О НАБЛЮДЕНИИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ИНЕРЦИИ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Шипов Г.И., Сидоров А.Н.

Пусть мы имеем уравнения движения частицы с массой m в силовом поле с потенциальной энергией U, записанные в инерциальной системе

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \,. \tag{1}$$

В произвольно ускоренной системе отсчета эти уравнения запишутся как

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,]] - 2m[\vec{\omega}\vec{v}\,] - m[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\,] \,, \tag{2}$$

где $\vec{W}$ - поступательное ускорение начала ускоренной системы и $\vec{\omega}$ - угловая скорость ее вращения. В правой части уравнений (2) стоят 4 силы инерции, действующие на частицу в ускоренной системе. Спрашивается, можем ли мы наблюдать действие сил инерции, находясь в инерциальной системе отсчета? Ответ - да можем. Достаточно увидеть, например, как изменяется геометрия вращающегося диска в зависимости от типа вращения (см. рис.1)

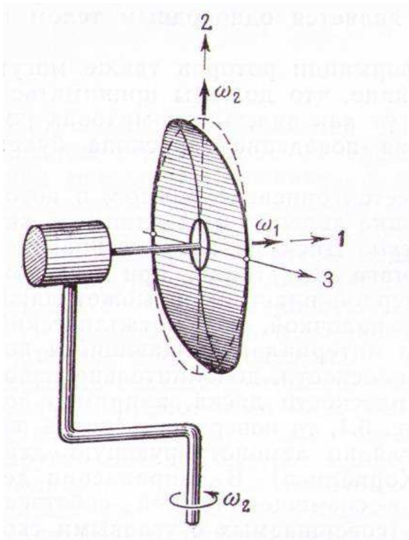

Рис.1. Изменение геометрии диска, вращающегося относительно осей 1 и 2

Казалось бы, что ответ на вопрос очевиден и здесь нет никаких проблем. Однако, не все так просто, как казалось бы, если вспомнить, что силы инерции:

а) не удовлетворяют 3-му закону механики Ньютона [1];

б) меняют геометрию пространства и имеют полевую природу [2];

в) действуют внутри ускоренных тел.

Эти свойство сил инерции выводит их за рамки некоторых теорем механики Ньютона. Например, их действие может привести к изменению скорости центра масс механической системы, свободной от действия обычных ньютоновских сил [3].

В самом деле, запишем уравнения Эйлера, описывающие вращение свободного абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки, в ускоренной системе отсчета, жестко связанной с твердым телом [4]

$$\frac{d'\vec{P}}{dt} + [\vec{\omega}\,\vec{P}] = 0 \quad , \tag{3}$$

$$\frac{d'\vec{L}}{dt} + [\vec{\omega}\vec{L}] = 0. \tag{4}$$

Выберем оси ускоренной системы отсчета так, чтобы они совпадали с главными осями инерции тела, тогда

$$L_1 = I_1\omega_1 \ , \ L_2 = I_2\omega_2 \ , \ L_3 = I_3\omega_3 . \tag{5}$$

Покомпонентная запись уравнений (3) и (4) имеет вид

$$M\frac{d'V_1}{dt} = -M\omega_2 V_3 + M\omega_3 V_2 \ , \tag{6a}$$

$$M\frac{d'V_2}{dt} = -M\omega_3 V_1 + M\omega_1 V_3 \ , \tag{6b}$$

$$M\frac{d'V_3}{dt} = -M\omega_1 V_2 + M\omega_2 V_1 \ , \tag{6c}$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{(I_3 - I_2)}{I_1}\omega_2\,\omega_3 \ , \tag{7a}$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{(I_1 - I_3)}{I_2}\omega_1\,\omega_3 , \tag{7b}$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = -\frac{(I_2 - I_1)}{I_3}\omega_1\,\omega_2 . \tag{7c}$$

Из уравнений (6) и (7) видно, что, в общем случае, скорость центра масс и угловая скорость вращающегося твердого тела не постоянна, даже если на него не действуют внешние силы и моменты внешних сил. Заметим, что этот вывод противоречит первому закону механики Ньютона.

Рассмотрим случай, когда $I_1 = I_2$ (симметричное относительно оси вращения твердое тело - гироскоп). При этом условии уравнение (7c) принимает вид

$$\frac{d\omega_3}{dt} = 0, \quad \omega_3 = \omega_0 = const, \tag{8}$$

а (7a) и (7b) запишутся как

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\Omega\,\omega_2 \ , \tag{8a}$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \Omega\,\omega_1 = 0 \ , \tag{8b}$$

где мы ввели обозначение

$$\Omega = \omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} \quad . \tag{9}$$

Решение уравнений (8a) и (8b) имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= C\cos\Omega t \ , \\ \omega_2 &= C\sin\Omega t \ , \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$C = \sqrt{\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2} = const. \tag{11}$$

Подставляя (8) и (10) в уравнения (6 a,b,c), имеем

$$M\frac{d'V_1}{dt} = M\left(-C\sin\Omega t\ V_3 + \omega_0 V_2\right), \tag{12}$$

$$M\frac{d'V_2}{dt} = M\left(-\omega_0 V_1 + C\cos\Omega t V_3\right), \tag{13}$$

$$M\frac{d'V_3}{dt} = M\left(-C\cos\Omega t V_2 + C\sin\Omega t V_1\right), \tag{14}$$

Если начальная скорость V в уравнениях (12)-(14) отлична от нуля, то мы должны наблюдать изменение скорости центра масс свободного гироскопа, при этом полная энергия системы (поступательная + вращательная) сохраняется .

Сократив уравнения (12)-(14) на массу M и опуская (для простоты) штрих у дифференциала, представим их как

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dV_1}{dt} \\ \dfrac{dV_2}{dt} \\ \dfrac{dV_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & -C\sin\Omega t \\ -\omega_0 & 0 & C\cos\Omega t \\ C\sin\Omega t & -C\cos\Omega t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} . \qquad (15)$$

Общее решение системы уравнений (15) для скорости центра масс симметричного гироскопа с частотой вращения ω_0 и угловой частотой нутации Ω найдем в виде [5]

$$\vec{V}(t) = C_1\vec{v}_1(t) + C_2\vec{v}_2(t) + C_3\vec{v}_3(t), \qquad (16)$$

где

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} A_0\cos\Omega t \\ A_0\sin\Omega t \\ R_0 + 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} A_1 e^{i(\Omega-\beta)t} + B_1 e^{-i(\Omega+\beta)t} \\ -iA_2 e^{i(\Omega-\beta)t} + iB_1 e^{-i(\Omega+\beta)t} \\ (R_1 + R_2 + 1)e^{-i\beta t} \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} A_2 e^{i(\Omega+\beta)t} + B_2 e^{-i(\Omega-\beta)t} \\ -iA_2 e^{i(\Omega+\beta)t} + iB_2 e^{-i(\Omega-\beta)t} \\ (R_3 + R_4 + 1)e^{i\beta t} \end{pmatrix},$$

$\Omega = \omega_0(I_3 - I_1)/I_1$ - угловая частота нутации, I_3, $I_1 = I_2$ - главные моменты инерции

$$\beta = \sqrt{C^2 + (\Omega + \omega_0)^2 = const} \ , \ C = \sqrt{C\sin^2\Omega t + C\cos^2\Omega t} = const \ ,$$

$$A_0 = \frac{C^2R_0 - 2\omega_0^2}{C\omega_0}, \quad A_1 = \frac{CR_1}{2\omega_0} + \frac{\alpha(1-R_2) - \omega_0(1+R_2)}{2C} \ , \alpha = \sqrt{C^2 + \omega_0^2} \ ,$$

$$A_2 = \frac{CR_3}{2\omega_0} + \frac{\alpha(1-R_4) - \omega_0(1+R_4)}{2C},$$

$$R_1 = \frac{2\omega_0^2}{C^2} + \frac{2\omega_0(\sqrt{C^2\Omega^2 + (\Omega\omega_0 + \alpha^2)^2} - \alpha^2)}{C^2\Omega} \ ,$$

$$R_2 = -\frac{2(\alpha^2 + \Omega\omega_0)(\alpha^2 + \Omega\omega_0 + \sqrt{C^2\Omega^2 + (\Omega\omega_0 + \alpha^2)^2})}{C^2\Omega^2} - 1 \ ,$$

$$R_3 = \frac{2\omega_0^2}{C^2} - \frac{2\omega_0(\sqrt{C^2\Omega^2 + (\Omega\omega_0 + \alpha^2)^2} - \alpha^2)}{C^2\Omega} \ ,$$

$$R_4 = -\frac{2(\alpha^2 + \Omega\omega_0)(\alpha^2 + \Omega\omega_0 - \sqrt{C^2\Omega^2 + (\Omega\omega_0 + \alpha^2)^2})}{C^2\Omega^2} - 1 \, .$$

Константы C_1, C_2, C_3 в соотношении (16) определяются из начальных условий и удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A_0 & \dfrac{C}{\omega_0}R_1-\dfrac{\omega_0}{C}(R_2+1) & \dfrac{C}{\omega_0}R_3-\dfrac{\omega_0}{C}(R_4+1) \\ 0 & \dfrac{i\alpha}{C}(R_2-1) & \dfrac{i\alpha}{C}(R_4-1) \\ R_0+2 & R_1+R_2+1 & R_3+R_4+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \\ V_3(0) \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Рассмотрим случай : C=8, Ω=5, ω_0=100 и выберем начальные условия в виде

$$\vec{x}(0)=\begin{pmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \end{pmatrix}=\vec{0}, \quad \vec{V}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов при этих начальных условиях представлены на рис.2 и 3.

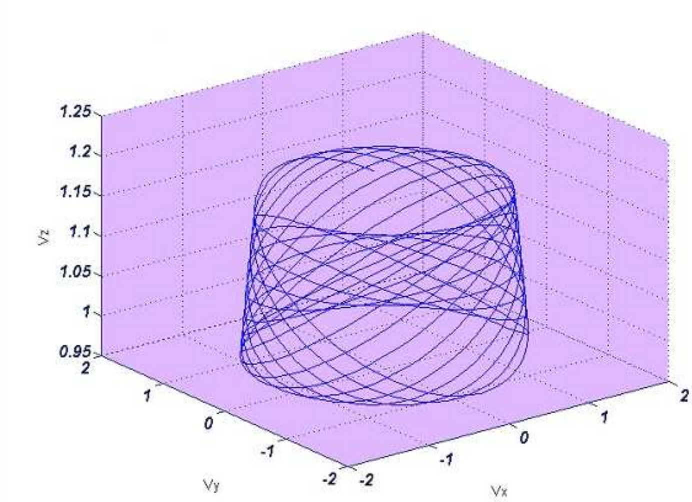

Рис.2. Изменение скорости центра масс свободного гироскопа при его нутации

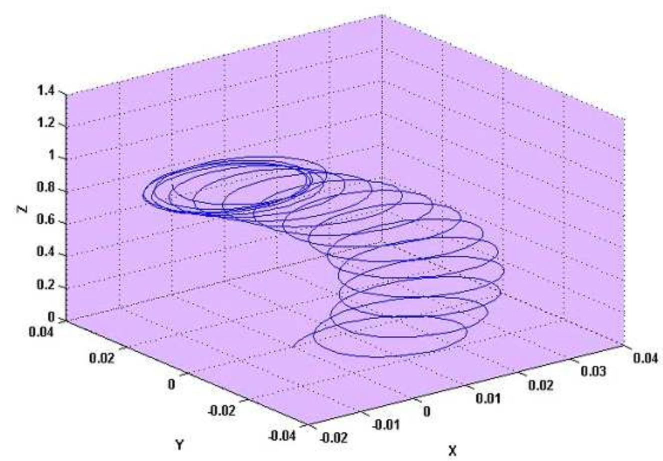

Рис.3. Изменение координат центра масс свободного гироскопа при его нутации

В этом примере константы C1=0.000162007609770, C2=0.000000131643299 + 0.000000142913486i, C3= - 0.036728116995517 + 0.039872468227959i. Все вычисления были выполнены в программе Matlab.

Из графиков на рис. 2 и 3 видно, что центр масс гироскопа, свободного от внешних сил и моментов, движется ускоренно. Этот факт показывает нам, что, в общем случае, движение центра масс свободного от внешнего воздействия гироскопа, не подчиняется первому закону механики Ньютона. Из этого факта можно сделать следующий вывод: *движение центра масс нутирующего свободного гироскопа происходит в соответствии с уравнениями геодезических неевклидовой геометрии.*

Исследование этого вопроса показало [2,3], что такой геометрией является геометрия абсолютного параллелизма [2], обладающая, в общем случае, римановой кривизной и кручением Риччи.

23.12.2011

Ссылки

1. *Ольховский И.И.//* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.

2. *Шипов Г.И.*// Теория Физического Вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.

3. *Шипов Г.И.*// 4D гироскоп в механике Декарта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13938, 26.10.2006. http://www.shipov-vacuum.com и http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/004a/02311026.htm

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: ГИФМЛ, 1958.

5. *Сидоров А.Н., Шипов Г.И.* «Об ускоренном движении центра масс свободного 3D гироскопа» http://www.shipov-vacuum.com