ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ НОНСЕНС ДЛИНОЮ В 267 ЛЕТ, КОТОРЫЙ ФИЗИКИ ПРЕДПОЧИТАЮТ НЕ ЗАМЕЧАТЬ

Шипов Г.И.

В своей знаменитой работе [1] Л. Эйлер нашел шесть уравнений движения абсолютно твердого тела. В частности он использовал понятие угловой скорости вращения материальной точки твердого тела, которая для тонкого диска записывается в виде простой формулы $\omega = v/r$, вошедшей во все школьные и вузовские учебники. Здесь v - линейная скорость материальной точки диска, r - расстояние от оси вращения диска до материальной точки. С тех пор никто из физиков не задумывался над тем, что эта формула содержит логические противоречия. Действительно, рассмотрим, например, простейшую формулу для угловой скорости движения массы m по окружности радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в плоскости $x,\ y$ со скоростью $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}$

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega(\psi(t))? = ?\frac{1}{r}v = \frac{1}{r(x(t), y(t))}v(x(t), y(t)). \tag{1}$$

С точки зрения формальной логики в соотношении (1) мы имеем нонсенс $? = ?$, поскольку «приравнивается» величина ω, зависящая от безразмерной неголономной угловой переменной $\psi(t)$ к величине v/r, зависящей от голономных координат $x(t), y(t)$, что противоречит математической логике. В соотношении (1) угловая скорость ω является псевдоскаляром. Его величина откладывается по оси z, ортогональной к плоскости x, y. Из соотношения (1) видно, что псевдоскаляр приравнивается к скаляру v/r, лежащему в плоскости $x,\ y$. Это тоже нонсенс, поскольку псевдоскаляр и скаляр имеют разные законы преобразования относительно дискретных преобразований координат (например, при переходе от правой системе отсчета к левой).

Умножая (1) на dt, получим бесконечно малый поворот в виде

$$d\psi ? = ? \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{r(x(t), y(t))} = \frac{ds}{r}. \tag{2}$$

Возводя правую и левую часть соотношения (2) в квадрат, получим вращательную метрику $d\tau^2$, связанную с трансляционной метрикой ds^2 как

$$d\tau^2 = (d\psi)^2 ? = ? \frac{1}{r^2} ds^2. \tag{3}$$

В работах автора [2,3] было показано, что указанные противоречия в соотношениях (1) снимаются, если для описания вращательного движения материи, вместо евклидовой геометрии механики Ньютона, ввести геометрию абсолютного параллелизма $A_3(3)$. В этой геометрии, кроме трансляционных координат x, y, z, заданы вращательные координаты φ, θ, ψ. На таком 6ти мерном многообразии координат $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ заданы две метрики: 1) трансляционная риманова метрика

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{AB} e^A{}_\alpha e^B{}_\beta dx^\alpha dx^\beta , \quad \eta_{AB} = \eta^{AB} = diag(1, 1, 1) , \tag{4}$$

$$\alpha, \beta, \gamma ... = 1, 2, 3, \; A, B, C ... = 1, 2, 3;$$

2) вращательная метрика

$$d\tau^2 = d\chi^\alpha{}_\beta d\chi^\beta{}_\alpha = T^\alpha{}_{\beta\gamma} T^\beta{}_{\alpha\sigma} dx^\gamma dx^\sigma = \Omega^\alpha{}_\beta \Omega^\beta{}_\alpha ds^2, \tag{5}$$

где

$$T^\beta{}_{\alpha\gamma} = e^\beta{}_A e^A{}_{\alpha,\gamma} = -e^A{}_\beta e^\alpha{}_{A,\gamma} , \quad ,\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} , \quad \Omega^\alpha{}_\beta = T^\alpha{}_{\beta\gamma} dx^\gamma \tag{6}$$

- торсионное поле геометрии $A_3(3)$, $e^A{}_\beta$ - триада Эйлера, которая удовлетворяет условиям ортогональности

$$e^A{}_\alpha e^\alpha{}_B = \delta^A{}_B, \quad e^A{}_\alpha e^\beta{}_A = \delta_\alpha{}^\beta , \tag{7}$$

$$\alpha, \beta, \gamma ... = 1, 2, 3, \; A, B, C ... = 1, 2, 3 .$$

Метрика (5) содержит объект неголономности [3]

$$\Omega^{..\beta}{}_{\alpha\gamma} = -T^\beta{}_{[\alpha\gamma]} = -\frac{1}{2} e^\beta{}_A (e^A{}_{\alpha,\gamma} - e^A{}_{\gamma,\alpha}) , \tag{8}$$

поэтому связь между дифференциалами трансляционных координат dx^γ и дифференциалами вращательных координат $d\chi_{\alpha\beta} = -d\chi_{\beta\alpha}$ в метрике (5) оказывается неголономной.
Вместо ошибочной метрики (3) необходимо использовать метрику (5), из которой следуют вращательные уравнения движения в виде

$$\frac{de^A{}_\alpha}{ds} = \Gamma^A{}_{B\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^B{}_\alpha + T^A{}_{B\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^B{}_\alpha , \tag{8}$$

где ds - дифференциал длинны дуги, $\Gamma^A{}_{B\gamma}$ - символы Кристоффеля, которые в декартовых координатах обращаются в нуль. В этом случае уравнения (8) принимают вид

$$\frac{de^{(1)}{}_\alpha}{ds} = T^{(1)}{}_{(2)\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^{(2)}{}_\alpha = \Omega^{(1)}{}_{(2)} e^{(2)}{}_\alpha , \tag{9}$$

$$\frac{de^{(2)}{}_\alpha}{ds} = T^{(2)}{}_{(1)\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^{(1)}{}_\alpha + T^{(2)}{}_{(3)\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^{(3)}{}_\alpha = \Omega^{(2)}{}_{(1)} e^{(1)}{}_\alpha + \Omega^{(2)}{}_{(3)} e^{(3)}{}_\alpha , \tag{10}$$

$$\frac{de^{(3)}{}_\alpha}{ds} = T^{(3)}{}_{(2)\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^{(2)}{}_\alpha = \Omega^{(3)}{}_{(2)} e^{(2)}{}_\alpha . \tag{11}$$

Введем обозначения $e^{(1)}{}_{\alpha} = t_{\alpha} = dx_{\alpha} / ds,\quad e^{(2)}{}_{\alpha} = n_{\alpha},\ e^{(3)}{}_{\alpha} = b_{\alpha}$,

$$\chi_1(s) = \kappa(s) = \Omega^{(1)}{}_{(2)} = T^{(1)}{}_{(2)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = \frac{1}{\rho_{\kappa}}, \qquad \chi_2(s) = \chi(s) = \Omega^{(2)}{}_{(3)} = T^{(2)}{}_{(3)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = \frac{1}{\rho_{\chi}}, \tag{12}$$

где псевдоскаляры ρ_{κ} и ρ_{χ} - радиусы кривизны и кручения траектории соответственно.

В результате уравнения (9)-(11) принимают вид уравнений Френе [4]

$$\frac{dt_{\alpha}}{ds} = \kappa(s) n_{\alpha}, \qquad \frac{dn_{\alpha}}{ds} = -\kappa(s) t_{\alpha} + \chi(s) b_{\alpha}, \qquad \frac{db_{\alpha}}{ds} = -\chi(s) n_{\alpha}. \tag{13}$$

Рассмотрим смещение триады Френе вдоль произвольной траектории из точки M в точку M' на расстояние dx^{γ}, в результате которого триада совершает поворот $d\chi_{\alpha\beta}$.

Проектируя оси подвижной триады $e'^{(1)}{}_{\alpha},\ e'^{(2)}{}_{\alpha},\ e'^{(3)}{}_{\alpha}$, расположенной в точке M', на неподвижную триаду, связанную с точкой M, получим

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= \vec{e}_1(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) + \vec{e}_2(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + \vec{e}_3\sin\psi\sin\theta, \\
\vec{e}_2' &= -\vec{e}_1(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta - \vec{e}_2(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) + \vec{e}_3\cos\psi\sin\theta, \\
\vec{e}_3' &= \vec{e}_1\sin\varphi\sin\theta - \vec{e}_2\cos\varphi\sin\theta + \vec{e}_3\cos\theta.
\end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку $\vec{e}_1' = d\vec{x} / ds$, то из первого из этих соотношений следуют компоненты 3D скорости $\vec{u} = d\vec{x} / ds$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\
\frac{dy}{ds} &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\
\frac{dz}{ds} &= \sin\psi\sin\theta,
\end{aligned} \tag{15}$$

или, переходя к дифференцированию по t и учитывая, что $v = ds / dt = |\vec{v}| = v(x, y, z)$, имеем

$$\begin{aligned}
v_x(\varphi,\theta,\psi,x,y,z) &= \frac{dx}{dt} = v(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta), \\
v_y(\varphi,\theta,\psi,x,y,z) &= \frac{dy}{dt} = v(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta), \\
v_z(\theta,\psi,x,y,z) &= \frac{dz}{dt} = v(\sin\psi\sin\theta).
\end{aligned} \tag{16}$$

Дифференцируя третьи компоненты векторов $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ и вторую компоненту вектор $\vec{e}_3'$, получаем уравнения для компонент угловой скорости вращения

$$\omega_\varphi(\varphi,\theta,\psi,x,y,z)=\frac{d\varphi}{dt}=v\chi\frac{\sin\psi}{\sin\theta},$$
$$\omega_\psi(\theta,\psi,x,y,z)=\frac{d\psi}{dt}=v(\kappa-\chi\sin\psi\, ctg\theta), \tag{17}$$
$$\omega_\theta(\theta,\psi,x,y,z)=\frac{d\theta}{dt}=v\chi\cos\psi.$$

Система шести уравнений (16, 17) представляет собой систему Коши для шести неизвестных функций $x, y, z, \varphi, \psi, \theta$, которая имеет только одно решение в виде регулярных функций

$$x=x(s), y=y(s),\ z=z(s),\ \varphi=\varphi(s),\ \psi=\psi(s),\ \theta=\theta(s)\ ,$$

удовлетворяющих системе (16,17) с заданными начальными условиями

$$x=x_0,\ \ y=y_0,\ z=z_0,\ \ \ \varphi=\varphi_0,\ \ \psi=\psi_0,\ \ \theta=\theta_0\,.$$

Эти начальные условия имеют простой физический смысл. Начальные трансляционные координаты $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ задают положение начала O ускоренной системы отсчета $e^A{}_\alpha$ на траектории, а начальные углы $\varphi=\varphi_0, \psi=\psi_0, \theta=\theta_0$ определяют начальную ориентацию векторов системы $e^A{}_\alpha$. Углы Эйлера $\varphi=\varphi(s), \psi=\psi(s), \theta=\theta(s)$ образуют в каждой точке M траектории внутреннее пространство неголономных вращательных координат, которые, как это следует из уравнений (16,17), определяет динамику ориентируемой материальной точки.

Соотношения (17) доказывают, что при вращении базисных векторов $e^A{}_\alpha$ трехмерной системы отсчета, угловая скорость $\vec{\omega}$ зависит как от 3х неголономных угловых переменных φ,θ,ψ, так и от 3х трансляционных голономных координат $x,\ y,\ z$. Поэтому логически непротиворечивая запись для компонент угловой скорости (17) показывает, что выражение (1), содержащее нонсенс $?=?$, принципиально неверно. Правильное описание 3D ускоренной системы требует введения 6ти мерного многообразия, обладающего структурой геометрии абсолютного параллелизма $A_3(3)$. Действительно, для случая вращения массы m в плоскости $x,\ y$ (когда $\chi=0,\ \varphi=0,\ \ \theta=0,\ z=0$) уравнения (17) принимают вид

$$\omega_\varphi(\psi,x,y,)=\frac{d\varphi}{dt}=0, \tag{18}$$
$$\omega_\psi(\psi,x,y,)=\frac{d\psi}{dt}=v\kappa, \tag{19}$$
$$\omega_\theta(\psi,x,y,)=\frac{d\theta}{dt}=0. \tag{20}$$

Уравнение (19), с учетом (12) , запишется как

$$\omega_\psi(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{d\psi}{dt} = v\kappa = \Omega^{(1)}{}_{(2)}\, v\ = \frac{1}{\rho_\kappa} v. \tag{21}$$

С другой стороны, из уравнений (16) для компонент скорости v следует

$$v_x(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{dx}{dt} = v\ \cos\psi\,, \tag{22}$$

$$v_y(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{dy}{dt} = v \sin\psi\,, \tag{23}$$

$$v_z(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{dz}{dt} = 0. \tag{24}$$

При движении по окружности радиуса r уравнение (21) теперь запишется как

$$\omega_\psi(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{1}{r} v(\psi(t), x(t), y(t)). \tag{25}$$

Как мы видим, равенство (25) снимает нонсенс, который обнаруживается в традиционной записи для угловой скорости (1). Из формулы (21) видно, что слева в формуле (25) стоит псевдоскаляр ω_ψ, а справа псевдоскаляр $\Omega^{(1)}{}_{(2)}$, умноженный на скаляр v , как это и должно быть.

В заключение отметим, правильное описание вращательного движения материи на основе геометрии $A_3(3)$ доказывает гипотезу Э. Картана [5] , согласно которой вращение материи порождает кручение пространства. В нашем случае кручение пространства $A_3(3)$ описывается объектом неголономности (8), при этом коэффициенты вращения Риччи

$$T^\beta{}_{\alpha\gamma} = -\Omega^{\cdot\cdot\beta}{}_{\alpha\gamma} + g^{\alpha\delta}(g_{\alpha\mu}\Omega^{\cdot\cdot\mu}{}_{\delta\gamma} + g_{s\mu}\Omega^{\cdot\cdot\mu}{}_{\delta\alpha}). \tag{26}$$

интерпретируются как поле инерции, порождающее силы инерции [3].

12.03.2017.

Литература

1. *Эйлер Л.* // Открытие нового принципа механики. Записки Берлинской академии наук, 1750, т. 14., с. 185-217.
2. *Шипов Г.И.*// Теория физического вакуума. Новая парадигма. М., НТ-Центр, 1993. 362 с.
3. *Шипов Г.И.*// Теория физического вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.
4. *Frenet G.* //Jour. de Math. 1852. Vol. 17. P. 437-447.
5. *Cartan E.* // Compt. Rend.1922. Vol. 174, p. 437.