий нулевой аксиальный вектор можно представить как пару аксиальных векторов, проекции которых различаются знаками.

Примером аксиального вектора является трехмерная угловая скорость ω, входящая во вращательные уравнения Эйлера. Этот вектор преобразуется не только в группе трансляций T_3 Галилея–Ньютона (1), но и в группе трехмерных поворотов $O(3)$, действующей на многообразии угловых координат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

2 Механика Декарта. Задание трансляционной скорости через псевдоевклидовы углы

Преобразования Галилея-Ньютона (1) и (2) имеют различную природу, а именно: трансляционные координаты x_α преобразуются в группе трансляций T_3, тогда как угловые переменные $\breve{\varphi}_\beta$ образуют группу поворотов $O(3)$. Переход из одной группы в другую невозможен, поскольку углы и трансляционные координаты, как мы показали, принципиально отличаются друг от друга. Тем не менее, в механике принято переходить из инерциальных в ускоренные системы отсчета (в том числе и во вращающиеся) с помощью трансляционных преобразований координат. Например, преобразования в ускоренную систему отсчета, которая движется с поступательным ускорением W_α (преобразования Д'Аламбера), имеют вид

$$x'_\alpha = x_\alpha - \frac{W_\alpha t^2}{2}. \tag{3}$$

Очевидно, что эти преобразования совершаются в группе трансляций T_3.

Запишем теперь преобразования, которые соответствуют переходу из инерциальной системы отсчета во вращающуюся. Пусть оси z этих систем совпадают. Тогда обычно используют следующие координатные преобразования

$$x' = x\cos\Omega t - y\sin\Omega t, \qquad y' = x\sin\Omega t + y\cos\Omega t, \qquad z' = z, \tag{4}$$

где Ω - угловая скорость вращения ускоренной системы отсчета относительно инерциальной. Если начало ускоренной системы отсчета связано с частицей массы m, то с помощью преобразований (3) и (4) получаем следующие уравнения движения (см. Е.Лифшиц, Л.Ландау "Механика", М., Наука, 1988.)

$$m\frac{dv'_\alpha}{dt} = -mW_\alpha + 2m\Omega_{\alpha\beta}v'^\beta.$$

Казалось бы, что для перехода во вращающуюся систему отсчета нам необходимо использовать преобразования в группе вращений $O(3)$, однако нам оказалось достаточно трансляционных преобразований. Иными словами, переход в ускоренные системы отсчета, которые движутся с трансляционным и вращательным ускорением, совершается с помощью трансляционных координатных преобразований. Так дело обстоит в обычной классической механике, основанной на механике Ньютона.

Мы перейдем к построению нерелятивистской механики Декарта, в которой любое движение есть вращение, а переход к произвольно ускоренным системам отсчета происходит в группе вращений $O(3.1)$. Это группа вращений четырехмерного (по количеству трансляционных координат - x_0, x_1, x_2, x_3) псевдоевклидова пространства с сигнатурой $(+ - - -)$ и шестью углами, из которых три угла $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ пространственные и три угла $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, пространственно-временные.

Теперь нерелятивистская скорость v_α будет задаваться как функция трех пространственно-временных углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Например, при движении вдоль оси x скорость v_x будет определятся через угол θ_x как (см. (рис. 3)

$$\frac{dx}{dt} = c\ th\ \theta_x, \tag{5}$$

где c - скорость света.

Внимание!

Механика Даламбера даже при скоростях, удовлетворяющих условию $v/c \ll 1$ требует введения четырехмерного псевдоевклидова пространства и, соответственно, скорости света.

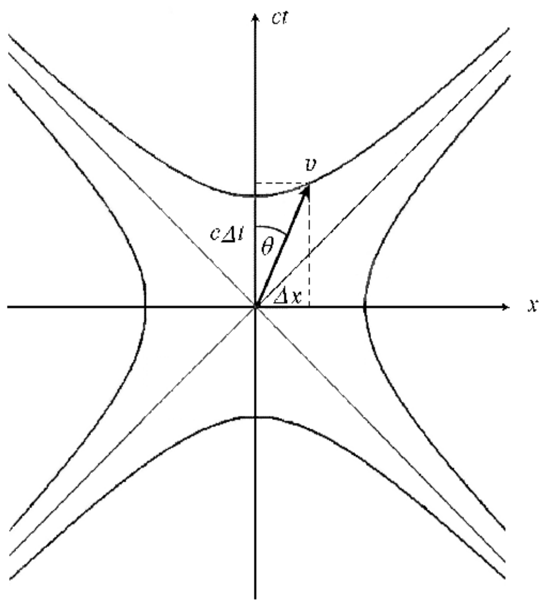

Рис. 3: Поступательное ускорение $W_x = dv_x/dt = c(th\dot{\theta}_x)$ вдоль оси x есть вращение в плоскости $ct - x$

При движении с поступательным ускорением вдоль оси x в приближении $v/c \ll 1$ мы имеем

$$W_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = c(th\dot{\theta}_x) = c\frac{d\theta_x(t)}{dt}. \qquad (6)$$

В механике Декарта вращение 4-D гироскопа описывается двумя матрицами, а именно, пространственное вращение малых грузов m задается матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi(t) & \sin\phi(t) & 0 \\ 0 & -\sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

а движение вдоль оси x описывает матрица

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -th\theta(t)_x & 0 & 0 \\ -th\theta(t)_x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

Только теперь становится понятно, почему такое простое механическое устройство, которое мы изучали в предыдущих Беседах, было названо

четырехмерным гироскопом .

Просто потому, что все его элементы вращаются в $4^{\text{х}}$ мерном пространстве механики Декарта.

В самом общем случае матрицы вращения 4-D гироскопа имеют вид

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{xx} & \cos\theta_{xy} & \cos\theta_{xz} \\ 0 & \cos\theta_{yx} & \cos\theta_{yy} & \cos\theta_{yz} \\ 0 & \cos\theta_{zx} & \cos\theta_{zy} & \cos\theta_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где $\cos\theta_{\alpha\beta}$ - направляющие косинусы пространственных углов, и

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где $\beta_\alpha = v_\alpha/c = th\theta_\alpha$, - "направляющие"гиперболические тангенсы, v_α - компоненты скорости,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \qquad (11)$$

- релятивистский фактор. При скоростях $v/c \ll 1$ матрица (10) упрощается, приобретая вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_x & -\beta_y & -\beta_z \\ -\beta_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

Если скорость движения v_α постоянна, то вместо преобразований Галилея-Ньютона (1) и (2) в механике Декарта мы имеем

$$x'_\alpha = x_\alpha - th\theta_\alpha t, \qquad t' = t \qquad \theta_\alpha = const, \tag{13}$$

$$\breve{\varphi}'_\beta = \breve{\varphi}_\beta + \breve{v}_\beta, \tag{14}$$

$$\alpha, \beta, ... = 1, 2, 3.$$

Образованный читатель может сказать - ну и что?. Просто другая запись преобразований Галилея-Ньютона в виде нерелятивистского предела преобразований Лоренца. На самом же деле, разница огромна:

1) Во-первых, в механике Даламбера в общем случае мы имеем десятимерное координатное многообразие - 4 голономных трансляционных координаты $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$ и шесть неголономных углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.

2)Во-вторых, пространство событий механики Декарта образуют не просто точки (как в механике Ньютона, специальной, общей теории относительности и квантовой механике) а **ориентируемые точки**.

3) В третьих, разница между преобразованиями Галилея-Ньютона (1), (2) и преобразованиями Декарта (13),(14) становится существенной, когда углы в матрицах (9) и (10) начинают зависеть от времени. Именно на этом этапе даже в нерелятивистской механике Декарта появляются **торсионные поля** порождающие в механике силы инерции, представляющие для физиков загадку со времен Ньютона.

4) В четвертых, такая "простая физика на столе", которую экспериментально демонстрирует 4-D гироскоп, находит разумное объяснение в рамках механики Декарта.

Предварительные замечания

Я думаю, что читателю нелегко расстаться с представлением о скорости линейного движения и рассматривать ее как элемент группы четырехмерных вращений. Я бы остался на старой точке зрения, если бы не впечатляющие следствия физики, построенной на основе механики Декарта. С моей точки точки зрения, наиболее значимым следствием такой физики явилось объединение классической и квантовой физики, при этом волновая функция в новой квантовой теории выражается через поля кручения пространства - через **торсионные поля Риччи**. Но об этом я буду рассказывать в последующих Беседах.