УСКОРЕННАЯ 3D СИСТЕМА ОТСЧТЕТА И ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ СИЛ И ПОЛЕЙ ИНЕРЦИИ

Шипов Г.И.

Введение

В повседневной жизни каждый из нас постоянно испытывает действие трех фундаментальных физических полей: гравитационного, электромагнитного и поля инерции. Если первыми двумя полями физики занимаются уже много лет и создали теории, которые описывают свойства этих полей достаточно подробно, то поле инерции было оставлено без достаточного внимания. И все это происходит в то время, когда гироскопы и инерционные платформы, использующие силы инерции и поля инерции, составляют основу всех современных навигационных систем.

1. Поля инерции и силы в ускоренной системе отсчета

Поскольку работ, которые определяют поле инерции как предмет научного исследования, в научной литературе, кроме работ автора [1-3] не существует, то мы будем определять поле инерции как поле, которое создает силы инерции в ускоренных системах отсчета. В ускоренной системе отсчета, как известно [4], уравнения движения материальной точки имеют вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} - 2m[\vec{\omega}\vec{v}'] - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] - m[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}'] \ , \tag{1}$$

где U - потенциальная энергия внешнего (гравитационного или электромагнитного) поля, $m\vec{W}$ - поступательная сила инерции, $2m[\vec{\omega}\vec{v}']$ - сила инерции Кориолиса, $m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ - центробежная сила инерции, $m[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}']$- сила инерции, вызванная ускоренным вращением. Вектора $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ заданы относительно не вращающейся системы S и S' соответственно. Из (1) следует, что поле инерции в нерелятивистском приближении определяется через 3D угловую скорость $\vec{\omega}$ и поступательное ускорение $\vec{W}$, которое в 4D тоже представляется как угловая скорость вращения в пространственно-временных плоскостях [3]. Например, ускорение вдоль оси x представляется как $W_x = dv_x/dt = cd(th\,\theta_x)/dt$, где c - скорость света, θ_x - угол вращения в плоскости $x - ct$.

Очевидно, что понятие поля инерции возникает при ускоренном движении протяженного тела, поскольку силы инерции действуют на все материальные точки, составляющих это тело, образуя поле сил инерции. Таким образом, поле сил инерции порождается полем инерции, возникающим в результате вращения материи. В 1922 г. Эли Картан высказал гипотезу, что вращение материи порождает кручение пространства [5]. Однако Э. Картан не указал, какое кручение и как оно связано с угловой скоростью вращения материи.

Действительно, рассмотрим, например, простейшую формулу для угловой скорости движения массы m по окружности радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в плоскости $x,\ y$:

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega(\psi(t))? = ?\frac{1}{r}v = \frac{1}{r(x(t), y(t))}v(x(t), y(t)). \qquad (1a)$$

С точки зрения формальной логики в соотношении (1а) мы имеем нонсенс $? = ?$, поскольку «приравнивается» величина ω, зависящая от безразмерной неголономной угловой переменной $\psi(t)$ к величине v/r, зависящей от голономных координат $x(t), y(t)$. Далее будет показано, что нужно сделать, чтобы соотношение (1а) не противоречило логике.

2. Структура пространства 3D вращающейся системы отсчета

Поскольку всякое ускоренное движение есть вращение, то произвольно ускоренную трехмерную систему отсчета мы будем описывать тройкой ортогональных, единичных векторов $e^A{}_\alpha$, удовлетворяющих условиям

$$e^A{}_\alpha\, e^\alpha{}_B = \delta^A{}_B, \quad e^A{}_\alpha\, e^\beta{}_A = \delta_\alpha{}^\beta, \qquad (2)$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma... = 1,2,3,\ \ A,\ B\ ,\ C... = 1,\ 2,\ 3\ ,$$

где индексы $\alpha,\ \beta,\ \gamma... = 1,2,3,$ представляют собой координатные индексы вектора $e^A{}_\alpha$, а индексы $A,\ B\ ,\ C... = 1,\ 2,\ 3$ нумеруют вектора триады $e^A{}_\alpha$. Разумеется, вектора $e^A{}_\alpha$ связаны с телом отсчета, поэтому, вместо материальной точки механики Ньютона, мы ввели 3D ориентируемую материальную точку [6 -8]. Такой объект имеет шесть степеней свободы и описывается шестью координатами: тремя голономными координатами x, y, z, которые описывают движение начала O системы отсчета вдоль траектории $\vec{x} = \vec{x}(s)$ и три пространственных угла φ, θ, ψ (угла Эйлера на рис.1)

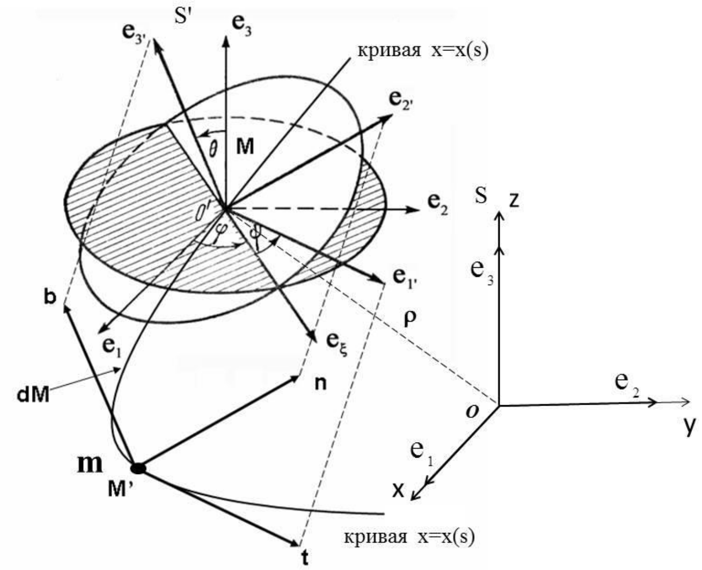

Рис. 1. Шесть степеней свободы произвольно ускоренной системы отсчета S'

$$\varphi = \angle \vec{e}_1 \vec{e}_\xi, \quad \theta = \angle\ \vec{e}_3 \vec{e}'_3, \quad \psi = \ \angle\ \vec{e}_\xi \vec{e}'\ ,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi. \tag{3}$$

описывающих изменение ориентации ориентируемой материальной точки. Изменение векторов системы отсчета при бесконечно малом смещении $d\vec{x}$ начала O вдоль траектории $\vec{x} = \vec{x}(s)$ записывается как [4]

$$d\vec{e}_A = [\vec{d}\vec{\chi}\,\vec{e}_A] \quad . \tag{4}$$

Ковариантная запись (4) имеет вид [3]

$$de^A{}_\alpha = d\chi^\beta{}_\alpha\, e^A{}_\beta\,, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma ... = 1,2,3,\ \ A,\ B\ ,\ C ... = 1,\ 2,\ 3\ , \tag{5}$$

где

$$d\chi^\beta{}_\alpha = e^\beta{}_A\ de^A{}_\alpha = e^\beta{}_A \frac{\partial e^A{}_\alpha}{\partial x} dx, \tag{6}$$

- дифференциалы углов при бесконечно малом повороте системы отсчета $e^A{}_\alpha$. Разделив (6) на дифференциал длинны дуги ds, получаем тензор угловой скорости системы отсчета

$$\Omega^\beta{}_\alpha = T^\beta{}_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds}\ , \qquad \Omega_{\alpha\beta} = -\ \Omega_{\beta\alpha}\ . \tag{7}$$

Здесь мы ввели обозначение для геометрического объекта

$$T^\beta{}_{\alpha\gamma} = e^\beta{}_A\, e^A{}_{\alpha,\gamma} = -e^A{}_\beta e^\alpha{}_{A,\gamma}\ , \qquad ,\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\ , \tag{8}$$

который в математике получил название коэффициентов вращения Риччи [1-3,9]. Возводя (6) в квадрат, мы получаем вращательную метрику

$$d\tau^2 = d\chi^\alpha{}_\beta d\chi^\beta{}_\alpha = T^\alpha{}_{\beta\gamma} T^\beta{}_{\alpha\sigma} dx^\gamma dx^\sigma = \Omega^\alpha{}_\beta \Omega^\beta{}_\alpha ds^2, \tag{9}$$

заданную на множестве вращательных координат (3). Если выбрать вектор $e^{(1)}{}_\alpha = dx_\alpha / ds$ касательным к траектории (см. рис. 1), то мы получим метрику, заданную на множестве поступательных координат x, y, z

$$ds^2 = (e^\alpha{}_{(1)} dx_\alpha)^2 = (t^\alpha dx_\alpha)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{10}$$

В криволинейных координатах мы имеем $ds_A = e^\alpha{}_A dx_\alpha$, поэтому вместо (10), находим

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \eta_{AB}e^A{}_\alpha e^B{}_\beta dx^\alpha dx^\beta\,, \qquad \eta_{AB} = \eta^{AB} = diag(1,\,1,\,1)\ , \tag{11}$$

где η_{AB} - локальный метрический тензор. В общем случае, коэффициенты вращения Риччи (8) совместно с символами Кристоффеля

$$\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}g^{\beta\delta}(g_{\alpha\delta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\delta}) \tag{12}$$

определяют связность абсолютного параллелизма [3]

$$\Delta^\beta{}_{\alpha\gamma} = \Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} + T^\beta{}_{\alpha\gamma} = e^\beta{}_A\, e^A{}_{\alpha,\gamma} \tag{13}$$

и выражаются через объект неголономности $\Omega^{..\beta}{}_{\alpha\gamma}$ (кручение пространства абсолютного параллелизма)

$$\Omega^{..\beta}{}_{\alpha\gamma} = -\ \Delta^\beta{}_{[\alpha\gamma]} = -T^\beta{}_{[\alpha\gamma]} = -\frac{1}{2}e^\beta{}_A(e^A{}_{\alpha,\gamma} - e^A{}_{\gamma,\alpha}) \tag{14}$$

следующим образом [3]

$$T^\beta{}_{\alpha\gamma} = -\Omega^{..\beta}{}_{\alpha\gamma} + g^{\alpha\delta}(g_{\alpha\mu}\,\Omega^{..\mu}{}_{\delta\gamma} + g_{s\mu}\,\Omega^{..\mu}{}_{\delta\alpha}). \tag{15}$$

Используя связность (13) пространства $A_3(3)$, находим тензор кривизны пространства абсолютного параллелизма

$$S^\alpha{}_{\beta\gamma\eta} = 2\ \Delta^\alpha{}_{\beta[\eta,\gamma]} +\ 2\Delta^\alpha{}_{\rho[\gamma}\,\Delta^\rho{}_{|\beta|\eta]} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\eta} +\ 2\nabla_{[\gamma}T^\alpha{}_{|\beta|\eta]} + 2T^\alpha{}_{\rho[\gamma}\,T^\rho{}_{|\beta|\eta]} = 0\,, \tag{16}$$

где ∇_γ - ковариантная производная относительно символов Кристоффеля (12) и

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\eta} = 2\Gamma^\alpha{}_{\beta[|\eta,\gamma]} + 2\Gamma^\alpha{}_{\rho[\gamma}\,\Gamma^\rho{}_{|\beta|\eta]} \tag{17}$$

- тензор Римана пространства $A_3(3)$. С использованием (2), уравнения (14) могут быть переписаны как

$$\nabla_{[\gamma}e^A{}_{\alpha\}} + T^\beta{}_{[\gamma\alpha]}e^A{}_\beta = 0. \tag{18}$$

Соотношения (2)-(18) полностью определяют геометрию абсолютного параллелизма $A_3(3)$, индекс 3 означает размерность базового пространства x, y, z, а три в скобках – размерность вращательных координат слоя φ, θ, ψ.

3. Связь поля инерции с кручением геометрии $A_3(3)$

Используя трансляционную метрику (11) пространства $A_3(3)$ и приравнивая нулю вариацию интеграла

$$\int_a^b L(x_\beta, u_\beta)ds, \quad u_\beta = \frac{dx_\beta}{ds} \quad , \quad u_\beta u^\beta = 1, \tag{19}$$

получим обобщенные уравнения Лагранжа в виде [3]

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial u^\beta} - \frac{\partial L}{\partial x^\beta} + 2\Omega^{..\alpha}{}_{\gamma\beta}\frac{\partial L}{\partial u^\beta}u^\gamma = 0. \tag{20}$$

Полагая в уравнениях (20) $L = (g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta)^{1/2}$, находим уравнения геодезических (уравнения прямейших) пространства $A_3(3)$

$$g_{\chi\beta}\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma_{\chi\delta\alpha}u^\delta u^\alpha + 2\Omega^{..\rho}{}_{\chi\delta}g_{\rho\alpha}u^\alpha u^\delta = 0. \tag{21}$$

После умножения этих уравнений на метрический тензор $g^{\chi\beta}$ они записываются как

$$\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma^\beta{}_{\delta\alpha}u^\delta u^\alpha + 2g^{\beta\chi}\Omega_{\chi(\alpha\delta)}u^\alpha u^\delta = 0 \tag{22}$$

или, учитывая (15), в виде

$$\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma^\beta{}_{\delta\alpha}u^\delta u^\alpha + \mathrm{T}^\beta{}_{\delta\alpha}u^\delta u^\alpha = 0\ . \tag{23}$$

Умножая эти уравнения на массу m, получаем уравнения движения начала O ориентируемой материальной точки

$$m\frac{du^\beta}{ds} + m\Gamma^\beta{}_{\delta\alpha}u^\delta u^\alpha + m\mathrm{T}^\beta{}_{\delta\alpha}u^\delta u^\alpha = 0\ . \tag{24}$$

Вращательные уравнения геодезических, описывающих параллельный перенос векторов триады $e^A{}_\alpha$ в пространстве $A_3(3)$ следуют из определения связности (13)

$$\frac{de^A{}_\alpha}{ds} = \Gamma^A{}_{B\gamma}\frac{dx^\gamma}{ds}e^B{}_\alpha + T^A{}_{B\gamma}\frac{dx^\gamma}{ds}e^B{}_\alpha\ . \tag{25}$$

В декартовых координатах $\Gamma^A{}_{B\gamma} = 0$ и с учетом (7) уравнения (25) расписываются как

$$\frac{de^{(1)}{}_\alpha}{ds} = T^{(1)}{}_{(2)\gamma}\frac{dx^\gamma}{ds}e^{(2)}{}_\alpha = \Omega^{(1)}{}_{(2)}\,e^{(2)}{}_\alpha\,. \tag{26}$$

$$\frac{de^{(2)}{}_\alpha}{ds} = T^{(2)}{}_{(1)\gamma}\frac{dx^\gamma}{ds}e^{(1)}{}_\alpha + T^{(2)}{}_{(3)\gamma}\frac{dx^\gamma}{ds}e^{(3)}{}_\alpha = \Omega^{(2)}{}_{(1)}\,e^{(1)}{}_\alpha + \Omega^{(2)}{}_{(3)}\,e^{(3)}{}_\alpha. \tag{27}$$

$$\frac{de^{(3)}{}_\alpha}{ds} = T^{(3)}{}_{(2)\gamma}\frac{dx^\gamma}{ds}e^{(2)}{}_\alpha = \Omega^{(3)}{}_{(2)}\,e^{(2)}{}_\alpha\,. \tag{28}$$

Введем обозначения $e^{(1)}{}_{\alpha} = t_{\alpha} = dx_{\alpha}/ds,\ \ e^{(2)}{}_{\alpha} = n_{\alpha},\ \ e^{(3)}{}_{\alpha} = b_{\alpha},$

$$\chi_1(s) = \kappa(s) = \Omega^{(1)}{}_{(2)} = T^{(1)}{}_{(2)\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds} = \frac{1}{\rho_{\kappa}}, \qquad \chi_2(s) = \chi(s) = \Omega^{(2)}{}_{(3)} = T^{(2)}{}_{(3)\gamma}\frac{dx^{\gamma}}{ds} = \frac{1}{\rho_{\chi}}, \tag{29}$$

где псевдоскаляры ρ_{κ} и ρ_{χ} - радиусы кривизны и кручения траектории соответственно.

В результате уравнения (26)-(28) принимают вид уравнений Френе [10]

$$\frac{dt_{\alpha}}{ds} = \kappa(s)n_{\alpha}, \qquad \frac{dn_{\alpha}}{ds} = -\kappa(s)t_{\alpha} + \chi(s)b_{\alpha}, \qquad \frac{db_{\alpha}}{ds} = -\chi(s)n_{\alpha}. \tag{30}$$

Эти два псевдоскаляра однозначно определяют любую траекторию $x = x(s)$ с точностью до положения в пространстве. Из уравнений (30) следуют поступательные уравнения движения начала O ориентируемой материальной точки

$$\frac{d^2x_{\alpha}}{ds^2} = \kappa(s)n_{\alpha}, \tag{31}$$

$$\frac{d^3x_{\alpha}}{ds^3} = \frac{d\kappa(s)}{ds}n_{\alpha} - \kappa^2(s)t_{\alpha} + \kappa(s)\chi(s)b_{\alpha}, \tag{32}$$

которые отличаются от уравнений механики Ньютона дополнительными уравнениями, содержащими третью производную d^3x_{α}/ds^3. Переходя в уравнениях (31), (32) от параметра s к параметру времени t, и, учитывая (29), имеем

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = a\vec{e}_{(1)} + \left|\frac{1}{\rho_{\kappa}}\right|v^2\vec{e}_{(2)} = a\vec{e}_{(1)} + |\rho_{\kappa}|\omega^2\vec{e}_{(2)}, \tag{33}$$

где $v = ds/dt = |\vec{v}|$ - скалярная скорость и $a = dv/dt = |\vec{a}| = |[\dot{\vec{\omega}}\vec{\rho}_{\kappa}]|$ - скалярное ускорение и $v = \omega|\rho_{\kappa}|$. Умножая (33) на массу m и замечая, что $\vec{\rho}_{\kappa} = \vec{r}\,'$, имеем

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -ma\vec{e}_{(1)} - m\omega^2|\rho_{\kappa}|\vec{e}_{(2)} \tag{34}$$

или, в общем виде,

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,']] - m[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\,'], \tag{35}$$

куда вошли две (из четырех сил (1)) силы инерции $-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,']]$ и $-m[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\,']$. В уравнениях (34), (35) знак в их правой части меняется, поскольку ускорение и сила инерции направлены противоположно (например, центробежное ускорение и центробежная сила). Таким образом, было показано кручение (14) геометрии $A_3(3)$, образующее коэффициенты вращения Риччи (15), порождает поля инерции $[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\,']$ и $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,']]$ в уравнениях (35) в соответствии с соотношением $\kappa(s) = \Omega^{(1)}{}_{(2)} = T^{(1)}{}_{(2)\gamma}dx^{\gamma}/ds = 1/\rho_{\kappa}$.

Переходя в уравнениях (32) к параметру времени, имеем для третьей производной

$$\dddot{\vec{x}} = \left(\dot{a} - \kappa^2 v^3\right)\vec{e}_1 + \left(3va\kappa + v^2\dot{\kappa}\right)\vec{e}_2 + \kappa\chi v^3\vec{e}_3 \ , \tag{36}$$

где мы обозначили $\dddot{x} = d^3x/dt^3$, $\dot{a} = da/dt$, $\dot{\kappa} = d\kappa/dt$. Умножая уравнения (36) на массу m, получим уравнения движения ориентируемой материальной точки, содержащие третью производную

$$m\dddot{\vec{x}} = -m\left(\dot{a} - \kappa^2 v^3\right)\vec{e}_1 - m\left(3va\kappa + v^2\dot{\kappa}\right)\vec{e}_2 - m\kappa\chi v^3\vec{e}_3 \ . \tag{37}$$

Уравнения (37) в механике Ньютона отсутствуют, хотя в работах [11, 12] было показано, что учет в механике высших производных позволяет механической системе двигаться за счет внутренних сил. В нашем случае такими силами оказываются силы инерции в уравнении (35), порожденные кручением (14) пространства $A_3(3)$.

4. Орбитальные и спиновые поля инерции

Если ориентируемая материальная точка движется (без собственного вращения) по орбите в потенциальном поле U, то ее уравнения движения принимают вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,']] - m[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\,'] \ , \tag{38}$$

где $\vec{\omega}$ - орбитальная скорость вращения. Если, например, ориентируемая материальная точка движется в гравитационном поле массы M по стационарной орбите и пусть сила $-m[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\,'] = 0$, тогда гравитационная сила $-\partial U/\partial \vec{r} = mMG\vec{r}/r^3$ локально полностью компенсируется центробежной силой инерции $-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,']$, так, что уравнения (38) принимают вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}\,']] = 0, \tag{39}$$

обеспечивая локально состояние невесомости для массы m. Если же масса m свободно падает, то в уравнениях (33) $\vec{\omega} = 0$, а ускорение $\vec{a} = \vec{W}$ и уравнения движения (33) принимают вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} = 0. \tag{40}$$

Это уравнения движения ориентируемой материальной точки в свободно падающем лифте Эйнштейна, когда локально в лифте гравитационная сила $-\partial U/\partial \vec{r} = m\vec{g}$ полностью компенсируется силой инерции $-m\vec{W}$ (сильный принцип эквивалентности).

Рассмотрим другой случай, когда орбитальная угловая скорость $\vec{\omega}$ в уравнениях (30)-(32) равна нулю, т.е. $\kappa = 0$, $\chi \neq 0$, и они принимают вид

$$\frac{dt_\alpha}{ds} = 0, \qquad \frac{dn_\alpha}{ds} = \chi(s) b_\alpha \ , \qquad \frac{db_\alpha}{ds} = -\chi(s) n_\alpha \, . \tag{41}$$

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = 0 \ , \quad \frac{d^3 x_\alpha}{ds^3} = 0 \ . \tag{42}$$

Переходя в этих уравнениях (с помощью соотношения $dt/ds = 1/v$) к дифференцированию по времени, имеем

$$\frac{dt_\alpha}{dt} = 0 \ , \qquad \frac{dn_\alpha}{dt} = \chi \, v \, b_\alpha \ , \qquad \frac{db_\alpha}{dt} = -\chi \, v \, n_\alpha \ , \tag{43}$$

$$\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = 0 \ , \qquad \frac{d^3 x_\alpha}{dt^3} = 0 \ , \quad |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = v = const. \tag{44}$$

Из этих уравнений видно, что начало O ориентируемой материальной точки движется по прямой траектории с постоянной скоростью v, при этом вектора n_α и b_α , вращаются в плоскости перпендикулярной вектору t_α с угловой скоростью $\varpi = \chi v = v/\rho_\kappa$. Эта величина описывает спиральность или собственную угловую скорость вращения ориентируемой материальной точки, которая направлена вдоль вектора t_α .

Обозначая собственный угловой момент ориентируемой материальной точки как $L = J\varpi,$, где J - момент инерции, и считая его постоянным, получаем из (43) вращательные уравнения движения свободной ориентируемой материальной точки в виде

$$\frac{dL_\alpha}{dt} = 0, \quad L_\alpha = L t_\alpha \, , \quad \frac{dn_\alpha}{dt} = \varpi \, b_\alpha \ , \quad \frac{db_\alpha}{dt} = -\varpi \, n_\alpha \ , \quad \varpi = \chi \, v, \quad L = J\varpi = const. \tag{45}$$

В общем случае, из уравнений (28) следует

$$\left| \frac{db_\alpha}{ds} \right| = |-\chi(s)| \cdot |n_\alpha| = |\chi(s)|$$

или

$$\left| \frac{db_\alpha}{dt} \right| = |\varpi(t)| \ . \tag{46}$$

Следовательно, абсолютная величина собственной угловой скорости вращения ориентируемой материальной точки равна скорости вращения вектора бинормали. Используя уравнения (30), получим

$$\chi(s) = \frac{(\vec{x}' \cdot \vec{x}'' \cdot \vec{x}''')}{(\vec{x}' \times \vec{x}'')^2} \ ,$$

где введено обозначение $\vec{x}' = d\vec{x}/ds$. Отсюда видно, что кручение (или собственное вращение – спин ориентируемой материальной точки) обращается в нуль, при равенстве нулю третьей производной $\vec{x}''' = d^3\vec{x}/ds^3$.

5. Внутренне пространство угловых координат и зависимость скорости от трансляционных x, y, z и угловых φ, θ, ψ координат

Проектируя оси подвижной триады $e'^{(1)}{}_{\alpha}$, $e'^{(2)}{}_{\alpha}$, $e'^{(3)}{}_{\alpha}$, расположенной в точке M', на неподвижную триаду, связанную с точкой M (рис.1), получим

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) + \vec{e}_2(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + \vec{e}_3\sin\psi\sin\theta ,$$
$$\vec{e}_2' = -\vec{e}_1(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta - \vec{e}_2(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) + \vec{e}_3\cos\psi\sin\theta , \quad (47)$$
$$\vec{e}_3' = \vec{e}_1\sin\varphi\sin\theta - \vec{e}_2\cos\varphi\sin\theta + \vec{e}_3\cos\theta.$$

Поскольку $\vec{e}_1' = d\vec{x}/ds$, то из первого из этих соотношений следуют компоненты скорости $\vec{u} = d\vec{x}/ds$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta ,$$
$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \quad (48)$$
$$\frac{dz}{ds} = \sin\psi\sin\theta ,$$

или, переходя к дифференцированию по t и учитывая, что $v = ds/dt = |\vec{v}| = v(x, y, z)$, имеем

$$v_x(\varphi,\theta,\psi,x,y,z) = \frac{dx}{dt} = v(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta),$$
$$v_y(\varphi,\theta,\psi,x,y,z) = \frac{dy}{dt} = v(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta), \quad (49)$$
$$v_z(\theta,\psi,x,y,z) = \frac{dz}{dt} = v(\sin\psi\sin\theta).$$

Дифференцируя третьи компоненты векторов $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ и вторую компоненту вектор $\vec{e}_3'$, получаем уравнения для компонент угловой скорости вращения

$$\omega_\varphi(\varphi,\theta,\psi,x,y,z) = \frac{d\varphi}{dt} = v\chi\frac{\sin\psi}{\sin\theta},$$
$$\omega_\psi(\theta,\psi,x,y,z) = \frac{d\psi}{dt} = v(\kappa - \chi\sin\psi\, ctg\,\theta), \quad (50)$$
$$\omega_\theta(\theta,\psi,x,y,z) = \frac{d\theta}{dt} = v\chi\cos\psi .$$

Система шести уравнений (49, 50) представляет собой систему Коши для шести неизвестных функций $x, y, z, \varphi, \psi, \theta$, которая имеет только одно решение в виде регулярных функций

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s), \varphi = \varphi(s), \psi = \psi(s), \theta = \theta(s) ,$$

удовлетворяющих системе (49,50) с заданными начальными условиями

$$x = x_0,\ \ y = y_0,\ z = z_0,\quad \varphi = \varphi_0,\ \ \psi = \psi_0,\ \ \theta = \theta_0 .$$

Эти начальные условия имеют простой физический смысл. Начальные трансляционные координаты $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$ задают положение начала O ускоренной системы отсчета $e^A{}_\alpha$ на траектории, а начальные углы $\varphi = \varphi_0,\ \psi = \psi_0,\ \theta = \theta_0$ определяют начальную ориентацию векторов системы $e^A{}_\alpha$. Углы Эйлера $\varphi = \varphi(s),\ \psi = \psi(s),\ \theta = \theta(s)$ образуют в каждой точке M траектории внутреннее пространство неголономных вращательных координат, которые, как это следует из уравнений (49,50), определяет динамику ориентируемой материальной точки.

Соотношения (50) доказывают, что при вращении базисных векторов $e^A{}_\alpha$ трехмерной системы отсчета, угловая скорость $\vec{\omega}$ зависит как от 3х неголономных угловых переменных φ,θ,ψ, так и от 3х трансляционных голономных координат $x,\ y,\ z$. Поэтому логически непротиворечивая запись для компонент угловой скорости (50) показывает, что выражение (1a), содержащее нонсенс $? = ?$, принципиально неверно. Правильное описание 3D ускоренной системы требует введения 6ти мерного многообразия, обладающего структурой геометрии абсолютного параллелизма $A_3(3)$. Действительно, для случая вращения массы m в плоскости $x,\ y$ (когда $\chi = 0,\ \varphi = 0,\ \ \theta = 0,\ z = 0$) уравнения (50) принимают вид

$$\omega_\varphi(\psi, x, y,) = \frac{d\varphi}{dt} = 0, \tag{51}$$

$$\omega_\psi(\psi, x, y,) = \frac{d\psi}{dt} = v\kappa, \tag{52}$$

$$\omega_\theta(\psi, x, y,) = \frac{d\theta}{dt} = 0. \tag{53}$$

Уравнение (52), с учетом (29) , запишется как

$$\omega_\psi(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{d\psi}{dt} = v\kappa = \Omega^{(1)}{}_{(2)}\, v\ = \frac{1}{\rho_\kappa} v. \tag{54}$$

С другой стороны, из уравнений (49) для компонент скорости v следует

$$v_x(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{dx}{dt} = v\ \cos\psi\,, \tag{55}$$

$$v_y(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{dy}{dt} = v\sin\psi\,, \tag{56}$$

$$v_z(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{dz}{dt} = 0. \tag{57}$$

При движении по окружности радиуса r уравнение (54) теперь запишется как

$$\omega_\psi(\psi(t), x(t), y(t)) = \frac{1}{r} v(\psi(t), x(t), y(t)). \tag{58}$$

Как мы видим, равенство (58) снимает нонсенс, который обнаруживается в традиционной записи для угловой скорости (1а). Из формулы (54) видно, что слева в формуле (58) стоит псевдоскаляр ω_ψ, а справа псевдоскаляр $\Omega^{(1)}{}_{(2)}$, умноженный на скаляр v, как это и должно быть. В традиционной записи в соотношении (1а) слева стоит псевдоскаляр, а справа скаляр, что явный нонсенс.

Заключение

Современное описание вращательного движения ограничено и при описании вращения материи даже по одному углу приводит к выводам, противоречащим правилам математики. Мы приходим к выводу, что вращение материи вызывает изменение геометрии пространства. Как было показано в статье, пространство становится неевклидовым и, как минимум, обладает кручением геометрии абсолютного параллелизма $A_3(3)$. Поле кручения физически интерпретируется как поле инерции, порождающее силы инерции, причем, в силу универсальности явления инерции, поле инерции представляется нами как третье фундаментальное поле теоретической физики. Значение этого поля пока не достаточно оценено научной общественностью.

10.09.2017

Литература

1. *Шипов Г.И.* // Теория гравитации в пространстве абсолютного параллелизма. Известия вузов, Физика, 1977, №3. С. 121; № 6. С. 142.
2. *Шипов Г.И.* // Проблемы теории элементарных взаимодействий, 1979, Москва, МГУ, Ч.1, с. 146.
3. *Шипов Г.И.*// Теория физического вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.
4. *Ольховский И.И.//* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
5. *Cartan E.* // Compt. Rend.1922. Vol. 174, p. 437.
6. *Шипов Г.И.* Механика ориентируемой точки и общий принцип инерции. Известия вузов, Физика, 1985, № 3, с.74.
7. *Губарев Е.А. //* Теория реальной относительности. Изд-во. «Новый Центр», М., 2009, 215 с.
8. *Trukhanova M., Shipov G. //* Foundation of The Mechanics of Oriented Point, 08.02.2017 https://arxiv.org/abs/1702.02561 .
9. *Ricci G.* // Mem. Acc. Linc. 1895. Vol. 2. Ser. 5. P. 276-322.
10. *Frenet G.* //Jour. de Math. 1852. Vol. 17. P. 437-447.
11. *Геловани В.А., Смольяков Э.Р.*// Гипотеза о влиянии высших производных на движение центра масс. ДАН, 2000, т. **375**, № 2, с. 159-162.
12. *Смольяков Э.Р.*// Нелинейные законы движения и обоснование законов движения инерцоидов. ДАН РФ, 2003, т. **393**, № 6, с. 770-775.