Беседа 8

1 Геометрия трехмерной нерелятивистской механики Декарта

В Беседе 7 мы выяснили что в механике Декарта пространство трансляционных координат становиться четырехмерным псевдоевклидовым пространством, в котором скорость движения определяется через псевдоевклидовы углы. Но это действительно так только в случае, когда **шесть углов группы вращений** $O(3.1)$ **постоянны**. Если же углы начинают зависеть от времени (случай ускоренного движения), то геометрия трансляционных координат оказывается псевдоримановой со структурой геометрии абсолютного параллелизма[1].

Мы, в педагогических целях, для начала рассмотрим частный случай трехмерный геометрии абсолютного параллелизма и на ее примере покажем, что в нерелятивистской физике при описании процессов, в которых угловые координаты переменны **всегда появляются торсионные поля Риччи** и возникает геометрия абсолютного параллелизма. Это означает, что геометрия пространства событий вращательного движения должна отличаться от геометрии Евклида, лежащей в основе ньютоновской механики.

Впервые над проблемой изменения трехмерной геометрии при вращении задумался А.Эйнштейн, который показал, что при трехмерном вращении диска отношение длины окружности l к ее радиусу R меньше 2π

$$\frac{l}{R} < 2\pi.$$

Это неравенство возникает из-за лоренцовых сокращений длины окружности при вращении диска, тогда как радиус остается неизменным.

Из неравенства следует, что внутренняя геометрия вращающегося диска не является геометрией Евклида (в геометрии Евклида выполняется равенство $l/R = 2\pi$), а соответствует геометрии Лобачевского отрицательной кривизны.

Подход А.Эйнштейна к геометрии пространства событий вращательного движения не может быть принят, с точки зрения автора, из-за отсутствия в его модели

[1]Геометрия абсолютного параллелизма определяется как геометрия, у которой полный тензор кривизны S^{i}_{jkm} равен нулю, но тензор римановой кривизны R^{i}_{jkm} может быть отличен от нуля. У этой геометрии всегда отлично от нуля кручение Риччи $\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}$. Кручение Риччи обращается в нуль только тогда, когда углы в группе $O(3.1)$ постоянны. В этом случае геометрия абсолютного параллелизма совпадает с геометрией Минковского (более подробно см. математическую часть II книги "Теория физического вакуума", М., Наука, 1997).

двух основополагающих фактов. Во-первых, в теории Эйнштейна при описании вращения не используются угловые координаты (напомним, что в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве их должно быть шесть). Во-вторых, лоренцовы сокращения представляют собой релятивистский эффект, в то время как изменение геометрии наблюдается при малых скоростях вращения. Действительно, представим себе резиновый диск, на который нанесена декартова координатная сетка. Пусть теперь диск вращается вокруг оси, проходящей через его центр. В результате вращения диска мы увидим искажения координатной сетки, причем эти искажения будут тем сильнее, чем дальше мы находимся от оси вращения. Вопрос состоит в том, чтобы описать свойства внутренней геометрии диска, которая порождена его вращением и которая учитывает угловые координаты (в данном случае их должно быть три).

2 Трехмерная ориентируемая точка в механике Декарта. Вращательная и трансляционная метрики

Геометрия Евклида, лежащая в основе классической механики Ньютона, базируется на точечном многообразии. На таком многообразии существует только одна трансляционная метрика

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

С другой стороны, в механике Декарта вращение составляет ее основу, поэтому ее теоретическую базу невозможно построить, используя точечное многообразие механики Ньютона.

Что такое материальная точка в механике Ньютона? Представим себе шарик радиуса r и массы m. Устремим теперь радиус шарика к нулю, тогда в пределе мы будем иметь точку, совпадающую с центром масс шарика, в котором будет сосредоточена вся масса шарика m. С таким "идеальным"объектом работает механика Ньютона.

Понятно, что материальная точка Ньютона не в состоянии описывать собственное вращение точки. Поэтому в механике Декарта элементарным объектом является **ориентируемая материальная точка.** Что это такое?

Представим себе тот же шарик, но мы теперь жестко свяжем с ним три единичных базисных вектора $\mathbf{e}_A,\ A = 1, 2, 3$. Если шарик меняет свою ориентацию относительно какой-либо базисной системы, то это изменение можно выразить через изменение направления единичных векторов, связанных с ним. Опять устремим радиус шарика к нулю. В пределе мы получим ориентируемую точку. Многообразие ориентируемых точек механики Декарта гораздо богаче, чем точечное многообразие ньютоновской механики. Кроме того, на многообразии ориентируемых точек существует, дополнительно к трансляционной метрике dl^2 вращательная метрика

$$d\nu^2 = d\chi_{\alpha\beta} d\chi^{\alpha\beta},$$

где $d\chi_{\alpha\beta} = -d\chi_{\beta\alpha}$ - бесконечно малые изменения пространственных углов. Докажем это утверждение.

Итак, под трехмерной ориентируемой точкой подразумевается точка, снабженная ортогональным репером. Такой объект можно наделить массой и моментом инерции, рассматривая его как вращающееся твердое тело бесконечно малых размеров.

Для описания пространства событий динамики ориентируемой точки рассмотрим шестимерное многообразие координат $x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Его удобно представить как *векторное расслоение*[2] с базой, образованной трансляционными координатами x_1, x_2, x_3 и слоем, заданным в каждой точке x_a $(a = 1, 2, 3)$ ортонормированными реперами

$$\mathbf{e}_A, \qquad\qquad A = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где A означает номер вектора репера. Фактически любой из реперов $\mathbf{e}_A$ является математическим представлением трехмерной произвольно ускоренной системы отсчета - трехмерной ориентируемой точки.

Согласно теореме Эйлера, бесконечно малые повороты вокруг трех осей репера (1) можно заменить одним поворотом на угол $\mathbf{d\chi}$ вокруг определенной оси, проходящей через начало репера O. Бесконечно малый поворот (в отличие от конечного поворота) можно задать вектором

$$\mathbf{d\chi} = d\chi \mathbf{e}_\chi,$$

где вектор $\mathbf{e}_\chi$ направлен вдоль мгновенной оси вращения системы отсчета. Это направление выбирается так, что если смотреть с конца вектора $\mathbf{e}_\chi$ на неподвижную точку O, то поворот совершается против часовой стрелки (правая система отсчета).

Бесконечно малое изменение векторов репера $\mathbf{e}_\chi$ при повороте $\mathbf{d\chi}$ имеет вид

$$d\mathbf{e}_A = [\mathbf{d\chi}\mathbf{e}_A]. \tag{2}$$

Если разделить (2) на dt, то мы получим

$$\frac{d\mathbf{e}_A}{dt} = [\frac{\mathbf{d\chi}}{dt}\mathbf{e}_A] = [\omega\, \mathbf{e}_A], \tag{3}$$

где $\omega = \mathbf{d\chi}/dt$ – трехмерная угловая скорость вращения системы отсчета относительно мгновенной оси. Выбирая ортогональный репер

$$a) \qquad e^A{}_\alpha e^\alpha_B = \delta^A{}_B = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & A = B \\ 0 & A \neq B \end{array} \right. , \tag{4}$$

$$б) \qquad e^A{}_\alpha e^\beta{}_A = \delta_\alpha{}^\beta = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{array} \right. ,$$

$$A, B... = 1, 2, 3, \qquad\qquad \alpha, \delta, \beta = 1, 2, 3,$$

где $\alpha, \delta, \beta...$ – векторные индексы, а $A, B...$ – номер вектора, можно записать соотношения (2) и (3) как

$$de^A{}_\alpha = d\chi^\beta{}_\alpha e^A{}_\beta, \tag{5}$$

[2] Термин «векторное расслоение» принят в математике.

$$\frac{de^A{}_\alpha}{dt} = \frac{d\chi^\beta{}_\alpha}{dt} e^A{}_\beta. \tag{6}$$

Умножая равенство (5) на $e^\beta{}_A$ и используя условия ортогональности (4), получим

$$d\chi^\beta{}_\alpha = e^\beta{}_A de^A{}_\alpha. \tag{7}$$

Дифференцируя условия ортогональности (4), получим

$$e^A{}_\alpha de_{\beta A} + e_{\beta A} de^A{}_\alpha = 0,$$

откуда

$$d\chi_{\alpha\beta} + d\chi_{\beta\alpha} = 0.$$

Следовательно,

$$d\chi_{\alpha\beta} = -d\chi_{\beta\alpha}. \tag{8}$$

Величины (8) описывают бесконечно малый поворот трехмерной системы отсчета и определяют трехмерную **вращательную метрику**

$$d\nu^2 = d\chi_{\alpha\beta} d\chi^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

заданную на группе трехмерных вращений $O(3)$, действующей на множестве координат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Умножая (6) на $e^\beta{}_A$ и используя условия ортогональности (4), находим

$$\frac{d\chi^\beta{}_\alpha}{dt} = e^\beta{}_A \frac{de^A{}_\alpha}{dt} = \omega^\beta{}_\alpha,$$

причем тензор угловой скорости вращения системы отсчета

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$$

связан с компонентами вектора $\omega = \mathbf{d}\boldsymbol{\chi}/dt = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ следующим образом:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} = -\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Геометрия абсолютного параллелизма A_3 и кручение Риччи

Запишем равенство (7) в виде

$$d\chi_{\beta\alpha} = e_{\beta A} de^A{}_\alpha = e_{A\alpha} \frac{\partial e^A{}_\beta}{\partial x^\gamma} dx^\gamma$$

и введем обозначение

$$\Delta^\alpha{}_{\beta\gamma} = e^\alpha_A e^A{}_{\beta,\gamma}, \qquad , \gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}. \tag{10}$$

В результате мы получим локальную связь между дифференциалами координат базового пространства dx^α и дифференциалами координат касательного аффинного пространства $d\chi_{\beta\alpha}$ в виде

$$d\chi^{\alpha}{}_{\beta} = \Delta^{\alpha}{}_{\beta\gamma} dx^{\gamma}, \tag{11}$$

где величины $\Delta^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ представляют собой локальную связность аффинного пространства - **связность геометрии абсолютного параллелизма**. Как и всякая связность, она имеет нетензорный закон преобразования относительно трансляционных координатных преобразований

$$\Delta^{\gamma'}{}_{\beta'\alpha'} = \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} \Delta^{\gamma}{}_{\beta\alpha}.$$

Если теперь мы образуем с помощью связности (10) тензор кривизны, то он оказывается равным нулю

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma\eta} = 2\Delta^{\alpha}{}_{\beta[\eta,\gamma]} + 2\Delta^{\alpha}{}_{\rho[\gamma} \Delta^{\rho}_{|\beta|\eta]} = 0.$$

По определению, пространство с нулевым тензором кривизны называется *пространством абсолютного параллелизма*, а соотношение (10) определяет связность абсолютного параллелизма.

Частным случаем пространства абсолютного параллелизма является плоское евклидово пространство. Действительно, из формулы (11) видно, что когда вращение отсутствует ($d\chi^{\alpha}{}_{\beta} = 0, \quad dx^{\gamma} \neq 0$), связность $\Delta^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ обращается в нуль, при этом пространство абсолютного параллелизма переходит в евклидово.

В рассматриваемом нами примере локальный метрический тензор базы задан на множестве трансляционных декартовых координат x^α. В общем случае произвольных криволинейных трансляционных координат его можно представить как

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{AB} e^{A}{}_{\alpha} e^{b}{}_{\beta}, \qquad \eta_{AB} = \eta^{AB} = \mathrm{diag}(1, 1, 1),$$

а трансляционный интервал в виде

$$dl^2 = \overset{0}{g}_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta} = \eta_{AB} e^{A}{}_{\alpha} e^{b}{}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}\ . \tag{12}$$

В произвольных трансляционных координатах связность (10) запишется как

$$\Delta^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = e^{\alpha}_{A} e^{A}{}_{\beta,\gamma},$$

где

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{\alpha\eta} (\overset{0}{g}_{\beta\eta,\gamma} + \overset{0}{g}_{\gamma\eta,\beta} - \overset{0}{g}_{\beta\gamma,\eta}) \tag{13}$$

– символы Кристоффеля,

$$T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = -\Omega^{\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma} + \overset{0}{g}{}^{\alpha\eta} (\overset{0}{g}_{\beta\rho}\, \Omega^{\cdot\cdot\rho}_{\eta\gamma} + \overset{0}{g}_{\gamma\rho}\, \Omega^{\cdot\cdot\rho}_{\eta\beta}) \tag{14}$$

– коэффициенты вращения Риччи,

$$\Omega^{\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma} = -\Delta^{\alpha}{}_{[\beta\gamma]} = -\frac{1}{2} e^{\alpha}_{A} (e^{A}{}_{\beta,\gamma} - e^{A}{}_{\gamma,\beta}) \tag{15}$$

– **кручение Риччи**.

Этот объект отличен от нуля именно тогда, когда при описании динамики вращательного движения возникают угловые неголономные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ как функции координат и времени.

Таким образом, пространство событий механики Декарта, описывает поступательные и вращательные степени свободы произвольно ускоренной трехмерной системы отсчета. Оно наделено трехмерной геометрией абсолютного параллелизма (геометрией A_3). В отличие от привычной нам поступательной теории относительности новая теория имеет две метрики: вращательную (9) и трансляционную (12). Эти метрики отражают существование соответственно вращательной и поступательной относительности для уравнений движения механики Декарта.

4 Относительность вращения

Геометрия Евклида представляет собой разновидность геометрии абсолютного параллелизма, поскольку ее кривизна равна нулю. Геометрия пространства событий со связностью (10) также имеет нулевую кривизну, но в отличие от геометрии Евклида *обладает не нулевым кручением*. Кручение пространства (англ. *torsion*) со связностью (10) порождается кручением Риччи (15), и связано с геометрическим описанием вращательного движения и вращательной относительностью в механике Декарта. Когда кручение (15) равно нулю, неголономные вращательные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ как динамические переменные отсутствуют, и мы получим евклидово пространство со связностью

$$\Delta^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = e^{\alpha}_{A} e^{A}{}_{\beta,\gamma}$$

и трансляционной метрикой (12). Вращательная метрика (9), которая в произвольных криволинейных координатах записывается в виде

$$d\nu^2 = d\chi^{\beta}{}_{\alpha} d\chi^{\alpha}{}_{\beta} = e^{\beta}{}_{A} De^{A}{}_{\alpha} e^{\alpha}{}_{A} De^{A}{}_{\beta} \;= T^{A}{}_{B\alpha} T^{B}{}_{A\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}, \tag{16}$$

где D – абсолютный дифференциал относительно символов Кристоффеля (13), вырождается в нуль.

В дальнейшем **мы будем называть торсионным полем коэффициенты вращения Риччи** (14), поскольку именно они определяют вращательные (торсионные) взаимодействия физических объектов. Относительно произвольных трансляционных преобразований координат вида $dx^{\alpha} = (\partial x^{\alpha}/\partial x^{\alpha'}) dx^{\alpha'}$ торсионное поле ведет себя как тензор

$$T^{\gamma'}{}_{\beta'\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} T^{\gamma}{}_{\beta\alpha}.$$

Запишем теперь торсионное поле $T^{\alpha}_{\beta\gamma}$ в «координатах слоя» с помощью преобразования

$$T^{A}_{B\gamma} = e^{A}{}_{\alpha} T^{\alpha}_{\beta\gamma} e^{\beta}{}_{B}. \tag{17}$$

По индексам слоя $A, B \dots$ величины (17) имеют нетензорный закон преобразования

$$T^{A'}_{\ B'\gamma} = \Lambda^{A'}_{\ A} T^{A}_{\ B\gamma} \Lambda^{B}_{\ B'} + \Lambda^{A'}_{\ A} \Lambda^{A}_{\ B',\gamma}, \tag{18}$$

где матрицы $\Lambda^{A'}_{\ A}$ образуют группу вращений $O(3)$

$$\Lambda^{A'}_{\ A} \in O(3).$$

Используя правило перехода (17), запишем равенство (11) в локальных индексах $A, B \dots$

$$d\chi^{A}_{\ B} = T^{A}_{\ B\gamma} dx^{\gamma}.$$

Разделив это соотношение на dt, получим трехмерную угловую скорость вращения системы отсчета $\omega^{A}_{\ B}$, записанную в «координатах слоя»

$$\omega^{A}_{\ B} = \frac{d\chi^{A}_{\ B}}{dt} = T^{A}_{\ B\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{dt}. \tag{19}$$

Поскольку в этом соотношении торсионное поле $T^{A}_{\ B\gamma}$ можно обратить в нуль с помощью преобразований в группе $O(3)$, то и *угловая скорость* $\omega^{A}_{\ B}$ *является величиной относительной.*

Заметим, что соотношение (19) устанавливает связь между поступательной скоростью $v^{\gamma} = dx^{\gamma}/dt$ начала O и угловой скоростью $\omega^{A}_{\ B}$ произвольно ускоренной системы отсчета. Эту связь обеспечивает величина $T^{A}_{\ B\gamma}$.

Перепишем теперь уравнения (6) в локальных индексах. Для этого необходимо использовать преобразования вида (17) и условия ортогональности (4). Окончательно получим следующие уравнения:

$$\frac{de^{A}_{\ \alpha}}{dt} = \omega^{A}_{\ \ B} e^{B}_{\ \alpha} \ = T^{A}_{\ B\gamma} e^{B}_{\ \alpha} \frac{dx^{\alpha}}{dt}. \tag{20}$$

Они представляют собой вращательные уравнения движения в локальных индексах. Используя угловые координатные преобразования в группе $O(3)$, можно обратить величины $T^{A}_{\ B\alpha}$ в нуль в силу нетензорного закона преобразования (18). В результате вращательные уравнения (20) принимают вид

$$\frac{de^{A}_{\ \alpha}}{dt} = \omega^{A}_{\ B} e^{B}_{\ \alpha} \ = 0, \tag{21}$$

который соответствует инерциальному движению системы отсчета.

Действительно, выберем вектора триады $e^{B}_{\ \alpha}$ так, чтобы вектор $\mathbf{e}_1$ был касательным в произвольной точке М на некоторой физической траектории

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \tag{22}$$

тогда из (21) следуют уравнения инерциального движения:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0.$$

Обращение в нуль угловой скорости вращения физически означает, что мы перешли с помощью преобразования углов к системе отсчета, жестко связанной с вращающимся телом отсчета.

5 Уравнениях Френе как простейшие вращательные уравнения механики Декарта

После того как вектор $\mathbf{e}_1$ выбран в виде (22), уравнения (20) могут быть расписаны как

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dl} = \kappa(l)\mathbf{e}_2, \tag{23}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dl} = -\kappa(l)\mathbf{e}_1 \ + \chi(l)\mathbf{e}_3, \tag{24}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{dl} = -\chi(l)\mathbf{e}_2, \tag{25}$$

где $\kappa(l)$ – кривизна кривой, $\chi(l)$ – кручение кривой, а l – длина кривой. Эти уравнения были получены французским математиком Ж.Френе в середине прошлого века. Сравнивая уравнения Френе с вращательными уравнениями (20), получим связь между торсионным полем $T^A_{B\gamma}$, кривизной и кручением

$$\kappa(l) = \omega^{(1)}{}_{(2)} = T^{(1)}{}_{(2)\gamma}\frac{dx^\gamma}{dl},$$

$$\chi(l) = \omega^{(2)}{}_{(3)} = T^{(2)}{}_{(3)\gamma}\frac{dx^\gamma}{dl}.$$

Кроме того,

$$\frac{dx^\gamma}{dl} = e^\gamma{}_{(1)}$$

и

$$e^\gamma{}_{(1)}e_\gamma{}^{(1)} = 1.$$

С помощью этих соотношений вращательная метрика (9) для пространства, в котором кривые обладают кривизной и кручением, принимает вид

$$d\nu^2 = -(\kappa^2 + \chi^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{26}$$

Единичный вектор $\mathbf{e}_1$

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{e}_1 \ , \quad \left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right| = 1 \tag{27}$$

выбирается касательным к кривой в точке М, определяющей начало трехмерной системы отсчета.

Единичный вектор $\mathbf{e}_2$ направлен по главной нормали, а вектор бинормали $\mathbf{e}_3$ определяется как

$$\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2].$$

Дифференцируя уравнения Френе (23) и (24) по l и используя условия ортогональности векторов триады, получим уравнения

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dl^2} = \kappa(l)\mathbf{e}_2 \ , \tag{28}$$

$$\frac{d^3\mathbf{x}}{dl^3} = \frac{d\kappa(l)}{dl}\mathbf{e}_2 - \kappa^2(l)\mathbf{e}_1 + \kappa(l)\chi(l)\mathbf{e}_3 \ , \tag{29}$$

описывающие движение начала триады (движение точки М).

Мы сразу отметим, что единичная скорость (27) изменяется лишь при вращении вектора $\mathbf{e}_1$, как это и должно быть в механике Декарта.

Из приведенных выше уравнений видно, что кривизна и кручение в уравнениях Френе выражаются через торсионные поля (17) и определяют вращательную метрику геометрии абсолютного параллелизма.

Отметим, что кривизна и кручение кривой Френе (правильнее было бы их назвать первым и вторым кручением, поскольку они выражаются через компоненты торсионного поля) *являются инвариантами относительно произвольных преобразований трансляционных координат x_α, но ведут себя как относительные величины при преобразованиях в группе трехмерных вращений $SO(3)$.*

6 Кинематическая интерпретация кривизны и кручения в уравнениях Френе

Рассмотрим ориентируемую материальную точку, которая движется по произвольной кривой

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{l}).$$

Пусть эта кривая описывается уравнениями Френе (23-25). Для того, чтобы выяснить физический смысл кривизны и кручения рассмотрим два важных предельных случая: а) $\kappa \neq 0$, $\chi = 0$ и б) $\kappa = 0$, $\chi \neq 0$.

6.1 Кривые с $\kappa \neq 0$, $\chi = 0$

Уравнения (23-25) в этом случае принимают вид

$$\text{а)}\ \frac{d\mathbf{e}_1}{dl} = \kappa(l)\mathbf{e}_2 \ , \quad \text{б)}\ \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} = -\kappa(l)\mathbf{e}_1 \ , \quad \text{в)}\ \frac{d\mathbf{e}_3}{dl} = 0 \ , \tag{30}$$

$$\text{а)}\ \frac{d^2\mathbf{x}}{dl^2} = \kappa(l)\mathbf{e}_2 \ , \quad \text{б)}\ \frac{d^3\mathbf{x}}{dl^3} = \frac{\kappa(l)}{dl}\mathbf{e}_2 - \kappa^2(l)\mathbf{e}_1 \ . \tag{31}$$

Кривые, описываемые этими уравнениями, являются "плоскими", поскольку все ее точки лежат в одной плоскости. Из механики известно, что при движении частиц в полях с центральной симметрией по траекториям, лежащим в одной плоскости, выполняется закон сохранения орбитального момента.

Производная

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v},$$

где t – время, определяет скорость движения материальной точки (скорость движения начала репера Френе) по траектории. Это соотношение можно записать как

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dl}\frac{dl}{dt} = \mathbf{e}_1\frac{dl}{dt}. \tag{32}$$

Поскольку $\mathbf{e}_1$ – единичный вектор, то

$$|\mathbf{v}| = \frac{dl}{dt} = v.$$

Полное ускорение $\mathbf{w} = d^2\mathbf{x}/dt^2$ запишется как

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dl^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \mathbf{e}_1\frac{d^2l}{dt^2}. \tag{33}$$

Используя уравнения Френе, получим из (33)

$$\mathbf{w} = \mathbf{e}_2\kappa\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \mathbf{e}_1\frac{d^2l}{dt^2} = \mathbf{e}_2\kappa v^2 + \mathbf{e}_1\frac{dv}{dt}. \tag{34}$$

Из соотношения (34) видно, что ускорение раскладывается на сумму двух слагаемых, одно из которых является касательным и называется *тангенциальным ускорением*

$$\mathbf{w}_\tau = \mathbf{e}_1\frac{dv}{dt},$$

а другое направлено по главной нормали

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{e}_2\kappa v^2$$

и называется *нормальным ускорением.* Из последнего соотношения видно, что *кривизна кривой определяет нормальное ускорение ориентируемой материальной точки.*

6.2 Кривые с $\kappa = 0$, $\chi \neq 0$

В этом случае уравнения (23-25) запишутся как

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dl} = 0\ , \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{dl} = \chi(l)\mathbf{e}_3\ , \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{dl} = -\chi(l)\mathbf{e}_2\ , \tag{35}$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dl^2} = 0\ , \quad \frac{d^3\mathbf{x}}{dl^3} = 0\ . \tag{36}$$

Поскольку уравнения (36) этой системы описывают движение точки M (движение начала трехгранника Френе), то мы видим, что кривая в этом случае является "прямой", вдоль которой направлен касательный вектор $\mathbf{e}_1$. При движении точки M вдоль этой "прямой"вектора $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ вращаются в плоскости перпендикулярной вектору $\mathbf{e}_1$.

Используя соотношение $dl/dt = v$, перепишем вращательные уравнения (35) в виде

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = 0\ , \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \omega\mathbf{e}_3\ , \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = -\omega\mathbf{e}_2\ , \tag{37}$$

где

$$\omega = v\chi \tag{38}$$

– собственная угловая скорость вращения ориентируемой материальной точки. Таким образом,

собственное 3^{X} мерное вращение ориентируемой материальной точки в механике Декарта описывается кручением кривой Френе, которое определяется через торсионное поле Риччи в соответствии с формулой

$$\chi(l) = \omega^{(2)}{}_{(3)} = T^{(2)}{}_{(3)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{dl}.$$

7 Картан и торсионные поля Риччи

Впервые о связи собственного вращения материальных объектов с торсионными полями Риччи была отмечена в работе Э.Картана (Cartan E., Compt.Rend., 174, 437,1922). Для доказательства этого утверждения, я привожу часть текста его работы со своими комментариями.

"В пространствах с кривизной и кручением метод подвижного трехгранника (3^{X} мерной ориентируемой точки)[3] позволяет, как и в евклидовом пространстве, построить кривизну линий (а так же поверхностей). Прямая линия будет характеризоваться тем свойством, что во всех ее точках (относительная) кривизна равна нулю, т.е. на малых отрезках она сохраняет одно и тоже направление. *Но теперь прямая линия не будет обязательно кратчайшим путем из одной точки в другую* - она будет им лишь в пространствах без кручения и, как исключение - в некоторых пространствах с кручением. (После этих слов Э.Картан начинает излагать случай, который соответствует уравнениям (35)- (38) нашей Беседы)[4]

Приведем очень простой пример. Представим себе пространство E, каждая точка которого поставлена в соответствие точке евклидова пространства E,(сравниваются пространство абсолютного параллелизма A_3 с геометрией Евклида E_3)[5] причем так, что длины сохраняются. Различие между этими пространствами будет таким: два прямоугольных трехгранника с бесконечно близкими вершинами M и M' в пространстве E будут параллельными, тогда как соответствующие трехгранники в пространстве E получаются один из другого в результате винтового перемещения с заданным шагом и в заданном направлении (например, в направлении правого винта) около прямолинейной оси, соединяющей их вершины. Введенное таким образом пространство допускает 6-параметрическую группу преобразований (трансляции T_3 и вращения $O(3)$, заданные, соответственно, на многообразии трех трансляционных координат x, y, z и трех пространственных углах $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$)[6]. Это будет наше обычное пространство, рассматриваемое наблюдателем, все восприятия которого "закручены". В механике это соответствует среде с постоянным давлением и постоянным крутящим моментом".

[3] Примечание автора.
[4] Примечание автора.
[5] Примечание автора.
[6] Примечание автора.

Последнее предложение породило в науке тысячи теоретических работ по поиску эффектов кручения в явлениях физики. Однако большинство этих работ использует кручение Картана $S_{jk}^{\cdot\cdot i}$, которое было введено Картаном несколько лет спустя. Отличие между кручением Риччи $\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i}$ и кручением Картана $S_{jk}^{\cdot\cdot i}$ существенно: кручение Картана не образует вращательной метрики (16) и не зависит от угловых переменных. Поэтому никак нельзя (по крайней мере, на сегодняшний день) связать кручение Картана с вращением физических объектов. Сам Картан, как мы только что показали, указывает на связь физического вращения именно с кручением Риччи и с торсионными полями Риччи.