

ПРОБЛЕМА ИНЕРЦИИ КАК ПРИЧИНА ЗАСТОЯ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Геннадий Шипов

Академик РАН email: warpdrive09@gmail.com

Введение

Любая теория, как-бы совершенна она не была, ограничена и в последствии будет заменена более широкой теорией. Если этого не происходит долгое время, то в физике возникает застой и утеря понимания глубинной сути науки. Именно этот процесс мы наблюдаем в современной теоретической физике, причем начало процесса, как я вижу, было заложено уже в работе И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» [1]. Современный ответ на вопрос, почему искривляется поверхность воды во вращающемся ведре указывает нам, что причиной искривления являются силы инерции, при этом большинство ученых (примерно 60%) называет силы инерции «фиктивными». Такая точка зрения затормозила развитие классической механики, примерно, на 250 лет, что, с одной стороны, негативно отразилось на других разделах физики и, более того, такое фундаментальное поле как *поле инерции*, порождающее силы инерции, вообще выпало из поля зрения физиков. В настоящей статье представлено обобщение классической механики, которое содержит не только новый взгляд на проблему полей и сил инерции, но и объединяет классическую и квантовую теории поля.

Принцип Даламбера и силы инерции

Значение слова «фиктивный» означает вымышленный или не подлинный, однако учебники по механике учат нас, что из опыта следуют четыре типа сил инерции, при этом каждая из этих сил имеет совершенно определенное аналитическое описание и наблюдаемые при вращении гироскопа гироскопические эффекты (например, нутация), вызваны силами инерции [2]. Поэтому, называть наблюдаемые на опыте силы инерции «фиктивными» и одновременно описывать их аналитически вызывает у здравомыслящего ученого «когнитивный диссонанс» и непонимание физики процесса. Более того, Даламбер предложил в механике принцип (принцип Даламбера [3]), согласно которому уравнения Ньютона $ma = F$ записываются в виде $ma - F = 0$, когда сила инерции ma компенсирует силу Ньютона F , что формально приравнивает силы инерции и ньютоновские силы. Удивительно, что именно Даламбер ввел понятие сил инерции как «фиктивных» и, одновременно, приравнивал их формально к ньютоновским силам. Силы инерции действуют на материальную частицу с массой m в ускоренной системе отсчёта и описываются уравнениями вида [2]

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + m\vec{W} + m [\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}']] + 2m [\vec{\omega} \vec{v}'] + m \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}' \right] = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \quad (1)$$

В этих уравнениях силы инерции записаны в левой части уравнений, при этом три силы $m [\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}']]$, $2m [\vec{\omega} \vec{v}']$ и $m \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}' \right]$ порождены трехмерным вращением $\vec{\omega}$, а сила инерции $m\vec{W}$ вращением в трех пространственно-временных плоскостях [4]. Поэтому полное описание сил инерции требует изменения трехмерной геометрии Евклида и замены ее

геометрией абсолютного параллелизма $A_4(6)$ [4]. Применяя принцип Даламбера к уравнениям (1), получаем

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + m\vec{W} + m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}']] + 2m[\vec{\omega} \vec{v}'] + m\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r}'\right] = 0. \quad (2)$$

Л. Эйлер и Ж. Лагранж использовали уравнения (2) для определения точек либрации (всего 5 точек) в ограниченной задаче трех тел. Как известно, в точках либрации две гравитационные силы скомпенсированы центробежной силой инерции, обеспечивая пробному массивному телу в точке либрации экспериментально наблюдаемое состояние невесомости. Это был первый случай в науке, когда было показано, что сила инерции способна компенсировать реальную гравитационную силу.

Л. Эйлер и вращение по инерции как новый принцип механики

Отметим, что принцип Даламбера следует естественным образом при выводе уравнений Лагранжа первого рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = ma - F = 0, \quad (3)$$

где $L = T - U = L(x, \dot{x}_i, t)$ - функция Лагранжа, причем в (3) соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = ma$$

является силой инерции, а

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = F$$

- внешней силой. Уравнение (3) было использовано Л. Эйлером и Ж. Лагранжем для вывода уравнений движения пробной массы в ограниченной задаче трех тел

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial(U_1 + U_2)}{\partial \vec{r}} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}']] = 0, \quad (4)$$

где

$$U_1 = -\frac{mM_1G}{r}, \quad U_2 = -\frac{mM_2G}{r}$$

- гравитационные силы, а три массы $M_1 \gg M_2 \gg m$ движутся в одной плоскости. Гравитационные поля масс $M_1 \gg M_2$ действуют на пробную массу m , не имеющую своего собственного гравитационного поля. В уравнениях (4) гравитационные силы $\vec{F}_1 = -\partial U_1 / \partial \vec{r}$ и $\vec{F}_2 = -\partial U_2 / \partial \vec{r}$ скомпенсированы центробежной силой инерции $\vec{F}_ц = -m[\vec{\omega}[\vec{\omega} \vec{r}']]$. Здесь частота $\vec{\omega}$ является частотой вращения масс M_2 и m вокруг массы M_1 . Точки пространства, в которых две гравитационные силы скомпенсированы силой инерции были названы точками *либрации*. Используя уравнения (4), Л. Эйлер нашел три точки либрации L_1, L_2, L_3 , лежащие на прямой, проходящей через массы M_1 и M_2 . Позже Ж. Лагранж нашел еще две точки либрации L_4, L_5 . Как показывают наблюдения, в точках либрации, рассчитанных для некоторых планетарных систем (Земля-Луна, Солнце-Земля и т.д.), устойчиво движется космический мусор. Более того, существуют научные проекты,

предлагающие использовать точки либрации в качестве космических перевалочных пунктов для полетов к планетам солнечной системы.

Поскольку в точках либрации пробные массы движутся ускоренно, образуя устойчивые траектории (как бы по инерции), то мы должны признать, что уравнения (4) выходят за рамки первого закона механики Ньютона, допуская «ускоренное движение материи по инерции» [4]. По-видимому, именно этот факт побудил Л. Эйлера написать работу «Открытие нового принципа механики» [5], в которой он заложил математические основы механики абсолютно твердого тела. Дополнительно к трем уравнениям движения центра масс тела механики Ньютона, Л. Эйлер вводит три уравнения вращательного движения точек тела для трех углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (углы Эйлера), которые задают ориентацию твердого тела в пространстве. Углы Эйлера $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ представляют собой безразмерные неголономные координаты, дополнительные к голономным пространственным координатам x, y, z . Согласно Л. Эйлеру, пространство трансляционных координат x, y, z является плоским трехмерным пространством Евклида с метрикой $(dl)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Для описания вращательного движения твердого тела Л. Эйлер использует неголономную триаду $\vec{e}_A, A=1,2,3$ нормированных единичных векторов $(\vec{e}_1)^2 = (\vec{e}_2)^2 = (\vec{e}_3)^2 = 1$, $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = \vec{e}_3\vec{e}_1 = 0$ и определяет через углы Эйлера φ, θ, ψ

$$\begin{aligned} \varphi = \angle \vec{e}_1 \vec{e}_\xi, \quad \theta = \angle \vec{e}_3 \vec{e}'_3, \quad \psi = \angle \vec{e}_\xi \vec{e}'_1, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

бесконечно малый поворот [2]

$$\vec{d}\vec{\chi} = d\chi \vec{e}_\chi = \vec{e}_3 d\varphi + \vec{e}_\xi d\theta + \vec{e}_3' d\psi, \quad (5)$$

образующий вращательную метрику [6]

$$d\tau^2 = (\vec{d}\vec{\chi})^2 = (d\chi \vec{e}_\chi)^2 = (\vec{e}_3 d\varphi + \vec{e}_\xi d\theta + \vec{e}_3' d\psi)^2. \quad (6)$$

В соотношении (5) символ $\vec{d}\vec{\chi}$ означает антисимметричный тензор бесконечно малого поворота, который, после деления на dt , определяет трехмерную угловую скорость вращения $\vec{d}\vec{\chi}/dt = \vec{\omega}$ трехгранника Эйлера $\vec{e}_A, A=1,2,3$. К сожалению, ни сам Л. Эйлер, ни его последователи не обратили внимание на существование в механике твердого тела вращательной метрики (6). Это упущение в значительной степени затормозило развитие теоретической физики, поскольку метрика (6) остро ставит вопрос об обобщении пространства событий классической механики Ньютона (пространства Евклида) в том случае, когда мы описываем вращение материальных объектов.

Переход из системы отсчета S (инерциальной) во вращающуюся систему S' для любого вектора \vec{A}' имеет место следующее соотношение [2]

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}'}{dt} + [\vec{\omega} \vec{A}'], \quad (7)$$

где d не штрихованный дифференциал в S и d' штрихованный в S' . Поэтому во вращающейся системе отсчета уравнения движения механики Ньютона $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ обобщаются, принимая вид

$$\frac{d\vec{p}^i}{dt} = \frac{d'\vec{p}^i}{dt} + [\vec{\omega} \vec{p}^i] = \vec{F}. \quad (8)$$

Кроме поступательных уравнений (8) в механике Эйлера используются вращательные уравнения для собственного углового момента $\vec{L} = J\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + [\vec{\omega} \vec{L}] = \vec{M}, \quad (8a)$$

где $\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$ - момент внешней силы. В уравнениях (8a) вместо массы m используется момент инерции J , который, в общем случае, зависит от формы вращающегося тела и является тензором.

Применяя к уравнениям (8), (8a) принцип Даламбера, получим уравнения, которые описывают точки и траектории либрации в искомой гироскопической системе

$$\frac{d'\vec{p}^i}{dt} = \vec{F} - [\vec{\omega} \vec{p}^i] = 0, \quad \frac{d'\vec{L}}{dt} = \vec{M} - [\vec{\omega} \vec{L}] = 0. \quad (9)$$

Например, в системе отсчета S' на каждую точку вращающегося с постоянной частотой $\vec{\omega}$ гироскопа действует сила упругости $\vec{F} = \vec{\Phi}$, которая скомпенсирована центробежной силой инерции $[\vec{\omega} \vec{p}^i] = m[\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}^i]]$. Поэтому каждая точка свободного от внешних сил гироскопа движется в системе отсчета S ускоренно по круговой траектории либрации, сохраняя свою энергию.

Обсуждая основы механики твердого тела, мы пытались рассуждать, оставаясь как можно ближе к механике материальной точки Ньютона, которую в современном представлении представил впервые Л. Эйлер [7]. В действительности, механика твердого тела Эйлера обобщает механику Ньютона и содержит новые принципы, поскольку:

- Твердое тело это не точечный, а протяженный объект, состоящий из N материальных точек, расстояние между которыми не меняется.
- Полная система уравнений движения твердого тела содержат три угла Эйлера φ, θ, ψ , которые описывают вращение тела вокруг трех осей.
- Координатный базис \vec{e}_A , $A=1,2,3$, связанный с каждой материальной точкой твердого тела имеет 6 степеней свободы и содержит информацию о 3 голономных координатах x, y, z , а также о 3 неголономных координатах – углах Эйлера φ, θ, ψ .
- Внутренняя геометрия вращающегося твердого тела отлична от геометрии Евклида в силу существования вращательной метрики (6).

К сожалению, многие физики не учитывают некоторые из перечисленных свойства механики твердого тела Эйлера, ошибочно считая, что механика твердого тела следует из механики Ньютона. Доходит до того, что ответственные за развитие физики и облаченные властью ученые отказываются признавать эксперименты, которые объясняет механика Эйлера, но не в состоянии объяснить механика Ньютона. Это приводит к конфликтам и разброду в понимании относительно простых физических явлений. Например, известный специалист в механике гироскопа К. Магнус пишет: «Чтобы объяснить поведение вращающегося тела, часто проводят аналогию между вращательным движением тела и движением материальной точки (т.е. механики Ньютона (прим. автора)). Однако *эта аналогия в теории гироскопа скорее вредна, чем полезна*, так как область, в которой она справедлива, кончается как раз там, где начинаются типичные гироскопические явления (прецессия и нутация (прим. автора))[8]». Специалист по теории гироскопов Р. Граммель отмечает]:

«Анизотропия твердого тела, порождаемая его вращением, *не имеет аналога в механике материальной точки* (т.е. механике Ньютона (прим. автора)). Если нанести удар по покоящейся материальной частице, она начинает двигаться в направлении ударного импульса. И, напротив, совсем не обязательно, чтобы приложение к покоящемуся телу ударного момента вызвало вращение тела именно вокруг той оси, относительно которой действовал момент [9]». Действительно, формальная аналогия между уравнениями механики Ньютона и уравнениями (8), (8а) существует, но физическая суть уравнений (8), (8а) механики Эйлера отлична от уравнений ньютоновской механики.

Вращательная относительность и геометрический подход к описанию вращательного движения

Неголономные вращательные координаты φ, θ, ψ и вращательная метрика (6) в механике Эйлера не могут быть получены никакими голономными преобразованиями из голономных координат x, y, z . Вращательные координаты φ, θ, ψ описывают три степени свободы дополнительной к трем степеням свободы, описываемым трансляционными координатами x, y, z . Шестимерное пространство координат $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ полностью описывает динамику трехгранника Эйлера. В связи с этим возникает вопрос – какова геометрия пространства событий трехгранников Эйлера?

Утверждение 1. Многообразие трехгранников Эйлера образует расслоенное бифуркационное пространство абсолютного параллелизма $A_3(3)$.

Доказательство. Бесконечно малое вращение трехгранника Эйлера (5) в тензорном виде записывается как

$$de^A_\alpha = d\chi^\beta_\alpha e^A_\beta, \quad \alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3, \quad A, B, C \dots = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где

$$d\chi_{\alpha\beta} = -d\chi_{\beta\alpha} \quad (11)$$

- антисимметричный тензор бесконечно малого поворота в базе угловых переменных.

В соотношениях (10) и (11) $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3$ - векторные индексы триады, относящиеся к координатам базы x, y, z , а $A, B, C \dots = 1, 2, 3$ - индексы, нумерующие вектора трехгранника (или локальные индексы), относящиеся к координатам слоя φ, θ, ψ . Условия нормировки векторов трехгранника имеют вид

$$e^A_\alpha e^\alpha_B = \delta^A_B, \quad e^A_\alpha e^\beta_A = \delta^\beta_\alpha, \quad (11)$$

где $\delta^A_B, \delta^\beta_\alpha$ - символы Кронекера. В общем случае на координатном многообразии базы x^α задана трансляционная метрика, которая в общей криволинейной системе координат имеет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{AB} e^A_\alpha e^B_\beta dx^\alpha dx^\beta, \quad \eta_{AB} = \eta^{AB} = \text{diag}(1, 1, 1), \quad (12)$$

В криволинейных координатах x^α соотношение (10) запишется как

$$De^A_\alpha = d\chi^\beta_\alpha e^A_\beta, \quad (13)$$

откуда, после деления на ds левой и правой частей равенства (13), следуют уравнения движения трехгранника Эйлера в виде

$$\frac{De^A_\alpha}{ds} = \frac{d\chi^\beta_\alpha}{ds} e^A_\beta . \quad (14)$$

Умножая эти уравнения справа на e^β_A и используя условия нормировки (11), имеем

$$d\chi^\beta_\alpha = e^\beta_A De^A_\alpha \quad (15)$$

В случае декартовых координат x, y, z в геометризированной механике Эйлера имеем из (15)

$$d\chi^\beta_\alpha = e^\beta_A de^A_\alpha = e^\beta_A e^A_{\alpha\gamma} dx^\gamma = T^\beta_{\alpha\gamma} dx^\gamma , \quad (16)$$

где введено обозначение

$$T^\beta_{\alpha\gamma} = e^\beta_A e^A_{\alpha\gamma} = -e^A_\beta e^\alpha_{A\gamma} , \quad , \gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} . \quad (17)$$

Возводя соотношение (16) в квадрат, получаем вращательную метрику в виде

$$d\tau^2 = d\chi^A_B d\chi^B_A = T^A_{B\alpha} T^B_{A\beta} dx^\alpha dx^\beta . \quad (18)$$

Действительно, разделив (16) на ds и используя (17) , получим выражение для угловой скорости вращения трехгранника Эйлера

$$\Omega^\alpha_\beta = \frac{d\chi^\beta_\alpha}{ds} = T^\beta_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} , \quad (19)$$

где антисимметричная по индексам матрица $\Omega_{\alpha\beta}$ образована с компонентами угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ следующим образом

$$\Omega_{\alpha\beta} = - \Omega_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (20)$$

В произвольных криволинейных координатах x^α бесконечно малый поворот триады (16) записывается в виде

$$d\chi^\beta_\alpha = e^\beta_A De^A_\alpha = e^\beta_A e^A_{\alpha\gamma} dx^\gamma = \Delta^\beta_{\alpha\gamma} dx^\gamma , \quad (21)$$

где

$$\Delta^\beta_{\alpha\gamma} = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} + T^\beta_{\alpha\gamma} = e^\beta_A e^A_{\alpha\gamma} , \quad (22)$$

называется связностью геометрии *абсолютного параллелизма* [10], поскольку тензор кривизны пространства со связностью (22) обращается в нуль

$$S^\alpha_{\beta\gamma\eta} = 2 \Delta^\alpha_{\beta[\eta,\gamma]} + 2\Delta^\alpha_{\rho[\gamma} \Delta^\rho_{|\beta|\eta]} = 0 , \quad (23)$$

при этом кручение пространства $A_3(3)$ отлично от нуля и определяется как

$$\Delta^{\beta}_{[\alpha\gamma]} = \frac{1}{2} e^{\beta}_A (e^A_{\alpha\gamma} - e^A_{\gamma\alpha}) = -\Omega^{\cdot\beta}_{\alpha\gamma} . \quad (24)$$

Таким образом, Утверждение 1 доказано.

Не составляет труда показать, что в определении (24) первое слагаемое представляет собой символы Кристоффеля $\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}$, вычисляемые с помощью метрического тензора $g_{\alpha\beta}$

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} g^{\beta\delta} (g_{\alpha\delta,\gamma} + g_{\gamma\delta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\delta}), \quad (25)$$

а тензор $T^{\beta}_{\alpha\gamma}$, определяемый через кручение $-\Omega^{\cdot\beta}_{\alpha\gamma}$ как

$$T^{\beta}_{\alpha\gamma} = -\Omega^{\cdot\beta}_{\alpha\gamma} + g^{\alpha\delta} (g_{\alpha\mu} \Omega^{\cdot\mu}_{\delta\gamma} + g_{\gamma\mu} \Omega^{\cdot\mu}_{\delta\alpha}) \quad (26)$$

представляет собой торсионное поле геометрии $A_3(3)$ (или коэффициенты вращения Риччи [10]). В работе [11] Э. Картан впервые выдвинул гипотезу о том, что «вращение материи порождает кручение пространства», при этом рассуждал именно о геометрии, у которой кривизна равна нулю, а кручение отлично от нуля [12], т.е. о геометрии абсолютного параллелизма.

Высшие производные в механике с кручением пространства

Учитывая (22), запишем уравнения движения геометризированной механики Эйлера (14) в виде

$$\frac{de^A_{\alpha}}{ds} = \Delta^{\beta}_{\alpha\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^A_{\beta} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^A_{\beta} + T^{\beta}_{\alpha\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^A_{\beta}. \quad (27)$$

При этом первый член в правой части соотношения (27) $\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} e^A_{\beta} dx^{\gamma}/ds$, как показано в [10], описывает внешнее взаимодействие (скажем, гравитационное), а второй член $T^{\beta}_{\alpha\gamma} e^A_{\beta} dx^{\gamma}/ds$, умноженный на массу m , определяет силы инерции [13]. Отсюда следует, что торсионное поле $T^{\beta}_{\alpha\gamma}$ надо рассматривать как *поле инерции* [14].

В неголономной механике уравнения Лагранжа (3) обобщаются, принимая вид [15]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\alpha}} = -2\dot{x}^{\gamma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\beta}} \Omega^{\beta}_{\gamma\alpha} , \quad \dot{x}^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{dt}, \quad (28)$$

где в правой части уравнений (28) стоят силы инерции, определяемые через объект неголономности $\Omega^{\beta}_{\gamma\alpha}$. Поэтому при введении в механику неголономных угловых переменных φ, θ, ψ уравнения (1) необходимо заменить уравнениями (28), которые описывают движение массы m в ускоренной системе отсчета, при этом трехмерное пространство Евклида $E(3)$ с координатами x, y, z расширяется до шестимерного пространства абсолютного параллелизма $A_3(3)$ с координатами $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$.

Трехгранник Эйлера e^A_{α} по координатному индексу α преобразуется в группе трансляций $T(3)$ как вектор

$$e^A_{\alpha'} = \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial x_{\alpha}} e^A_{\alpha} , \quad \left\| \frac{\partial x_{\alpha'}}{\partial x_{\alpha}} \right\| \in T(3), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (29)$$

в то время как по локальному (внутреннему) индексу A трехгранник преобразуется в группе вращений $O(3)$

$$e^{A'}_{\alpha} = \Lambda^{A'}_A e^A_{\alpha}, \quad \Lambda^{A'}_A \in O(3), \quad A = 1, 2, 3. \quad (30)$$

Поэтому голономные преобразования из группы трансляций $T(3)$ в группу вращений $O(3)$ в общем случае *недопустимы*. Исключение составляет случай, когда вращение происходит по одной угловой координате.

С помощью неголономной триады e^A_{α} можно переходить в соотношениях (18)-(27) от координатных индексов $\alpha, \beta, \gamma \dots$ к локальным $A, B, C \dots$ индексам. Например, торсионное поле (26), антисимметричное по индексам α и β можно представить в виде

$$T^A_{B\gamma} = e^A_{\alpha} T^{\beta}_{\alpha\gamma} e^{\beta}_B. \quad (31)$$

Используя это свойство и условие $\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} e^A_{\beta} dx^{\gamma}/ds$, можно записать уравнения движения (27) как

$$\frac{de^A_{\alpha}}{ds} = T^A_{B\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^B_{\alpha} = \Omega^A_B e^B_{\alpha}. \quad (32)$$

Распишем уравнения (32) покомпонентно с учетом антисимметрии $T^A_{B\gamma}$ по локальным индексам A и B

$$\frac{de^{(1)}_{\alpha}}{ds} = T^{(1)}_{(2)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^{(2)}_{\alpha} = \Omega^{(1)}_{(2)} e^{(2)}_{\alpha}, \quad (33)$$

$$\frac{de^{(2)}_{\alpha}}{ds} = T^{(2)}_{(1)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^{(1)}_{\alpha} + T^{(2)}_{(3)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^{(3)}_{\alpha} = \Omega^{(2)}_{(1)} e^{(1)}_{\alpha} + \Omega^{(2)}_{(3)} e^{(3)}_{\alpha}. \quad (34)$$

$$\frac{de^{(3)}_{\alpha}}{ds} = T^{(3)}_{(2)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} e^{(2)}_{\alpha} = \Omega^{(3)}_{(2)} e^{(2)}_{\alpha}. \quad (35)$$

Выбирая вектор $\vec{e}_{(1)} = \vec{t} = d\vec{x}/ds$ касательным к траектории движения начала O триады e^A_{α} и вводя обозначения для векторов нормали и бинормали в виде $\vec{e}_2 = \vec{n}$, $\vec{e}_3 = \vec{b}$ и псевдоскаляры

$$\kappa(s) = \Omega^{(1)}_{(2)} = T^{(1)}_{(2)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = 1/\rho_{\kappa}, \quad \chi(s) = \Omega^{(2)}_{(3)} = T^{(2)}_{(3)\gamma} \frac{dx^{\gamma}}{ds} = 1/\rho_{\chi}, \quad (36)$$

находим, что уравнения (32) представляют собой известные в аналитической геометрии уравнения Френе [16]

$$\frac{dt_{\alpha}}{ds} = \kappa(s)n_{\alpha}, \quad (37)$$

$$\frac{dn_{\alpha}}{ds} = -\kappa(s)t_{\alpha} + \chi(s)b_{\alpha}, \quad (38)$$

$$\frac{db_{\alpha}}{ds} = -\chi(s)n_{\alpha}, \quad \alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2, 3. \quad (39)$$

Здесь $\kappa(s) = 1/\rho_{\kappa}$ - кривизна траектории (ρ_{κ} - радиус кривизны), $\chi(s) = 1/\rho_{\chi}$ - кручение траектории (ρ_{χ} - радиус кручения). Эти величины однозначно определяют произвольную кривую с точностью до положения в пространстве. Величина ds - параметр длины дуги, квадрат которой образует трансляционную метрику группе $T(3)$

$$ds^2 = (t^\alpha dx_\alpha)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (40)$$

Шесть независимых (в силу условий ортогональности (11)) уравнений (10)-(12) относительно шести независимых переменных $x, y, z, \varphi, \theta, \psi$ распадаются на трансляционные уравнения движения начала O триады e^A_α

$$\frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} = \kappa(s) n_\alpha, \quad (41)$$

$$\frac{d^3 x_\alpha}{ds^3} = \frac{d\kappa(s)}{ds} n_\alpha - \kappa^2(s) t_\alpha + \kappa(s) \chi(s) b_\alpha, \quad (42)$$

которые, после умножения на массу m , обобщают уравнения движения механики Ньютона и, после умножения на момент инерции J , вращательные уравнения движения

$$\frac{d\varphi}{ds} = \chi(s) \frac{\sin\psi}{\sin\theta}, \quad (43)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \kappa(s) - \chi(s) \sin\psi \operatorname{ctg} \theta, \quad (44)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \chi(s) \cos\psi, \quad (45)$$

которые вообще отсутствуют в ньютоновской механике материальной точки. Таким образом, уравнения (41)-(45) определяют движение *ориентируемой материальной точки* (точки со спином $\vec{L} = J\vec{\omega}$). Такой идеальный объект обобщает понятие материальной точки механики Ньютона и рассматривается как предельный случай, когда мы устремляем размеры вращающегося тела к нулю. Спин электрона представляет собой пример ориентируемой материальной точки.

Переходя в уравнениях (41) от параметра s к параметру времени t , и, учитывая, что $d/dt = d/ds \cdot ds/dt$, имеем

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = a\vec{t} + \kappa(s)\vec{n} = \vec{e}_{(1)} + \frac{1}{\rho_\kappa} v^2 \vec{e}_{(2)}, \quad (46)$$

где $v = ds/dt = |\vec{v}|$ - скалярная скорость и $a = dv/dt = |\vec{a}|$ - скалярное ускорение начала O триады e^A_α . Из уравнений (37)-(39) и равенств (36) следует, что величина ρ_κ является псевдоскаляром, знак которого зависит от выбора системы отсчета. Поскольку $\rho_\kappa = |\vec{r}'| = r'$, то $v = \omega r'$, то уравнения (46), после умножения на массу m , можно записать как

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -ma\vec{e}_{(1)} - m\omega^2 r' \vec{e}_{(2)} \quad (47)$$

Знак - выбран у псевдоскаляра ρ_κ и у скаляра a из физических соображений, чтобы в уравнениях (47) силы инерции в правой части совпадали с силами инерции в уравнениях (1). Ускорение a в (47) представим через угловую $\vec{\omega}$ частоту как

$$a = |\vec{a}| = |[\vec{\omega}\vec{\rho}_\kappa]| = |[\vec{\omega}\vec{r}']|$$

поэтому уравнения (47) записываются как

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -m [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] - m[\vec{\omega}\vec{r}'], \quad (48)$$

куда вошли две (из четырех сил в (1)) силы инерции $-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ и $-m[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}']$, действующие на начало O , т.е. на частицу массы m , помещенную в начало O .

Итак, мы показали, что кручение (24) геометрии $A_3(3)$, образующее коэффициенты вращения Риччи (26) порождает поля инерции $[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}']$, $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ и силы инерции $-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$, $-m[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}']$ в уравнениях (48).

Переходя в уравнениях (42) к параметру времени, имеем для третьей производной

$$\ddot{\vec{x}} = (\dot{a} - \kappa^2 v^3)\vec{e}_1 + (3v\dot{a}\kappa + v^2\dot{\kappa})\vec{e}_2 + \kappa\chi v^3\vec{b}, \quad (49)$$

где мы обозначили $\ddot{x} = d^3x/dt^3$, $\dot{a} = da/dt$, $\dot{\kappa} = d\kappa/dt$. Умножая уравнения (49) на массу m , получим дополнительные уравнения движения ориентируемой материальной точки, содержащие третью производную

$$m\ddot{\vec{x}} = -m(\dot{a} - \kappa^2 v^3)\vec{t} - m(3v\dot{a}\kappa + v^2\dot{\kappa})\vec{n} - m\kappa\chi v^3. \quad (50)$$

Уравнения (50) в механике Ньютона отсутствуют. Тем не менее, в работах [17, 18] было показано, что учет в механике высших производных позволяет центру масс механической системы двигаться под действием внутренних сил. В нашем случае такими силами оказываются силы инерции в уравнениях (48) и (50), порожденные кручением (24) пространства $A_3(3)$.

Используя уравнения Френе (37)-(39), можно доказать следующую полезную формулу [62]

$$\chi(s) = \frac{(\dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}, \quad (51)$$

где $\dot{\vec{x}} = d\vec{x}/ds$, $\ddot{\vec{x}} = d^2\vec{x}/ds^2$, $\ddot{\vec{x}} = d^3\vec{x}/ds^3$. Из этой формулы следует, что кручение (51) траектории частицы обращается в нуль, если равна нулю третья производная, $\ddot{\vec{x}} = d^3\vec{x}/ds^3$. В этом случае траектория оказывается плоской (лежит в плоскости). Этот вывод имеет важные практические предложения, в том смысле, что кручение (51) описывает собственную частоту вращения (киральность), в отличие от кривизны $\kappa(s)$, которое связано с орбитальной частотой вращения. В теории гравитации Ньютона и Эйнштейна вращение материи не меняет геометрии пространства, поэтому неважно, вращается тело при движении в гравитационном поле или нет. Одна из опытов следует, и это предсказывают уравнения движения (50), что собственное вращение тел сказывается на их траектории. Учитывая соотношения (37) и (38), находим следующую нелинейную связь между кручением $\chi(s)$ и кривизной $\kappa(s)$

$$\chi(s) = \frac{(\dot{\vec{x}} \cdot \kappa(s)\vec{n} \cdot \left[\frac{d\kappa(s)}{ds}n_\alpha - \kappa^2(s)t_\alpha + \kappa(s)\chi(s)b_\alpha \right])}{(\dot{\vec{x}} \times \kappa(s)\vec{n})^2}. \quad (52)$$

Из этой формулы следует, что, управляя локально кручением $\chi(s)$, мы можем менять кривизну $\kappa(s)$, что приведет к изменению траектории центра масс механической системы.

Гироскопические эксперименты, выходящие за рамки механики Ньютона

Приведем некоторые примеры гироскопических экспериментов, которые воспринимаются как аномальные с точки зрения механики Ньютона.

Пример 1. Потеря веса у маятника Максвелла.

Маятник Максвелла представляет собой гироскоп радиуса R , подвешенный на двух нитях за ось вращения радиуса r к перекладине рамки, установленной на весах. Когда гироскоп не вращается, находясь в гравитационном поле Земли с минимальной потенциальной энергией (левое фото на рис. 1), то весы показывают разницу между реакцией опоры $\vec{\Phi}$ и силой веса рамки с гироскопом $\vec{P} = m\vec{g}$, где m - масса маятника (рамки с гироскопом).

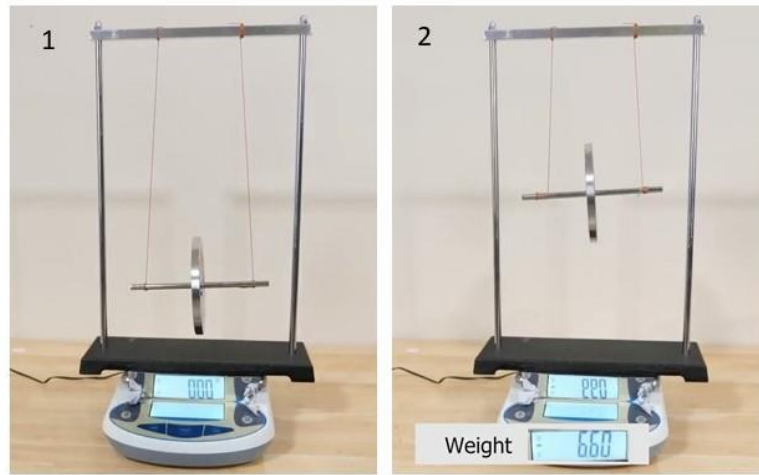


Рис.1. Маятник Максвелла на уравновешенных весах: слева в состоянии покоя (показания весов 0.00 в граммах); справа гироскоп вращается под действием силы тяжести, при этом весы показывают потерю веса на 6.6 грамм.

При вращении гироскопа нити подвеса накручиваются на ось маятника до максимально возможного верхнего положения гироскопа. Если отпустить из верхнего положения гироскоп с накрученной на ось нитью, то он начнет раскручиваться под действием силы тяжести, при этом его уравнения движения на весах запишутся как

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m\vec{g} - m[\dot{\vec{\omega}} \vec{r}'] + \vec{\Phi}, \quad (53)$$

$$J \dot{\vec{\omega}} = 2[\vec{r}' \vec{T}], \quad J \approx \frac{mR^2}{2}, \quad (53a)$$

где $-m[\dot{\vec{\omega}} \vec{r}']$ - сила инерции, вызванная переменной скоростью вращения гироскопа. Сила направлена против силы тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и равна силе натяжения нитей $\vec{P} = -2\vec{T}$, на которых подвешен гироскоп. Когда гироскоп не вращается, то вес гироскопа уравновешен реакцией опоры $\vec{\Phi} = 2\vec{T}$ или $m\vec{g} + \vec{\Phi} = 0$. Если же гироскоп вращается, то $m\vec{g} \neq \vec{\Phi}$ и мы имеем из (53) и (53a)

$$\vec{P}_1 = m(\vec{g} - [\dot{\vec{\omega}} \vec{r}']) = m_1 \vec{g} = -2\vec{T}_1. \quad (54)$$

При условии постоянства ускорения свободного падения \vec{g} из соотношения (54) следует

$$m_1 = m \left(1 - \frac{[\dot{\omega}r]}{g} \right) < m \quad (55)$$

- эффективная масса, зависящая от углового ускорения $\dot{\omega}$. Именно эту массу маятника Максвелла измеряют весы при вращении гироскопа.

Поскольку центр масс гироскопа маятника Максвелла движется вертикально вниз или вверх с постоянным ускорением $A = g - \dot{\omega}r = const$, то, с точки зрения четырехмерного пространства, это означает, что он вращается в пространственно-временной плоскости [10] с постоянной угловой скоростью. В нижней точке подвеса гироскопа возникает удар, который приводит к кратковременному пикообразному изменению углового ускорения (рис.2), однако до и после удара угловое ускорение постоянно и направлено против ускорения свободного падения, *создавая антигравитационный эффект*.

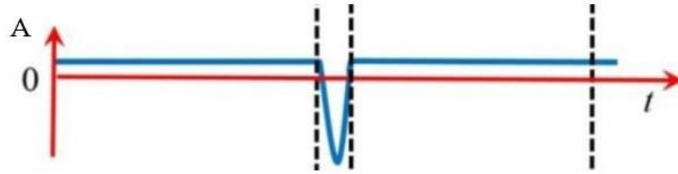


Рис.2. График ускорения $A = g - \dot{\omega}r = const$ маятника Максвелла

Зависимость массы механической системы от углового ускорения вращения масс внутри ее представляет собой яркий пример обобщения законов механики Ньютона, который необходимо рассматривать как открытие российской науки. В соответствии с формулой (19), общая формула зависимости массы m от угловой скорости вращения была найдена в 1979 году [14]

$$m(\Omega^i_j) = \int \rho \sqrt{-g} dV = \int \frac{2g^{jm}}{vc^2} \{ \nabla_{[i} T^i_{|j|m]} + T^i_{[i} T^s_{|j|m]} \} \sqrt{-g} dV, \quad (56)$$

где T^i_{jk} - поле инерции, определяющее угловую скорость как $\Omega^i_j = T^i_{jk} \frac{dx^k}{ds}$, $dV = dx dy dz$ - объем, g - детерминант метрического тензора g^{jm} , c - скорость света, v - множитель, определяемый условиями задачи, ∇_i - ковариантная производная. Эта формула описывает массу m как меру поля инерции T^i_{jk} при этом изменение массы определяется через производную $\nabla_i T^i_{jm}$, а формула (55) оказывается частным случаем общей формулы (56). Кроме того, из формулы (56) следует зависимость массы от квадрата частоты. Зависимость массы от угловой частоты позволяет обобщить формулу Эйнштейна $E = mc^2$, записав ее символически в виде следующим образом

$$E(\omega) = m(\omega)c^2. \quad (57)$$

Релятивистское поле инерции T^c_{ab} , где $a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3$ - локальные индексы, нумерующие вектора неголономной тетрады e^c_i выражается через единичный времениподобный вектор $u_b = \frac{dx_b}{ds}$, $u_b u^b = -1$ как [20]

$$T^c_{ab} = e^c_i \nabla_a e^i_b = e^c_0 \nabla_a e^0_b = u^c \nabla_a u_b = -A_a u_b u^c + \omega_{ab} u^c + \sigma_{ab} u^c + \frac{1}{3} \theta h_{ab} u^c. \quad (57)$$

Здесь четыре параметра: ускорение A_a , вращение ω_{ab} , сдвиг σ_{ab} и расширение θ описывают различные виды ускоренного движения системы отсчета e^c_i . ОТО часто используют уравнение Райчаудури [21]

$$R_{ab}u^a u^b = \omega_{ab}\omega^{ab} - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{d\theta}{ds}, \quad a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3 \quad (58)$$

из которого следует, что *можно управлять кривизной* R_{ab} пространства, если мы сможем менять параметры ω_{ab} , σ_{ab} и θ , т.е. менять локальные, искусственно созданные поля инерции. Используя уравнение (58), английский физик М. Алькубьерре предложил в 1994 году создать *космическое транспортное средство*, которое движется в космосе, используя двигатель, управляющий расширением пространства θ [22]. Расчеты показывают, что такой двигатель требует огромных энергетических затрат для своего реального воплощения. Российский инженер Владимир Николаевич Толчин в 1936 году экспериментально обнаружил [22], что использование параметра вращения ω_{ab} в уравнениях (58) *более перспективно*, поскольку между параметром ускорения A_a центра масс и параметром вращения ω_{ab} внутри механической системы существует связь

$$\nabla_a \omega^a - A_a \omega^a = 0, \quad \omega^a = \frac{\varepsilon^{abc} \omega_{bc}}{2}, \quad a, b, c, \dots = 0, 1, 2, 3, \quad (59)$$

которая была исследована теоретически и экспериментально А.Н. Сидоровым и Г.И. Шиповым [24,25,20]. Соотношение (59) представляет собой новый закон сохранения механики, неизвестный до сих пор, что приводит к неприятию многих изобретений, в которых он работает. Из закона сохранения (59) следует, что *неравномерное вращение* ω^a элементов двигателя внутри корпуса космического корабля порождает ускорение A_a его центра масс подобно тому, как это имеет место в формулах (55) и (56).

Пример 2. Потеря веса у прецессирующего гироскопа.

В мировой литературе известен эксперимент английского изобретателя Лэйтуэйта, демонстрирующий потерю веса прецессирующим гироскопом. На рис. 3 представлен этот эксперимент, повторенный Игорем Белецким. Гироскоп без вращения устанавливается на алюминиевой платформе так, чтобы его вес совместно с выступающей за край опоры частью платформы был уравновешен частью платформы, лежащей на опоре (снимок слева на рис. 3). Затем гироскоп раскручивается и устанавливается на опорный стержень так, чтобы

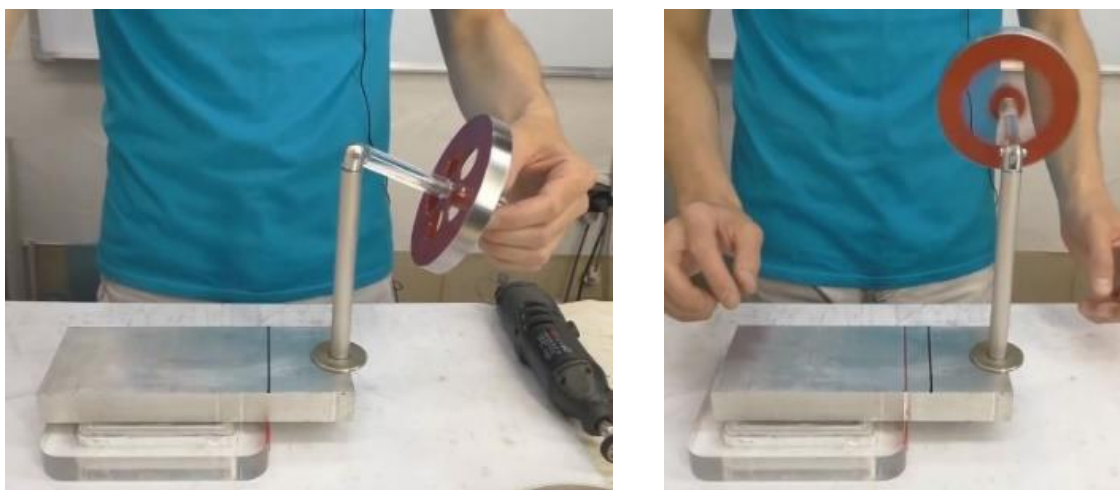


Рис.3. Слева уравновешенный гироскоп без вращения; справа на сдвинутой на платформе прецессирующий гироскоп не позволяет опрокинуться сдвинутой на 2 см. платформе

его ось стала прецессировать. После этого алюминиевая платформа, на которой установлен прецессирующий гироскоп, сдвигается вправо на расстояние, примерно, 2 см и находится

линия равновесия (правый снимок на рис 3), показывающая, что вес прецессирующего гироскопа уменьшился.



Рис.4. Слева на рычажных весах уравновешенный гироскоп без вращения; справа прецессирующий гироскоп теряет вес.

На рис. 4 показан наглядный эксперимент с гироскопом на рычажных весах. На левом снимке представлен не вращающийся гироскоп, уравновешенный грузом. На правом груз перевешивает прецессирующий гироскоп, заставляя вращаться коромысло рычажных весов вокруг оси, проходящей через опорный стержень.

Наконец, на рис. 5 потеря веса прецессирующим гироскопом измерена прямо на весах.



Рис. 5. Слева весы показывают вес не вращающегося гироскопа 710 грамм; справа прецессирующий гироскоп весит 708 грамм.

В 2004 году, работая в Таиланде в лаборатории, организованной Мариной Александровной Лобовой, мы провели измерения потери веса прецессирующего гироскопа, используя прецизионные весы, измеряющие вес с точностью до 0,001 грамма и изолированные от аэродинамических помех стеклянной камерой (см. рис. 6). Вместе с подставкой не

вращающийся гироскоп весил 46, 643 грамма. Во время прецессии гироскопа он терял в весе $0, 158 \pm 0,001$ грамма.

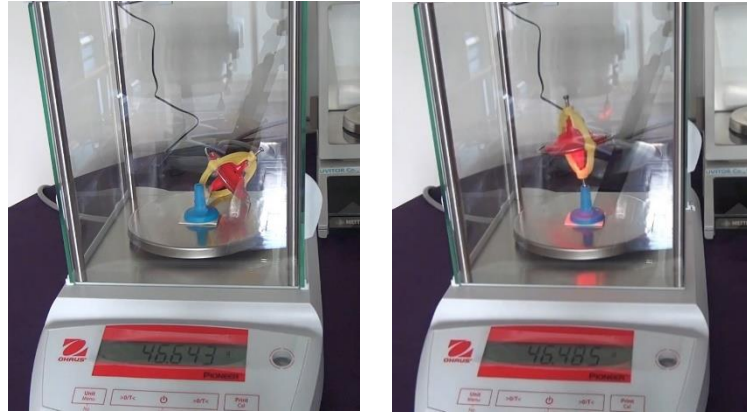


Рис. 6. Слева измеренный вес не вращающегося гироскопа равен 46,643 грамма; справа вес прецессирующего гироскопа равен 46,485.

Если частота прецессии постоянна, то из уравнений на весах (48), записанных для симметричного прецессирующего в гравитационном поле гироскопа с одной неподвижной точкой (точкой опоры), следует

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m \vec{g} - m [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}']] + \vec{\Phi}, \quad (60)$$

где

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\Gamma + \vec{\Omega}_\Pi . \quad (61)$$

Здесь $\vec{\omega}_\Gamma$ - частота гироскопа, $\vec{\Omega}_\Pi$ - частота прецессии. Если частота вращения $\vec{\omega}$ равна нулю, то из (60) следует, что весы покажут $m \vec{g} = -\vec{\Phi}$ вес не вращающегося гироскопа. Если же гироскоп прецессирует, то мы имеем из (60)

$$\vec{P}_1 = m \left(\vec{g} - [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}']] \right) = m_1 \vec{g} , \quad (62)$$

$$m_1 = m \left(1 - \frac{[\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{r}']]}{\vec{g}} \right) < m , \quad (63)$$

где $|\vec{r}'| = |\vec{r}_c| = l$ – расстояние от точки опоры до центра масс прецессирующего гироскопа. Окончательно формула (63) в скалярной форме приобретает вид

$$m_1 = m (1 - \Omega_\Pi^2 l \sin^2 \theta / g \cos \theta) , \quad (64)$$

где θ - угол прецессии (угол между осью прецессии и осью собственного вращения гироскопа) и $\Omega_\Pi = \mu l g / L$ - угловая скорость прецессии. Формула (64) получена в предположении, что $\Omega_\Pi \ll \omega_\Gamma$. В общем случае, гироскоп может вращаться не только вокруг собственной оси (первая степень вращения), но прецессировать и нутировать (вторая и третья степени свободы). Поэтому эффективную массу гироскопа $m_{эфф}$ можно рассматривать как

зависящую от времени, при этом из закона сохранения эффективного импульса центра масс гироскопа $\vec{p}_{эфф} = m_{эфф}\vec{v}$, следует аналог уравнения Циолковского вида

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_{эфф} = \frac{d}{dt}m_{эфф}\vec{v} = m_{эфф}\frac{d}{dt}\vec{v} + \vec{v}\frac{d}{dt}m_{эфф} = 0. \quad (65)$$

Из этого уравнения следует, что, управляя вращением масс внутри системы (меняя локальную кривизну пространства в соответствии с уравнениями (58)), можно двигаться в космическом пространстве *без реактивного двигателя*.

Пример 3. Движение куба под действием внутренних сил инерции

На рис. 7 представлен куб, внутри которого имеются источники питания электромоторов, вращающих 2 гироскопа, расположенных на двух перпендикулярных осях x и y . Кроме того, внутри имеются датчики положения и 2 процессора, которые управляют вращением гироскопов. Программируя процессоры, можно задавать вращение гироскопов таким образом, что куб будет менять его ориентацию в пространстве в соответствии с заданной нами

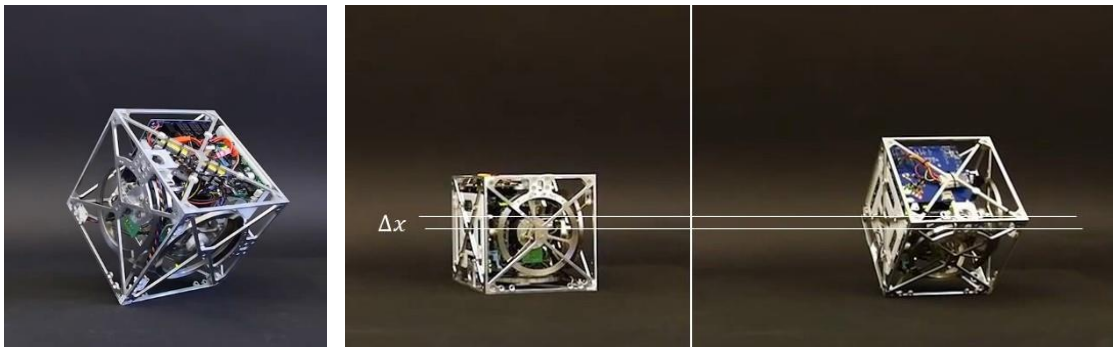


Рис. 7. Слева куб с двумя гироскопами, вращающимися вокруг осей x и y ; справа центр масс куба перемещен на расстояние Δx в результате действия сил инерции внутри куба.

программой. Поэтому куб является простейшим прибором, способным менять свое положение в космосе без использования реактивного двигателя.

4D гироскоп

Если гироскоп вращается только в трех пространственных углах (углах Эйлера), то такой гироскоп мы будем называть 3D гироскопом, в отличие от 4D гироскопа, вращение которого происходит, в общем случае, в шести углах: трех пространственных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и трех пространственно-временных $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Кроме того, поступательная и вращательная энергии 4D гироскопа не являются аддитивными.

Маятник Максвелла, в котором вращение по одному пространственно-временному углу θ_1 (ускорение $A = g - \omega r = const$) связано с вращением по одному пространственному углу φ_1 (ускорение $\omega r = const$), представляет собой простейший 4D гироскоп. Другим примером 4D гироскопа является симметричный вибратор [25]. Для того, чтобы управлять движением центра масс симметричного вибратора, В.Н. Толчин установил на него специальное устройство мотор-тормоз (см. рис. 8), задача которого состояла в том, чтобы менять угловую скорость вращения грузов m в определенных секторах углов. Не зная формулы (59), чисто интуитивно, В.Н. Толчин создал устройство, в котором искусственное

изменение угловой скорости внутри механической системы приводило к изменению скорости её центра масс, нарушая тем самым, законы механики Ньютона.

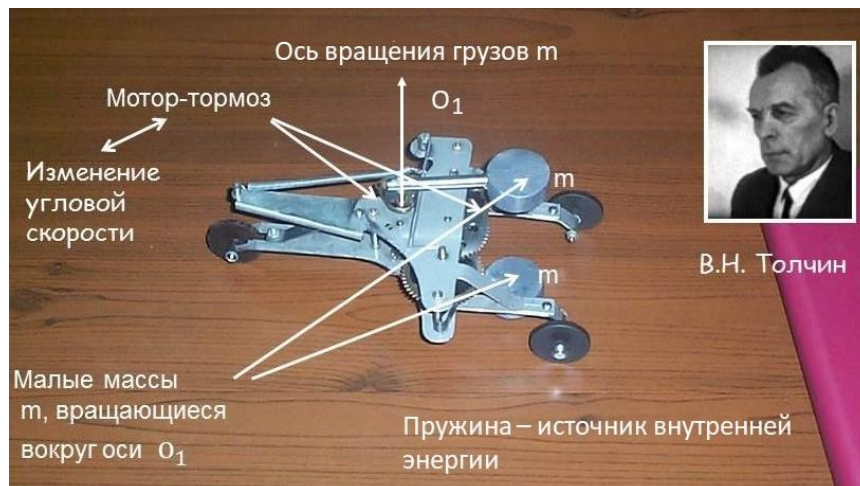


Рис.8. Инрециоид Толчина

В 2000 году в Таиланде группой российских ученых были проведены исследования 4D гироскопа, у которого мотор-тормоз был заменен сервомотором (рис.9) и который управлялся специально разработанной компьютерной программой. Программа тормозила и ускоряла вращение грузов в определенных угловых секторах, при этом 4D гироскоп двигался только вперед (см. рис. 11), опровергая возражения оппонентов, утверждавших, что причиной движения являются силы трения между колесами поддерживающей тележки и подстилающей поверхностью.

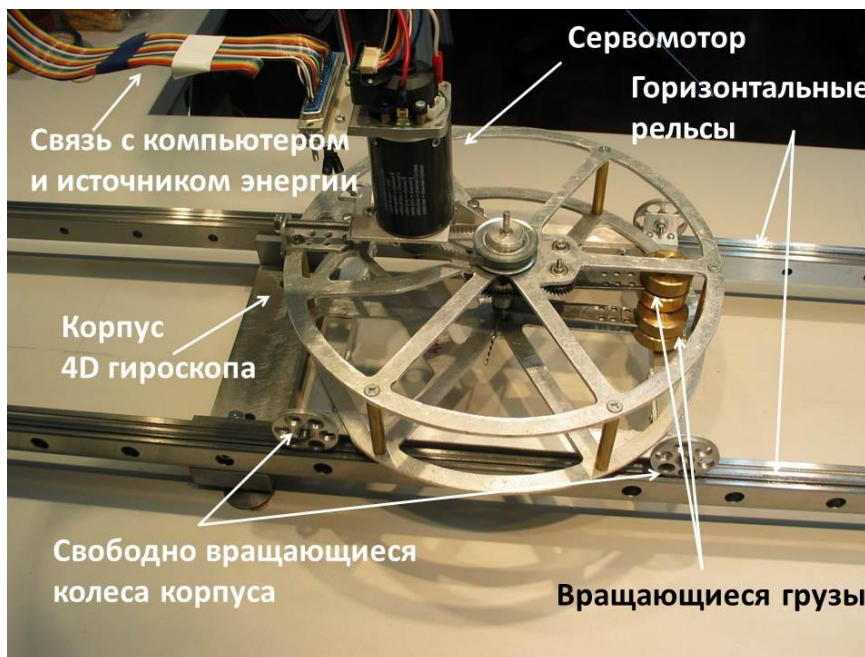


Рис.9. 4D гироскоп, управляемый компьютерной программой

Для теоретического описания движения 4D гироскопа были использованы уравнения (27), которые для нашей модели имели вид

$$\frac{dv_c}{dt} = a_L, \quad a_L = \frac{2BL \sin \varphi / mr^2 + k^2 \Phi(r\omega - v \sin \varphi)}{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \quad (66)$$

$$\frac{d\omega}{dt} - k^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \omega^2 = \frac{L_N}{2mr^2}, \quad L_N = \frac{L/2mr^2 + \Phi(B\omega \sin \varphi - v)/r}{1 - k^2 \sin^2 \varphi}. \quad (67)$$

Для экспериментального исследования пространственно-временной прецессии, описываемая уравнениями (66),(67), был создан 4D гироскоп, у которого момент L_{MT} осуществлялся с помощью сервомотора (рис.9), который управлялся по специально разработанной компьютерной программе. Чтобы выявить роль сил трения колес с подстилающей поверхностью, были проведены теоретические исследования движения 4D гироскопа только за счет сил трения. Теоретическая оценка работы сил трения по перемещению центра масс 4D гироскопа весом 1700 гр. оказалась в 100 раз меньше, чем та энергия, которая наблюдалась в эксперименте.

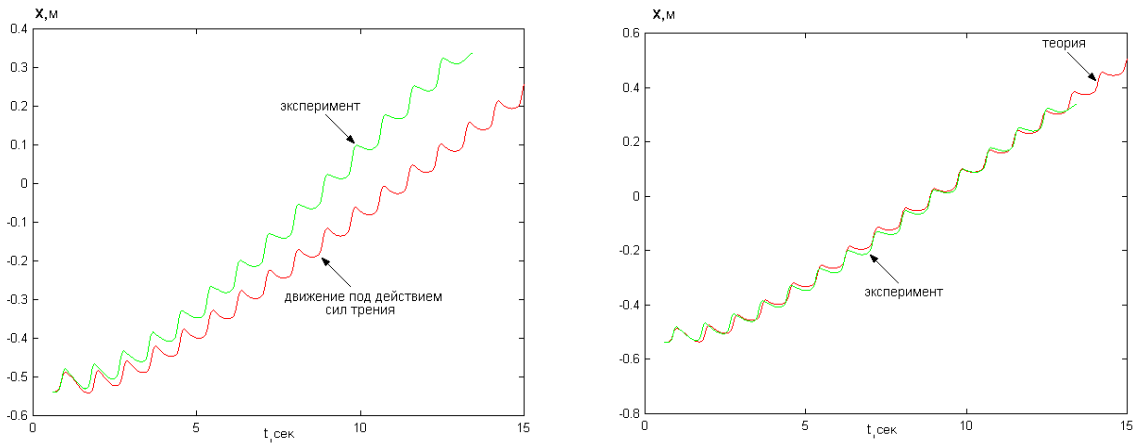


Рис.10. Сравнение теории и эксперимента при движении 4D гироскопа: слева теория Ньютона с учетом сил, трения; справа формулы (66),(67) неголономной механики.

Для окончательного вывода о причине движения 4D гироскопа была построена теория движения 4D гироскопа за счет нелинейных сил трения и, затем, полученная теоретическая кривая сравнивалась с экспериментальным графиком (рис.10 слева). Справа на рис. 10 сравниваются теоретическая кривая, полученная из уравнений (66) и (67) с экспериментальной кривой. Это сравнение показывает, что причиной движения 4D являются внутренняя сила инерции, возникающая при управлении пространственно-временной прецессией, а не сила трения. Нам не удалось решить уравнения (66), (67) аналитически, поэтому были проведены численные расчеты с помощью программы «MathLab», которые сравнивались с экспериментальными кривыми (рис. 10,11).

Была разработана компьютерная программа движения такая, что центр масс и корпус 4D гироскопа двигались только вперед (рис.12). Заметим, что при изменении частоты внутренним моментом L_{MT} , сначала изменялась скорость центра масс v_c и только затем скорость корпуса v , при этом скорость центра масс v_c «копировала» угловую частоту вращения ω .

На основе проделанного анализа мы приходим к выводу, что причиной движения центра масс 4D гироскопа является управляемая пространственно-временная прецессия гироскопа, который движется согласно уравнениям геодезических (66), (67) пространства $A_2(2)$, а не под действием силы трения, как считает большинство физиков.

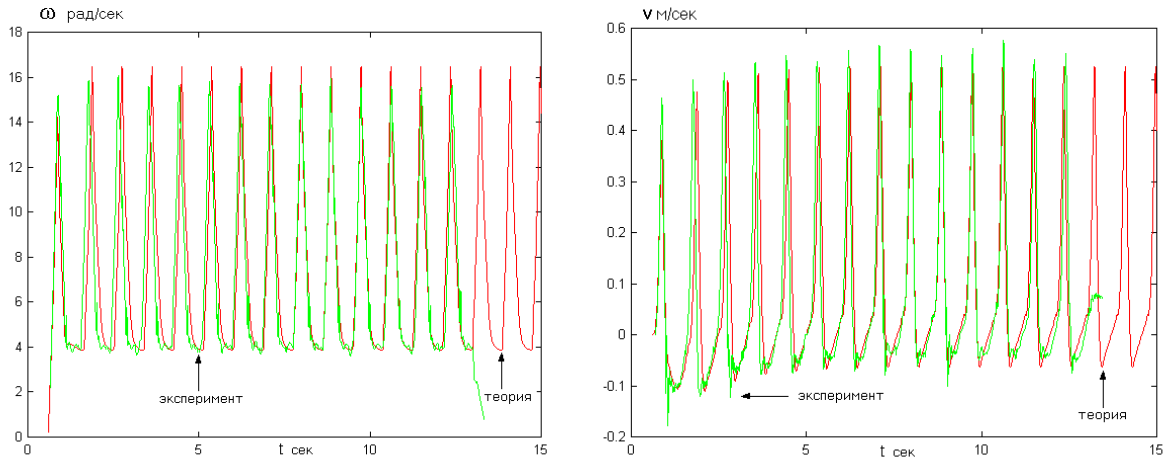


Рис. 11. Сравнение теоретических графиков (красная кривая), полученных с использованием уравнений (98) и (99) с экспериментальными кривыми (зеленая кривая)

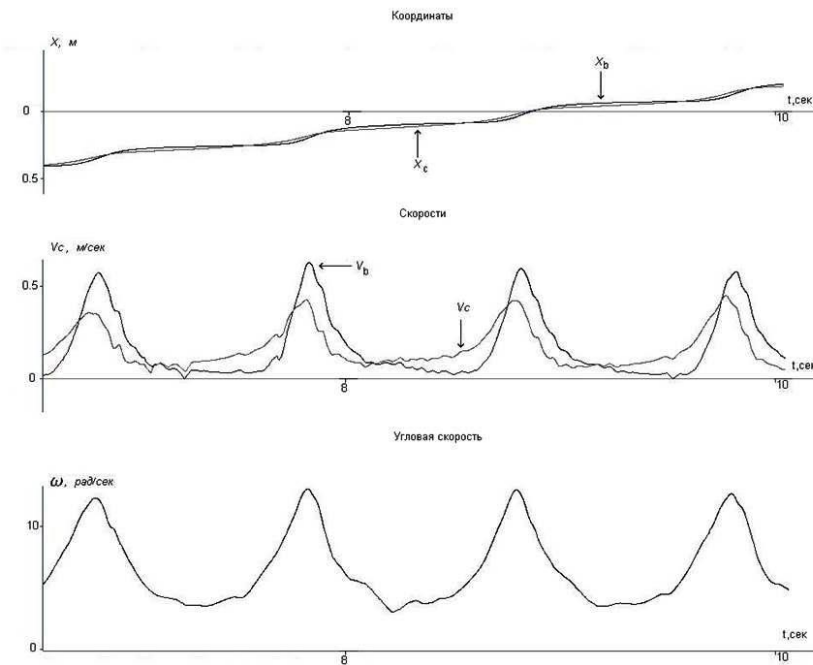


Рис.12. Центр масс и корпус 4D гироскопа движутся только вперед, без остановки

Образное мышление и детерминизм в квантовой физике полей инерции

Общепринятая квантовая физика отказывается от образного мышления, что не позволяет понять физическую сущность квантовой теории. Такие основные понятия, лежащие в основе квантовой физики, как *плоская волна и точечная частица* оказываются идеальными объектами, не встречающимися в природе, подобно понятию *инерциальной системы отсчета*. Отказываясь от понятия инерциальной системы отсчета, мы автоматически отказываемся от понятия материальной точки, заменяя его сперва понятием ориентируемой материальной точки и, затем, «клубком» поля инерции с массой (56) и плотностью материи

$$\rho = \frac{2g^{jm}}{vc^2} \{ \nabla_{[i} T_{|j|m]}^i + T_{s[i} T_{|j|m]}^s \}, \quad i, j, k \dots = 0, 1, 2, 3. \quad (68)$$

Вместо уравнений движения ориентируемой материальной точки (27), мы будем искать уравнения движения плотности (68). Для этого необходимо использовать Структурные уравнения Картана геометрии 10ти мерного расслоенного пространства $A_4(6)$. Именно эти уравнения описывают динамику полей инерции T_{jk}^i [14]. Для физических приложений их можно представить в виде расширенной системы уравнений поля Эйнштейна-Янга-Миллса [10]

$$\nabla_{[k} e_{j]}^a + T_{[kj]}^i e_i^a = 0, \quad (A)$$

$$R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R = \nu T_{jm}, \quad (B.1)$$

$$C_{jkm}^i + 2\nabla_{[k} T_{|j|m]}^i + 2T_{s[k}^i T_{|j|m]}^s = -\nu J_{jkm}^i, \quad (B.2)$$

$$i, j, k \dots = 0, 1, 2, 3, \quad a, b, c \dots = 0, 1, 2, 3,$$

где уравнения (A) определяют кручение

$$\Omega^{\cdot i}_{jk} = -T^i_{[jk]} = -\frac{1}{2} e^i_a (\nabla_k e^a_j - \nabla_j e^a_k) = e^i_a \nabla_{[j} e^a_{k]} \quad (69)$$

пространства $A_4(6)$, уравнения (B.1) – оказываются полностью геометризованными уравнениями Эйнштейна, а уравнения (B.2) – полностью геометризованными уравнениями Янга-Миллса. В уравнениях (B.1) тензор энергии-импульса материи T_{jm} определяется согласно (56) и тензор J_{ijkm} в уравнениях (B.2), равный

$$J_{ijkm} = 2g_{[k(i} T_{j)m]} - T g_{i[m} g_{k]j} / 3 \quad (70)$$

- тензор тока. Как легко видеть, тензоры (56) и (70) образованы полями инерции T_{jk}^i которые нужно рассматривать как поля материи. Уравнения (A), (B) не содержат никаких физических констант, представляя собой матрицу возможных физических объектов, рожденных из Вакуума. Их решения содержат константы и функции, значения которых устанавливаются с использованием соответствия с решениями известных фундаментальных уравнений теоретической физики. В качестве неизвестных независимых функций в уравнениях (A), (B) выступают компоненты тензора Римана R_{ijkm} , компоненты кручения $\Omega^{\cdot i}_{jk}$ (или поля инерции T_{jk}^i) и компоненты неголономной тетрады e_i^a . Методы решения и некоторые физические важные решения приведены в работе [10]. Если решение найдено, то мы можем

рассчитать плотность материи (68), поле чего находятся средние значения физических характеристик того материального объекта, для которого было получено данное решение.

В квазиинерциальной системе отсчёта плотность материи (68) упрощается, принимая в спинорном базисе вид [10]

$$\rho = -\frac{1}{2vc^2}\mu_{P\dot{Q}}\mu^{P\dot{Q}} = \frac{1}{2vc^2}\bar{\mu}_{\dot{Q}P}\mu^{P\dot{Q}}, \quad A, B, C \dots = 0, 1, \quad \dot{D}, \dot{E}, \dot{F} \dots = \dot{0}, \dot{1}, \quad (71)$$

где $\bar{\mu}_{A\dot{C}} = \bar{\mu}_{A\dot{C}} = -\mu_{C\dot{A}}$ – спинорное представление четырех спинорных комплексных компонент поля инерции, образующих геометризированный спинор Дирака. Уравнения движения плотности материи (71) мы находим, используя тождество Бианки $\nabla_{[p}R^i{}_{jk]m} = 0$ для тензора Римана в полностью геометризованных уравнениях поля (B.1). В результате получим закон сохранения тензора энергии-импульса материи (56) в виде

$$\nabla_i \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right) = v \nabla_i T^{ik} = 0, \quad (72)$$

Чтобы получить соответствие уравнений движения (72) с уравнениями квантовой теории, мы должны выбрать тензор энергии-импульса в виде $T^{ik} = \rho c^2 l^i l^k$, $l^k l_k = 0$, тогда из (72) следует

$$\nabla_i T^{ik} = \nabla_i (\rho c^2 l^i l^k) = 0. \quad (73)$$

Поскольку $\nabla_i g^{ik} = 0$ [10] и для плотности ρ выполняется условие несжимаемости $\nabla_i \rho = 0$ для «идеальной жидкости», то уравнения (73) распадаются на:

1) геометризованное уравнение непрерывности

$$\nabla_i (\rho l^i) = \partial_i (\rho l^i) + \rho l^n \Gamma^i{}_{nj} = 0; \quad (74)$$

2) геометризованные уравнения, подобные гидродинамическим уравнениям Эйлера

$$\rho \frac{Dl^k}{d\lambda} = \rho \frac{dl^k}{d\lambda} + \rho \Gamma^k{}_{mn} l^m l^n = 0; \quad (75)$$

3) геометризованное уравнение для несжимаемой «идеальной жидкости»

$$\nabla_i \rho = \partial_i \rho = 0. \quad (76)$$

В уравнениях (74) и (75) $l^k = \frac{dx^k}{d\lambda}$, $l^k l_k = 0$ и ρ определяется согласно (71).

С геометризованным спинором $\mu^{P\dot{Q}}$ можно связать псевдоскаляр Ψ , такой что его производная образует псевдовектор

$$\hat{\Omega}_m = \Psi_{,m}. \quad (77)$$

Тогда тензор энергии-импульса (56) и плотность (71) принимают вид

$$T_{jm} = \frac{1}{2v} \left\{ \Psi_{,j} \Psi_{,m} - \frac{1}{2} g_{jm} \Psi_{,n} \Psi^{,n} \right\} = \frac{1}{v} \Phi^2(x^i) l_j l_m, \quad (78)$$

$$\rho = \frac{1}{vc^2} \Phi^2(x^i), \quad \Psi_{,m} = \Phi l_m, \quad l_m l^m = 0, \quad \Phi = \Phi(x^i) \quad (79)$$

Рассмотрим решение уравнений Физического Вакуума, которое приводит к уравнениям Эйнштейна в пределе, когда масса источника гравитационного поля постоянна $m(t) \rightarrow m = const$. Как показано в [10], в пределе получим точечное распределение материи

$$\rho = \lim_{m(t) \rightarrow m=const} \frac{2|\psi^0(u)|}{\nu c^2 r^2} = m\delta(\vec{r}) . \quad (80)$$

Согласно (71), мы можем ввести комплексное поле инерции ψ

$$\psi(x^m) = \sqrt{\frac{1}{m\nu c^2}} \phi(x^m) \exp\{-i(k_n x^n)\} , \quad (81)$$

$$\psi^*(x^m) = \sqrt{\frac{1}{m\nu c^2}} \phi(x^m) \exp\{i(k_n x^n)\} , \quad (82)$$

нормированное на единицу

$$\int \psi^* \psi dV = 1, \quad \nu = 8\pi G/c^4 = const. \quad (83)$$

Тогда, учитывая (71), (79) и (80) плотность материи в пределе $m(t) \rightarrow m = const$ и в квазиинерциальной системе отсчета представляется как

$$\rho = m\delta(\vec{r}) = m\psi^* \psi . \quad (84)$$

Соотношение (84) представляет собой аналог квантового дуализма «плоская волна -точечная частица». Если подставить в экспоненту полей (81) и (82) соотношения Планка-Эйнштейна

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} . \quad (85)$$

то мы получим волны де Бройля.

Таким образом, мы показали, что в теории Физического Вакуума, в (квази)инерциальной системе отсчета нормированное на единицу поле инерции совпадает с волной де Бройля, для которой выполняется дуализм волна-частица (84). С точки зрения теории Физического Вакуума современная квантовая теория описывают простейшую динамику полей инерции, связанных со всеми наблюдаемыми видами материи. Вероятностная трактовка волновой функции квантовой механики возможна, но она не отражает физической сущности квантовых явлений, связанных с полем инерции. Обнаруженная связь волновой функции квантовой теории с полем инерции позволяет рассматривать (приближенно) квантовую частицу общепринятой квантовой теории как протяженный *устойчивый волновой пакет, образованный полем инерции*, при этом квантовая физика становится детерминированной в том смысле, что она описывает движение протяженного объекта, подобно движению капли жидкости уравнениями Лиувилля

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \rho}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (86)$$

где H - гамильтониан системы. Когда мы описываем протяженный объект - каплю жидкости как единое целое образование, способное менять свою форму, то мы невольно должны

ввести вспомогательный инструмент в виде *плотности вероятности*, позволяющий вычислять средние значения физических величин, таких как координата, импульс и т.д., характеризующих движение капли. В случае полей инерции в приближении стабильного полевого образования – полевого солитона, удобно вводить плотность вероятности (84), позволяющего вычислять средние значения физических характеристик полевого солитона, не забывая при этом о полевой природе этого объекта, образованного реальным физическим полем - полем инерции. Используя соотношения (80)-(85) и уравнение непрерывности (74), которое оказывается нелинейным уравнением по относительно полей (81), (82), можно получить линейные уравнения Шредингера в нерелятивистском приближении [27]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - U\psi = 0, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + U\psi^* = 0. \quad (87)$$

В простейших случаях уравнения (87) допускают аналитические решения и удобны в использовании. Однако для вычисления средних значений физических величин нам нужна плотность ρ . Поэтому Дж. фон Нейман, вместо уравнений Шредингера (87) предложил использовать кантовое уравнение Лиувилля (уравнение фон Неймана [33])

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, \hat{H}] = i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \rho}{\partial p^i} \frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_i} \right] = 0, \quad (88)$$

где \hat{H} - оператор Гамильтона.

В общем случае, для вычисления средних значений физических величин исследуемого объекта используется соотношение (69), конкретное аналитическое значение которого находится из решения уравнений (A), (B) теории Физического Вакуума.

Заключение

Классическая механика была и остается основой всей физики. Как показывает история физики, каждый существенный шаг в развитии науки сопровождался фундаментальным обобщением классической механики и если теоретик претендует на обобщение основ физики, то прежде всего, он должен показать, как его новая физика изменяет классическую механику. Именно эта оценка (или самооценка) определяет уровень фундаментальности работы теоретика. Это необходимо делать потому, что экспериментальные результаты, выходящие за рамки существующей фундаментальной теории, заставляют теоретиков создавать феноменологические и конструктивные теории, *базирующиеся на старых принципах классической механики*. В результате мы имеем ситуацию, когда теоретики, развивающие Стандартную модель или теорию струн, имеют уровень физического мышления в нерелятивистской классической механике, соответствующий знаниям, сформировавшимся в XVII-XVIII веках, т.е. их восприятие мира осталось у них на уровне механики Ньютона-Эйлера, полной нерешенных проблем. В этом я вижу основную причину непонимания квантовой физики и общего застоя в современной теоретической физике.

Надо отметить, что в пяти из 100 учебников по классической механике [34-38] говорится о возможности движения механической системы под действием внутренних сил, при этом имеется ввиду механика пластичного тела, расстояние между точками которого меняются со временем. Как отмечено в работах [17,18], механика пластичного тела учитывает влияние высших производных координат по времени. Именно этим свойством обладают

уравнения движения 4D гироскопа и, скорее всего, все механические системы, которые описываются уравнениями (28) неголономной механики.

В 1969 г. в Московском Обществе испытателей природы я впервые увидел эксперименты с инерциодом Толчина [23] (4D гироскопом). С тех пор была проделана огромная работа по развитию новой неголономной механики, которая способна теоретически обосновать движение механической системы под действием искусственно созданных внутри её сил инерции. В середине 70х годов прошлого столетия на одном из предприятий г. Москвы моими друзьями была изготовлена модель инерциоида Толчина, представленная на рис. 8. Простейшие эксперименты с этой моделью демонстрировали нарушение третьего закона механики Ньютона, что побудило меня и группу ученых из МГУ написать письмо академику АН ССР, ректору Московского университета Анатолию Алексеевичу Логунову с просьбой организовать на Физфаке МГУ научные исследования инерциоида Толчина. Положительного ответа из приемной ректора не последовало, более того, в 1983 году ректор А.А. Логунов организовал мое увольнение из МГУ.

В 2000 г. в Таиланде (Бангкок) Мариной Лобовой была организована лаборатория, в которой было создано и исследовано 8 различных моделей 4D гироскопов, последняя из которых двигалась *только вперед и управлялась компьютерной программой* [30]. Большая часть математических расчетов движения 4D гироскопа была проделана выпускником Тюменского государственного университета, выдающимся математиком Сидоровым Андреем Николаевичем [24,26], который в совершенстве владеет методами решения нелинейных дифференциальных уравнений, какими являются уравнения неголономной механики.

Объективный взгляд со стороны на проделанную работу обращает внимание на то, что полученные результаты претендуют, на мой взгляд, на четыре Нобелевских премии по физике, а именно: 1) за обобщенную формулу $E(\omega) = m(\omega)c^2$, где масса определяется через поле инерции согласно (56); 2) за обобщенное уравнение Циолковского (65), использующее закон сохранения (59) и утверждающее возможность двигаться в космическом пространстве без выброса массы; 3) за теоретическое обоснование и экспериментальное подтверждение движения 4D гироскопа под действием сил инерции; 4) за создание детерминированной квантовой механики, в которой в уравнениях (87) волновая функция ψ (формулы (81),(82)) определяется полем инерции T_{jk}^i .

В настоящее время можно с уверенностью утверждать, что найден теоретически и экспериментально обоснованный новый способ передвижения в космическом пространстве, использующий силы инерции, созданные управляемой пространственно-временной прецессией 4D гироскопа [26-31]. Остается только найти ответственных за достижения Российской науки людей, способных довести начатое дело до создания космических аппаратов, движущихся в космосе в соответствии с новыми физическими принципами.

Литература

1. *Ньютон И.* //Математические начала натуральной философии. Перевод с латинского и примечания А. Н. Крылова. М., Наука, 1989. 688 стр.
2. *Ольховский И.И.* // Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.

3. *D'Alembert, J.* // *Traité de Dynamique, dans lequel les Lois de L'Equilibre & du Mouvement des Corps sont Réduites au plus petit Nombre Possible.* — Paris: David L'Aîné, 1743.
4. *Шипов Г.И.* // *Застой в теоретической физике и пути выхода из него. Механика* // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18485, 02.02.2014
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311123.htm>
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311123.htm>
5. *Эйлер Л.* // *Открытие нового принципа механики. Записки Берлинской академии наук, 1750, т. 14., с. 185-217.*
6. *Shipov G.* // *Descartes' Mechanics – Fourth Generalization of Newton's Mechanics.* In "7 th Intern. Conference Computing Anticipatory Systems " ~ НЕС - ULg, Liege, Belgium, 2005, ISSN 1373-5411 ISBN 2-930396-05-9, P. 178 .
7. *Эйлер Л.* // *Основы динамики точки. ОНТИ-НКТП-СССР, 1938, с. 537.*
8. *Магнус К.* // *Гироскоп: теория и применение. М.: Мир, 1974, с. 526.*
9. *Граммель Р.* // *Гироскоп, его теория и применения, т. 1. т. 2, ИЛ, М., 1952.*
10. *Шипов Г.И.* // *Теория Физического Вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. 450 с.*
11. *Cartan E.* // *Compt. Rend.1922. Vol. 174, p. 437.*
12. *Cartan E.-Einstein A.* // *Letters on Absolute Parallelism, 1929-1932, Princeton University Press, 1979, p.7.*
13. *Шипов Г.И.* // *Теория гравитации в пространстве абсолютного параллелизма. Известия вузов, Физика, 1977, № 6, с. 142.*
14. *Шипов Г.И.* // *Проблемы теории элементарных взаимодействий. Часть I. Элементарные частицы как инерционы. М., МГУ, Химфак, 1979, с. 144.*
15. *Схоутен Я.А.* // *Тензорный анализ для физиков, 1965. М.: Наука, ГРФМЛ, с. 455*
16. *Frenet F.* // *Jour. de Math. 1852. Vol. 17. P. 437-447.*
17. *Геловани В.А., Смольяков Э.Р.* // *Гипотеза о влиянии высших производных на движение центра масс. ДАН, 2000, т. 375, № 2, с. 159-162.*
18. *Смольяков Э.Р.* // *Нелинейные законы движения и обоснование законов движения инерционов. ДАН РФ, 2003, т. 393, № 6, с. 770-775.*
19. *Shipov G.* // *Descartes' Mechanics – Fourth Generalization of Newton's Mechanics.* In "7 th Intern. Conference Computing Anticipatory Systems " ~ НЕС - ULg, Liege, Belgium, 2005, ISSN 1373-5411 ISBN 2-930396-05-9 P. 178
20. *Шипов Г.И.* // *О 50 летней работе в фундаментальной физике* // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.24760, 08.09.2018.
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1160-shp.pdf>
21. *Raychaudhuri A.* // *Phys. Rev. 98, 1123 (1955).*
22. *Alcubierre, M.* // "The warp drive: hyper-fast travel within general relativity". *Class. Quant. Grav.* Vol.11. L73–L77. (1994).
23. *Толчин В.Н.* // *Инерционид. Силы инерции как источник движения. Пермь. 1977.*
24. *Шипов Г.И., Сидоров А.Н.* *Теоретические и экспериментальные исследования реактивного движения без отбрасывания массы. «Физика взаимодействия живых объектов с окружающей средой», 2004, М.: с.230.*
25. *Шипов Г.И.* // *4D Гироскоп в механике Декарта. Кириллица, 2006, с. 74*
http://www.shipov.com/files/021209_tolchdescart.pdf
26. *Шипов Г.И., Сидоров А.Н.* // *О наблюдении действия сил инерции в инерциальной системе отсчета* // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17140, 24.12.2011.
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1094-sh.pdf>

27. *Шипов Г.И.* // О четвертом обобщении механики Ньютона // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.23295, 26.04.2017, <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1035-shp.pdf> .
28. *Шипов Г.И.* // Физическое поле, которое физики прозвали // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.22656, 26.10.2016, <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02311147.htm> .
29. *Шипов Г.И.* // Теоретическое и экспериментальное исследование пространственно-временной прецессии 4D гироскопа и новый способ передвижения в космическом пространстве // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.23250, 10.04.2017, <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1151-shp.pdf> .
30. <https://www.youtube.com/watch?v=Igt1pV8ojTc> , <https://www.youtube.com/watch?v=-Kl3Cb3uejg> ,
31. <https://www.youtube.com/watch?v=BRcza9VDqpw> , https://www.youtube.com/watch?v=C_4G1EVjkdw , https://www.youtube.com/watch?v=TtEx_L1xv0g .
32. *Шипов Г.И.* // Квантовая механика, о которой мечтал Эйнштейн // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.27232, 09.07.2021. <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/4737-shp.pdf>
33. *Фон Нейман Дж.* // Математические основы квантовой механики. - М.: Наука, 1964. - 368 с
34. *Геронимус Я. Л.* // Теоретическая механика. Очерки об основных положениях. М., 1973 г. 512 стр. с илл. (стр. 206).
35. *Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л.* // Курс теоретической механики. Изд. 3-е, перераб. Учебник для вузов. М., «Высшая школа». 528 с. с илл. (стр. 293).
36. *Кильчевский Н. А.* // Курс теоретической механики. Том 1. (Кинематика, статика, динамика точки). М., 1972, 456 стр. с илл. (стр. 147).
37. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* // Теория колебаний. 2-е изд., перераб. и испр. - М.: Наука, 1981. - 918 с. (стр. 23).
38. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* // Теоретическая механика. Учеб. для вузов. Под ред. Товстик П. Е. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 2000. - 592 с.: илл. (стр. 147).