Оглавление

Предисловие

Идея Гармонии и Золотого Сечения. Каждый из нас наверняка задумывался над тем, почему Природа способна создавать такие удивительные гармоничные структуры, которые восхищают и радуют глаз. Почему художники, поэты, композиторы, архитекторы создают восхитительные произведения искусства из столетия в столетие. В чем же секрет и какие законы лежат в основе этих гармоничных созданий? Никто не сможет однозначно ответить на этот вопрос, но в этой книге сделана попытка приоткрыть завесу и рассказать об одной из тайн «гармонии мироздания» – «Золотом Сечении» или, как его еще называют, Золотой или Божественной Пропорции. Золотое сечение называется числом PHI (Фи) в честь великого древнегреческого скульптора Фидия (Phidias), который использовал это число в своих скульптурах.

Научно-технический прогресс имеет длительную историю и прошел в своем историческом развитии несколько этапов (вавилонская и древнеегипетская культура, культура Древнего Китая и Древней Индии, древнегреческая культура, эпоха Средневековья, эпоха Возрождения, промышленная революция 18 в., великие научные открытия 19 в., научно-техническая революция 20 в.) и вошел в 21-й век, который открывает новую эпоху в истории человечества - эпоху Гармонии. Именно в античный период было сделано ряд выдающихся математических открытий, оказавших определяющее влияние на развитие материальной и духовной культуры и роль которых мы не всегда сознаем. К разряду таких открытий мы должны, прежде всего, отнести Вавилонскую 60-ричную систему счисления и открытый вавилонянами позиционный принцип представления чисел, лежащий в основе десятичной и двоичной систем счисления. В этот ряд мы должны поставить тригонометрию и геометрию Евклида, несоизмеримые отрезки, золотое сечение и Платоновы тела, начала теории чисел и теории измерения. И, хотя каждый из этих этапов имеет свою специфику, вместе с тем он обязательно включает содержание предшествующих этапов. В этом и состоит преемственность в развитии науки. Преемственность может осуществляться в различных формах. Одной из сущностных форм ее выражения являются фундаментальные научные идеи, которые пронизывают все этапы научно-технического прогресса и оказывают влияние на различные области науки, искусства, философии и техники. К разряду таких фундаментальных идей относится идея Гармонии, связанная с золотым сечением. По словам Б.Г. Кузнецова, исследователя творчества Альберта Эйнштейна, великий физик свято верил в то, что наука, физика в частности, всегда имела своей извечной фундаментальной целью "найти в лабиринте наблюдаемых фактов объективную гармонию". О глубокой вере выдающегося физика в существование универсальных законов гармонии мироздания свидетельствует и еще одно широко известное высказывание Эйнштейна: «Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии».

Высказывания Алексея Лосева и Иоганна Кеплера. Какая главная идея лежала в основе древнегреческой науки? Подавляющее число исследователей дают следующий ответ: идея Гармонии, связанная с «золотым сечением». Как известно, в древнегреческой философии Гармония противостояла Хаосу и означала организованность Вселенной, Космоса. Выдающийся русский философ Алексей Лосев, исследователь эстетики античности и эпохи Возрождения, так оценивает основные достижения древних греков в этой области:

«Космос античным мыслителям периода зрелой классики представляется не просто некоей отвлеченной неопределенностью, (в таком случае он был бы только чистой мыслью), но совершенно живым и единораздельным телом, содержащим в себе нерушимую цельность, несмотря на бесконечные различия всех его проявлений. С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения (то есть, целое относится в нем к большей части, как большая часть к меньшей). Этому закону, кстати сказать, древние греки подчиняли и свои архитектурные сооружения. Их систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

В этом высказывании Алексей Лосев достаточно убедительно сформулировал «золотую» парадигму античной космологии. В ее основе лежат важнейшие идеи античной науки, которые в современной науке иногда трактуются как «курьезный результат безудержной и дикой фантазии». Прежде всего – это пифагорейская идея о числовой гармонии мироздания и космология Платона, основанная на Платоновых телах. Обратившись к геометрической структуре мироздания и арифметическим отношениям, выражающим гармонию, пифагорейцы предвосхитили возникновение математического естествознания, которое начало стремительно развиваться в 20-м веке. Идея Пифагора и Платона о всеобщей гармонии мироздания оказалась бессмертной.

Таким образом, в центре созданного древними греками математического учения о природе стояла «концепция гармонии», а сама математика древних греков и была «математикой гармонии» (“the mathematics of harmony”), которая непосредственно связана с золотым сечением - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии.

А вот еще одно широко известное высказывание, касающееся золотого сечения. Оно принадлежит гениальному астроному Иоганну Кеплеру, автору трех знаменитых «Законов Кеплера». Свое восхищение золотым сечением Кеплер выразил в следующих словах:

«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Напомним, что старинная задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, которая упоминается в этом высказывании, – это и есть золотое сечение!

Огромный интерес к этой проблеме в современной науке подтверждается достаточно внушительным перечнем книг по этой проблеме, опубликованных во второй половине 20 в. и начале 21 в. [1-50].

Математическое учение о Природе древних греков. Согласно мнению выдающегося американского историка математики Мориса Клайна [51], главный вклад древних греков, «оказавший решающее влияние на всю последующую культуру, состоял в том, что они взялись за изучение законов природы». Основной вывод, вытекающий из книги Мориса Клайна [51], состоит в том, что древние греки предложили новаторскую концепцию космоса, в котором все было подчинено математическим законам. Возникает вопрос: когда эта концепция была разработана? Ответ на этот вопрос также содержится в книге [51]:

«Греки преисполнились решимости доискаться до истин и, в частности, до истин о математических основах природы. Как следует приступить к поиску истин и как при этом гарантировать, что поиск действительно приводит к истинам? Греки предложили «план» такого поиска. Хотя он создавался постепенно на протяжении нескольких веков (VI-III вв. до н.э.), в истории науки расходятся во мнении относительно того, когда и кем этот план был впервые задуман, к III в. до н.э. план поиска истин был доведен до совершенства».

Таким образом, по мнению Клайна, новаторская концепция космоса, основанного на математических законах, была разработана древними греками в период с VI до III вв. до н.э. Но согласно утверждению А.Н. Колмогорова [52], в этот же период в Древней Греции «возникает математика как самостоятельная наука с ясным пониманием своеобразия ее метода и необходимости систематического развития ее основных понятий и предложений в достаточно общей форме».

Но тогда возникает вопрос: существовала ли какая-либо взаимосвязь между процессом создания математического учения о природе, что считается главным достижением древнегреческой науки, и процессом создания математики, которые протекали в Древней Греции в один и тот же период. Или это разные процессы? Оказывается, что такая связь, безусловно, существовала. Более того. Можно утверждать, что эти процессы фактически совпадали, то есть, математика, созданная древними греками, и их учение о природе, основанное на математических принципах, - это одно и то же. И наиболее ярким воплощением процесса «Математизации Гармонии» являются «Начала» Евклида, написанные в III в. до н.э.

Гипотеза Прокла. Греческий философ Прокл Диадох (412-485) высказал необычную гипотезу, касающуюся «Начал» Евклида. Среди математических сочинений Прокла наиболее известным является его «Комментарий к первой книге «Начал» Евклида». В этом Комментарии он выдвигает следующую необычную гипотезу. Суть «гипотезы Прокла» состоит в следующем. Как известно, XIII-я, то есть, заключительная книга «Начал», посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые играли главенствующую роль в «Космологии Платона» и в современной науке известны под названием Платоновых тел. Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает Эдуард Сороко [13], по мнению Прокла, Евклид «создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики».

Именно для решения этой задачи (в частности, для создания геометрической теории додекаэдра) Евклид уже в Книге II вводит задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»), которая затем встречается и в других Книгах «Начал», в частности, в Книге XIII.

«Гипотеза Прокла» приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, из «Начал» Евклида берут свое начало два направления математической науки - «Классическая Математика», позаимствовавшая в «Началах», аксиоматический подход, теорию чисел, теорию иррациональностей и геометрические аксиомы, и «Математика Гармонии», которая акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотом сечении») и на теории Платоновых тел, изложенной в Книге XIII «Начал» Евклида.

Введение термина «математика гармонии». В конце 20 в. для обозначения математического учения о природе, созданного древними греками, был введен термин “the mathematics of harmony” (математика гармонии). Следует отметить, что этот термин выбран очень удачно, потому что он отражал главную идею античной науки – «Математизация Гармонии». Впервые этот термин был введен в небольшой статье “Harmony of spheres”, помещенной в The Oxford dictionary of philosophy [53]. В этой статье понятие “the mathematics of harmony” («математика гармонии») ассоциируется с «гармонией сфер», которая называлась также «гармонией мира» (harmonica mundi) или мировой музыкой (лат. musica mundana). Гармония сфер представляет собой античное и средневековое учение о музыкально-математическом устройстве космоса, восходящее к пифагорейской и платонической философской традиции.

Еще одно упоминание о «математике гармонии» применительно к древнегреческой математике мы встречаем в книге Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics, опубликованной в 2005 г. [54]. Важно подчеркнуть, что в книге [54] понятие “the mathematics of harmony” («математика гармонии») непосредственно ассоциируется с «золотым сечением» - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии, которое в тот период называлось «делением отрезка в крайнем и среднем отношении».

Как вытекает из работ [53,54], в развитии «Математики Гармонии» в течение нескольких тысячелетий принимали участие выдающиеся мыслители, ученые и математики: Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Кеплер, Кассини, Бине, Люка, Клейн, а в 20-м веке – известные математики Коксетер, Воробьев, Хоггатт и Вайда. И мы никак не можем игнорировать этот исторический факт.

Числа Фибоначчи. С золотым сечением тесно связаны числа Фибоначчи, открытые в 13 веке итальянским математиком Леонардо из Пизы, по прозвищу Фибоначчи. Они составляют числовой ряд, начинающийся с двух единиц, в котором каждое последующее число является суммой двух предыдущих.

Отношение соседних чисел ряда Фибоначчи в пределе стремится к золотому сечению. Математическая теория чисел Фибоначчи получила дальнейшее развитие в работах французских математиков 19-го века Бине («формулы Бине») и Люка («числа Люка»). Как упоминалось, во второй половине 20-го века эта теория получила развитие в работах канадского геометра Дональда Коксетера [1], советского математика Николая Воробьева [2], американского математика Вернера Хоггатта [3] и английского математика Стефана Вайды [4]. Развитие этого направления, в конечном итоге, привело к возникновению «Математики Гармонии» [47] - нового междисциплинарного направления современной науки, которое имеет отношение к современной математике, компьютерной науке, экономике, а также ко всему теоретическому естествознанию. Работы известных математиков Коксетера, Воробьева, Хоггатта и Вайды, а также исследования математиков-фибоначчистов, членов Американской Фибоначчи-Ассоциации, стали началом процесса «Гармонизации Математики», который активно продолжается и в 21-м веке. И этот процесс подтверждается огромным количеством книг в области «золотого сечения» и чисел Фибоначчи, опубликованных во второй половине 20 в. и начале 21 в. [1-50].

Источники настоящей книги. Настоящая книга является итогом более чем 40-летних исследований автора, связанных с «золотым сечением» и числами Фибоначчи, и основана на материале пяти книг, опубликованных автором в различные периоды своей научной деятельности. Первая книга «Введение в алгоритмическую теорию измерения» опубликована в 1977 г. [9] и посвящена изложению оригинальной математической теории измерения, касающейся теоретической метрологии и оснований математики. Фибоначчиевы алгоритмы измерения, синтезированные в рамках алгоритмической теории измерения [9], лежат в основе p-кодов Фибоначчи – новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы.

Вторая публикация – это брошюра «Алгоритмическая теория измерения» [10], опубликованная издательством «Знание» в престижной серии «Математика и кибернетика» в 1979 г.

Третья книга «Коды золотой пропорции» опубликована в 1984 г. [12] и посвящена изложению нового направления в теории систем счисления – систем счисления с иррациональными основаниями, называемых также кодами золотой пропорции. Системы счисления с иррациональными основаниями являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу «золотой» теории чисел [55]. Коды Фибоначчи и коды золотой пропорции могут быть положены в основу нового направления в компьютерной науке – компьютеров Фибоначчи как нового направления в компьютерной технике, направленного на повышение информационной надежности компьютеров и защищенных 65 патентами США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран.

Четвертая книга «Код да Винчи и ряды Фибоначчи», написанная в соавторстве с Анной Слученковой и Игорем Щербаковым, опубликована в 2006 г. [43] и представляет собой популярное изложение современной теории и приложений золотого сечения, чисел Фибоначчи и Платоновых тел.

Пятая книга “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” опубликована в 2009 г. [47] и посвящена изложению «математики гармонии» – нового междисциплинарного направления современной науки, которое, по мнению академика Юрия Митропольского, представляет собой «большой теоретический вклад в развитие, прежде всего, «элементарной математики». С другой стороны, математика гармонии представляет собой «золотую парадигму» современной науки и отражает важнейшую тенденцию в современной науке – возрождение «гармонических идей» Пифагора, Платона и Евклида.

Структура и цель книги. Книга состоит из трех частей:

Часть 1. Золотое сечение, числа Фибоначчи, и Платоновы тела в истории науки и культуры.

Часть 2. Коды Фибоначчи и золотой пропорции как альтернатива классической двоичной системе счисления

Часть 3. Математика гармонии как «золотая» парадигма современной науки

Главная цель книги – привлечь внимание широкой научной общественности и педагогических кругов к «математике гармонии» как новому типу «элементарной математики», представляющей интерес для современного математического образования, и как «золотой» парадигме современной науки, представляющей интерес для всей науки в целом, в том числе для информатики.

Книга написана популярно и рассчитана на широкий круг читателей, включая школьников, студентов, учителей школ, ученых различных специализаций, интересующихся историей математики, Платоновыми телами, золотым сечением, числами Фибоначчи и их приложениями в современной науке.

Благодарности. Заканчивая экскурс в предысторию возникновения этой книги, автор хотел бы поблагодарить всех, кто оказывал и оказывает огромную поддержку автору в развитии данного научного направления. Прежде всего, чувства глубокой благодарности автор испытывает к своему учителю профессору Александру Андреевичу Волкову (1924-2008), научному руководителю кандидатской (1966) и докторской (1972) диссертаций, а также выдающемуся украинскому математику академику Юрию Алексеевичу Митропольскому (1917-2008), который оказал огромную поддержку автору в развитии данного научного направления и способствовал публикации статей автора в академических изданиях Украины. И, конечно, огромная благодарность соратникам автора, членам Международного Клуба Золотого Сечения Эдуарду Сороко, Олегу Боднару, Сергею Петухову, Григорию Мартыненко, Самуилу Арансону, Борису Розину, Николаю Семенюте, Сергею Абачиеву, Валериану Владимирову, Виктору Цветкову, Анатолию Харитонову, Сергею Якушко, Олегу Когновицкому, Александру Южанникову, Анатолию Коновалову, Михаилу Быстрову, Александру

Волошинову, Ирине Крючковой, Александру Иванусу, Леониду Тимошенко, Елене Терешиной, Ивану Райляну, Алексею Борисенко, Денису Клещеву, Юрию Черепахину, Александру Чечику, Юрию Цымбалисту, Татьяне Егоровой-Гудковой и многим другим. Автору было нелегко устанавливать новые научные контакты после переезда в Канаду в 2004 г. И автор благодарен зарубежным ученым – аргентинскому математику Вере Шпинадель, американскому математику Джею Капраффу, чилийскому философу Дарио Саласу Соммеру, английскому физику Мохаммеду Ель-Нашие, немецкому ученому Волкмару Вейсу, канадским ученым Вадиму Геворкову и Льву Киришьяну, за поддержку научных исследований автора. Особая благодарность американскому философу проф. Скотту Олсену, одному из ведущих американских ученых в области золотого сечения, автору замечательной книги “The Golden Section. Nature’s Greatest Secret” (2006) [43]. Дружба с проф. Олсеном началась с 2005 г., когда Скотт Олсен приехал в Канаду специально для знакомства с автором настоящей книги. Проф. Скотт Олсен сыграл большую роль в публикации англоязычной книги автора “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” (2010) [47]. В 2010 г. он принял участие в работе Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010 г.), а в августе 2011 г. он еще раз посетил Канаду, чтобы наметить перспективы совместной научной работы, обсудить с автором свою новую книгу и поддержать автора в связи с тяжелой болезнью супруги.

За постоянную поддержку и создание прекрасных условий для научного творчества особую благодарность и глубокие чувства любви и признательности автор выражает членам своей семьи, прежде всего, супруге Антонине, с которой прожито в любви и дружбе более 50 лет, и дочери Анне, без которой наша жизнь в Канаде была бы просто невозможной. И без их помощи, заботы и моральной поддержки эта книга никогда не была бы написана.

Введение к части 1

Как известно, количество иррациональных (несоизмеримых) чисел бесконечно. Однако, некоторые из них занимают особое место в истории математики, науки и культуры. Их значение состоит в том, что они выражают некоторые отношения, имеющие универсальный характер и обнаруживающиеся в самых неожиданных местах.

Первое из них – это иррациональное число $\sqrt{2}$, равное отношению диагонали к стороне квадрата. С этим числом связано открытие «несоизмеримых отрезков» и история наиболее драматичного периода в античной математике, который привел к разработке теории иррациональностей и иррациональных чисел и в конечном итоге – к созданию современной «непрерывной» математики.

Следующие два иррациональных (трансцендентных) числа – это число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру и лежащее в основе тригонометрических функций, и «неперово» число e, которое лежит в основе гиперболических функций и является основанием натуральных логарифмов. Между π и e, то есть, «между двумя числами, господствующими над анализом», существует следующее изящное соотношение, выведенное Эйлером:

$$1+e^{i\pi}=0,$$

где $i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица, еще одно удивительное творение математического разума.

Еще одно знаменитое иррациональное число – это «золотая пропорция» $\Phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, которая возникает как результат решения геометрической задачи о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении». Эта задача описана в Книге II «Начал» Евклида – самого знаменитого математического сочинения античной математики.

В Предисловии мы уже упоминали о высказывании гениального немецкого астронома Иоганна Кеплера, который назвал эту задачу одним из «сокровищ геометрии» и поставил ее на один уровень с «теоремой Пифагора». А выдающийся советский философ Алексей Лосев, исследователь эстетики античности и Возрождения, в своем высказывании, приведенном в Предисловии, утверждает, что «с точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения».

А вот еще выдержка из книги Анхеля де Куатье «Золотое сечение»:

«О золотом сечении знали еще в древнем Египте и Вавилоне, в Индии и Китае. Великий Пифагор создал тайную школу, где изучалась мистическая суть «золотого сечения». Евклид применил его, создавая свою геометрию, а Фидий — свои бессмертные скульптуры. Платон рассказывал, что Вселенная устроена согласно «золотому сечению». А Аристотель нашел соответствие «золотого сечения» этическому закону. Высшую гармонию «золотого сечения» будут проповедовать Леонардо да Винчи и Микеланджело, ведь красота и «золотое сечение» — это одно и то же. А христианские мистики будут рисовать на стенах своих монастырей пентаграммы «золотого сечения», спасаясь от Дьявола. При этом ученые — от Пачоли до Эйнштейна — будут искать, но так и не найдут его точного значения. Бесконечный ряд после запятой — 1.6180339887... Странная, загадочная, необъяснимая вещь: эта божественная пропорция мистическим образом сопутствует всему живому. Неживая природа не знает, что такое «золотое сечение». Но вы непременно увидите эту пропорцию и в изгибах морских раковин, и в форме цветов, и в облике жуков, и в красивом человеческом теле. Все живое и все красивое — все подчиняется божественному закону, имя которому — «золотое сечение». Так что же такое «золотое сечение»?.. Что это за идеальное, божественное сочетание? Может быть, это закон красоты? Или все-таки он — мистическая тайна? Научный феномен или этический принцип? Ответ неизвестен до сих пор. Точнее — нет, известен. «Золотое сечение» — это и то, и другое, и третье. Только не по отдельности, а одновременно... И в этом его подлинная загадка, его великая тайна».

С «золотой пропорцией» тесно связаны числа Фибоначчи 1,1,2,3,5,8,13, введенные в 13 в. знаменитым итальянским математиком Леонардо из Пизы (Фибоначчи) при решении «задачи о размножении кроликов». Глубокая математическая связь между числами Фибоначчи и «золотой пропорцией» состоит в том, что отношение соседних чисел Фибоначчи в пределе стремится к «золотой пропорции», откуда вытекает, что эта числовая последовательность также выражает гармонию.

Одним из высоко гармоничных объектов математики считается так называемый треугольник Паскаля – специальная таблица расположения биномиальных коэффициентов, предложенная в 17 в. выдающимся французским математиком и физиком Блезом Паскалем. Во второй половине 20 в. известный американский математик Джордж Пойа в своей книге «Математическое открытие» [66] обнаружил связь чисел Фибоначчи с так называемыми диагональными суммами треугольника Паскаля. Развитие этих идей привело к обобщению «задачи о размножении кроликов» и введению так называемых p-чисел Фибоначчи [9].

Правильные многогранники, называемые Платоновыми телами, являются такими же эстетичными объектами математики, как и золотое сечение или треугольник Паскаля. В древнегреческой науке они ассоциировались с гармонией Мироздания. Платон использовал их в своей космологии и теории строения материи. Евклид, который был последователем Платона, поставил главной задачей своих «Начал» задачу создания завершенной теории Платоновых тел. Он же первым установил связь «золотого сечения» с двумя Платоновыми телами – додекаэдром и икосаэдром.

Изложению теории этих исключительно красивых математических объектов, интерес к которым не увядает на пртяжении столетий и даже тысячелетий, и посвящена часть 1 настоящей книги. Часть 1 состоит из 4-х глав.

Глава 1 «Золотое сечение в истории науки и культуры» начинается с анализа сенсационной гипотезы – гипотезы Прокла, которая переворачивает наши представления о «Началах» Евклида и всей истории происхождения математики. Согласно этой гипотезе «Начала» Евклида создавались под мощным влиянием «идеи Гармонии», которая лежала в основе древнегреческой науки. И главной целью «Начал» было создание завершенной геометрической теории Платоновых тел. Эта теория изложена Евклидом в заключительной (XIII-й) книге. Именно с этой целью Евклид уже в Книге II вводит задачу о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении», которая в современной науке называется «золотым сечением». В главе рассматриваются: геометрический способ построения «золотого сечения», алгебраическое уравнение «золотого сечения», наиболее известные алгебраические тождества для «золотого сечения», а также геометрические фигуры, связанные с «золотым сечением» («золотые» треугольники, пентагон и пентаграмма, «золотой» эллипс, декагон и др.). Глава завершается примерами использования «золотого сечения» в произведениях искусства и культуры (пирамида Хеопса, искусство Древней Греции и эпохи Возрождения).

Глава 2 является популярным введением в «теорию чисел Фибоначчи и Люка», которая активно начала развивалаться во второй половине 20 в. в трудах советских и западных математиков [2-4]. В главе приводятся малоизвестные результаты и приложения чисел Фибоначчи и Люка, такие, как Q-матрицы Фибоначчи, «Железная Таблица» Штейнхауза, связь чисел Фибоначчи с «пифагоровыми треугольниками», нумерологические свойства чисел Фибоначчи и Люка. Приводятся примеры приложений чисел Фибоначчи в природе (пентагональная симметрия, спираль Фибоначчи, явление филлотаксиса). В заключение приводится сенсационная информация об использовании новейших достижений в области «теории чисел Фибоначчи» (Н.Н. Воробьев) для решения одной из сложнейших математических проблем – 10-й проблемы Гильберта. Эта проблема была решена в 1970 г. молодым советским математиком Юрием Матиясевичем.

В главе 3 изложена оригинальная «теория p-чисел Фибоначчи», которые были введены в работах автора настоящей книги в середине 60-х годов 20 в. Основы этой теории были изложены автором в книге [9]. Показана связь p-чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами и выведена общая формула, задающая представление любого р-числа Фибоначчи в виде суммы биномиальных коэффициентов. В главе дано обобщение задачи о золотом сечении [55] и введено важное понятие «золотой p-пропорции», которая является положительным корнем алгебраического уравнения золотой p-пропорции. С использованием формул Виета рассмотрены свойства корней этого алгебраического уравнения и выведены обобщенные формулы Бине для p-чисел Фибоначчи и Люка. В главе излагается теория обобщенных матриц Фибоначчи, названных Q_p-матрицами Фибоначчи. Выведены формулы для детерминантов этих матриц и предложен способ получения обратных Q_p-матриц Фибоначчи. Изложен обобщенный принцип золотого сечения, основанный на понятии золотой p-пропорции. В заключении изложены основы «закона структурной гармонии систем», сформулированного белорусским философом Эдуардом Сороко в 1984 г. [13].

Глава 4 посвящена введению в теорию и приложения Платоновых тел, которые лежат в основе «космологии Платона». В главе приводится много интересной информации, касающейся Платоновых тел и других многогранников. В частности, рассматривается связь додекаэдра и икосаэдра с «золотым сечением». Рассматривается архимедовый усеченный икосаэдр и звездчатые многогранники. Излагается оригинальная гипотеза о происхождении Египетского календаря, основанная на додекаэдре. Рассматриваются приложения Платоновых тел в истории науки, в частности, использование Платоновых тел при создании «Космического кубка» - оригинальной геометрической модели Солнечной системы, разработанной Иоганном Кеплером. Рассматривается предложенная Феликсом Клейном концепция икосаэдра как главного геометрического объекта математики. Рассматриваются примеры использования правильных многогранников в искусстве. В заключение главы рассматриваются наиболее важные приложения правильных и полуправильных многогранников в современной науке. Среди них – квазикристаллы (Нобелевская Премия по химии - 2011) и фуллерены (Нобелевская Премия по химии - 1996).

Глава 1

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ В ИСТОРИИ НАУКИ И КУЛЬТУРЫ

1.1. Идея гармонии мироздания в древнегреческой науке

Что такое гармония? Как подчеркивает В.П. Шестаков в книге „Гармония как эстетическая категория” [60], „в истории эстетических учений выдвигались самые разнообразные типы понимания гармонии. Само понятие „гармония” употреблялось чрезвычайно широко и многозначно. Оно обозначало и закономерное устройство природы и космоса, и красоту физического и нравственного мира человека и принципы строения художественного произведения, и закономерности эстетического восприятия”.

Шестаков выделяет три основных понимания гармонии, сложившихся в процессе развития науки и эстетики:

1). Математическое понимание гармонии или математическая гармония. В этом смысле гармония понимается как равенство или соразмерность частей с друг другом и части с целым. В Большой Советской Энциклопедии мы находим следующее определение гармонии, которое выражает математическое понимание гармонии:

«Гармония – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия».

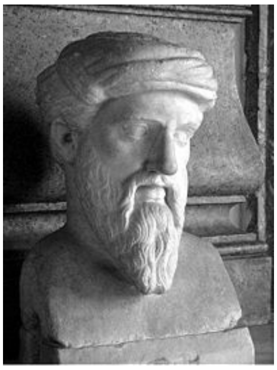
2). Эстетическая гармония. В отличие от математического понимания эстетическое понимание является уже не просто количественным, а качественным, выражающим внутреннюю природу вещей. Эстетическая гармония связана с эстетическими переживаниями, с эстетической оценкой. Наиболее четко этот тип гармонии проявляется при восприятии красоты природы.

3). Художественная гармония. Этот тип гармонии связан с искусством. Художественная гармония – это актуализация принципа гармонии в материале самого искусства.

Самое главное, что вытекает из рассуждений, проведенных в [60], состоит в том, что «гармония» является универсальным понятием, которое имеет отношение не только к математике и науке, но и к искусству.

Числовая гармония пифагорейцев. Философами, с именами которых обычно связывают начало философского учения о гармонии, были Пифагор и Гераклит. По признанию многих авторов, ключевая идея о гармонии как о соразмерном единстве противоположностей, принадлежит Пифагору. Пифагорейцы впервые выдвинули мысль о гармоническом устройстве всего мира, включая сюда не только природу и человека, но и весь космос. Согласно пифагорейцам, «гармония представляет собою внутреннюю связь вещей, без которой космос не смог бы существовать». Наконец, согласно Пифагору, гармония имеет численное выражение, то есть, она интегрально связана с концепцией числа.

Пифагор (ок. 570-ок. 500 до н.э.) - едва ли не самая известная личность в истории науки. Это имя известно каждому человеку, изучавшему геометрию и знакомому с "теоремой Пифагора", одной из самых известных теорем геометрии. Знаменитый философ и ученый, религиозный и этический реформатор, влиятельный политик, полубог в глазах своих учеников и шарлатан, по отзывам некоторых из его современников, - таковы отображения Пифагора в античной литературе. Об исключительной популярности Пифагора уже при жизни свидетельствуют монеты с его изображением, выпущенные в 430-420 гг. до н.э. Для 5-го века до н.э. это случай беспрецедентный! Пифагор первым из греческих философов удостоился специально посвященного ему сочинения. Считается, что выдающаяся роль Пифагора в развитии греческой науки состоит в исполнении исторической миссии в передаче знаний египетских и вавилонских жрецов в культуру Древней Греции. Именно благодаря Пифагору, который был, без всякого сомнения, одним из наиболее образованных мыслителей своего времени, греческая наука получила огромный объем знаний в области философии, математики и естественных наук, которые, попав в благоприятную среду древнегреческой культуры, способствовали ее бурному развитию и приумножению.



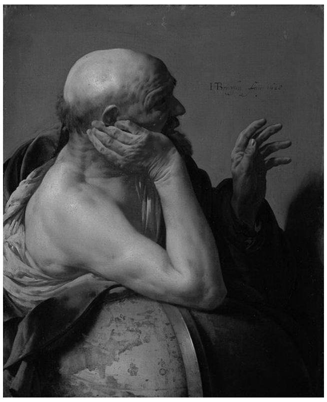
Пифагор

Пифагорейцы создали учение о созидательной сущности числа. Аристотель в «Метафизике» отмечет именно эту особенность пифагорейского учения:

«Так называемые пифагорейцы, занявшись математическим науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их началами всех вещей ... Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю вселенную [признали] гармонией и числом».

Вклад Гераклита в развитие учения о гармонии. Начиная от античности и вплоть до наших дней, имя Гераклита остается одним из популярнейших в истории философии. В 1961 г. по рекомендации Всемирного Совета Мира отмечалось 2500-летие со дня рождения Гераклита. Подобный юбилей обычно отмечается в истории какого-то всемирно известного античного города или страны, но применительно к человеку подобная дата просто не умещается в сознании.

Гераклит считал, что всё непрерывно меняется. Положение о всеобщей изменчивости связывалось Гераклитом с идеей внутренней раздвоенности вещей и процессов на противоположные стороны, с их взаимодействием. Гераклит считал, что все в жизни возникает из противоположностей и познается через них. Идея вечного движения нашла у Гераклита в гениальном образе вечно текущей реки. Постулат о всеобщей изменчивости мира – один из краеугольных камней всей диалектики сжат у Гераклита в знаменитой формуле: «В одну и ту же реку нельзя войти дважды».



Гераклит

Как подчеркивает Шестаков [60], «в эстетике Гераклита на первом плане стоит онтологическое понимание гармонии. Гармония присуща, прежде всего, объективному миру вещей, самому космосу. Он присуща и природе искусства. Характерно, что когда Гераклит хочет наиболее наглядно раскрыть природу гармонии, он обращается к искусству. Лучше всего гармонию космоса иллюстрирует у Гераклита образ лиры, в которой различно натянутые струны создают великолепное созвучие».

Но в эстетике Гераклита присутствует и момент оценки. Особенно ярко это выражается в учении о двух видах гармонии: «скрытой» и «явной». Гераклит отдает предпочтение «скрытой» гармонии. Широко известно следующее изречение Гераклита: «Скрытая гармония сильнее явной».

Космос, как высшая и совершенная красота, представляет собой пример «скрытой» гармонии. Только на первый взгляд мир представляется хаосом. На самом деле за игрой стихий и случайностей скрывается «прекраснейшая гармония».

Музыкальная гармония Пифагора и музыка сфер. Замечательные открытия пифагорейцы совершили в музыке. Пифагор обнаружил, что самые приятные слуху созвучия – консонансы – получаются только в том случае, когда длины струн, издающих эти звуки, относятся как первые числа натурального ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, то есть, 1:1, 1:2 (унисон и октава), 2:3, 3:4 (квинта и кварта), 4:5, 5:6 (терции) и т.д. Сделанное открытие потрясло Пифагора. Именно данное открытие впервые указывало на существование числовых закономерностей в природе, и именно оно послужило отправной точкой в развитии пифагорейской философии, в формировании ее основного тезиса: «Все есть число». Поэтому день, когда Пифагор открыл закон консонансов, немецкий физик А. Зоммерфельд назвал днем рождения теоретической физики.

Открытие математических закономерностей в музыкальных созвучиях стало первым «экспериментальным» подтверждением пифагорейского учения о числе. С этого момента музыка и связанное с ней учение о гармонии начинает занимать центральное место в пифагорейской системе знаний. Идея музыкальных соотношений вскоре обрела у пифагорейцев «космические масштабы» и переросла в идею всеобщей, или мировой, гармонии. Пифагорейцы начали утверждать, что вся Вселенная устроена на основе простых числовых отношениях и что движущиеся планеты издают «музыку небесных сфер», а обычная музыка является лишь отражением царящей всюду «всеобщей гармонии». Таким образом, музыка и астрономия были сведены пифагорейцами к анализу числовых закономерностей, то есть, к арифметике и геометрии. Все четыре дисциплины стали считаться математическими и называться одним словом – «математика».

Еще раз о термине «математика гармонии». Как упоминалось в Предисловии, впервые термин «математика гармонии» был введен в небольшой статье “Harmony of spheres”, помещенной в The Oxford dictionary of philosophy [53]. Проанализируем эту статью:

«**Гармония сфер.** В этой доктрине, часто приписываемой Пифагору, происходит объединение математики, музыки и астрономии. Ее сущность состоит в том, что небесные тела, будучи огромными объектами, при своем движении должны производить музыку. Совершенство небесного мира требует, чтобы эта музыка была гармоничной, она скрыта от наших ушей только потому, что всегда присутствует. Математика гармонии была центральным открытием огромного значения для пифагорейцев».

Таким образом, понятие “the mathematics of harmony” («математика гармонии») в этой статье ассоциируется с «гармонией сфер», которая называлась также «гармонией мира» (harmonica mundi) или мировой музыкой (лат. musical mundane). Гармония сфер представляет собой античное и средневековое учение о музыкально-математическом устройстве космоса, восходящее к пифагорейской и платонической философской традиции.

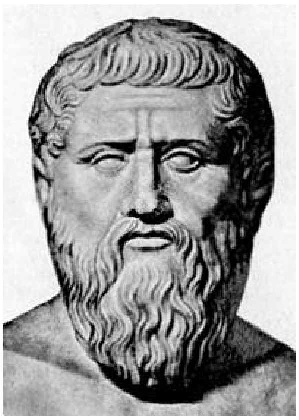
Еще одно упоминание о «математике гармонии» применительно к древнегреческой математике мы встречаем в книге Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics», опубликованной в 2005 г. [54]. Приведем цитату из этой книги:

«Гармония была ключевой концепцией греков, с помощью которой осуществлялась связь трех значений. Его корневое значение было aro, соединение, то есть, гармония было то, что соединяет. Другое значение было пропорция, баланс вещей, который позволял простое соединение. Качество соединения и пропорции позже стали рассматриваться в музыке и других видах искусства.

Предпосылка для гармонии для греков была выражена во фразе "ничего лишнего". Эта фраза содержала таинственные положительные качества, которые стали объектом исследования лучших умов. Мыслители, такие как Пифагор, стремились раскрыть тайну гармонии как нечто невыразимое и освещенное математикой. Математика гармонии, изученная древними греками, по-прежнему является вдохновляющей моделью для современных ученых. Решающее значение для этого имело открытие количественного выражение гармонии, во всем удивительном разнообразии и сложности природы, через золотое сечение Φ (фи): $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, что приблизительно равно 1,618. Золотое сечение описано Евклидом в его «Началах»: "Говорят, что прямая линия, может быть разделена в крайнем и среднем отношении, когда, вся линия так относится к большей части, как большая часть к меньшей".

В книге [54] понятие “the mathematics of harmony” («математика гармонии») непосредственно ассоциируется с «золотым сечением» - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии, которое в тот период называлось «делением отрезка в крайнем и среднем отношении».

Космология Платона. Греки сделали первую попытку выразить гармонию в числовой и геометрической форме, то есть, «математизировать гармонию». И это им блестяще удалось. Для геометрического выражения гармонии они пользовались так называемыми Платоновыми телами, которым посвящена глава 4 настоящей книги. Как утверждает Эдуард Сороко [13], «представление о «сквозной» гармонии бытия древние греки связывали с ее воплощением в Платоновых телах». Другими словами, Платоновы тела, получившие широкое распространение в античном мире, считались геометрическими выразителями гармонии Мироздания. Существует только пять таких многогранников (этот факт был доказан в «Началах» Евклида): тетраэдр (правильный четырехгранник), гексаэдр или куб (правильный шестигранник), октаэдр (правильный восьмигранник), додекаэдр (правильный двенадцатигранник) и икосаэдр (правильный двадцатигранник).



Платон

Платон (427-347 гг. до н.э.) родился в 427 г. до н.э. в Афинах в знатной аристократической семье. В честь деда его назвали Аристоклом. Его отец Аристон происходил из рода последнего афинского царя Кодра, а мать Периктиона была прямой родственницей афинского мудреца Солона. Как отпрыск старинной, царского происхождения семьи Аристокл получил блестящее образование. Юноша рос широкоплечим атлетом и широко образованным интеллектуалом. За его широкую грудь и мощное сложение его уже в юности прозвали Платоном. По другой версии, Платоном его прозвал Сократ за широкий лоб.

Широкую известность получила знаменитая философская школа – Платоновская Академия, которая была основана Платоном в 385 г. до н.э. Название берет свое начало от названия парка на северо-западе Афин, где и была расположена эта философская школа. Предание говорит, что при входе в свою Академию Платон сделал надпись: "Негеометр – да не войдет».

Согласно Платону, четыре первые из пяти правильных многогранников (тетраэдр, икосаэдр, куб и октаэдр) олицетворяли четыре сущности или "стихии". Тетраэдр символизировал огонь, так как его вершина устремлена вверх; икосаэдр - воду, так как он самый "обтекаемый" многогранник; куб - землю, как самый "устойчивый" многогранник; октаэдр - воздух, как самый "воздушный" многогранник. Пятый многогранник, додекаэдр, воплощал в себе "все сущее", «Вселенский разум», символизировал эфир и считался главной геометрической фигурой мироздания.

Пифагорейское учение о числовой гармонии мироздания имело огромную созидательную силу и оказало большое влияние на развитие всех последующих учений о природе и сущности гармонии, в частности, оно лежит в основе космологии Платона. В своих работах Платон развивает пифагорейское учение, особенно подчеркивая космическое значение гармонии. Он твердо убежден в том, что мировую гармонию можно выразить в числовых пропорциях. Влияние пифагорейцев особенно прослеживается в «Тимее», где Платон вслед за пифагорейцами развивает учение о пропорциях и анализирует роль правильных многогранников («Платоновых тел»), из которых, по его мнению, Бог создал мир.

Главный вывод, который вытекает из учений Пифагора и Платона, состоит в том, что гармония объективна, она существует независимо от нашего сознания и выражается в гармоничном устройстве всего сущего, начиная с космоса и заканчивая микромиром. Но если Гармония объективна, она должна стать предметом математического исследования.

1.2. Золотое сечение в «Началах» Евклида

«Начала» Евклида – величайшее математическое сочинение древнегреческой эпохи. В настоящее время каждый школьник знает, кто такой Евклид, который написал самое значительное математическое сочинение греческой эпохи – «Начала» Евклида. Это научное произведение создано им в 3 в. до н. э. и содержит основы античной математики: элементарную геометрию, теорию чисел, алгебру, теорию пропорций и отношений, методы определения площадей и объемов и др. Евклид подвел в этом сочинении итог трехсотлетнему развитию греческой математики и создал прочный фундамент для дальнейшего развития математики.

Евклид

Сведения о Евклиде крайне скудны. К наиболее достоверным сведениям о жизни Евклида принято относить то немногое, что приводится в «Комментариях Прокла к первой книге «Начал» Евклида». Прокл указывает, что Евклид «жил во времена Птолемея I Сотера», потому что Архимед, живший при Птолемее Первом, упоминает об Евклиде. В частности, Архимед рассказывает, что Птолемей однажды спросил Евклида, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели «Начала»; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии. Учителями Евклида в Афинах были ученики Платона, а в правление Птолемея I (306–283 до н.э.) он преподавал во вновь основанной школе в Александрии. «Начала» Евклида превзошли сочинения его предшественников в области геометрии и на протяжении более двух тысячелетий оставались основным трудом по элементарной математике.

В 13 частях, или книгах, «Начал» содержится большая часть знаний по геометрии и арифметике эпохи Евклида.

«Начала» Евклида состоят из тринадцати книг. В Книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов и производится сравнение их площадей. Заканчивается Книга I знаменитой Теоремой Пифагора. В Книге II излагается так называемая геометрическая алгебра, т. е. строится геометрический аппарат для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. В Книге III рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд, в Книге IV — правильные многоугольники. В Книге V даётся общая теория отношений величин, созданная Евдоксом Книдским; её можно рассматривать как прообраз теории действительных чисел, разработанной только во 2-й половине 19 в. Общая теория отношений является основой учения о подобии (Книга VI) и метода исчерпывания (Книга VII), также восходящих к Евдоксу. В Книгах VII—IX изложены начала теории чисел, основанные на алгоритме нахождения наибольшего общего делителя (алгоритм Евклида). В эти книги входит теория делимости, включая теоремы об однозначности разложения целого числа на простые множители и о бесконечности числа простых чисел; здесь излагается также учение об отношении целых чисел, эквивалентное, по существу, теории рациональных (положительных) чисел. В Книге X даётся классификация квадратичных и биквадратичных иррациональностей и обосновываются некоторые правила их преобразования. Результаты Книги X применяются в Книге XIII для нахождения длин рёбер правильных многогранников. Значительная часть Книг X и XIII (вероятно и VII) принадлежит Теэтету (начало 4 в. до н. э.). В Книге XI излагаются основы стереометрии. В Книге XII определяются с помощью метода исчерпывания отношение площадей двух кругов и отношение объёмов пирамиды и призмы, конуса и цилиндра. Эти теоремы впервые доказаны Евдоксом. Наконец, в Книге XIII определяется отношение объёмов двух шаров, строятся пять правильных многогранников и доказывается, что иных правильных тел не существует.

Предложение II.11 «Начал» Евклида. В «Началах» Евклида мы встречаемся с задачей, которая в дальнейшем сыграла большую роль в развитии науки. Речь идет о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении». В «Началах» Евклида эта задача встречается в двух формах. Первая форма сформулирована в виде Предложения 11 Книги II «Начал» Евклида [56].

Предложение II. 11. Данную прямую AD разделить на две неравные части AF и FD так, чтобы площадь квадрата, построенного на большем отрезке AF, равнялась бы площади прямоугольника, построенного на отрезке AD и меньшем отрезке FD.

Вникнем в суть этой задачи. Для этого изобразим эту задачу геометрически (Рис.1.1).

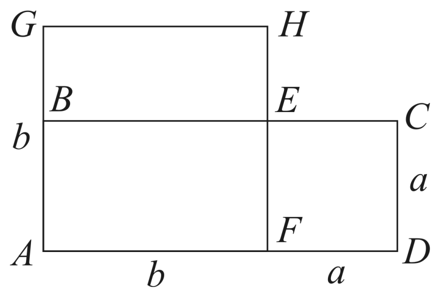


Рис. 1.1. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении

Таким образом, согласно Предложению II. 11, площадь квадрата *AGHF* должна быть равна площади прямоугольника *ABCD*. Если обозначить длину большего отрезка *AF* через *b* (она равна стороне квадрата *AGHE*), а сторону меньшего отрезка через *a* (она равна вертикальной стороне прямоугольника *ABCD*), то условие Предложения II. 11 можно записать в виде:

$$b^2 = a \times (a + b). \qquad (1.1)$$

Комментарии Мордухай-Болтовского, касающиеся «золотого сечения». «Начала» Евклида переведены на многие языки мира. Наиболее авторитетным изданием сочинения Евклида на русском языке являются «Начала» в переводе и с комментариями Д.Д. Мордухай-Болтовского [56-58]. Интересно ознакомиться со следующими комментариями Мордухай-Болтовского, касающимися «золотого сечения»:

«Теперь посмотрим, какое место занимает золотое сечение в «Началах» Евклида. Прежде всего, нужно отметить, что оно встречается в двух формах, разница между которыми почти неощутима для нас, но была очень существенной в глазах греческого математика V-VI-го веков до н.э. Первая форма, прототип которого мы видели в Египте, является в Книге II «Начал», а именно в Предложении 11 вместе с вводящими его предложениями 5 и 6; здесь золотое сечение определяется как такое, в котором квадрат, построенный на большем отрезке, равняется прямоугольнику на всей прямой и меньшем отрезке. Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему - и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен только со времен Евдокса. Интересно отметить, что предложениям 5, 6 и 11 книги II соответствуют предложения 27, 28 и 30 – шестой. Затем, предложения 5 и 6 книги II разорвали связь между предложениями 4 и 7, соответствующим нашим формулам квадратов суммы и разности; «та же фигура», о которой упоминается в предложении 7, строится в 4-м.

В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1-5 и во второй – в предложениях 8-10. Правда в формулировке и тексте доказательства 1-5 предложений встречаются слова «в крайнем и среднем отношении», в доказательствах есть некоторые следы пользования пропорциями, но при внимательном чтении нетрудно заметить, что все эти места не связаны органически с общим текстом и легко из него могут быть исключены; все доказательство по существу ведется исходя из равенства на большем отрезке прямоугольнику ... Более того, предложение 2 книги XIII по существу равнозначно геометрическому построению предложения 11 книги II.

Все это позволяет думать, что предложения 4, 7, 8 книги II и предложения 1-5 книги XIII представляют остатки одного из самых древних в истории греческой геометрии документов, восходящего по всей вероятности к первой половине V века и возникшего в пифагорейской школе на основании того материала, который был привезен из Египта. Сравнительную древность этого документа можно установить из того обстоятельства, что предложения 4 и 7 книги II служат в ней для доказательства обобщенной теоремы Пифагора [квадрат стороны против острого и тупого угла (предложения 12 и 13 книги II)], которая, несомненно, была известна Гиппократу Хиосскому ... Несмотря на то, что первые пять предложений книги XIII составляют одно целое с рядом предложений книги II , нужно отметить, что при непосредственном использовании предложений книги II (в особенности предложения 11, которое и дает построение золотого сечения) доказательства были бы в отдельных случаях значительно проще»

Мы можем сделать следующие выводы из этих комментариев:

1. Во-первых, в «Началах» Евклида имеется не одна (Предложение II.11), а, по крайней мере, две различные формулировки задачи о «золотом сечении». Приведем еще раз цитату Мордухай-Болтовского: «Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему - и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен Евдокса». И далее: «В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1-5 и во второй – в предложениях 8-10». То есть, Евклид широко использует в своих «Началах» как первую форму (Предложение II.11 и предложения 1-5 книги XIII), так и вторую форму как представление золотого сечения в виде пропорции (предложение 3 книги VI и предложения 8-10 книги XIII).

2. В задаче о «золотом сечении» Мордухай-Болтовский видит «египетский след» и явно намекает на Пифагора, который 22 года провел в Египте и привез оттуда огромное количество египетских математических знаний, включая «теорему Пифагора» и «золотое сечение». Отсюда вытекает, что Мордухай-Болтовский не сомневался в том, что не только Евклид, но и Пифагор (а отсюда следует, что и Платон, который был пифагорейцем), а также и древние египтяне знали о «золотом сечении» и широко его использовали (ниже мы продемонстрируем это на примере анализа геометрической модели «Пирамиды Хеопса»).

В книге Валентина Бунина [59] также обращается внимание на «египетский след» в происхождении «золотого сечения»: «Нелишне напомнить, что изначальный геометрический смысл "золотого сечения" весьма прост и был связан с ежегодным переделом земельных площадей, заливаемых Нилом. При этом решалась задача нахождения стороны такого прямоугольника, площадь которого должна была равняться площади квадрата, а отношение сторон обеспечивало бы удобство компоновки. Можно предположить, что соотношением "золотого сечения" египтяне пользовались и при сооружении пирамид для определения объема, равновеликого кубу».

Вторая форма задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении и современная формулировка задачи о «золотом сечении». Перейдем теперь ко второй форме формулировки задачи о «золотом сечении», о которой упоминает Мордухай-Болтовский. Вторая форма вытекает из первой, задаваемой выражением (1.1), если проделать следующие преобразования. Разделив обе части выражения (1.1) вначале на a, а затем на b, получим следующую пропорцию:

$$\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b}. \tag{1.2}$$

Пропорция (1.2) имеет следующую геометрическую трактовку (Рис.1.2). Разделим отрезок *AB* точкой *C* в таком отношении, чтобы большая часть отрезка *CB* так относилась к меньшей части *AC*, как отрезок *AB* к своей большей части *CB* (Рис. 4.1), то есть:

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{AC}. \tag{1.3}$$

Это и есть определение «золотого сечения», используемое в современной науке.

Рис. 1.2. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»)

Обозначим пропорцию (1.3) через *x*. Тогда, учитывая, что $AB=AC+CB$, пропорцию (1.3) можно записать в следующем виде:

$$x=\frac{AC+CB}{CB}=1+\frac{AC}{CB}=1+\frac{1}{\frac{CB}{AC}}=1+\frac{1}{x},$$

откуда вытекает следующее алгебраическое уравнение для вычисления искомого отношения x:

$$x^2-x-1=0. \tag{1.4}$$

Из «физического смысла» пропорции (1.3) вытекает, что искомое решение уравнения (1.4) должно быть положительным числом, откуда вытекает, что решением задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении является положительный корень уравнения (1.4), который мы обозначим через Φ, то есть,

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{1.5}$$

Это и есть то знаменитое число, которое имеет много восхитительных названий: золотое сечение, золотое число, золотая пропорция, божественная пропорция.

Выведенное выше алгебраическое уравнение (1.4) часто называют уравнением золотой пропорции.

Заметим, что на отрезке AB существует еще одна точка D (Рис.1.2), которая делит его «золотым сечением», так как

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Происхождение термина «золотое сечение». Приближенное значение золотой пропорции равно:

$$\Phi \approx 1.61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09180\ \ldots\ .$$

Не удивляйтесь этому числу. Не забывайте, что это число – иррациональное! В нашей книге мы будем использовать следующее приближенное значение: $\Phi \approx 1.618$ или даже $\Phi \approx 1.62$.

Именно это удивительное число, обладающее уникальными алгебраическими и геометрическими свойствами, стало эстетическим каноном древнегреческого искусства и искусства эпохи Возрождения.

Кто же ввел термин «Золотое Сечение»? Иногда введение этого названия (“section aurea”) приписывают Леонардо да Винчи. Однако существует мнение, что великий Леонардо не был первым. Согласно утверждению Эдуарда Сороко [13], этот термин восходит к книге Птолемея «О гармонии». Однако, в книге [28], посвященной истории «золотого числа», утверждается, что немецкий математик Мартин Ом впервые ввел термин «золотое сечение» (“Goldene Shnitt”) в 1835 г. в книге “Die reine Elementar-Mathematik”.

Обозначение «золотой пропорции» греческой буквой Ф (число PHI) не является случайным. Эта буква является первой буквой в имени знаменитого греческого скульптора Фидия (Phidias), который широко использовал «золотое сечение» в своих скульптурных произведениях. Напомним, что Фидий (5 в. до н.э.) наряду с Поликлетом являлся одним из двух самых значительных и авторитетных мастеров древнегреческой скульптуры эпохи классики. Он прославился тем, что руководил работами по художественному убранству Акрополя, исполнив колоссальную бронзовую статую Афины Промахос («Победительницы в битвах»), воздвигнутую здесь около 456 до н.э. в ознаменование победы над персами. Создал также две грандиозные (из золота и слоновой кости) статуи: Афины Парфенос («Девы») для Парфенона на Акрополе (446–438 до н.э.) и Зевса Олимпийского (для храма Зевса в Олимпии, ок. 430 до н.э.), которого считали одним из «семи чудес света». При всей монументальности его образов, порой (подобно 9-метровой Афине Парфенос или 13-метровому Зевсу Олимпийскому) беспрецедентных по величине для Греции того времени, им была свойственна строгая уравновешенность и гармония пластических контрастов, основанная на золотом сечении, что и составляло суть классического стиля в период его высшего расцвета.

Способ геометрического построения золотого сечения. Золотое сечение широко встречается в геометрии. Известен следующий способ геометрического построения золотого
сечения с использованием линейки и циркуля (Рис.1.3). Построим прямоугольный треугольник ABC со сторонами $AB = 1$ и $AC = \frac{1}{2}$. Тогда в соответствии с

«теоремой Пифагора» сторона $CB = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Проведя дугу AD с центром в точке C до пересечения с отрезком CB в точке D, мы получим отрезок $BD = CB - CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi^{-1}$.

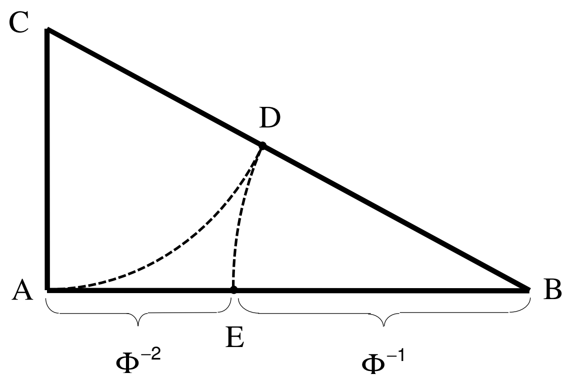


Рис. 1.3. Геометрическое построение золотого сечения

Проведя дугу DB с центром в точке B до ее пересечения с отрезком AB в точке E, мы получим деление отрезка AB в точке E «золотым сечением», поскольку

$$\frac{AB}{EB} = \frac{EB}{AE} = \Phi \text{ или } AB = 1 = EB + AE = \Phi^{-1} + \Phi^{-2}.$$

1.3. Гипотеза Прокла

С какой целью Евклид написал свои «Начала»? На первый взгляд, кажется, что ответ на этот вопрос очень простой: главная цель Евклида состояла в том, чтобы изложить основные достижения греческой математики за 300 лет, предшествующих Евклиду, используя «аксиоматический метод» изложения материала. Действительно, «Начала» Евклида являются главным трудом греческой науки, посвященным аксиоматическому построению геометрии и математики. Такой взгляд на «Начала» наиболее распространен в современной математике.

Однако, кроме «аксиоматической» точки зрения существует и другая точка зрения на мотивы, которыми руководствовался Евклид при написании «Начал». Эта точка зрения высказана греческим философом и математиком Проклом Диадохом (412-485), одним из первых комментаторов «Начал».

Прежде всего, несколько слов о Прокле. Прокл родился в Византии в семье богатого адвоката из Ликии. Намереваясь пойти по стопам отца, подростком уехал в Александрию, где учился сначала риторике, затем заинтересовался философией и стал учеником александрийского неоплатоника Олимпиодора Младшего. Именно у него Прокл начал изучать логические трактаты Аристотеля. В возрасте 20 лет Прокл переезжает в Афины, где Платоновскую Академию в то время возглавлял Плутарх Афинский. Уже к 28-летнему возрасту Прокл написал одну из своих главнейших работ, комментарий на платоновского «Тимея». Около 450 г. Прокл становится главой Платоновской Академии.

Среди математических сочинений Прокла наиболее известным является его «Комментарий к первой книге «Начал» Евклида». В этом Комментарии он выдвигает следующую необычную гипотезу, которую называют "гипотезой Прокла". Суть ее состоит в следующем. Как известно, XIII-я, то есть, заключительная книга «Начал» посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые играли главенствующую роль в «Космологии Платона» и в современной науке известны под названием Платоновых тел. Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает Эдуард Сороко [13], по мнению Прокла, Евклид «создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики».

Значение гипотезы Прокла для развития математики. Главный вывод из «гипотезы Прокла» состоит в том, что «Начала» Евклида, величайшее греческое математическое сочинение, было написано Евклидом под непосредственным влиянием греческой «идеи Гармонии», которая была связана с Платоновыми телами. Таким образом, «гипотеза Прокла» позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке "Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания» и «Космология Платона», основанная на правильных многогранниках, были воплощены в величайшем математическом сочинении греческой математики, “Началах” Евклида. С этой точки зрения мы можем рассматривать “Начала” Евклида как первую попытку создать «Математическую теорию гармонии мироздания», которая ассоциировалась в античной науке с Платоновыми телами. И это было главной идеей греческой науки! Это и есть главная тайна «Начал» Евклида, которая приводит к пересмотру истории возникновения математики, начиная с Евклида.

К сожалению, оригинальная гипотеза Прокла, касающаяся истинных целей, которые преследовал Евклид при написании Начал, проигнорирована современными историками математики, что привело к искаженному взгляду на структуру математики и всего математического образования. И это является одной из главных «стратегических ошибок» в развитии математики.

«Гипотеза Прокла» оказала большое влияние на развитие науки и математики. В 17 веке Иоганн Кеплер, развивая идеи Евклида, построил «Космический кубок» – оригинальную модель Солнечной системы, основанную на Платоновых телах (об этом мы расскажем ниже).

В 19 в. выдающийся математик Феликс Клейн выдвинул предположение, что икосаэдр, одно из прекраснейших тел Платона, является главной геометрической фигурой математики, которая позволяет объединить все важнейшие разделы математики: геометрию, теорию Галуа, теорию групп, теорию инвариантов и дифференциальные уравнения. Эта идея Клейна не получила дальнейшего развития в математике, что также можно считать еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики.

«Гипотеза Прокла» и «ключевые» проблемы античной математики. Как известно, академик Колмогоров в книге [52] выделил две главные, то есть, «ключевые» проблемы, которые стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения - проблему счета и проблему измерения. Однако, из «гипотезы Прокла» вытекает еще одна «ключевая» проблема – проблема гармонии, которая была связана с «Платоновыми телами» и «золотым сечением» - одним из важнейших математических открытий античной математики (Предложение II.11 «Начал» Евклида). Именно эта проблема была положена Евклидом в основу «Начал», главной целью которых было создание геометрической теории «Платоновых тел», которые в «космологии Платона» выражали гармонию Мироздания. Эта идея приводит к новому взгляду на историю математики, представленному на Рис.1.4.

Подход, демонстрируемый с помощью Рис.1.4, основан на следующих соображениях. Уже на этапе зарождения математики было сделано ряд важных математических открытий, которые фундаментально повлияли на развитие математики и всей науки в целом. Важнейшими из них являются:

1. **Позиционный принцип представления чисел**, сделанный вавилонскими математиками во 2-м тысячелетии до н.э. и воплощенный ими в Вавилонской 60-ричной системе счисления. Это важное математическое открытие лежит в основе всех последующих позиционных систем счисления, в частности, десятичной системы и двоичной системы - основы современных компьютеров. Это открытие, в конечном итоге, привело к формированию понятия натурального числа – важнейшего понятия, лежащего в основе математики.

2. **Доказательство существования несоизмеримых отрезков**. Это открытие, сделанное в научной школе Пифагора, привело к переосмысливанию ранней пифагорейской математики, в основе которой лежал «принцип соизмеримости величин», и к введению иррациональных чисел – второго (после натуральных чисел) фундаментального понятия математики. В конечном итоге, эти два понятия (натуральные и иррациональные числа) и были положены в основу «Классической Математики».

3. **Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»)**. Впервые описание этого открытия дано в «Началах» Евклида (Предложение II.11). Это предложение было введена Евклидом с целью создания полной геометрической теории «Платоновых тел» (в частности, додекаэдра), изложению которых посвящена заключительная (XIII-я) книга «Начал» Евклида.

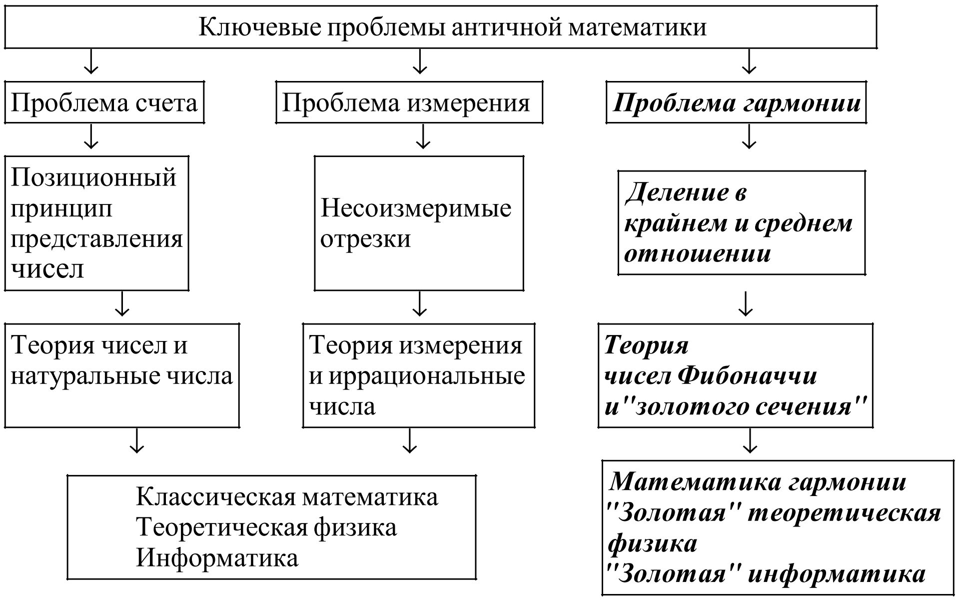


Рис. 1.4. «Ключевые» проблемы античной математики и новые направления в математике, теоретической физике и информатике

Сформулированный выше подход (Рис.1.4) приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что параллельно с «Классической математикой» в науке, начиная с древних греков, развивалась еще одно математическое направление – «Математика гармонии», которая, как и классическая математика, восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (Предложение II.11) и на теории правильных многогранников, изложенной в Книге XIII «Начал» Евклида. И в развитии «Математики Гармонии» в течение нескольких тысячелетий принимали участие выдающиеся мыслители и ученые: Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Кеплер, Кассини, Бине, Люка, Клейн, а в 20-м веке – Воробьев и Хоггатт.

Как Евклид использовал «золотое сечение»? Возникает вопрос: зачем Евклид ввел в своих «Началах» различные формы «задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение»), которые встречаются в Книгах II, VI и XIII? Для ответа на этот вопрос мы вновь возвратимся к

Платоновым телам (более подробно Платоновы тела описаны в главе 4 настоящей книги). Как известно, гранями Платоновых тел могут быть только три вида правильных многоугольников: правильный треугольник (тетраэдр, октаэдр, икосаэдр), квадрат (куб) и правильный пятиугольник или пентагон (додекаэдр). Для того, чтобы сконструировать Платоновы тела, мы должны, прежде всего, уметь геометрически (то есть, с помощью линейки и циркуля) построить грани Платоновых тел. У Евклида не было никаких проблем с построением правильного или равностороннего треугольника и квадрата, однако он столкнулся с определенными трудностями при конструировании правильного пятиугольника или пентагона, который лежит в основе додекаэдра (Рис.1.5).

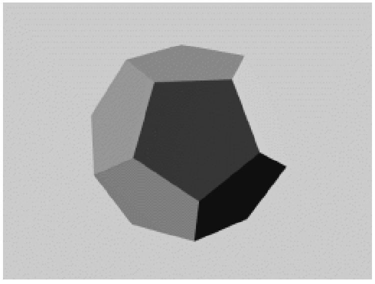
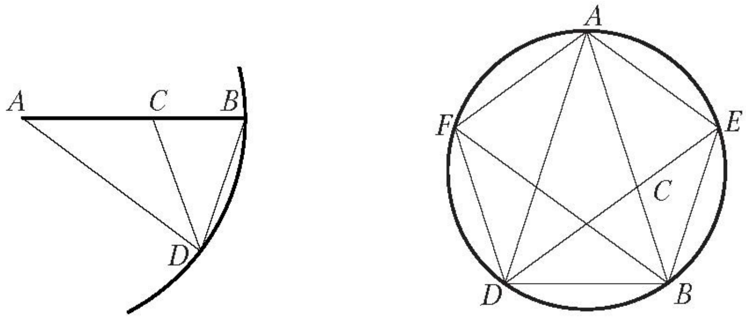


Рис.1.5. Додекаэдр

Именно для этой цели Евклид в Книге II ввел «золотое сечение», представленное в «Началах» в двух формах. Используя «золотое сечение», Евклид вначале конструирует «золотой» равнобедренный треугольник, чьи углы при основании равны удвоенному углу при вершине (Рис.1.6-a).



(a) (b)

Рис. 1.6. «Золотой» равнобедренный треугольник (a) и пентагон (b)

Для этого вначале отрезок AB разделяется точкой C в «золотом сечении». Затем проводится окружность с центром в точке A и радиусом AB. После этого раствор циркуля выбирается равным отрезку AC и затем на окружности (с помощью циркуля) отмечается точка D, такая, что $AC = CD$. Затем с помощью линейки проводятся отрезки AD, CD и BD. Полученный таким образом треугольник ABD обладает тем свойством, что углы B и D при его основании BD равны удвоенному углу при его вершине A, а отрезки CD и BD оказываются равными.

А теперь перейдем к конструированию пентагона (Рис.1.6-b). Для этого начнем с треугольника ABD, построенного на Рис.1.6-a. Проведем окружность через точки A, B и D (Рис.1.6-b). После этого разделим угол ABD пополам и проведем отрезок DE до его пересечения с окружностью в точке E. Заметим, что этот отрезок пересекается в точке C с отрезком AB, разделяя его «золотым сечением». Подобным же образом находим точку F на окружности и затем находим регулярный пентагон $AEBDF$. А далее – один шаг к геометрическому построению додекаэдра (Рис.1.5) – одного из важнейших правильных многогранников, который символизировал в космологии Платона Гармонию Мироздания.

1.4.Типы алгебраических уравнений

История и основные задачи «элементарной» алгебры. Как упоминалось, геометрическая задача о «золотом сечении» (Рис.1.2), сводится к решению простейшего алгебраического уравнения - уравнения золотой пропорции (1.4). Это уравнение является частным случаем общего алгебраического уравнения n-й степени:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_0 = 0, a_0 \neq 0. \tag{1.6}$$

Поэтому мы сделаем небольшой экскурс в теорию алгебраических уравнений. Следует различать понятия «полином или многочлен *n*-й степени» и «уравнение *n*-й степени». Например, $f(x) = x^2 - 5x + 6$ – это полином 2-й степени от переменной *x*, а $x^2 - 5x + 6 = 0$ – это квадратное алгебраическое уравнение.

Значения переменной, при которых многочлен обращается в нуль, называются корнями этого многочлена. Например, многочлен $f(x)=x^2-5x+6$ имеет корни 2 и 3, т.к. $2^2-5\times2+6=0$ и $3^2-5\times3+6=0$. Заметим, однако, что в многочлене $f(x)=x^2-5x+6$ переменная x означает любое число из области определения функции; в уравнении $x^2-5x+6=0$, напротив, x означает лишь числа, удовлетворяющие данному уравнению, т.е. превращающие его в тождество, а именно числа 2 и 3.

Важнейшей задачей алгебры на начальном этапе ее развития считалось отыскание формул, выражающих корни уравнения (1.6) через его коэффициенты при помощи сложения, вычитания, деления и извлечения корней («решение в радикалах»). С древнейших времен математики умели решать уравнения 1-й и 2-й степеней. В 16 веке существенное продвижение было сделано итальянскими математиками – сначала была найдена формула для решения уравнений 3-й степени, а затем и метод решения уравнения 4-й степени. В течение последующих столетий продолжались безуспешные попытки найти аналогичные формулы для решения уравнений высших степеней. В 1824 г. норвежский математик Нильс Абель установил, что уравнения выше 4-й степени в общем случае в радикалах неразрешимы, а в 1830 г. французский математик Эварист Галуа указал общий критерий разрешимости алгебраического равнения в радикалах. Наряду с теорией алгебраических уравнений с одним неизвестным в этот период начинает развиваться теория систем алгебраических уравнений с несколькими неизвестными, в частности, систем линейных уравнений. В связи с исследованием возникают понятия матрицы и определителя.

Можно считать, что в середине 19-го века, прежде всего, благодаря работам Абеля и Галуа период элементарной алгебры завершается и начинает развиваться высшая алгебра. Дальнейший прогресс в этой области связан с расширением и углублением понятия числа (кватернионы) и применением алгебраических операций к объектам совершенно другой природы, чем числа (алгебра логики Буля).

Квадратные и кубические уравнения. Алгебраические уравнения всегда служили мощным средством решения практических задач. Точный язык математики позволяет просто выразить факты и соотношения, которые, будучи изложенными обычным языком, могут показаться запутанными и сложными. Неизвестные величины, обозначаемые в задаче символами, например x, можно найти, сформулировав задачу на математическом языке в виде уравнений. Методы решения уравнений составляют в основном предмет того раздела математики, который называется теорией уравнений.

Напомним основные сведения о линейных и квадратных алгебраических уравнениях, хорошо известных нам из средней школы. Линейное уравнение в общем виде записывают как $ax+b=0$, где a и b – некоторые числа, причем $a \neq 0$. Оно имеет единственное решение $x=-b/a$; то есть, линейное уравнение имеет ровно один корень.

Квадратное уравнение имеет вид:

$$ax^2+bx+c=0, \text{где } a \neq 0. \tag{1.7}$$

Правила решения алгебраических уравнений 1-й и 2-й степени были известны еще в глубокой древности. Из курса математики средней школы нам хорошо известна общая формула для вычисления корней квадратного уравнения (1.7):

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1.8}$$

Напомним, что значения корней квадратного уравнения зависят от дискриминанта D квадратного уравнения (1.7), под которым понимается подкоренное выражение формулы (1.8), то есть, формула для дискриминанта D имеет следующий вид:

$$D=b^2-4ac. \tag{1.9}$$

Если дискриминант D положителен, то квадратное уравнение (1.7) имеет ровно два действительных корня. Если $D=0$, то $x=-b/(2a)$, и мы говорим, что уравнение (1.7) имеет два равных корня. Если же D отрицателен, то нам приходится вводить мнимую единицу i, определяемую как $i=\sqrt{-1}$, и в этом случае оба корня (1.8) квадратного уравнения (1.7) становятся комплексными.

Кубическое уравнение — полиномиальное уравнение третьей степени, канонический вид которого имеет вид:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0; \quad a\neq 0. \tag{1.10}$$

Заменяя в этом уравнении x новым неизвестным y, связанным с x равенством $x=y-b/3a$, кубическое уравнение (1.10) можно привести к более простому (каноническому) виду:

$$y^3+py+q=0, \tag{1.11}$$

где

$$p=-b^2/3a^2+c/a; \quad q=2b/27a^3-bc/3a^2+d/a. \tag{1.12}$$

Решение уравнения (1.11) можно получить с помощью формулы Кардана:

$$y=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}+\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}} \tag{1.13}$$

Если коэффициенты кубического уравнения (1.11) - действительные числа, то вопрос о характере его корней зависит от знака выражения $q^2/4+p^3/27$, стоящего под квадратным корнем в формуле Кардано (1.13). Если $\left(q^2/4+p^3/27\right)>0$, то кубическое уравнение имеет три различных корня: один из них действительный, два других – комплексно-сопряженные; если $\left(q^2/4+p^3/27\right)=0$, то все три корня действительны, два из них равны; если $\left(q^2/4+p^3/27\right)<0$, то все три корня действительны и различны.

Формула Кардано названа по имени итальянского математика Дж. Кардано (1501-1576) и впервые была опубликована им в 1545, хотя вопрос о том, была она найдена самим Кардано или заимствована им от Н. Тартальи, или даже ещё раньше (около 1515) открыта С. Ферро, нельзя считать вполне решенным.

1.5. Некоторые трагические страницы в истории алгебры

Нищий «студиозиус» Нильс Абель. История науки и математики содержит в себе много трагических страниц. Одна из них – это жизнь и творчество выдающегося норвежского математика Нильса Абеля, математические исследования которого касались алгебры и решения алгебраических уравнений. Долгое время считали, что иррациональный корень любого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами можно выразить через радикалы. Лишь в 20-х годах 19-го века норвежский математик Нильс Абель доказал, что иррациональные корни общих уравнений выше 4-й степени не могут быть выражены через радикалы.

Абель Нильс Хенрик (1802-1829)

Абель родился в 1802 году на северо-западном побережье Норвегии в небольшом рыбацком городке Финней, где не было ни математиков, ни нужных ему книг. О первых годах его детства почти ничего не известно. Тринадцати лет он поступил в школу в Осло. Его отец, пастор Абель, видимо, неплохо подготовил сына. Первое время он занимался без труда и получал хорошие отметки, а по математике иногда отличные. Любил играть в шахматы, посещать театр. Но среди первых учеников он не значился. Однако через три года школьной жизни у шестнадцатилетнего Нильса наступил перелом. Вместо жестокого учителя математики, избивавшего учеников, в школу приехал новый учитель Хольмбое, хорошо знавший свой предмет и умевший заинтересовать учеников. Хольмбое предоставил каждому ученику действовать самостоятельно и поощрял тех, кто делал первые шаги в овладении математикой. Очень скоро Абель не только искренне увлекся этой наукой, но и обнаружил, что в состоянии справиться с такими задачами, которые другим не под силу.

Семья Абеля жила в крайней бедности, и в школе Нильс обучался бесплатно. В 1820 году умер отец Нильса, и семья осталась без всяких средств. Положение было безвыходное. Нильс подумывал о возвращении в родной город и о поисках работы. Но на дарование юноши обратили внимание профессора, которые помогли Абелю поступить в университет. Несколько профессоров устроили складчину и образовали своего рода стипендию, чтобы сохранить редкий для науки талант. Затем им удалось выхлопотать стипендию для поездки Абеля за границу. Пребывание Абеля в Берлине и Париже и в других крупных математических центрах того времени вызвало к жизни целый ряд его блестящих работ. Однако все его открытия так далеко заглядывали вперед по сравнению с наукой того времени, что работы молодого математика не были поняты и оценены современниками. За границей, как и на родине, Абель испытывал жестокую нужду и постоянное чувство невыносимого одиночества. Попытки добиться признания ни к чему не привели: его работы, посланные в Парижскую академию и переданные на отзыв крупнейшему французскому математику Коши, были потеряны, письмо знаменитому немецкому математику Гауссу осталось без ответа.

Молодой математик, совершивший переворот в науке, вернулся на родину таким же бедным, никому неизвестным "студиозиусом" Абелем, каким уехал. Ему не удалось найти никакого места работы. Больной туберкулезом, "бедный, как церковная мышь", по его собственным словам, двадцатишестилетний Абель в состоянии самой черной меланхолии скончался 6-го апреля 1829 г.

Наиболее важным математическим открытием Абеля является доказательство неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений пятой степени. Это открытие он сделал в очень юном возрасте, когда ему было всего 22 года. По словам известного математика Ш.Эрмита, Абель «оставил столь богатое наследие математикам, что им будет чем заниматься в ближайшие 500 лет». Самое известное его открытие относится к области алгебры: в 1824 г. он доказал, что алгебраические уравнения 5-й степени и выше в общем случае неразрешимы в радикалах, а также привел частные типы уравнений, которые имеют такие решения (абелевы группы).

Существует обычай в математике, по которому новые результаты и открытия называют по имени того, кем они сделаны. Сейчас каждый, кому случится взять в руки книгу по высшей математике, увидит, что имя Абеля увековечено в самых различных областях этой науки: существует целый ряд теорем, носящих имя Абеля, есть абелевы интегралы, абелевы уравнения, абелевы группы, формулы Абеля, преобразования Абеля... Как бы удивился нищий "студиозиус» Нильс Абель, умерший от чахотки в возрасте 26 лет, если бы узнал, что его работы оказали такое огромное влияние на развитие математики!

Математик и революционер Эварист Галуа. Не менее трагичной является судьба еще одного гения, французского математика Эвариста Галуа. Он родился 26 октября 1811 в местечке Бур-ла-Рен близ Парижа.

Эварист Галуа (1811-1832)

В 1823 после основательной домашней подготовки под руководством матери он поступил в четвертый класс лицея Людовика Великого в Париже. Свою первую работу, посвященную периодическим непрерывным дробям, Галуа опубликовал в 1828, еще будучи учеником лицея. Он намеревался поступить в Политехническую школу, но дважды проваливался на вступительном экзамене по математике. Сам он объяснял это тем, что заданные ему вопросы были слишком детскими, чтобы отвечать на них. Наконец, в 1830 он был принят в Нормальную школу, но уже в 1831 исключен из нее за «непозволительное поведение». В особенности ему ставилось в вину его «невыносимое высокомерие». Галуа с энтузиазмом занялся революционной деятельностью, и в конце концов попал в тюрьму, где пробыл несколько месяцев. Уже в мае 1832 его бурная жизнь подошла к концу: он был убит на дуэли, в которую его вовлекла какая-то любовная история. Накануне дуэли он написал резюме своих открытий и передал записку одному из друзей с просьбой сообщить о них ведущим математикам. Записка заканчивалась словами: «Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать заключение не о справедливости, а о значении этих теорем. После этого, я надеюсь, найдутся люди, которые сочтут нужным расшифровать всю эту путаницу».

Насколько известно, письмо Галуа не попало ни к Якоби, ни к Гауссу. Математические круги узнали о нем лишь в 1846, когда известный французский математик Лиувилль напечатал большую часть трудов ученого в своем журнале. Все они занимали лишь 60 страниц небольшого формата! А содержали изложение теории групп, которая считается «ключевой» теорией современной алгебры и геометрии; первую классификацию иррациональностей, определяемых алгебраическими уравнениями, – учение, которое сейчас кратко называется теорией Галуа. В теории Галуа прояснялись такие старые вопросы, как трисекция угла, удвоение куба, решение кубических и биквадратных уравнений и уравнений любых степеней в радикалах. Им найдены условия сводимости решения таких уравнений к решению системы других алгебраических уравнений более низких степеней.

1.6. Формулы Виета

Общие свойства корней алгебраических уравнений. В процессе развития алгебры были установлены следующие свойства корней алгебраических уравнений:

1. Алгебраические уравнения *n*-й степени имеют *n* корней. Корни могут быть действительными, мнимыми и комплексными числами.

2. Правило знака Декарта: алгебраическое уравнение имеет не больше положительных корней, чем изменений знака в последовательности ее коэффициентов. Например, уравнение $x^5 - 4x - 2 = 0$ имеет только один положительный корень, поскольку последовательность коэффициентов $1, -4, -2$ имеет только одно изменение знака.

3. В уравнениях, коэффициенты которых являются действительными числами, комплексные корни могут возникать только парами: вместе с комплексным корнем $a+bi$ комплексное число $a-bi$ всегда является корнем этого же уравнения

4. Если $x_i\left(i=1,2,3,...,n\right)$ является одним из корней алгебраического уравнения (1.6), тогда полином, стоящий в левой части уравнения (1.6) всегда делится на бином $\left(x-x_i\right)$ без остатка. Это означает, что полином n-й степени может быть представлен как произведение n биномов 1-й степени вида $\left(x-x_i\right)$, то есть,

$$a_0x^n+a_0x^{n-1}+...+a_n=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)...\left(x-x_n\right). \tag{1.14}$$

Формулы Виета для квадратного уравнения. Огоромный вклад в развитие «элементарной алгебры» внес французский математик Франсуа Виет (1540 - 1603). Одним из важнейших математических результатов Виета являются знаменитые формулы Виета для коэффициентов многочлена как функций его корней.

Рассмотрим формулы Виета для квадратного уравнения. Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1.15}$$

то имеют место следующие соотношения, связывающие корни уравнения с его коэффициентами a,b,c:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1x_2=+\frac{c}{a} \tag{1.16}$$

В частном случае, если $a=1$, уравнение (1.15) принимает вид приведенного уравнения:

$$x^2+px+q=0\ , \tag{1.17}$$

для которого имеют место следующие соотношения:

$$x_1+x_2=-p;\ x_1x_2=+q \tag{1.18}$$

Таким образом, правило Виета гласит: сумма корней приведенного квадратного уравнения (1.17) равна второму коэффициенту с обратным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Этим правилом удобно пользоваться для проверки решения квадратного уравнения, а также для составления квадратного уравнения по заданным его корням.

Формулы Виета для общего случая. Однако, наибольший интерес представляют формулы Виета для общего случая. Рассмотрим эти формулы. Если $x_1, x_2, ..., x_n$ — корни приведенного алгебраического уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0, \tag{1.19}$$

то коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ выражаются через корни уравнения (1.19) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&a_1 = -\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)\\
&a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n\\
&a_3 = -\left(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n\right)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-1} = (-1)^{n-1}\left(x_1x_2...x_{n-1} + x_1x_2...x_{n-2}x_n + ... + x_2x_3...x_n\right)\\
&a_n = (-1)^n x_1x_2...x_n
\end{aligned} \tag{1.20}$$

1.7. Простейшие алгебраические тождества для «золотой пропорции»

Формулы Виета для корней уравнения золотого сечения. Уравнение золотого сечения (1.2) является приведенным уравнением (1.17), коэффициенты которого соответственно равны:

$$p = -1; \quad q = -1. \tag{1.21}$$

Тогда, согласно правилу Виета (1.18), между корнями (1.3) и (1.4) уравнения (1.2) имеют место следующие соотношения:

$$x_1 + x_2 = -p = -(-1) = 1; \; x_1x_2 = +q = -1.$$

Некоторые алгебраические тождества для золотой пропорции. Что же это за «чудо» природы и математики, интерес к которому не только не увядает с течением времени, а наоборот – возрастает с каждым столетием? Для ответа на этот вопрос мы предлагаем читателю напрячь все свои математические знания и погрузиться в мир математики. Только таким путем вы сможете насладиться чудесными математическими свойствами этого уникального феномена и через эти математические свойства понять и оценить всю красоту и гармонию золотой пропорции $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Начнем с установления простейших алгебраических свойств золотой пропорции. Для этого представим уравнение (1.2) в следующем виде:

$$x^2 = x + 1. \tag{1.22}$$

Если корень Φ (золотая пропорция) подставить вместо x в уравнение (1.22), то мы получим следующее замечательное тождество для золотой пропорции:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \tag{1.23}$$

Если все члены тождества (1.23) разделить на Φ, то мы придем к следующему выражению для Φ:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}, \tag{1.24}$$

которое может быть представлено и в следующем виде:

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}. \tag{1.25}$$

Проанализируем тождество (1.25). Известно, что любое число a имеет обратное к нему число $1/a$. Например, дробь 0,1 является числом, обратным к 10. Традиционный алгоритм получения обратного числа $1/a$ из исходного числа а состоит в делении числа 1 на число a. Это довольно сложная процедура. Попробуйте, например, путем деления получить число, обратное к числу $a = 357821$. Это можно сделать только с помощью современного компьютера.

Рассмотрим теперь золотую пропорцию $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Как получить из нее обратное ей число $\frac{1}{\Phi}$? Тождество (1.25) дает очень простой ответ на этот вопрос. Для этого достаточно вычесть единицу из золотой пропорции Φ.

Но еще большее «эстетическое наслаждение» мы получим, если выполним над тождеством (1.23) следующие преобразования. Умножим вначале обе части тождества (1.23) на золотую пропорцию Φ, а затем разделим их на Φ. В результате получим два новых тождества:

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi \tag{1.26}$$

и

$$\Phi = 1 + \Phi^{-1}. \tag{1.27}$$

Если теперь продолжать умножать члены тождества (1.26) на Φ, а члены тождества (1.27) делить на Φ и устремить этот процесс до бесконечности, то мы придем к следующему изящному тождеству, связывающему степени золотой пропорции:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ... \tag{1.28}$$

Тождество (1.28) словесно можно выразить следующим образом: «Любая целая степень золотой пропорции равна сумме двух предыдущих».

Это свойство золотой пропорции является воистину уникальным! Действительно, очень трудно представить, что следующее тождество является «абсолютно верным»:

$$\Phi^{100} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{99} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{98},$$

но его справедливость однозначно вытекает из справедливости общего тождества (1.28).

Более того. Абсолютно верным является также следующее тождество:

$$\Phi^{100} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{99} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{97} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{96}$$

и подобных численных тождеств для числа Φ^{100} существует бесконечное количество, что является следствием общего тождества (1.28).

«Золотая» геометрическая прогрессия. Рассмотрим последовательность степеней «золотой пропорции», то есть

$$\left\{\ldots,\Phi^{-n},\Phi^{-(n-1)},\ldots,\Phi^{-2},\Phi^{-1},\Phi^{0}=1,\Phi^{1},\Phi^{2},\ldots,\Phi^{n-1},\Phi^{n},\ldots\right\}. \qquad (1.29)$$

Последовательность (1.29) обладает весьма интересными математическими свойствами. С одной стороны, последовательность (1.29) является «геометрической прогрессией», в которой каждое число равно предыдущему, умноженному на постоянное для данной прогрессии число Ф, называемое знаменателем геометрической прогрессии, то есть,

$$\Phi^{n}=\Phi\times\Phi^{n-1}. \qquad (1.30)$$

С другой стороны, в соответствии с (1.28) последовательность (1.29) обладает «аддитивным» свойством, так как каждый член прогрессии (1.29) есть сумма двух предыдущих. Заметим, что свойство (1.28) характерно только для геометрической прогрессии со знаменателем Ф, и такая геометрическая прогрессия называется золотой прогрессией.

Поскольку каждой геометрической прогрессии типа (1.29) в геометрии соответствует некоторая логарифмическая спираль, то, по мнению многих исследователей, свойство (1.28) выделяет золотую прогрессию (1.29) среди других геометрических прогрессий и является причиной широкого распространения именно «золотой» логарифмической спирали в формах и структурах живой природы.

Представление золотой пропорции в «радикалах». Рассмотрим теперь еще раз тождество (1.23). Если взять корень квадратный из правой и левой частей тождества (1.23), то получим следующее выражение для Ф:

$$\Phi=\sqrt{1+\Phi} \qquad (1.31)$$

Если теперь в правой части выражения (1.31) вместо Ф подставить его же выражение, задаваемое (1.31), то получим следующее:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}\ . \tag{1.32}$$

Если в правой части тождества (1.32) опять подставить выражение (1.31) вместо Ф и повторить эту операцию бесконечное число раз, то мы получим еще одно замечательное представление золотой пропорции в «радикалах»:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}\ . \tag{1.33}$$

1.8. Золотая пропорция и цепные дроби

Общие сведения о цепных дробях. Цепная дробь (или непрерывная дробь) — это математическое выражение вида

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \tag{1.34}$$

где a_0 есть целое число и все остальные $a_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ - положительные целые, то есть, натуральные числа, включая число 0. Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. Число представляется периодической цепной дробью тогда и только тогда, когда оно является квадратичной иррациональностью.

Теория цепных дробей восходит в своих истоках к античной математике. Считается, что античные математики умели представлять отношения несоизмеримых величин в виде цепочки последовательных подходящих отношений, получая эту цепочку с помощью алгоритма Евклида.

В современной математике теория непрерывных дробей широко используется для решения ряда математических задач таких, как приближение вещественных чисел рациональными, решение сравнений первой степени и др.

Важным понятием теории непрерывных дробей является понятие n-ой подходящей дроби для цепной дроби (1.34). Под этим понимается конечная цепная дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, значение которой равно некоторому рациональному числу

$\frac{p_n}{q_n}$. Подходящие дроби с чётными номерами образуют возрастающую последовательность, предел которой равен x. Аналогично, подходящие дроби с нечётными номерами образуют убывающую последовательность, предел которой также равен x.

Областью практического приложения непрерывных дробей является теория календарей. Например, при разработке солнечного календаря необходимо найти рациональное приближение для числа дней в году, которое равно 365,2421988… Подсчет подходящих дробей для дробной части этого числа дает следующие результаты:

$$\frac{1}{4};\frac{7}{29};\frac{8}{33};\frac{31}{128};\frac{132}{545};...$$

Первая дробь означает, что раз в 4 года надо добавлять лишний день; этот принцип лёг в основу юлианского календаря. При этом ошибка в 1 день накапливается за 128 лет. Второе значение (7/29) никогда не использовалось. Третья дробь (8/33), то есть, 8 високосных лет за период в 33 года, была предложена Омаром Хайямом в XI веке и положила начало персидскому календарю, в котором ошибка в один день накапливается за 4500 лет (в григорианском — за 3280 лет).

Представление «золотой пропорции» в виде цепной дроби. Представим теперь «золотое сечение» Ф в виде цепной дроби (1.34). Для этого воспользуемся тождеством (1.24). Если в правую часть тождества (1.24) вместо Ф подставить его значение, задаваемое тем же выражением (1.24), то мы придем к представлению Ф в виде следующей «многоэтажной» дроби:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}. \qquad (1.35)$$

Если продолжить такую подстановку в правой части (1.35) бесконечное число раз, то в результате получим «многоэтажную» дробь с бесконечным количеством «этажей»:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}. \tag{1.36}$$

Оказывается, что выражение (1.36) имеет глубокий математический смысл. В работах российских математиков А.Я. Хинчина [61] и Н.Н. Воробьева [2] обращено внимание на тот факт, что выражение (1.35) выделяет золотую пропорцию Φ среди других иррациональных чисел, так как согласно (1.36) золотая пропорция наиболее медленно апроксимируется рациональными дробями. Это означает, что, с точки зрения цепных дробей, золотая пропорция является уникальным иррациональным числом.

Найдем теперь подходящие дроби для золотой пропорции. Для этого, используя (1.36), будем аппроксимировать золотую пропорцию (1.36) подходящими дробями:

$$1 = \frac{1}{1} \qquad \text{(первая аппроксимация);}$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} \qquad \text{(вторая аппроксимация);}$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2} \qquad \text{(третья аппроксимация);}$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3} \qquad \text{(четвертая аппроксимация).}$$

Продолжая этот процесс, мы найдем последовательность подходящих дробей для золотой пропорции, которая представляет собой последовательность отношений соседних чисел Фибоначчи:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots \to \Phi = \lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad . \tag{1.37}$$

Как известно, последовательность чисел (1.37) выражает ни что иное, как знаменитый закон филлотаксиса, в соответствии с которым Природа конструирует сосновые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечников и другие ботанические объекты. Другими словами, Природа использует уникальное математическое свойство золотой пропорции, задаваемое (1.36), (1.37), в своих замечательных творениях!

И в заключение несколько слов об эстетической стороне полученных выше тождеств (1.33) и (1.36). Каждый математик интуитивно стремится выразить свои математические результаты в наиболее простой, компактной форме. И если такую форму удается найти, то это доставляет математику «эстетическое наслаждение». В этом отношении (стремление к «эстетическому» выражению математических результатов) математическое творчество подобно творчеству композитора или поэта, главной задачей которых является получение совершенных музыкальных или поэтических форм, доставляющих «эстетическое удовольствие». Заметим, что формулы (1.33), (1.36) доставляют нам «эстетическое наслаждение» и вызывают неосознанное чувство ритма и гармонии, когда мы начинаем задумываться над бесконечной повторяемостью одних и тех же простых математических элементов в формулах для Ф, задаваемых (1.33), (1.36).

1.9. Уравнения золотой пропорции *n*-й степени

Обычно главный вопрос, который решается в теории алгебраических уравнений состоит в том, чтобы найти корни данного алгебраического уравнения. А теперь мы поставим другой вопрос. Нам известно простейшее алгебраическое уравнение (1.2), корнем которого является золотая пропорция. Поставим следующий вопрос: а существуют ли алгебраические уравнения более высоких степеней, корнем которых является золотая пропорция? И если да, то какую форму они имеют? Для ответа на этот вопрос проведем следующие рассуждения, взяв в качестве исходного уравнение золотой пропорции (1.2).

Умножим обе части уравнения золотого сечения $x^2 = x + 1$ на x; в результате получим следующее равенство:

$$x^3 = x^2 + x. \qquad (1.38)$$

Уравнение $x^2 = x + 1$ можно переписать следующим образом:

$$x = x^2 - 1. \qquad (1.39)$$

Подставляя выражение (1.39) вместо x в выражение (1.38), получим следующее алгебраическое уравнение 3-й степени:

$$x^3 = 2x^2 - 1. \tag{1.40}$$

С другой стороны, если в равенство (1.38) вместо x^2 подставить выражение $x^2 = x + 1$, то получим еще одно уравнение 3-й степени:

$$x^3 = 2x + 1. \tag{1.41}$$

Таким образом, мы получили два новых алгебраических уравнения 3-й степени. Докажем, например, что корнем уравнения (1.40) является золотая пропорция. Для этого подставим золотую пропорцию $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в левую и правую часть уравнения (1.40) и затем проверим, что левые и правые части этого уравнения совпадают. Действительно, используя тождество (1.28), мы получим для правой части:

$$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}.$$

С другой стороны, для левой части этого уравнения мы имеем:

$$2\Phi^2 - 1 = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{2} - 1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, проведенные рассуждения доказывают, что золотая пропорция Ф, действительно, является корнем уравнения (1.40), то есть, алгебраическое уравнение (1.40) является «золотым».

Точно так же можно доказать, что уравнение (1.41) также является «золотым».

Выведем теперь выражение для «золотого» алгебраического уравнения 4-й степени. Для этого умножим обе части равенства (1.38) на x; в результате получим следующее равенство:

$$x^4 = x^3 + x^2. \tag{1.42}$$

Затем мы можем воспользоваться выражением $x^2 = x + 1$ и выражениями (1.40) или (1.41) для x^3. Подставляя их в выражение (1.42), мы получим два новых алгебраических уравнения 4-й степени, корнями которых является золотая пропорция:

$$x^4 = 3x^2 - 1 \tag{1.43}$$

$$x^4 = 3x + 2. \tag{1.44}$$

Анализ уравнения (1.44) приводит нас к неожиданному результату. Оказывается, что это уравнение описывает энергетическое состояние молекулы бутадиена – ценного химического вещества, которое используется при производстве каучука. Известный американский физик, Лауреат Нобелевской Премии Ричард Фейнман выразил свое восхищение по поводу уравнения (1.44) в следующих словах: «Какие чудеса существуют в математике! Согласно моей теории, золотая пропорция древних греков дает минимальное энергетическое состояние молекулы бутадиена».

Это наблюдение знаменитого физика сразу же повышает наш интерес к уравнениям золотой пропорции высших степеней, которые, возможно, описывают энергетические состояния молекул других физических веществ. Эти уравнения могут быть получены, если мы будем последовательно рассматривать равенства типа $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$. В качестве примера можно вывести следующие «золотые» уравнения высших степеней:

$$x^5 = 5x + 3 = 5x^2 - 2; \quad x^6 = 8x + 5 = 8x^2 - 3; \quad x^7 = 13x + 8 = 13x^2 - 5.$$

Анализ этих уравнений показывает, что числовые коэффициенты в правой части этих уравнений есть ни что иное, как числа Фибоначчи. Легко показать, что в общем случае алгебраические уравнения золотой пропорции n-й степени выражаются в следующем виде:

$$x^n = F_n x^2 - F_{n-2} = F_n x + F_{n-1}, \tag{1.45}$$

где F_n, F_{n-1}, F_{n-2} - числа Фибоначчи.

Таким образом, наши несложные рассуждения привели нас к небольшому математическому открытию: мы нашли бесконечное число новых алгебраических уравнений, задаваемых (1.45), корнем которых является золотая пропорция.

Если подставить золотую пропорцию Ф вместо х в уравнения (1.45), мы получим два тождества, которые связывают золотую пропорцию с числами Фибоначчи:

$$\Phi^n = F_n \Phi^2 - F_{n-2} \tag{1.46}$$

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}\,. \tag{1.47}$$

Нетрудно вычислить, что, например, 18-е, 19-е и 20-е числа Фибоначчи соответственно равны:

$$F_{18} = 2584,\ F_{19} = 4181,\ F_{20} = 6765\,. \tag{1.48}$$

Но тогда мы можем записать следующие «золотые» алгебраические уравнения 20-й степени:

$$x^{20} = 6765x^2 - 2584 \tag{1.49}$$

$$x^{20} = 6765x + 4181\,. \tag{1.50}$$

Трудно вообразить, что корнем этих уравнений 20-й степени является золотая пропорция! Но это вытекает из рассмотренной выше теории алгебраических уравнений золотой пропорции, задаваемых (1.45). И глядя на уравнения (1.45), (1.49), (1.50), мы еще раз можем убедиться в величии математической науки, которая позволила нам в такой компактной форме выразить сложную научную информацию.

1.10. Геометрические фигуры, связанные с «золотым сечением»

Золотой прямоугольник. Мы начнем наше путешествие по геометрическим свойствам золотого сечения с золотого прямоугольника, который имеет следующее геометрическое определение (Рис.1.7). «Золотым» называется прямоугольник, в котором отношение большей стороны к меньшей равно золотой пропорции, то есть,

$$\frac{AB}{BC} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Рассмотрим случай, когда $AB = \Phi$ и $BC = 1$. Найдем на отрезках AB и DC точки E и F, которые делят соответствующие стороны AB и DC в «золотом сечении». Ясно, что $AE = DF = 1$, тогда $EB = AB - AE = \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$.

Соединим теперь точки E и F отрезком EF и назовем его золотой линией. При этом с помощью золотой линии EF золотой прямоугольник $ABCD$ оказывается разделенным на два прямоугольника $AEFD$ и $EBCF$. Поскольку все стороны прямоугольника $AEFD$ равны между собой, то этот прямоугольник есть ни что иное, как квадрат.

Рассмотрим теперь прямоугольник $EBCF$. Поскольку его большая сторона $BC = 1$, а меньшая $EB = \frac{1}{\Phi}$, то отсюда следует, что их отношение $\frac{BC}{EB} = \Phi$ и, следовательно, прямоугольник $EBCF$ также является «золотым»! Таким образом, золотая линия EF расчленяет исходный золотой прямоугольник $ABCD$ на квадрат $AEFD$ и новый золотой прямоугольник $EBCF$.

Проведем теперь диагонали DB и EC «золотых» прямоугольников $ABCD$ и $EBCF$. Из подобия треугольников ABD, FEC, BCE вытекает, что точка G разделяет «золотым сечением» диагональ DB. Проведем теперь новую золотую линию GH в золотом прямоугольнике $EBCF$. Ясно, что золотая линия GH разделяет «золотой» прямоугольник $EBCF$ на квадрат $GHCF$ и новый «золотой» прямоугольник $EBHG$. Повторяя многократно эту процедуру, мы получим бесконечную последовательность квадратов и «золотых» прямоугольников, которые в пределе сходятся к точке O.

Заметим, что такое бесконечное повторение одних и тех же геометрических фигур, то есть, квадрата и «золотого» прямоугольника, вызывает у нас неосознанное эстетическое чувство ритма и гармонии. Считается, что именно это обстоятельство является причиной того, что многие предметы прямоугольной формы, с которыми человек имеет дело (спичечные коробки, зажигалки, книги, чемоданы), зачастую имеют форму «золотого» прямоугольника.

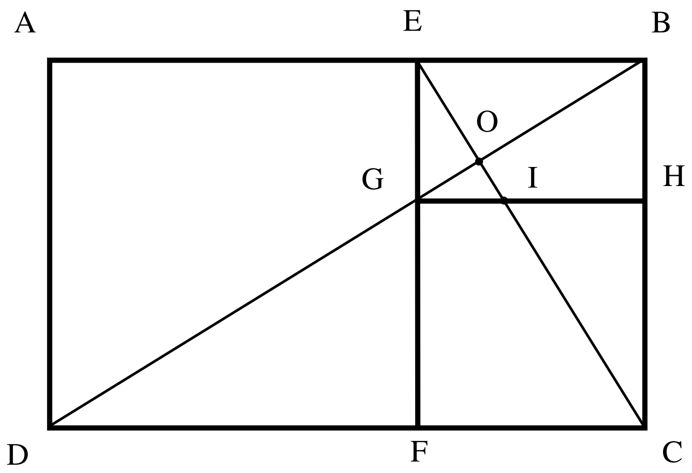


Рис. 1.7. «Золотой» прямоугольник

«Двойной» квадрат. Как подчеркивает Николай Васютинский в своей книге [19], «многие математические закономерности, как говорится, «лежали на поверхности», их нужно было увидеть человеку с аналитическим умом, мыслящему логически. А в этом нельзя было отказать философам древнего мира; ведь все их научное познание строилось на анализе предметов и явлений, установления связи между ними. В наше время трудно даже представить, что возможно развитие науки совершенно без использования эксперимента, а ведь таковой была наука древнего мира».

Не исключено, что древние математики могли прийти к золотому сечению, исследуя простейший прямоугольник с отношением сторон 2:1, называемый также «двойным» или «двухсмежным» квадратом, так как он состоит из двух квадратов (Рис.1.8).

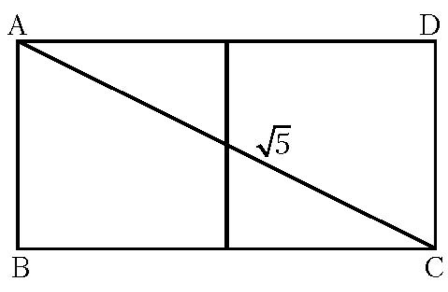


Рис. 1.8. Прямоугольник с отношением сторон 2:1 («двойной» квадрат)

Если вычислить диагональ AC «двойного» квадрата, то в соответствии с теоремой Пифагора она равна $AC=\sqrt{5}$. Если теперь взять отношение суммы отрезков $AC+CD$ к большей стороне AD «двойного» квадрата, то мы придем к золотой пропорции, так как $\frac{AC+CD}{AD}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

«Двойной» квадрат на Рис.1.8 состоит из двух прямоугольных треугольников ABC и ADC с отношением сторон: $1:2:\sqrt{5}$. Вполне резонно предположить, что такой треугольник хорошо был известен Пифагору и мог послужить основой для развития различных математических идей. Прежде всего, заметим, что стороны этого треугольника связаны «теоремой Пифагора»: $c^2=a^2+b^2$ или $\left(\sqrt{5}\right)^2=5=1^2+2^2=1+4$. Величина гипотенузы такого треугольника, равная $\sqrt{5}$, вполне могла дать начало открытию несоизмеримых отрезков или иррациональных чисел (хотя, по другой легенде, пифагорейцы пришли к открытию несоизмеримых отрезков при исследовании отношения диагонали квадрата к его стороне). Соотношения сторон a,b,c такого треугольника очень простые: $a:b=1:2$, $c:a=\sqrt{5}:1$, $c:b=\sqrt{5}:2$. Однако, из этих величин следует еще одно отношение: $(a+c):b=\left(1+\sqrt{5}\right):2$ («золотая пропорция»).

Таким образом, как подчеркивает Николай Васютинский [19], «хорошо известный в древнем мире простой прямоугольный треугольник с отношением катетов 1:2 мог послужить основой для открытия теоремы квадратов, золотой пропорции и несоизмеримых величин – великих открытий Пифагора».

Конечно, это только предположение, не лишенное внутренней логики. В действительности, последовательность рассуждений Пифагора, приведшая его к великим математическим открытиям, была, по-видимому, иной. Скорее всего, он пришел к «теореме квадратов», исходя из рассмотрения прямоугольного треугольника с отношением сторон 3:4:5, который был известен с давних времен и назывался «совершенным», «священным» или «египетским». Для такого треугольника «теорема квадратов» выглядит следующим образом: $3^2+4^2=5^2$. Но мы можем только выдвигать различные гипотезы, потому что Пифагор не оставил после себя никаких публикаций в письменном виде.

Золотой прямоугольный треугольник (треугольник Кеплера). Существует еще один прямоугольный треугольник, связанный с «золотым сечением» (Рис.1.9). В таком треугольнике его стороны, равные x, y, z образуют геометрическую прогрессию: $z : y = y : x$. Открытие этого треугольника приписывают Иоганну Кеплеру. В треугольнике Кеплера отношение катетов $y : x$ равно корню квадратному от золотой пропорции, то есть,

$$y : x = \sqrt{\Phi} . \quad (1.51)$$

В соответствии с «теоремой квадратов», гипотенуза z может быть вычислена по формуле:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} . \quad (1.52)$$

Если принять $x = 1$, $y = \sqrt{\Phi}$, то

$$z = \sqrt{1+\Phi} = \sqrt{\Phi^2} = \Phi \quad (1.53)$$

Прямоугольный треугольник, в котором стороны относятся как $z : y : x = \Phi : \sqrt{\Phi} : 1$, называется «золотым» прямоугольным треугольником.

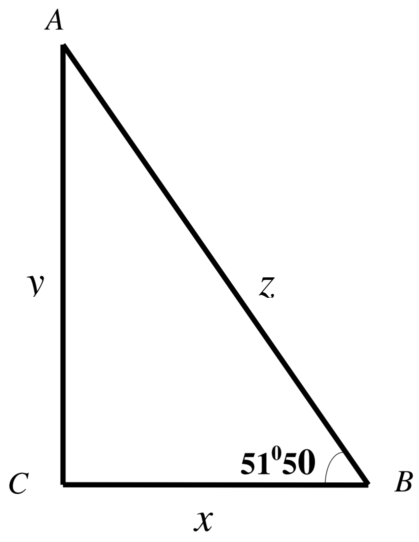


Рис. 1.9. «Золотой» прямоугольный треугольник (треугольник Кеплера)

Существует довольно убедительная гипотеза [19], что именно «золотой» прямоугольный треугольник (Рис.1.9) является главной геометрической идеей пирамиды Хеопса.

Золотой эллипс. Золотой эллипс формируется с помощью двух ромбов $ACBD$ и $ICJD$, вписанных в эллипс (Рис.1.10). «Золотые» ромбы $ACBD$ и $ICJD$ состоят из 4-х прямоугольных треугольников типа OCB или OCJ, которые являются «золотыми» прямоугольными треугольниками (Рис.1.9).

Рассмотрим основные геометрические соотношения «золотого» эллипса на Рис.1.10. Пусть фокусное расстояние эллипса $AB = 2$. Из определения эллипса вытекает следующее соотношение: $AC + CB = AG + GB$. С другой стороны, существуют следующие соотношения, связывающие стороны «золотых» прямоугольных треугольников OCB и OCJ:

$$OB : BC = 1 : \Phi, \quad OB : OC = 1 : \sqrt{\Phi};$$
$$OC : CJ = 1 : \Phi, \quad OC : OJ = 1 : \sqrt{\Phi},$$

где Φ - золотая пропорция.

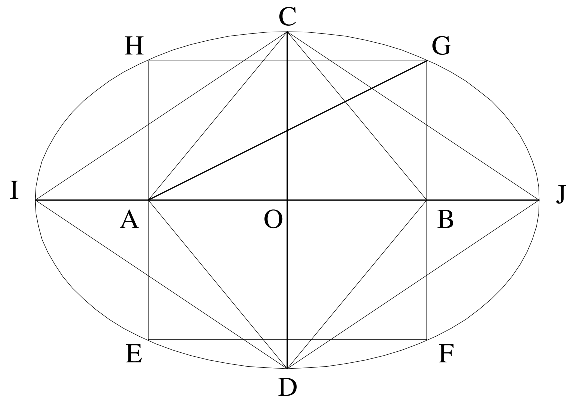


Рис. 1.10. «Золотой» эллипс

Из подобия треугольников OCB и OCJ вытекает также следующая пропорция:

$$OC : CJ = OB : OC = OC : OJ = 1 : \sqrt{\Phi}. \qquad (1.54)$$

По мнению польского ученого, журналиста и египтолога Яна Гржедзельского, автора замечательной книги «Энергетично-геометрическоий код природы» [14], «золотой» эллипс может быть использован в качестве геометрической модели для распространения света в оптических кристаллах и тогда соотношения (1.53) выражают пропорцию «гармонического» равновесия в оптических кристаллах, создающую оптимальные условия для достижения фотонами фокусов с минимальными энергетическими потерями.

Пентагон и пентаграмма. Но существуют еще ряд равнобедренных треугольников, основанных на золотом сечении. Рассмотрим первый из них, который лежит в основе правильного пятиугольника или пентагона. Слово пентагон происходит от греческого слова pentagonon – пятиугольник. Пентагон представлен на Рис.1.11.

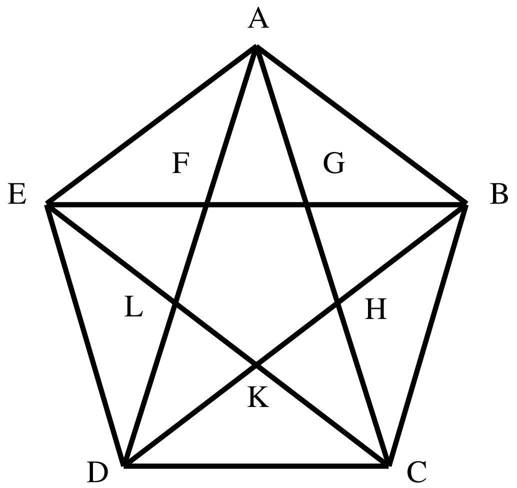


Рис. 1.11. Пентагон и пентаграмма

Если в пентагоне провести все диагонали, то в результате мы получим хорошо известную нам пятиугольную звезду, называемую также пентаграммой или пентаклом. Название пентаграмма происходит от греческого слова pentagrammon, pente – пять и grammon – линия и означает правильный пятиугольник, на сторонах которого построены равнобедренные треугольники одинаковой высоты. Доказано, что точки пересечения диагоналей в пентагоне всегда являются точками золотого сечения. При этом они образуют новый пентагон $FGHKL$. В новом пентагоне можно провести диагонали, пересечение которых образуют еще один пентагон и это процесс может быть продолжен до бесконечности. Таким образом, пентагон $ABCDE$ как бы состоит из бесконечного числа пентагонов, которые каждый раз образуются точками пересечения диагоналей. Эта бесконечная повторяемость одной и той же геометрической фигуры создает чувство ритма и гармонии, которое неосознанно фиксируется нашим разумом.

В пентагоне на Рис.1.11 можно найти большое количество отношений золотой пропорции. Например, отношение диагонали пентагона к его стороне равно золотой пропорции.

Рассмотрим теперь последовательность отрезков FG, EF, EG, EB. Легко показать, что они связаны «золотой пропорцией»:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{EG}{EF} = \frac{EB}{EG} = \Phi .$$

Пентаграмма вызывала особое восхищение у пифагорейцев и считалась их главным опознавательным знаком. Существует следующая легенда. Когда на чужбине один из пифагорейцев лежал на смертном одре и не мог заплатить человеку, который за ним ухаживал, то он велел ему изобразить на своем жилище пентакл, надеясь на то, что этот знак увидит кто-либо из пифагорейцев. И действительно, несколько лет спустя, один пифагореец увидел этот знак, и хозяин дома получил богатое вознаграждение.

Золотая чаша и золотой равнобедренный треугольник. Пентагон и пентаграмма на Рис.1.11 включают в себя ряд замечательных фигур, которые широко использовались в произведениях искусства. В античном искусстве широко известен так называемый «закон золотой чаши» (Рис.1.12), который использовали античные скульпторы и золотых дел мастера. Заштрихованная часть пентагона на Рис.1.12 дает схематическое представление «золотой» чаши.

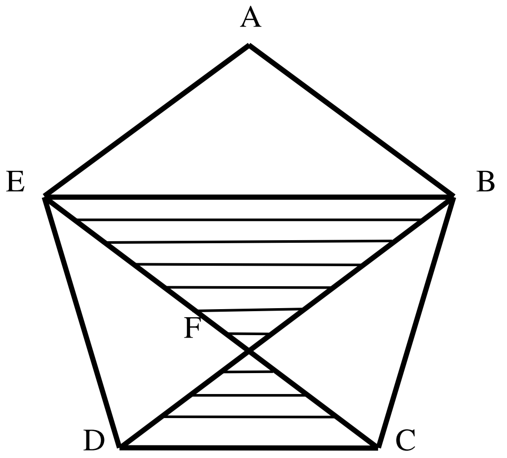


Рис. 1.12. «Золотая» чаша

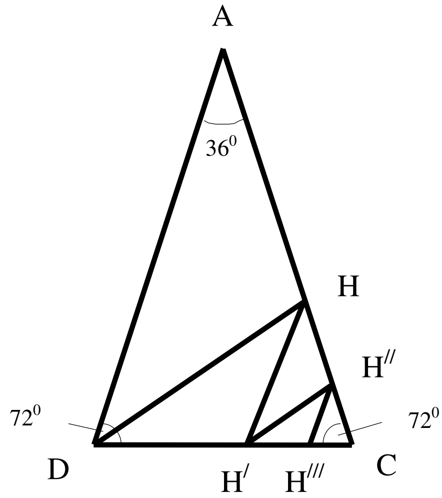


Рис. 1.13. «Золотой» равнобедренный треугольник

Пентаграмма (Рис.1.11) состоит из пяти «золотых» равнобедренных треугольников (Рис.1.13), каждый из которых напоминает букву «А» («пять пересекающихся А») . Каждый «золотой» треугольник на Рис.1.13 имеет острый угол $A = 36°$ при вершине и два острых угла $D = C = 72°$ при основании треугольника. Основная особенность «золотого» равнобедренного треугольника состоит в том, что отношение каждого бедра $AC = AD$ к основанию DC равно золотой пропорции Φ.

Исследуя «золотой» равнобедренный треугольник, как часть пентаграммы, пифагорейцы были восхищены, когда обнаружили, что биссектриса DH совпадает с диагональю DB пентагона (Рис.1.11) и делит сторону AC в точке H золотым сечением (Рис.1.13). При этом возникает новый золотой треугольник DHC. Если теперь провести биссектрису угла H к точке H' и продолжить этот процесс до бесконечности, то мы получим бесконечную последовательность «золотых» равнобедренных треугольников. Как и в случае с «золотым» прямоугольником (Рис.1.7) и пентагоном (Рис.1.11), бесконечное возникновение одной и той же геометрической фигуры («золотого» прямоугольного треугольника) после проведения очередной биссектрисы вызывает эстетическое чувство ритма и гармонии.

Декагон: связь «золотого сечения» с числом π. Как известно, количество иррациональных (несоизмеримых) чисел бесконечно. Однако, некоторые из них занимают особое место в истории математики, боле того – в истории материальной и духовной культуры. Их значение состоит в том, что они выражают некоторые отношения, имеющие универсальный характер и обнаруживающиеся в самых неожиданных местах.

В математике наиболее широко известными являются две математические константы - число π, выражающее отношение длины окружности к ее диаметру, и «неперово число» *e*, являющееся основанием так называемых «натуральных логарифмов». Значение этих двух важнейших математических констант в математическом анализе состоит в том, что они лежат в основе важнейших видов «элементарных функций» - широко известных тригонометрических функций (число π), а также экспоненциальной функции e^x, логарифмической функции $\log_e x$, наконец, гиперболических функций (число *e*).

В математике широко известна следующая формула, выведенная знаменитым математиком Леонардом Эйлером (1707-1783):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad (1.55)$$

где e – основание натуральных логарифмов, а $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. При $x = \pi$ получается знаменитое тождество Эйлера

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \qquad (1.56)$$

которое связывает числа π и e – две главные математические константы, «господствующие над анализом».

Понять это тождество дано не каждому! И рассматривая это тождество, трудно отделаться от мысли о мистическом характере происхождения этой математической формулы и фундаментальных математических констант π и e.

Золотая пропорция Φ также относится к разряду фундаментальных математических констант. Но тогда возникает вопрос: существует ли какая-либо связь между этими математическим константами, например между числами π и Φ? Ответ на этот вопрос дает анализ правильного многоугольника, называемого декагоном (Рис.1.14).

Рассмотрим окружность радиусом R вместе с вписанным в окружность «декагоном» (Рис.1.14). Из геометрии известно, что сторона декагона a_{10} связана с радиусом R следующим соотношением:

$$a_{10} = 2R\sin 18^{\circ}. \tag{1.57}$$

Если выполнить некоторые тригонометрические преобразования на основе формул, хорошо известных нам из курса школьной тригонометрии, то мы получим следующие результаты:

1. Сторона правильного десятигранника, вписанного в круг радиуса R, равна большей части радиуса R, разделенного золотым сечением, то есть

$$a_{10} = R / \Phi. \tag{1.58}$$

2. Золотая пропорция связана с числом π следующим соотношением:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos 36^{\circ} = 2\cos\frac{\pi}{5}. \tag{1.59}$$

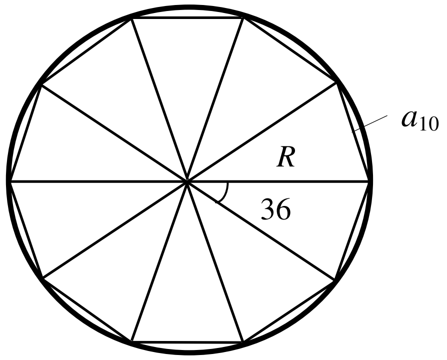


Рис. 1.14. Правильный десятиугольник («декагон»)

Формула (1.59), полученная в результате математического анализа геометрических соотношений «декагона», является еще одним свидетельством фундаментальности золотой пропорции, которая наряду с числом π по праву может быть причислена к разряду важнейших математических констант. В формуле (1.59) дважды встречается число 5. И угол 36° является углом при вершине пятиконечного звездчатого пятиугольника (пентаграммы). Поэтому не случайно, что число 5 у пифагорейцев считалось священным, а пятиугольная звезда - символом пифагорейского союза!

А теперь интересная информация из области атомной физики, связанная с декагоном (Рис.1.14). Исследуя закономерности атомного ядра, белорусский физик Василий Петруненко в книге [40] сделал вывод, что высокая стабильность и устойчивость атомных ядер достигается благодаря волновым кратностям «золотого сечения», лежащим в основе их организации. При этом он показывает, что именно декагон лежит в основе структуры атомного ядра!

1.11. Золотое сечение в природе

Пентагональная симметрия в природе. В живой природе широко распространены формы, основанные на «пентагональной» симметрии (морские звезды, морские ежи, цветы). Пятилепестковыми являются цветы кувшинки, шиповника, боярышника, гвоздики, груши, черемухи, яблони, земляники и многих других цветов. Ниже на Рис.1.15 приведены примеры структур живой природы, основанных на «пентагональной» симметрии.

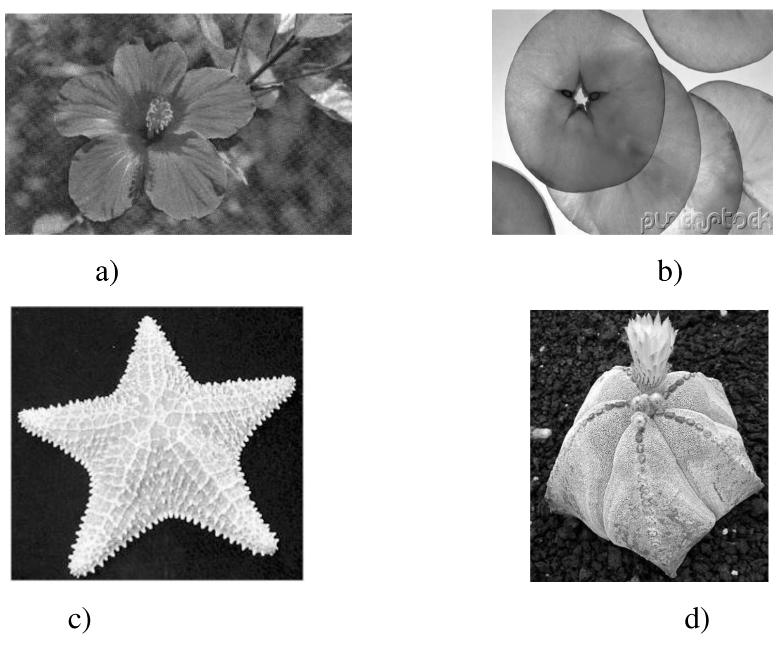


Рис. 1.15. Примеры пентагональной симметрии в природе:
a) китайская роза; b) яблоко в разрезе; c) морская звезда; d) кактус

Свойство наличия пяти пальцев на руке или пяти костей, или костных зачатков на органах, соответствующих руке человека и многих животных («пентадактильность»), являются дополнительным свидетельством широкого распространения пятиугольных форм в морфологии биологического и растительного мира.

Пентакл Венеры. В 2010 г. на Интернете выставлена информация о публикации новой книги «Harmony: a New Way Of Looking At Our World» («Гармония – новый взгляд на наш мир») (2010) [48]. Сенсационность этой информации состоит в том, что автором книги [48] является Принц Чарльз, наследник английского престола.

Принц Чарльз

В книге [48] вводится понятие «Грамматики гармонии». И главная идея книги состоит в том, что Вселенная является наиболее ярким свидетельством проявления "Грамматики гармонии".

В книге [48], наследник британского престола разделяет свое убеждение в том, что наиболее актуальные проблемы человечества коренятся в нашей дисгармонии с природой, и что мы можем решить их путем восстановления баланса с естественным порядком.

Один из разделов книги [48] посвящен детализации понятия "Грамматики Гармонии", куда входят главные математические константы, подобные золотой пропорции, и числовые последовательности, подобные числам Фибоначчи; они пронизывают всю природу.

В своей книге [48] Принц Чарльз большое внимание уделяет главному символу пифагорейцев - пентаклу (Рис.1.11), как одному из примеров «Грамматики Гармонии». В своей книге Принц Чарльз обращает внимание на «пентакл Венеры», который образуется в процессе движения Венеры на небосклоне. Как известно, каждые восемь лет планета Венера описывает абсолютно правильный пентакл по большому кругу небесной сферы (Рис.1.16). Древние астрономы заметили это явление и были так потрясены, что Венера и ее пентакл стали символами совершенства, красоты. Как бы отдавая дань этому явлению, древние греки устраивали Олимпийские игры каждые восемь лет. Сегодня лишь немногие знают, что современные Олимпиады следуют половинному циклу Венеры. Еще меньше людей знают о том, что пятиконечная звезда едва не стала символом Олимпийских игр, но в последний момент его модифицировали: пять остроконечных концов звезды заменили пятью кольцами, по мнению организаторов, лучше отражающими дух участия и гармонию игр.

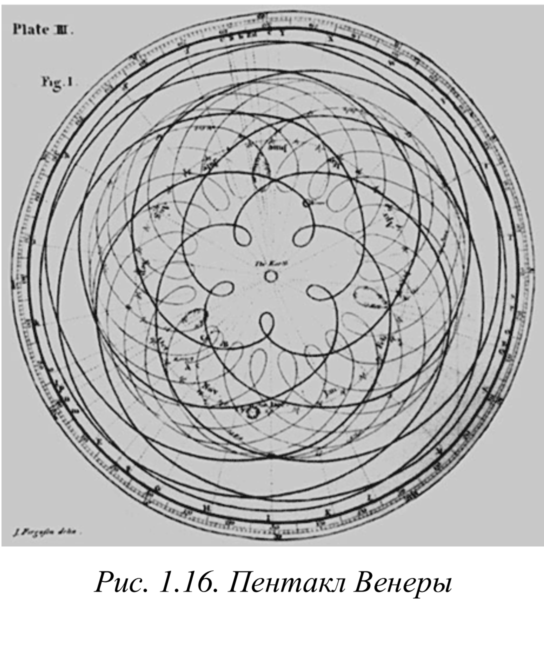


Рис. 1.16. Пентакл Венеры

К блужданиям Венеры по небосклону, основанным на Пентакле и «золотом сечении», можно было бы отнестись, как к очередной «эзотерической сенсации», если бы не одно обстоятельство. В современной науке сделано много выдающихся открытий, подтверждающих наличие «гармонических пропорций» в огромном количестве природных явлений и объектов (пентагональная симметрия, фуллерены (Нобелевская Премия по химии-1996), квазикристаллы Дана Шехтмана (Нобелевская Премия по химии - 2011), «геометрия Боднара» (филлотаксис) [24], «золотые» геноматрицы Сергея Петухова [44], экспериментальное доказательство наличия гармонии «золотого сечения» в квантовом мире и др.). Все это наталкивает на одну и ту же мысль о неслучайности нашей Вселенной, которую высказал в своей книге Принц Чарльз.

1.12. Золотое сечение в пирамиде Хеопса

За несколько веков до Рождества Христова существовало семь чудес света, и увидеть эти чудеса своими глазами стремились многие. Шесть из этих чудес – Колосс Родосский и Александрийский маяк на острове Фарос, сады Семирамиды в Вавилоне, статуя Зевса в Олимпии, храм Артемиды в Эфесе, Мавзолей – гробница царя Карий Мавсола – были разрушены временем. Сохранилось только одно из «чудес света» - египетские пирамиды.

Как поэтично описывает египетские пирамиды Николай Васютинский в своей замечательной книге «Золотая пропорция» [19]: «Бесконечное, однообразное море песка, редкие высохшие кустики растений, едва заметные следы от прошедшего верблюда заметает ветер. Раскаленное солнце пустыни … И оно кажется тусклым, словно покрыто мелким песком.

И вдруг, словно мираж, перед изумленным взором путешественника возникают пирамиды – фантастические фигуры из камня, устремленные к Солнцу. Своими громадными размерами, совершенством геометрической формы они поражают воображение. Недаром эти творения рук человеческих относили к одному из семи чудес света».

Назначение пирамид было многофункциональным. Они служили не только усыпальницами фараонов, но и являлись атрибутами величия, могущества и богатства страны, памятниками культуры, хранилищами истории страны и сведений о жизни фараона и народа, собранием предметов быта.

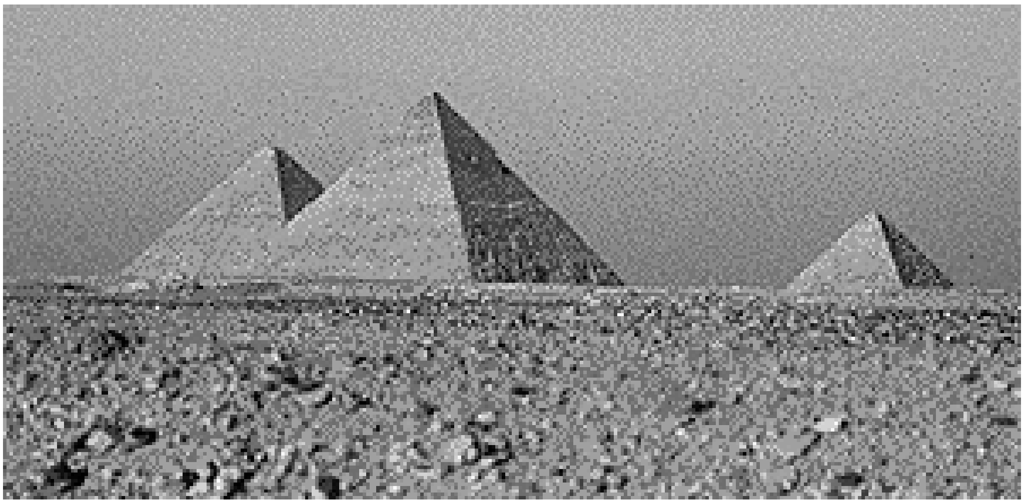


Рис. 1.17. Комплекс пирамид в Гизе

Совершенно ясно, что пирамиды имели глубокое «научное содержание», воплощенное в их форме, размерах и ориентировке на местности. Каждая деталь пирамиды, каждый элемент формы выбирались тщательно и должны были продемонстрировать высокий уровень знаний создателей пирамид. Ведь они строились на тысячелетия, «навечно». И недаром арабская пословица гласит: «Все на свете страшится времени. Время страшится пирамид».

Среди грандиозных пирамид Египта особое место занимает Великая Пирамида фараона Хеопса (Хуфу). Прежде чем приступить к анализу формы и размеров пирамиды Хеопса, следует вспомнить, какой системой мер пользовались египтяне. У египтян было три единицы длины: «локоть» (466 мм), равнявшийся семи «ладоням» (66,5 мм), которая, в свою очередь, равнялась четырем «пальцам» (16,6 мм).

Рассмотрим геометрическую модель пирамиды Хеопса (Рис.1.18) и проведем анализ размеров пирамиды Хеопса, следуя рассуждениям, приведенным в книге Николая Васютинского [19].

Большинство исследователей сходятся в том, что длина стороны основания пирамиды, например, GF равна $L = 233.16\ м$. Эта величина отвечает почти точно 500 «локтям». Полное соответствие 500 «локтям» будет, если длину «локтя» считать равной $0.4663\ м$.

Высота пирамиды H оценивается исследователями различно от 146.6 до 148.2 $м$. И в зависимости от принятой высоты пирамиды изменяются все отношения ее геометрических элементов. В чем причина различий в оценке высоты пирамиды? Дело в том, что, строго говоря, пирамида Хеопса является усеченной. Ее верхняя площадка в наши дни имеет размер примерно $10 \times 10\,м$, а столетие назад она была равна $6 \times 6\,м$. Очевидно, что вершину пирамиды разобрали, и она не отвечает первоначальной.

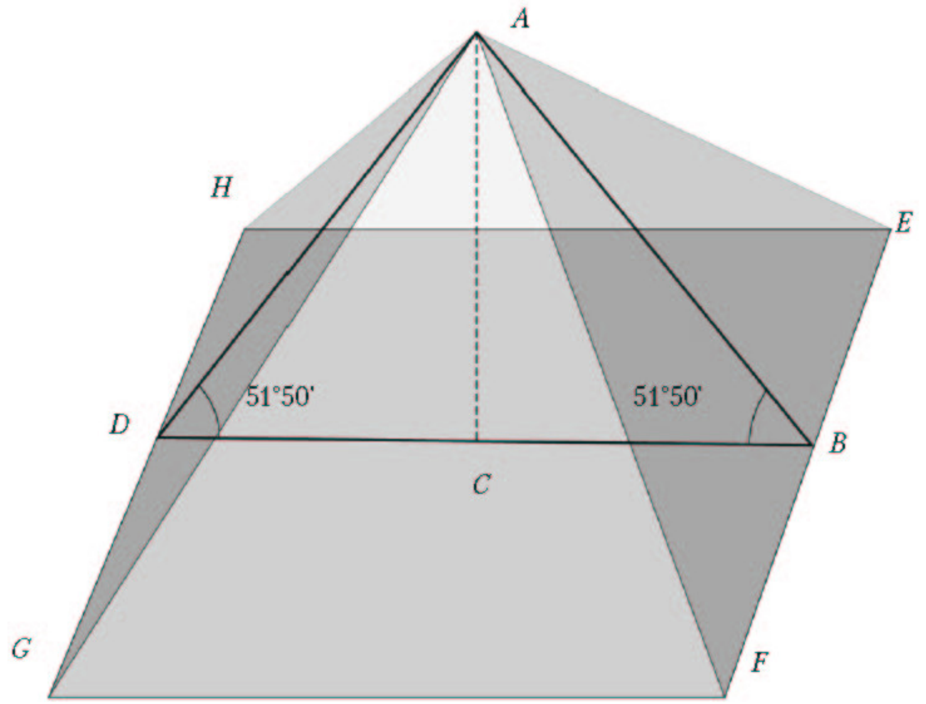


Рис. 1.18. Геометрическая модель пирамиды Хеопса

Оценивая высоту пирамиды, необходимо учитывать такой физический фактор, как «осадка» конструкции. За длительное время под воздействием колоссального давления (достигающего 500 тонн на $1\,m^2$ нижней поверхности) высота пирамиды уменьшилась по сравнению с первоначальной высотой. Какой же была первоначальная высота пирамиды? Эту высоту можно воссоздать, если найти основную «геометрическую идею» пирамиды.

В 1837 г. английский полковник Г. Вайз измерил угол наклона граней пирамиды: он оказался равным $\alpha = 51°51'$. Эта величина и сегодня признается большинством исследователей. Указанному значению угла отвечает тангенс $(\mathrm{tg}\alpha)$, равный 1.27306. Эта величина соответствует отношению высоты пирамиды AC к половине ее основания CB (Рис.4.14), то есть $AC / CB = H / (L/2) = 2H / L$. И вот здесь исследователей ожидал большой сюрприз! Дело в том, что если взять корень квадратный из золотой пропорции $\sqrt{\Phi}$, то мы получим следующий результат $\sqrt{\Phi} = 1.272$. Сравнивая эту величину с величиной $\mathrm{tg}\alpha = 1.27306$, мы видим, что эти величины очень близки между собой. Если же принять угол $\alpha = 51°50'$, то есть, уменьшить его всего на одну угловую минуту, то величина α станет равной 1.272, то есть, совпадет с величиной $\sqrt{\Phi}$. Следует отметить, что в 1840 г. Г. Вайз повторил свои измерения и уточнил, что значение угла $\alpha = 51°50'$.

Эти измерения привели исследователей к следующей весьма интересной гипотезе: в основу треугольника ACB пирамиды Хеопса было положено отношение $AC : CB = \sqrt{\Phi} = 1.272$! Выше мы нашли геометрические соотношения такого треугольника, названного «золотым» прямоугольным треугольником или «треугольником Кеплера» (Рис. 1.9).

Если теперь принять за основу гипотезу о том, что основной «геометрической идеей» пирамиды Хеопса является «золотой» прямоугольный треугольник (Рис.1.9), то отсюда легко можно вычислить «проектную» высоту пирамиды Хеопса. Она равна:

$$\boxed{H = (L/2)\sqrt{\Phi} = 148.28\text{м}}.$$

Выведем теперь некоторые другие отношения для пирамиды Хеопса, вытекающие из «золотой» гипотезы. В частности, найдем отношение внешней площади пирамиды к площади ее основания. Для этого примем длину катета CB за единицу, то есть: $CB = 1$. Но тогда длина стороны основания пирамиды $GF = 2$, а площадь основания $EFGH$ будет равна $S_{EFGH} = 4$.

Вычислим теперь площадь боковой грани пирамиды Хеопса S_Δ. Поскольку при $CB = 1$ высота AB треугольника AEF равна Φ, то площадь боковой грани будет равна $S_\Delta = \Phi$. Тогда суммарная площадь всех четырех боковых граней пирамиды буде равна 4Φ, а отношение суммарной внешней площади пирамиды к площади основания будет равно золотой пропорции! Это и есть – главная геометрическая тайна пирамиды Хеопса!

Анализ других египетских пирамид показывает, что египтяне всегда стремились воплотить в своих пирамидах некоторые важные математические знания. В этом отношении весьма интересной является пирамида Хефрена. Измерения пирамиды показали, что угол наклона боковых граней в ней равен $\alpha = 53°12'$, что отвечает отношению катетов прямоугольного треугольника $4:3$. Такое отношение катетов соответствует хорошо известному прямоугольному треугольнику со сторонами $3:4:5$, который называют, «священным» или «египетским» треугольником. По свидетельству историков, «египетскому» треугольнику придавали магический смысл. Плутарх писал, что египтяне сравнивали природу Вселенной со «священным» треугольником; они символически уподобляли вертикальный катет мужу, основание – жене, а гипотенузу – тому, что рождается от обоих.

Для треугольника $3:4:5$ справедливо равенство: $3^2 + 4^2 = 5^2$, которое выражает теорему Пифагора. Не эту ли теорему хотели увековечить египетские жрецы, возводя пирамиду Хефрена на основе треугольника $3:4:5$? Трудно найти более удачный пример для иллюстрации теоремы Пифагора, которая была известна египтянам задолго до ее доказательства Пифагором.

Таким образом, гениальные создатели египетских пирамид стремились поразить далеких потомков глубиной своих знаний, и они достигли этого, выбрав в качестве «главной геометрической идеи» для пирамиды Хеопса - «золотой» прямоугольный треугольник, а для пирамиды Хефрена – «священный» или «египетский» треугольник.

1.13. Золотое сечение в древнегреческой культуре

Великолепный Парфенон. Древние греки оставили нам великолепные памятники архитектуры, которые доставляют современным людям такое же эстетическое наслаждение, как и их нашим далеким предкам. И среди них первое место по праву принадлежит Парфенону.

Строительство Парфенона связано с драматическими страницами истории Древней Эллады. В 480 г. до н.э. армия персов во главе с царем Ксероксом вторглась в Грецию. Полчища варваров двигались с севера и остановились у Фермопильского ущелья. Их путь преградили 300 спартанских воинов, прикрывавших отход основных войск. В результате предательства все они пали вместе со своим предводителем – царем Леонидом. Персидская армия захватила и разгромила Афины. Но эллины с честью выдержали тяжелое испытание, разгромив персидский флот и армию. Победа греков над персами означала торжество принципов демократии и свободы; она привела к новому плодотворному импульсу в греческом искусстве, к эпохе искусства высокой классики. В произведениях этого периода преобладают чувства величия и радости. Формы художественных произведений отличаются высокой гармоничностью, пластикой, гуманизмом. Воплощением этих качеств является храм Афины Парфенон – великолепное сооружение афинского Акрополя.

На протяжении 15 лет правления Перикла в Афинах сооружали необыкновенные по красоте храмы, алтари, скульптуры. Руководителем всех работ был назначен выдающийся греческий скульптор Фидий (Phidias), в честь которого Золотое Сечение называют часто числом PHI.

Всю вторую половину 5-го века до н.э. на Акрополе шло строительство храмов, пропилей (преддверий), алтаря и статуи Афины Воительницы. В 447 г. началась работа над храмом Афины – Парфеноном и продолжались до 434 года до н.э. Для создания гармонической композиции на холме его строители увеличили холм, соорудив при этом мощную насыпь. Современные исследователи установили, что протяженность холма перед Парфеноном, длина храма Афины и участка Акрополя за Парфеноном соотносятся как отрезки золотой пропорции.

Таким образом, золотая пропорция была использована уже при создании композиции храмов на священном холме.

Рис. 1.19. Парфенон

Результатом совместных усилий архитекторов, скульпторов и всего народа Древней Греции явилось создание Парфенона (Рис.1.19), храма богини Афины Парфенос, который по праву считается величайшим памятником древнегреческой архитектуры. Описания Парфенона всегда изобиловали только превосходными степенями. Этот храм, посвященный покровительнице города - богине Афине Парфенос, по праву считается одним из величайших образцов античного зодчества, шедевром мирового искусства и пластики. Он построен в середине V века до н.э. скульпторами Иктином и Калликратом. Это был период высшего подъема античной культуры, и храм богини Афины на холме Акрополь по сей день гордо напоминает об этом всему миру.

Гармонический анализ Парфенона был осуществлен многими исследователями. И хотя эти исследования несколько отличаются своими подходами, но все исследователи сходятся в главном: Парфенон отличается удивительной величественностью и глубокой человечностью архитектурных и скульптурных образов и что главной причиной красоты Парфенона является исключительная соразмерность его частей, основанная на золотом сечении (Рис. 1.20).

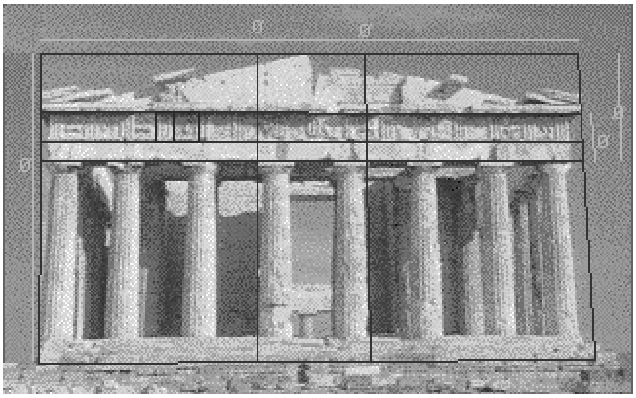
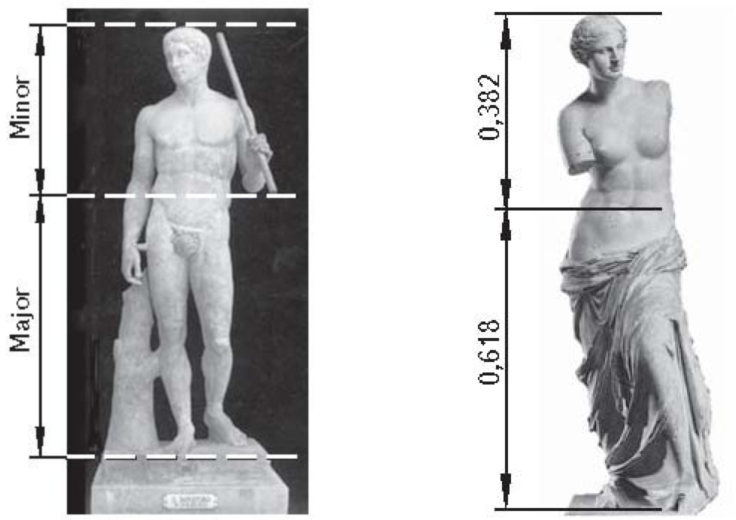


Рис. 1.20. Гармонический анализ Парфенона

Золотое Сечение в греческой скульптуре. Эталоном красоты человеческого тела, образцом гармонического телосложения издавна и по праву считаются великие творения греческих скульпторов: Фидия, Поликлета, Мирона, Праксителя. В своих творениях греческие мастера использовали принцип золотой пропорции. Одним из высших достижений классического греческого искусства может служить статуя Дорифора, изваянная Поликлетом в 5-м веке до н.э. (Рис.1.21-а). Эта статуя считается наилучшим примером для анализа пропорций идеального человеческого тела, установленных античными греческими скульпторами. Это тем более основательно, что именно этой скульптуре было присвоено наименование "Канон". Фигура юноши выражает единство прекрасного и доблестного, лежащих в основе греческих принципов искусства. Статуя полна спокойной уверенности; гармония линий, уравновешенность частей олицетворяют могущество физической силы. Широкие плечи почти равны высоте туловища, высота головы восемь раз укладывается в высоте тела, а золотой пропорции отвечает положение пупка на теле атлета. Отношение “major” к “minor” равно золотой пропорции.

Одним из лучших памятников греческого скульптурного искусства также является Венера Милосская - статуя богини Афродиты, найденная на острове Мелос (скульптор Агесандр из Антиохии на Медаре, ок.120 г. до н.э.). Богиня изображена скульптором полуобнаженной, так, что одеяние, закутывая ноги и низ торса, является постаментом для открытых рук, которые были показаны в движении (Рис.1.21-b). Возможно, в одной из них Афродита держала яблоко. В эпоху эллинизма она была одной из любимых богинь. Ее представляли то кокетливой, то задумчивой, то шаловливой. Афродита с острова Мелос строга и сдержанна. У нее простая прическа с прямым пробором, лицо и фигура представлены довольно обобщенно. Вероятно, она стояла на высоком постаменте и смотрела на зрителя сверху вниз. Венера Милосская является настоящей жемчужиной Лувра, эталоном женской красоты Древней Эллады. Гармонический анализ Венеры Милосской приводит к гармонической пропорции $(0.618:0.382)$, представляющей собой «золотое сечение».



(a) (b)

Рис. 1.21. «Дорифор» Поликлета (a) и Венера Милосская (b)

1.14. Золотое Сечение в искусстве Возрождения

Идея «божественной гармонии» в эпоху Возрождения. Идея гармонии оказалась в ряду тех концептуальных построений античной культуры, к которым церковь отнеслась с большой заинтересованностью. Согласно христианской доктрине Вселенная была творением Бога и беспрекословно подчинялась его воле. И христианский Бог при сотворении мира руководствовался математическими принципами. Эта католическая доктрина в науке и искусстве Возрождения приобрела форму поиска математического плана, по которому Бог создал Вселенную.

По мнению современного американского историка математики Мориса Клайна [51], именно тесное слияние религиозной доктрины о Боге как творце Вселенной и античной идеи о числовой гармонии Мироздания, стало одной из важнейших причин огромного всплеска культуры в эпоху Возрождения. Наиболее ярко главная цель науки эпохи Возрождения изложена в следующем высказывании знаменитого астронома этой эпохи Иоганна Кеплера:

«Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики».

Искусство эпохи Возрождения (особенно живопись) в значительной степени связано с библейскими сюжетами. Ярким примером картины, написанной по библейским сюжетам, является картина «Святое семейство» Микеланджело (Рис.1.22).

Рис. 1.22. Картина «Святое семейство» Микеланджело

Картина справедливо признана одним из шедевров западноевропейского искусства. Это единственная работа Микеланджело, выполненная на дереве, который большую часть своего творчества посвятил скульптуре. Фигура Марии, Иосифа и младенца Христа образуют винтообразную группу, внося сильный заряд пластической энергии в композиционное целое. Картину часто называют "Тондо Дони", поскольку, во-первых, она принадлежала семейству Дони во Флоренции, а во-вторых, имеет круглую форму (по-английски "tondo"). По общепринятой гипотезе, картина была исполнена к свадьбе Аньоло Дони с Магдаленой Строцци, герб которой вырезан на раме. Произведя гармонический анализ этой картины, исследователи обнаружили, что композиционное построение картины основано на пентакле (Рис.1.22).

Другим примером картины, основанной на библейском сюжете, является картина «Распятие» (“Crucifixion”) еще одного знаменитого живописца эпохи Возрождения Рафаэля Санти (1483-1520). Гармонический анализ картины (Рис.1.23) показывает, что в композиционный план этой картины основан на «золотом» равнобедренном треугольнике (Рис.1.13).

Рисунок 1.23. Картина Рафаэля Санти «Распятие» (“Crucifixion”)

«Давид» Микеланджело. Примером эталонной модели гармонически развитого человеческого тела является знаменитая статуя Давида Микеланджело (Рис.1.24).

Рис. 1.24. «Давид» Микеланджело

В 1501 г. Микеланджело получил от правительства Флоренции заказ на создание 5,5-метровой статуи Давида, над которой он работал с 1501 по 1504 гг. Установленная на главной площади Флоренции рядом с ратушей Палаццо Веккио, она должна была стать символом свободы республики. Микеланджело изобразил Давида в виде прекрасного, атлетически сложенного гиганта в момент перед сражением, полного уверенности и грозной силы (современники называли ее terribilita — устрашающая). И подобно Дорифору Поликлета, который в античную эпоху стал «Каноном» красоты мужского тела, Давид Микеланджело можно считать «Каноном» эпохи Возрождения. Сравнение статуи Давида (Рис.1.24) со статуями Дорифора и Венеры Милосской (Рис.1.21-а) не оставляет никаких сомнений в том, что все пропорции Давида основаны на золотом сечении!

«Мона Лиза» Леонардо да Винчи. В зале Лувра, в Париже, каждый посетитель пытается отыскать одну картину. Картина эта – знаменитая Мона Лиза или Джоконда, принадлежащая кисти Леонардо да Винчи. Мастер работал над своим портретом напряженно и долго. Он делал множество зарисовок, большое внимание уделял позе портретируемой, повороту ее головы, положению рук. Известный художник Джорджо Вазари рассказывает, что во время работы над портретом Моны Лизы Леонардо приглашал в мастерскую певцов, музыкантов, шутов, чтобы не только поддерживать веселое настроение молодой женщины-модели, но иметь возможность следить за переменчивым выражением ее лица. И только после четырех лет напряженного труда он, наконец, смог подарить миру свою знаменитую «Джоконду». продолжаются. Создавая свой шедевр, художник использовал секрет, известный многим портретистам: вертикальная ось полотна проходит через зрачок левого глаза, что должно вызывать у зрителя чувство возбуждения, то есть, в своей картине художник использовал «принцип симметрии». Но может быть причина в другом? Картина гениального художника привлекла внимание исследователей, которые обнаружили, что композиционное построение картины основано на двух золотых равнобедренных треугольниках, повернутых друг к другу своими основаниями (Рис.1.25). Гармонический анализ картины показывает, что зрачок левого глаза, через который проходит вертикальная ось полотна, находится на пересечении двух бисектрисс верхнего золотого треугольника, которые, с одной стороны, делят пополам углы при основании золотого треугольника, а с другой стороны, в точках пересечения с бедрами золотого треугольника делят их в пропорции «золотого сечения». Таким образом, Леонардо использовал в своей картине не только принцип симметрии, но и «золотое сечение»!

В чем же причина очарования «Джоконды»? Считается, что написание этой картины связано с некоторой тайной в жизни Леонардо. Загадка Леонардо начинается с его рождения. Как известно, Леонардо был незаконно рожденным сыном женщины, о которой почти ничего не известно. Известно только, что ее звали Катерина и то, что она была хозяйкой таверны. Об отце Леонардо известно значительно больше. Отец Леонардо, господин Пьеро, которому во время рождения сына было около двадцати пяти лет, был нотариусом и обладал впечатляющими мужскими достоинствами: он дожил до семидесяти семи лет, имел четырех жен (трех успел похоронить) и был отцом двенадцати детей, причем последний ребенок появился на свет, когда ему было семьдесят пять. В эпоху

Возрождения на незаконнорожденных детей смотрели терпимо. К таким детям часто относились так же, как к детям, рожденным в законном браке. Леонардо сразу же был признан своим в семье отца. Однако в дом отца он был взят далеко не сразу. Вскоре после рождения он был отправлен вместе с Катериной в деревню Анхиано, расположенную недалеко от города Винчи, и оставался там около четырех лет, в течении которых мессэр Пьеро успел жениться на первой из своих жен, шестнадцатилетней девушке, занимавшей на социальной лестнице более высокую ступень, чем мать Леонардо. Молодая жена оказалась бесплодной. Возможно, по этой причине Леонардо в возрасте приблизительно четырех с половиной лет был взят в городской дом, где сразу же оказался на попечении многочисленной родни: дедушки, бабушки, отца, дяди и приемной матери. В налоговом реестре, относящемся к 1457 году, он назван незаконным сыном Пьеро.

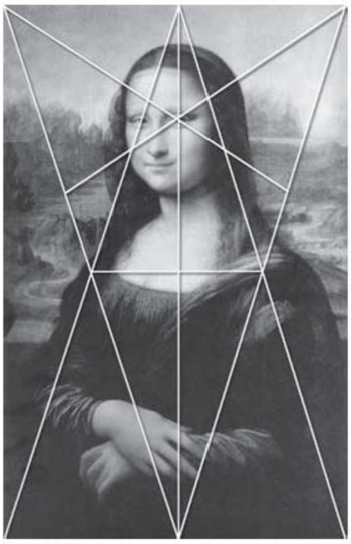


Рис. 1.25. Гармонический анализ картины «Мона Лиза (Джоконда)»

В течении всей своей жизни Леонардо хранил память о своей родной матери Катерине, которая оказалась удивительно похожей на Мону Лизу, жену флорентийского купца Джокондо. И, возможно, это стало главной причиной желания Леонардо создать живописный портрет Моны Лизы. Давно не испытывал Леонардо да Винчи такого огромного прилива творческих сил. Все, что было в нем самом жизнерадостного, светлого и ясного, он вкладывал в свою работу. И всю свою сыновью любовь к своей матери Катерине он и воплотил в своей знаменитой картине, которая определила развитие живописи на многие века вперед. И спасибо Богу за то, что он свел Мону Лизу с Леонардо да Винчи на закате жизненного пути великого художника!

Глава 2

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА

2.1. История возникновения чисел Фибоначчи

Кто такой Фибоначчи? С понятием «средневековье» в нашем сознании ассоциируется разгул инквизиции, костры, на которых сжигали ведьм и еретиков, крестовые походы за «телом господним». Наука в те времена явно не находилась «в центре внимания общества». В этих условиях появление книги по математике “Liber abaci” («Книга об абаке»), написанной в 1202 году итальянским математиком Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи), явилось важным событием в «научной жизни общества».

Кто же такой Фибоначчи? И почему его математические сочинения так важны для истории математики? Чтобы ответить на эти вопросы, нам необходимо воспроизвести историческую эпоху, в которую жил и творил Фибоначчи.

Необходимо отметить, что период с 11-го по 12-й век была эпохой блестящего расцвета арабской культуры, но вместе с тем и началом ее упадка. К концу 11-го столетия, то есть к началу Крестовых походов, арабы были, несомненно, наиболее просвещенным народом в мире, превосходя в этом отношении своих христианских врагов. Еще до Крестовых походов арабское влияние проникло на Запад. Однако наибольшее проникновение арабской культуры на Запад началось после Крестовых походов, которые ослабили арабский народ, но с другой стороны усилили арабское влияние на христианский Запад. Не только хлопок и сахар Палестины, перец и черное дерево Египта, самоцветные камни и пряности Индии ищет и ценит христианский Запад в арабском мире. Он начинает разбираться в том культурном наследии «великого античного Востока», хранителем которого стала арабская культура. Открывшийся мир не мог не ослепить своими красками и научными достижениями – и все шире становится в западном обществе спрос на арабские географические карты, учебники алгебры и астрономии, арабское зодчество.

Одной из интереснейших личностей эпохи крестовых походов, предвестницы эпохи Возрождения, был император Фридрих Гогенштауфен, ученик сицилийских арабов и поклонник арабской культуры. При его дворце в Пизе жил и работал величайший из европейских математиков средних веков Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи, что значит «сын Боначчи»).

Леонардо из Пизы (Фибоначчи)

О жизни Фибоначчи известно немного. Неизвестна даже точная дата его рождения. Предполагается, что Фибоначчи родился в восьмой декаде 12-го столетия (предположительно в 1170 г.). Его отец был купцом и государственным чиновником, представителем нового класса бизнесменов, порожденных «Коммерческой Революцией». В то время Пиза была одним из крупнейших коммерческих центров, активно сотрудничавших с исламским Востоком, и отец Фибоначчи активно торговал в одной из факторий, основанных итальянцами на северном побережье Африки. Благодаря этому обстоятельству ему удалось «пристроить» своего сына, будущего математика Фибоначчи, в одно из арабских учебных заведений, где он смог получить неплохое для того времени математическое образование.

Один из известных историков математики Морис Кантор назвал Фибоначчи «блестящим метеором, промелькнувшим на темном фоне западно-европейского средневековья». Он высказывает предположение, что, возможно, Фибоначчи погиб во время одного из Крестовых походов (предположительно в 1228 г.), сопровождая императора Фридриха Гогенштауфена.

Фибоначчи написал несколько математических сочинений: “Liber abaci”, “Liber quadratorum”, “Practica geometriae”. Наиболее известным из них является “Liber abaci”. Это сочинение вышло при жизни Фибоначчи в двух изданиях в 1202 г. и 1228 г. Книга состоит из 15 разделов, которые последовательно трактуют: о новых цифровых знаках индусов и как с их помощью изображать числа (раздел 1); об умножении, сложении, вычитании и делении чисел (разделы 2-5); об умножении, сложении, вычитании и делении чисел с дробями (разделы 6-7); о нахождении цен товаров и об их обмене, правиле товарищества и о правиле «двойного ложного положения» (разделы 8-13); о нахождении квадратных и кубических корней (раздел 14); и, наконец, о правилах, относящихся к геометрии и о задачах алгебры (раздел 15). Заметим, что Фибоначчи задумывал свое сочинение как пособие для купцов, однако по своему значению оно вышло далеко за пределы торговой практики и по существу представляло своеобразную математическую энциклопедию эпохи средневековья. С этой точки зрения особенный интерес представляет 12-й раздел, в котором Фибоначчи сформулировал и решил ряд математических задач, представляющих интерес с точки зрения общих перспектив развития математики. Этот раздел занимает почти третью часть сочинения и, по-видимому, ему Фибоначчи придавал наибольшее значение и в нем проявил наибольшую оригинальность.

Хотя Фибоначчи был одним из наиболее ярких математических умов в истории западноевропейской математики и внес огромный вклад в ее развитие, однако его вклад в математику незаслуженно принижен. Наиболее убедительно значение математического творчества Фибоначчи для математики отмечено русским математиком проф. А.В. Васильевым в его книге «Целое число» (1919 г.):

«Сочинения ученого пизанского купца были настолько выше уровня математических знаний даже ученых того времени, что их влияние на математическую литературу становится заметным только через два столетия после его смерти в конце 15-го века, когда многие из его теорем и задач вводятся другом Леонардо да Винчи, профессором многих итальянских университетов Лукою

Пачоли в его сочинениях и в начале 16-го века, когда группа талантливых итальянских математиков: Сципион дель Ферро, Иероним Кардано, Тарталия, Феррари решением кубического и биквадратного уравнения положили начало высшей алгебре».

Из этого высказывания вытекает, что Фибоначчи почти на два столетия опередил западноевропейских математиков своего времени. Подобно Пифагору, который получил свое «научное образование» у египетских и вавилонских жрецов и затем способствовал передаче полученных знаний в греческую науку, Фибоначчи получил свое математическое образование в арабских учебных заведениях и многие из полученных там знаний, в частности, арабо-индусскую десятичную систему счисления, он попытался «внедрить» в западноевропейскую науку. И подобно Пифагору, историческая роль Фибоначчи для западного мира состояла в том, что он своими математическими книгами способствовал передаче математических знаний арабов в западноевропейскую науку и тем самым заложил основы для дальнейшего развития западноевропейской математики.

В 13 в. сделано важное математическое открытие, которое сыграло большую роль в развитии математической теории гармонии. Речь идет о рекуррентной числовой последовательности, получившей название числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Каждый член этой последовательности равен сумме двух предыдущих. Позже оказалось, что эта последовательность очень часто встречается в природе, в частности, в ботанике и лежит в основе ботанического явления филлотаксиса.

Задача о размножения кроликов. По иронии судьбы, Фибоначчи, который внес выдающийся вклад в развитие математики, стал известным в современной математике только лишь как автор интересной числовой последовательности, называемой числами Фибоначчи. Эта числовая последовательность была получена Фибоначчи при решении задачи о размножении кроликов, прославившей Фибоначчи. Формулировка и решение этой задачи считается основным вкладом Фибоначчи в развитие комбинаторики. Именно с помощью этой задачи Фибоначчи предвосхитил метод рекуррентных соотношений, который считается одним из мощных методов решения комбинаторных задач. Рекуррентная формула, полученная Фибоначчи при решении этой задачи, считается первой в истории математики рекуррентной формулой

Суть «задачи о размножении кроликов» состоит в следующем:

«Пусть в огороженном месте имеется пара кроликов (самка и самец) в первый день января. Эта пара кроликов производит новую пару кроликов в первый день февраля и затем в первый день каждого следующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой уже через месяц и затем через месяц дает жизнь новой паре кроликов. Возникает вопрос: сколько пар кроликов будет в огороженном месте через год, то есть через 12 месяцев с начала размножения?»

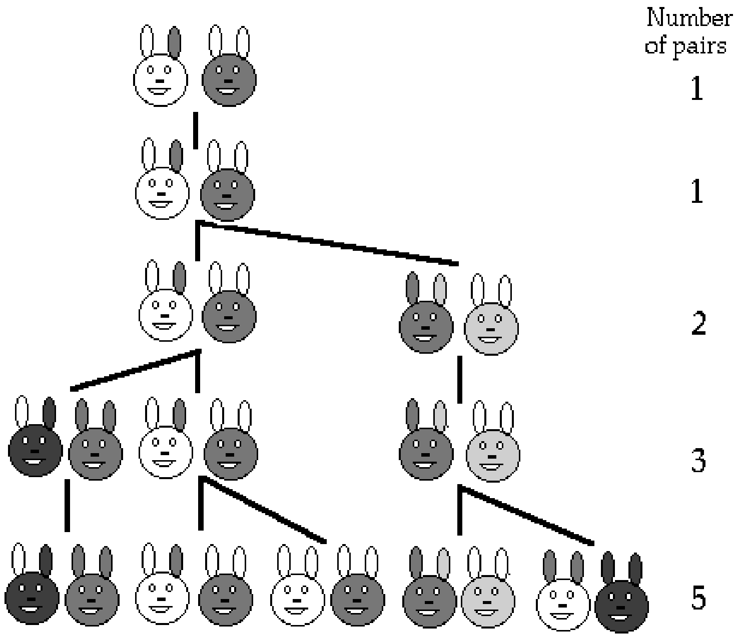


Рис. 2.1. Кролики Фибоначчи

Для решения этой задачи, которая наглядно демонстрируется с помощью Рис. 2.1, обозначим через *A* пару зрелых кроликов, а через *B* – пару новорожденных кроликов. Тогда процесс «размножения» может быть описан с помощью двух «переходов», которые описывают ежемесячные превращения кроликов в процессе размножения:

$$(a)\, A \to B; \ (b)\, B \to A. \tag{2.1}$$

Заметим, что переход (2.1-a) моделирует ежемесячное превращение каждой зрелой пары кроликов A в две пары, а именно, в ту же самую пару зрелых кроликов A и новорожденную пару кроликов B. Переход (2.1-b) моделирует процесс «созревания» кроликов, когда новорожденная пара кроликов B через месяц превращается в зрелую пару A. Тогда, если мы начнем в первом месяце со зрелой пары A, тогда процесс размножения кроликов может быть представлен с помощью Табл. 2.1.

Таблица 2.1

Дата	Пары кроликов	A	B	$A+B$
1 января	A	1	0	1
1 февраля	AB	1	1	2
1 марта	ABA	2	1	3
1 апреля	$ABAAB$	3	2	5
1 мая	$ABAABABA$	5	3	8
1 июня	$ABAABABAABAAB$	8	5	13

Заметим, что в столбцах A и B Табл. 2.1 указаны количества зрелых и новорожденных пар кроликов в каждом месяце года, а в столбце $A+B$ – суммарное количество кроликов.

Изучая последовательности A-, B- и ($A+B$)-чисел, можно установить следующую закономерность в этих числовых последовательностях: каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих. Если теперь обозначить n-й член последовательности, удовлетворяющей этому правилу, через F_n, тогда указанное выше общее правило может быть записано в виде следующей математической формулы:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{2.2}$$

Такая формула называется рекуррентной формулой (от латинского слова recurere - возвращаться).

Заметим, что конкретные значения числовой последовательности, порождаемой рекуррентной формулой (2.2), зависят от начальных значений последовательности F_1 и F_2. Например, мы имеем $F_1 = F_2 = 1$ для A-чисел и для этого случая рекуррентная формула (2.2) «генерирует» следующую числовую последовательность:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots . \qquad (2.3)$$

Для B-чисел мы имеем: $F_1 = 0$ и $F_2 = 1$; тогда соответствующая числовая последовательность для этого случая будет иметь вид:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots .$$

Наконец, для $(A+B)$-последовательности мы имеем: $F_1 = 1$ и $F_2 = 2$; тогда соответствующая числовая последовательность для этого случая будет иметь вид:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots .$$

В математике под числами Фибоначчи, как правило, понимается числовая последовательность (2.3). Числа Фибоначчи обладают удивительными математическими свойствами, но об этом ниже.

Вариации на тему Фибоначчи. Числовая последовательность Фибоначчи обладает рядом восхитительных математических свойств. Многие известные математики 20-го века увлекались числами Фибоначчи. Здесь, прежде всего, необходимо упомянуть об исследованиях российского математика Николая Воробьева (1925-1995), который в 1961 г. опубликовал замечательную брошюру «Числа Фибоначчи» [2], выдержавшую много изданий и переведенную на многие языки мира. Одним из математиков, увлекавшимся числами Фибоначчи, был известный венгерский математик Альфред Реньи (1921-1970). Он внес значительный вклад в развитие теории вероятностей, математической статистики, теории информации, комбинатрики, теории графов, теории чисел и математического анализа. Тонкий музыкант и знаток литературы А. Реньи высоко ценил в математике эстетическое начало, интресовался историей математики и размышлял над ее философскими проблемами. А.Реньи был блестящим популяризатором математики. И в этом можно убедиться, прочитав сборник его научно популярных статей «Трилогия о математике» [11]. Одна из статей «Вариации на тему Фибоначчи» посвящена числам Фибоначчи. В этой статье, исследуя свойства чисел Фибоначчи, он сравнивает свое исследование на тему чисел Фибоначчи с музыкальными вариациями на заданную тему – жанр хорошо известный в музыкальной литературе. Большим любителем этого жанра был Моцарт, Бетховен и другие композиторы. Отличительная особенность произведений вариационного жанра заключается в том, что они в большинстве случаев начинаются с одной несложной основной темы, претерпевающей в дальнейшем значительные изменения по темпу, настроению и характеру. Но сколь бы причудливыми не были вариации, у слушателей непременно должно создаваться впечатление, будто каждая из них является естественным развитием основной темы.

Взяв за основу этот музыкальный жанр, А.Реньи выбирает очень простую математическую тему («числа Фибоначчи») и далее развивает эту тему вместе с многочисленными вариациями. Эти вариации различны по свойствам, допускают различные интерпретации, находят различное применение и обладают различной степенью общности.

Мы также последуем примеру А.Реньи и рассмотрим все удивительные свойства чисел Фибоначчи (2.3), как вариации рекуррентного соотношения Фибоначчи (2.2).

2.2. Суммы последовательных чисел Фибоначчи

Сумма из *n* подряд идущих чисел Фибоначчи. Начнем с простейших сумм такого рода:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1+1=2=\mathbf{3}-1 \\ 1+1+2=4=\mathbf{5}-1 \\ 1+1+2+3=7=\mathbf{8}-1 \\ 1+1+2+3+5=12=\mathbf{13}-1 \end{array}} \tag{2.4}$$

Если обратить внимание в этих выражениях на числа, выделенные жирным шрифтом 3, 5, 8, 13, то легко установить, что они представляют собой последовательность чисел Фибоначчи! Из этого наблюдения мы можем написать общую формулу для суммы из n подряд идущих чисел Фибоначчи:

$$F_1+F_2+...+F_n=F_{n+2}-1. \tag{2.5}$$

Сумма из *n* подряд идущих чисел Фибоначчи с нечетными индексами. Для этого начнем с простейших сумм такого рода:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1+2=\mathbf{3} \\ 1+2+5=\mathbf{8} \\ 1+2+5+13=\mathbf{21} \\ 1+2+5+13+34=\mathbf{55} \end{array}} \tag{2.6}$$

Анализ (2.6) позволяет установить еще одну закономерность: сумма из *n* подряд идущих чисел Фибоначчи с нечетными индексами всегда равна некоторому числу Фибоначчи! В общем виде частные суммы (2.6) могут быть объединены следующим математическим выражением:

$$F_1+F_3+F_5+...+F_{2n-1}=F_{2n}. \tag{2.7}$$

Сумма из *n* подряд идущих чисел Фибоначчи с четными индексами. Несложно доказать подобную формулу для сумм чисел Фибоначчи с четными индексами:

$$F_2+F_4+F_6+...+F_{2n}=F_{2n+1}-1. \tag{2.8}$$

Сумма квадратов последовательных чисел Фибоначчи. Установим теперь, чему равно следующее выражение:

$$F_1^2+F_2^2+...+F_n^2. \tag{2.9}$$

Как всегда, начнем с анализа простейших сумм типа (2.9):

$$\boxed{\begin{array}{l} 1^2+1^2=2=\mathbf{1}\times\mathbf{2} \\ 1^2+1^2+2^2=6=\mathbf{2}\times\mathbf{3} \\ 1^2+1^2+2^2+3^2=15=\mathbf{3}\times\mathbf{5} \\ 1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=40=\mathbf{5}\times\mathbf{8} \end{array}} \tag{2.10}$$

Анализ (2.10) приводит нас к следующей общей математической формуле:

$$F_1^2+F_2^2+...+F_n^2=F_nF_{n+1}, \tag{2.11}$$

то есть, сумма квадратов последовательных чисел Фибоначчи равна произведению наибольшего числа Фибоначчи в этой сумме на следующее после него число Фибоначчи!

Сумма квадратов двух соседних чисел Фибоначчи. Установим, чему равна следующая сумма:

$$F_{n-1}^2 + F_n^2. \tag{2.12}$$

Начнем с вычисления простейших сумм типа (2.12):

$$\boxed{\begin{array}{l} 1^2+1^2=1+1=\mathbf{2} \\ 1^2+2^2=1+4=\mathbf{5} \\ 2^2+3^2=4+9=\mathbf{13} \\ 3^2+5^2=9+25=\mathbf{34} \end{array}} \tag{2.13}$$

Анализ (2.13) позволяет нам установить еще одну интересную закономерность: сумма квадратов двух соседних чисел Фибоначчи всегда равна числу Фибоначчи! В общем виде эта закономерность может быть выражена следующим образом:

$$F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}. \tag{2.14}$$

Примем без доказательства [4] еще ряд замечательных свойств чисел Фибоначчи:

$$F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1} \tag{2.15}$$

$$F_{n+1} F_m + F_n F_{m-1} = F_{m+n}. \tag{2.16}$$

В частности, при $m = n$ из (2.15) вытекает формула (2.14), а из (2.16) формула:

$$F_{2n} = \left(F_{n-1} + F_{n+1}\right) F_n = \left(2F_{n-1} + F_n\right) F_n. \tag{2.17}$$

Осмысливая и восхищаясь формулами (2.5), (2.7) – (2.9), (2.11) - (2.17), можно понять восторг многих выдающихся математиков 20-го столетия, в частности, российского математика Николая Воробьева, автора брошюры «Числа Фибоначчи» [2], которая по праву считается математическим бестселлером 20-го века, и американского математика Вернера Хоггатта, создателя американской Фибоначчи-Ассоциации, учредителя математического журнала “The Fibonacci Quarterly” и автора книги [3]. Именно в числах Фибоначчи, связанных с золотой пропорцией, они увидели некоторую «математическую тайну Природы» - и это вдохновило их посвятить свой математический талант исследованию этого уникального математического феномена!

2.3. Формула Кассини

Джованни Кассини. Кассини – это знаменитая династия французских астрономов. Наиболее известным из них считается основатель этой династии Джованни Доменико Кассини (1625-1712). Признанием его выдающихся заслуг в области астрономии являются следующие факты. Именем Джованни Кассини названы многие астрономические объекты: «Кратер Кассини» на Луне, «Кратер Кассини» на Марсе, «Щель Кассини» - промежуток в кольцах Сатурна, «Законы Кассини» - три открытые Кассини законы движения Луны. Именем Кассини-Гюйгенса назван космический аппарат, созданный совместно НАСА, Европейским космическим агентством и Итальянским космическим агентством, целью которого является изучение планеты Сатурн и её колец и спутников. Аппарат состоял из двух основных компонент: непосредственно самой станции Кассини Орбитер и спускаемого зонда Гюйгенс, который был отделён от станции и спустился на поверхность спутника Сатурна Титан. Кассини-Гюйгенс был запущен 15 октября 1997 и достиг системы Сатурна 1 июля 2004. Это первый искусственный спутник Сатурна.

Вклад Кассини в развитие теории чисел Фибоначчи (формула Кассини). Но оказывается имя Кассини широко известно не только в астрономии, но и в математике. История науки умалчивает, почему Кассини увлекся числами Фибоначчи. Скорее всего, это было просто «хобби» великого астронома. В то время многие серьезные ученые увлекались числами Фибоначчи и золотым сечением. Напомним, что эти математические объекты были также увлечением Иоганна Кеплера, современника Кассини.

Кассини первым обратил внимание на следующую закономерность, связывающую соседние числа Фибоначчи. Если мы возьмем произвольное число Фибоначчи, например, $F_5 = 5$ и возведем его в квадрат, то получим следующий результат: $5^2 = 25$. А теперь сравним этот результат с произведением двух соседних чисел Фибоначчи $F_4 = 3$ и $F_6 = 8$, которые окружают число $F_5 = 5$, то есть, $3\times 8=24$. Мы обнаруживаем, что сравниваемые числа отличаются на 1, то есть,

$$5^2-3\times 8=1.$$

Проделаем то же самое с «тройкой» следующих чисел Фибоначчи $5,8,13$, то есть, сначала возведем среднее число Фибоначчи $F_6=8$ в квадрат ($8^2=64$), после чего сравним этот результат с произведением двух соседних к 8 чисел Фибоначчи 5 и 13 ($5\times 13=65$), которые окружают число 8. К нашему удивлению, мы обнаруживаем, что сравниваемые числа тоже отличаются на 1, то есть,

$$8^2-5\times 13=-1.$$

При этом, однако, полученная разность также равна 1, взятой с отрицательным знаком.

Далее имеем: $13^2-8\times 21=1;\quad 21^2-13\times 34=-1$ и т.д.

В результате этих элементарных рассуждений Кассини обнаружил удивительную закономерность, которую можно сформулировать так:

"Квадрат некоторого числа Фибоначчи F_n всегда отличается от произведения двух соседних чисел Фибоначчи F_{n-1} и F_{n+1}, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от индекса n числа Фибоначчи F_n; если индекс n является четным числом, то число 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом".

Указанное свойство чисел Фибоначчи можно выразить в виде следующей общей математической формулы, называемой формулой Кассини:

$$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n+1}, \tag{2.18}$$

которая справедлива для любого целого $n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots$.

Для доказательства формулы Кассини (2.18) воспользуемся методом индукции по n. При $n=1$ числа Фибоначчи F_{n-1},F_n,F_{n+1} в формуле (2.18) принимают следующие значения $F_0=0,F_1=1,F_2=1$, откуда вытекает справедливость тождества (2.18) для случая $n=1$:

$$(1)^2-0\times 1=(1)^2. \tag{2.19}$$

Основание индукции доказано.

Сделаем индуктивное предположение. Предположим, что тождество (2.18) справедливо для любого заданного целого n и докажем, что из этого индуктивного предположения вытекает его справедливость и для целого $n+1$.

Докажем, что, если выполняется тождество (2.18), то тождество

$$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^{n+2} \tag{2.20}$$

также выполняется. Для этого представим левую часть тождества (2.20) в виде:

$$\begin{gathered} F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 - F_n\left(F_n + F_{n+1}\right) = F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_n F_{n+1} = \\ F_{n+1}\left(F_{n+1} - F_n\right) - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 \end{gathered}. \tag{2.21}$$

Из (2.21) вытекает следующее равенство:

$$F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 . \tag{2.22}$$

Но, согласно индуктивному предположению (2.18),

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} . \tag{2.23}$$

Тогда из (2.22) и (2.23) вытекает справедливость тождества (2.20), что и требовалось доказать.

В заключение отметим эстетический аспект формулы Кассини (2.18), как впрочем и других тождеств для чисел Фибоначчи. Формула (2.18) вызывает благоговейный трепет, если представить себе, что она справедлива для любого значения n (ниже мы покажем, что индекс n может принимать любое значение для целого числа в пределах от -∞ до +∞), и истинное эстетическое наслаждение, потому что чередование +1 и –1 в указанном выше математическом выражении при последовательном прохождении всех чисел Фибоначчи от -∞ до +∞ вызывает неосознанное чувство ритма и гармонии.

2.4. Числа Люка

Кто такой Люка? Фибоначчи не стал изучать математические свойства полученной им числовой последовательности – чисел Фибоначчи. Это за него сделали другие математики. Начиная с 19 в., математические работы, посвященные свойствам чисел Фибоначчи, по остроумному выражению одного математика «начали размножаться как фибоначчиевые кролики». Лидером этих исследований в 19-м веке стал французский математик Люка.

Люка Франсуа Эдуард Анатоль родился в 1842 г. и умер в 1891 г. в результате несчастного случая, возникшего на банкете, когда осколки разбитой тарелки поранили его щеку. Люка умер от заражения несколько дней спустя.

Люка Франсуа Эдуард Анатоль (1842 – 1891)

Важнейшие математические работы Люка относятся к теории чисел и неопределенному анализу. В 1878 г. Люка дал критерий для определения того, простым или составным является число Мерсенна $M_p = 2^p - 1$. Применяя свой метод, Люка установил, что число Мерсенна $M_{127} = 2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727$ является простым числом. В течение 75 лет это число оставалось наибольшим простым числом, известным науке.

Дадим некоторые пояснения к этим научным результатам Люка. Хорошо известно, что простыми называются такие числа, которые не имеют других делителей кроме самого себя и единицы: $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$. Уже пифагорейцам было известно, что простых чисел бесконечно много (доказательство этого утверждения содержится в Началах Евклида). Изучение простых чисел и выяснение их распределения в натуральном ряду чисел является весьма трудной задачей теории чисел. Поэтому научный результат, полученный Люка в области простых чисел, несомненно, принадлежал к разряду выдающихся математических достижений.

Любопытно, что Люка увлекался так называемыми совершенными числами. Доказано, что по мере продвижения от начала в натуральном ряду совершенные числа встречаются все реже. В первых 10 000 числах натурального ряда имеется всего 4 совершенных числа. Поиск совершенных чисел оказался увлекательным занятием для математиков. Пятое совершенное число $2^{12}\left(2^{13}-1\right)$ было найдено в 15-м веке немецким математиком Региомонтаном. В 16-м веке немецкий ученый Шейбель нашел еще два совершенных числа: 8 589 869 056 и 137 438 691 328. В 1644 г. французский математик М. Мерсенн нашел восьмое совершенное число $2^{30}\left(2^{31}-1\right)$. Люка в 19-м веке нашел 12-е совершенное число. Исследования в этой области продолжаются до сих пор, причем сюда подключается вся мощь современных компьютеров. Например, 18-е совершенное число $2^{3216}\left(2^{3217}-1\right)$, найденное с помощью компьютерного моделирования, имеет 2000 десятичных цифр.

К чести Люка, надо отметить еще одно его научное предсказание. Люка уже в 19-м столетии, то есть, задолго до возникновения современных компьютеров, обратил внимание на технические преимущества двоичной системы счисления при реализации вычислительных устройств и машин, то есть, он почти на столетие предвосхитил Джона фон Неймана, выдающегося американского физика и математика, который отдал решительное предпочтение двоичной системе счисления при технической реализации электронных компьютеров ("Принципы Джона фон Неймана").

С точки зрения «гармоничной» математики его наиболее важными научными достижениями являются введение самого понятия «числа Фибоначчи», а также введение понятия «обобщенные числа Фибоначчи», которые задаются тем же рекуррентным соотношением, что и классические числа Фибоначчи, но вычисляются при других начальных условиях. Он показал, что среди «обобщенных чисел Фибоначчи», кроме классических чисел Фибоначчи, особую роль играет еще одна числовая последовательность, названная числами Люка: 1,3,4,7,11,18,29,47, ...

Обобщенные числа Фибоначчи. Люка ввел в рассмотрение так называемые обобщенные числа Фибоначчи, описываемые следующей рекуррентной формулой:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} \; . \tag{2.24}$$

В зависимости от начальных членов G_1, G_2 рекуррентная формула (2.24) порождает бесконечное количество числовых последовательностей, подобных классическим числам Фибоначчи.

Из всех возможных последовательностей, порождаемых (2.24), наибольшую известность получили две числовые последовательности – числа Фибоначчи (2.3) и так называемые числа Люка L_n, которые задаются рекуррентным соотношением

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.25}$$

при следующих начальных значениях:

$$L_1 = 1 \text{ и } L_2 = 3. \tag{2.26}$$

Тогда, используя рекуррентную формулу (2.25) и начальные условия (2.26), мы можем вычислить рекуррентную числовую последовательность, называемую числами Люка:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \ldots . \tag{2.27}$$

Можно вывести много замечательных свойств чисел Люка, подобных выведенным выше свойствам чисел Фибоначчи [2-4]. Приведем только некоторые из них:

$$\begin{aligned}
&L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L_{n+2} - 3 \\
&L_1 + L_3 + L_5 + \ldots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2 \\
&L_2 + L_4 + L_6 + \ldots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1 \\
&L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2 \\
&L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5F_{2n+1} \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned} \; .$$

Расширенные числа Фибоначчи и Люка. До сих пор мы рассматривали числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n, подразумевая, что их индексы n являются натуральными числами, то есть, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Оказывается, что они могут быть расширены в сторону отрицательных значений индексов n, то есть, когда индексы n принимают значения из множества: $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$. При этом обнаруживаются новые необычные свойства этих последовательностей.

Расширенные таким путем числа Фибоначчи и Люка представлены в Табл. 2.2. Как вытекает из Табл.2.2, члены последовательностей F_n и L_n обладают рядом замечательных математических свойств. Например, для нечетных индексов $n = 2k + 1$ члены последовательностей F_n и F_{-n} совпадают, то есть $F_{2k+1} = F_{-2k-1}$, а для четных $n = 2k$ они противоположны по знаку, то есть, $F_{2k} = -F_{-2k}$ (выделены жирным шрифтом). Что касается чисел Люка L_n, то здесь все наоборот, то есть, $L_{2k} = L_{-2k}$; $L_{2k+1} = -L_{-2k-1}$ (выделены жирным шрифтом).

Таблица 2.2. Расширенные числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	**1**	2	**3**	5	**8**	13	**21**	34	**55**
F_{-n}	0	1	**–1**	2	**–3**	5	**–8**	13	**–21**	34	**–55**
L_n	2	**1**	3	**4**	7	**11**	18	**29**	47	**76**	123
L_{-n}	2	**–1**	3	**–4**	7	**–11**	18	**–29**	47	**–76**	123

А теперь сравним числовые последовательности Фибоначчи и Люка, задаваемые Табл.2.2. Рассмотрим, например, число Люка $L_4 = 7$ и сравним его с последовательностью чисел Фибоначчи F_n. Нетрудно установить, что $L_4 = 7 = 5 + 2$. Но 2 и 5 являются числами Фибоначчи $F_3 = 2$ и $F_5 = 5$.

Но может наше наблюдение является случайным совпадением? Продолжая исследование Табл.2.2, мы получим, что $1 = 0 + 1, 3 = 1 + 2, 4 = 1 + 3, 7 = 2 + 5, 11 = 3 + 8, 18 = 5 + 13$ и т.д.

Сравним теперь числовые последовательности L_{-n} и F_{-n}. Здесь мы находим то же самое, то есть: $-1 = 0 + (-1), 3 = 1 + 2, -4 = (-1) + (-3)$ и т.д. Таким образом, мы установили следующее удивительно простое математическое соотношение, связывающее числа Люка и Фибоначчи:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \tag{2.28}$$

где индекс n принимает следующие значения: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

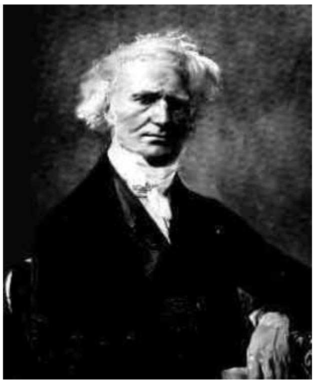
Продолжая исследования Табл.2.2, можно также установить, что числа Люка и Фибоначчи связаны также и другими весьма интересными соотношениями, например:

$$L_n = F_n + 2F_{n-1} \tag{2.29}$$

$$L_n + F_n = 2F_{n+1}\ . \tag{2.30}$$

2.5. Формулы Бине

Кто такой Бине? Другим энтузиастом чисел Фибоначчи в 19 в. стал Жак Филлип Мари Бине (1786-1856), о котором известно, что он был известным французским математиком и астрономом, членом Парижской Академии наук.



Жак Филлип Мари Бине (1786 - 1856)

Бине родился 2 февраля 1776 г. в Рене (Франция). В 1804 г. он поступил в Политехническую школу в Париже и после ее окончания в 1806 г. работал в департаменте мостов и дорог французского правительства. В 1807 г. он стал преподавателем Политехнической школы, а через год стал ассистентом-профессором прикладного анализа и начертательной геометрии.

Им опубликовано много статей по механике, математике, астрономии. В математике Бине ввел термин «бэта-функция»; рассмотрел линейные разностные уравнения с переменными коэффициентами и др. Бине исследовал основания теории матриц, и его работы в этом направлении были затем продолжены другими исследователями. В 1812 г. он открыл правило умножения матриц, и уже это открытие прославило его имя больше, чем другие работы. Среди различных почестей, которых Бине был удостоен еще при жизни, следует упомянуть, что в 1843 г. он был избран в Парижскую академию наук.

Однако в теорию чисел Фибоначчи Бине вошел как автор знаменитых математических формул, известных в математике под названием формулы Бине. Эти формулы связывают числа Фибоначчи и Люка с золотой пропорцией и, несомненно, принадлежат к разряду выдающихся математических формул.

Исследования Люка и Бине стали той стартовой площадкой, с которой во второй половине 20-го века начала свое победное шествие в математике Фибоначчи Ассоциация, организованная группой американских математиков в 1963 г.

Вывод формул Бине. Спустя два столетия после научных открытий Иоганна Кеплера, который более, чем кто-либо из его современников, понял роль золотого сечения в развитии науки и сравнил его с теоремой Пифагора, в 19-м веке вновь проявился интерес к числам Фибоначчи и золотому сечению в математике. В этой связи нельзя не упомянуть о двух энтузиастах чисел Фибоначчи, французских математиках Люка и Бине. Выше мы рассказывали о числах Люка (2.41), которые ввел в рассмотрение французский математик Франсуа Эдуарда Анатоля Люка (1842-1891). По существу Люка своими математическими исследованиями возродил интерес научной общественности 19 в. к числам Фибоначчи и золотому сечению и после него работы по числам Фибоначчи, по остроумному замечанию одного математика, «стали размножаться как фибоначчиевые кролики».

В настоящем параграфе мы расскажем о замечательных формулах Бине, введенным в рассмотрение еще одним энтузиастом чисел Фибоначчи – французским математиком Жаком Бине (1786 —1856).

Для вывода формул Бине воспользуемся корнями $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ уравнения золотого сечения $x^2 - x - 1 = 0$. С помощью этих корней можно получить аналитические выражения для расширенных чисел Фибоначчи и Люка.

Представим расширенные числа Фибоначчи $F_n\left(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\right)$ в следующем виде:

$$F_n = k_1 x_1^n - k_2 x_2^n. \tag{2.31}$$

Постоянные коэффициенты k_1, k_2 в (2.31) легко вычисляются, если воспользоваться начальными значениями для чисел Фибоначчи $F_0 = 0, F_1 = 1$ и на этой основе составить следующую систему алгебраических уравнений, воспользовавшись (2.31):

$$\begin{cases} F_0 = k_1 - k_2 = 0 \\ F_1 = k_1 x_1 - k_2 x_2 = 1 \end{cases}. \tag{2.32}$$

Решение системы уравнений (2.32) приводит к следующим результатам:

$$k_1 = k_2 \tag{2.33}$$

$$k_1 x_1 - k_2 x_2 = k_1\left(x_1 - x_2\right) = k_1\sqrt{5} = 1. \tag{2.34}$$

Из (2.33) и (2.34) вытекает:

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{2.35}$$

Подставляя (2.35) в (2.31), получаем формулу Бине для чисел Фибоначчи:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{2.36}$$

Представим теперь расширенные числа Люка $L_n\left(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\right)$ в следующем виде:

$$L_n = x_1^n + x_2^n \tag{2.37}$$

или

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{2.38}$$

При $n = 0,1$ получаем начальные значения последовательности Люка:

$$L_0 = 2; L_1 = 1. \tag{2.39}$$

Справедливости ради необходимо заметить, что формулы (2.36), (2.38) были выведены Абрахамом де Муавром (1667-1754) и Николаем Бернулли (1687-1759) на столетие раньше Жака Бине. Однако в современной математической литературе формулы (2.36), (2.38) называются формулами Бине.

Еще одно доказательство формулы Кассини. Формулы Бине широко используются для доказательства различных фибоначчиевых тождеств. В качестве примера рассмотрим еще одно доказательство формулы Кассини (2.18), основанное на формуле Бине (2.36). Для этого представим формулу (2.36) в виде:

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{2.40}$$

Подставляя (2.40) в выражение (2.18), получим:

$$\begin{gathered}F_n^{\,2} - F_{n+1}F_{n-1} = \left(\frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{\Phi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\Phi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}\right) = \\ \left(\frac{\Phi^{2n} - 2(-1)^n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{2n}}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{\Phi^{2n} - (-1)^{n-1}\Phi^2 - (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{2n}}{\sqrt{5}}\right) = \\ \frac{1}{5}\left(-2(-1)^n - (-1)^n\left(\Phi^2 + \Phi^{-2}\right)\right) = \frac{1}{5}\left(-2(-1)^n - 3(-1)^n\right) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}\end{gathered} \tag{2.41}$$

Заметим, что при упрощении (2.41) использовалось следующее элементарное тождество, основанное на формуле Бине для чисел Люка, задаваемой (2.38):

$$L_2 = \Phi^2 + \Phi^{-2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5}{2} = 3.$$

2.6. Q-матрицы Фибоначчи

Во второй половине 20-го века теория чисел Фибоначчи дополнилась важным математическим понятием – понятием Q-матрицы Фибоначчи [3]. Речь идет о квадратной матрице следующего типа:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.42)$$

Вычисление детерминанта этой матрицы приводит к следующему результату:

$$\det Q = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \qquad (2.43)$$

Q-матрица (2.42) обладает следующим важным свойством:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (2.44)$$

где F_{n-1}, F_n, F_{n+1} – числа Фибоначчи.

Это означает, что при возведении в степень Q-матрицы (2.42), согласно (2.44), она обнаруживает связь с числами Фибоначчи.

Выражение (2.44) легко доказывается методом математической индукции. Действительно, для случая $n = 1$, матрица (2.44) сводится к Q-матрице (2.42), поскольку

$$Q^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Основание индукции доказано.

Сделаем следующее индуктивное предположение: для произвольного k справедливо следующее выражение:

$$Q^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Q^{k+1} = Q^k \times Q = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}.$$

Утверждение (2.44) доказано.

Вычислим теперь детерминант матрицы (2.44). С одной стороны, используя известное свойство степеней квадратных матриц, мы можем записать:

$$\det\left(Q^n\right) = \left(\det Q\right)^n . \tag{2.45}$$

С другой стороны, используя (2.43), мы можем переписать (2.45) следующим образом:

$$\det\left(Q^n\right) = \left(-1\right)^n \tag{2.46}$$

Вычислим теперь детерминант матрицы (2.44):

$$\det\left(Q^n\right) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2. \tag{2.47}$$

Объединяя результаты (2.46) и (2.47), окончательно получим:

$$\det\left(Q^n\right) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = \left(-1\right)^n . \tag{2.48}$$

Выражение (2.48) может быть записано следующим образом:

$$\det\left(Q^n\right) = F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = \left(-1\right)^{n+1} . \tag{2.49}$$

Сравнивая выражение (2.49) с формулой Кассини (2.18), мы приходим к неожиданному заключению: детерминант Q-матрицы Фибоначчи (2.44) совпадает с формулой Кассини!

Обратные Q-матрицы Фибоначчи. Воспользовавшись рекуррентной формулой для чисел Фибоначчи (2.1), мы можем представить Q-матрицу Фибоначчи (2.44) в следующем виде:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} & F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_{n-1} + F_{n-2} & F_{n-2} + F_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} \end{pmatrix},$$

откуда вытекает представление матрицы (2.44) в рекуррентной форме:

$$Q^n = Q^{n-1} + Q^{n-2}. \tag{2.50}$$

Мы можем представить рекуррентное соотношение (2.50) в следующем виде

$$Q^{n-2} = Q^n - Q^{n-1}. \tag{2.51}$$

Используя рекуррентные соотношения (2.50) и (2.51), мы можем представить все Q-матрицы Фибоначчи типа Q^n and Q^{-n} в явном виде (Табл.2.3).

Таблица 2.3. Q-матрицы Фибоначчи

n	0	1	2	3	4	5
Q^n	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{pmatrix}$
Q^{-n}	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & 5\\5 & -8\end{pmatrix}$

Таблица 2.3 содержит прямые Q-матрицы Q^n и обратные им матрицы Q^{-n}. Из Табл.2.3 вытекает очень простые формулы получения обратной матрицы Q^{-n} из прямой матрицы Q^n. Они различны для Q-матриц Q^n с четными ($n=2k$) и нечетными ($n=2k+1$) степенями:

$$Q^{2k}=\begin{pmatrix}F_{2k+1} & F_{2k}\\ F_{2k} & F_{2k-1}\end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

$$Q^{2k+1}=\begin{pmatrix}F_{2k+2} & F_{2k+1}\\ F_{2k+1} & F_{2k}\end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Как следует из Табл.2.3, в случае Q-матрицы с четными степенями ($n=2k$), задаваемой (2.52), для получения обратной матрицы Q^{-2k} необходимо члены F_{2k} взять с обратным знаком, а члены F_{2k+1} и F_{2k-1} поменять местами, то есть,

$$Q^{-2k}=\begin{pmatrix}F_{2k-1} & -F_{2k}\\ -F_{2k} & F_{2k+1}\end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Для получения обратной матрицы Q^{-2k-1} из матрицы (2.53) необходимо члены F_{2k+2} и F_{2k} поменять местами и взять их с обратным знаком, то есть,

$$Q^{-2k-1}=\begin{pmatrix}-F_{2k} & F_{2k+1}\\ F_{2k+1} & -F_{2k+2}\end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

Формулы Бине для Q-матриц Фибоначчи. Найдем аналитические выражения для суммы и разницы прямой и обратной Q-матриц Фибоначчи:

$$Q^n+Q^{-n} \text{ и } Q^n-Q^{-n}. \tag{2.56}$$

Начнем со следующих численных примеров для Q-матриц Фибоначчи с четными ($n=2k$) и нечетными ($n=2k+1$) степенями. Для случая $n=5$, воспользовавшись выражениями (2.53) и (2.55), мы получаем следующее выражение для суммы матриц Q^5+Q^{-5}:

$$Q^5+Q^{-5}=\begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&5\\5&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\10&-5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}=F_5T, \qquad (2.57)$$

где F_5 – число Фибоначчи и

$$T=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix} \qquad (2.58)$$

некоторая квадратная матрица.

Любопытно, что детерминант матрицы (2.58) равен:

$$\det T=1\times(-1)-2\times 2=5=\left(\sqrt{5}\right)^2,$$

то есть, в матрице (2.58) присутствует «гармоничное число» $\sqrt{5}$.

Вычислим тперь выражение для разности матриц Q^5-Q^{-5}:

$$Q^5-Q^{-5}=\begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&5\\5&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&0\\0&11\end{pmatrix}=11\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=L_5I, \qquad (2.59)$$

где L_5 – число Люка и $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Воспользовавшись формулами (2.52) и (2.54) и проделав подобные вычисления для случая $n-6$, мы получим:

$$Q^6+Q^{-6}=\begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-8\\-8&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&0\\0&18\end{pmatrix}=18\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=L_6I \qquad (2.60)$$

$$Q^6-Q^{-6}=\begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&-8\\-8&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&16\\16&-8\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}=F_6T\,, \qquad (2.61)$$

где матрица T задается выражением (2.58).

Выражения (2.57), (2.59)-(2.61) являются частными случаями следующих общих формул, справедливых для любого целого $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$:

$$Q^{2k+1}-Q^{-(2k+1)}=L_{2k+1}I \qquad (2.62)$$

$$Q^{2k}-Q^{-2k}=F_{2k}T \qquad (2.63)$$

$$Q^{2k+1}+Q^{-(2k+1)}=F_{2k+1}T \qquad (2.64)$$

$$Q^{2k}+Q^{-2k}=L_{2k}I\,. \qquad (2.65)$$

Аналогия между золотой пропорцией и Q-матрицей Фибоначчи. Заметим, что формулы (2.62)-(2.65), связывающие числа Фибоначчи и Люка с Q-матрицами Фибоначчи (2.44), являются своеобразными аналогами формул Бине, связывающими числа Фибоначчи и Люка с золотой пропорцией Ф. При этом Q-матрица Фибоначчи (2.42) в формулах (2.62)-(2.65) играет роль золотой пропорции $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в формулах Бине. Заметим, что специальная квадратная матрица (2.58) играет в этих формулах роль иррационального числа $\sqrt{5}$ в формулах Бине для чисел Фибоначчи.

Эта аналогия между «золотой пропорцией» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и Q-матрицей Фибоначчи (2.42) может быть усилена и другими примерами. Например, существует следующее тривиально тождество, связывающее степени золотой пропорции:

$$\Phi^n \Phi^m = \Phi^m \Phi^n = \Phi^{n+m}. \qquad (2.66)$$

Заметим, что нет необходимости доказывать справедливость этого очевидного тождества для золотой пропорции:

$$\Phi^n \Phi^m = \Phi^m \Phi^n, \qquad (2.67)$$

однако, для матриц, произведение которых в общем случае некоммутативно ($AB \neq BA$), подобное свойство для Q-матриц Фибоначчи необходимо доказывать.

Итак, докажем следующее свойство Q-матриц Фибоначчи:

$$Q^n Q^m = Q^m Q^n = Q^{n+m}. \qquad (2.68)$$

Прежде всего, докажем справедливость следующего тождества:

$$Q^n Q^m = Q^{n+m}. \qquad (2.69)$$

Для доказательства (2.69) заметим, что рекуррентное соотношение Фибоначчи и Люка являются частным случаем более общего рекуррентного соотношения:

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, \qquad (2.70)$$

которое для начальных условий $G_1 = a$ и $G_2 = b$ задает бесконечное количество рекуррентных числовых последовательностей (обобщенных чисел Фибоначчи), частными случаями которых являются классические числа Фибоначчи ($G_1 = G_2 = 1$) и классические числа Люка ($G_1 = 1, G_2 = 3$).

В теории чисел Фибоначчи [2-4] доказана следующая формула:

$$G_{n+m} = F_{m-1}G_n + F_m G_{n+1}. \tag{2.71}$$

Теперь запишем произведение матриц $Q^n Q^m$ в виде:

$$Q^n Q^m = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1}F_{m+1} + F_n F_m & F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} \\ F_n F_{m+1} + F_{n-1}F_m & F_n F_{m-1} + F_{n-1}F_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{2.72}$$

Для доказательства (2.69) воспользуемся формулой (2.71). Если $G_i = F_i$, тогда формула (2.71) принимает следующий вид:

$$F_{n+m} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1} = F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1}. \tag{2.73}$$

Используя (2.73), мы можем представить элементы матрицы (2.72) следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{m+1} + F_n F_m &= F_{n+m+1} \\ F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} &= F_{n+m} \\ F_n F_{m+1} + F_{n-1}F_m &= F_{n+m} \\ F_n F_{m-1} + F_{n-1}F_{m-1} &= F_{n+m+1}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Принимая во внимание формулы (2.74), мы можем представить матрицу (2.72) в следующем виде:

$$Q^n Q^m = \begin{pmatrix} F_{n+m+1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m-1} \end{pmatrix} = Q^{n+m}. \tag{2.75}$$

По аналогии мы можем доказать справедливость следующего тождества:

$$Q^m Q^n = Q^{n+m}. \tag{2.76}$$

Из выражений (2.75) и (2.76) вытекает, что произведение матриц (2.68) коммутативно.

Из проведенных рассуждений, основанных на аналогии между золотой пропорцией $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и Q-матрицей Фибоначчи, вытекает следующий неожиданный вывод. В брошюре [2] обращено внимание на тот факт, что золотая пропорция $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ является уникальным иррациональным числом среди других иррациональных чисел в силу следующего математического свойства:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ldots}}}}.$$

Если теперь рассмотреть класс квадратных невырожденных матриц размерности (2×2), в общем виде задаваемых выражением

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.77}$$

то на основании приведенных выше математических свойств Q-матрицы Фибоначчи у нас есть все основания высказать предположение, что Q-матрица Фибоначчи (2.42) является уникальной квадратной матрицей, которая играет среди всех квадратных невырожденных матриц размерности (2×2) типа (2.77) такую же роль, что и золотая пропорция $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ среди всех иррациональных чисел. Таким образом, Q-матрица Фибоначчи (2.42) является своеобразной «гармоничной» матрицей среди всех квадратных невырожденных матриц размерности (2×2) типа (2.77).

2.7. «Железная Таблица» Штейнхауза

Известный польский математик Гуго Штейнхауз, который считается признанным в мире специалистом в области теории вероятностей, построил таблицу случайных чисел, используя золотую пропорцию. Для этой цели он умножил 10 000 целых чисел от 1 до 10 000 на число $\phi = \Phi - 1 = 0.61803398$, где Φ - золотая пропорция. В результате умножения он получил последовательность чисел, умноженных на ϕ, то есть:

1ϕ, 2ϕ, 3ϕ, ... , 4181ϕ, ... , 6765ϕ, ... , 10 000ϕ.

Штейнхауз назвал эту числовую последовательность «золотыми числами». Каждое «золотое число» содержит целую и дробную части. Например, число 1000ϕ = 618.03398 имеет целую часть 618 и дробную часть 0,03398; число 4181ϕ = 2584.0001. Более того, он установил, что не существует «золотых чисел» с дробной частью, равной 0, а также не существует двух «золотых чисел» с равными дробными частями. Таким образом, каждое «золотое число» имеет единственную дробную часть.

Если теперь упорядочить все «золотые числа» в соответствии с их дробными частями, то мы увидим, что наименьшую дробную часть будет иметь число 4181 и наибольшую – число 6765. Если теперь расположить 10 000 натуральных чисел в порядке возрастания их дробных частей, то мы получим следующую таблицу натуральных чисел:

4181	8362	1597	5778	9959
3194	7365	0610	4791	8972
....	....	....	....	....
8739	1974	6155	3571	7752
0987	5168	9349	2584	6765

Штейнхауз назвал полученную таблицу «Железной Таблицей», учитывая ряд ее уникальных математических свойств. «Железная Таблица» демонстрирует глубокие связи с числами Фибоначчи. Первое свойство состоит в том, что разность между соседними числами «Железной Таблицы» всегда равна одному из чисел: 4181, 6765 и 2584. Действительно, мы имеем:

8362 - 4181 = 4181, 8362 - 1597 = 6765, 5778 - 1597 = 4181, ...

9349 -5168 = 4181, 9349 - 2584 = 6765, 6765 - 2584 = 4181.

Очень просто определить числа 2584, 4181 и 6765, если рассмотреть ряд Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 897, 1597, **2584, 4181, 6765**,...

Таким образом, характерные числа «Таблицы Штейнхауза» 2584, 4181, 6765 есть ни что иное, как три соседних числа Фибоначчи, а именно:

$$F_{18} = 2584,\ F_{19} = 4181,\ F_{20} = 6765\,.$$

Мы можем видеть из «Железной Таблицы», что она начинается с числа Фибоначчи $F_{18} = 2584$ и заканчивается двумя соседними числами Фибоначчи $F_{19} = 4181, F_{20} = 6765$.

Ясно, что «Железная Таблица» может быть построена для произвольного количества N натуральных чисел. Ян Гржедзельский в своей книге [14] проанализировал «Железные Таблицы» для случаев $N = F_n$, где F_n– число Фибоначчи. При этом он открыл интересную закономерность, которая возникает при переходе от «Железной Таблицы» с $N = F_{n-1}$ к следующей «Железной Таблице» с $N = F_n$. «Железная Таблица», соответствующая $N = F_n$, как бы «раздвигается» в сравнении с предыдущей «Железной Таблицей», соответствующей $N = F_{n-1}$, создавая строго определенные позиции в новой «Железной Таблице» для чисел $F_{n-1}+1, F_{n-1}+2, ..., F_n - 1, F_n$.

По мнению Гржедзельского [14], метод конструирования «Железной Таблицы» «напоминает функционирование всех спектров излучения в Природе».

2.8. Пифагоровы треугольники и числа Фибоначчи

Теорема Пифагора. Как известно, теорема Пифагора является едва ли не самой знаменитой теоремой геометрии, которую помнит каждый человек, который когда-либо учился в средней школе и, возможно, сумел «начисто забыть» всю математику. Суть этой теоремы чрезвычайно проста. Теорема утверждает, что в прямоугольном треугольнике катеты b и c связаны с гипотенузой a следующим простым соотношением:

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.78}$$

Несмотря на ее предельную простоту, теорема Пифагора, по мнению многих математиков, относится к разряду наиболее известных математических теорем за всю историю математики.

Пифагоровы треугольники. Среди бесконечного количества прямоугольных треугольников, удовлетворяющих соотношению (2.78), особый интерес всегда вызывали так называемые пифагоровы треугольники, стороны которых являются целыми числами. Наиболее широко известным пифагоровым треугольником является прямоугольный треугольник со сторонами 4, 3 и 5. Он назывался также священным или египетским, так как он широко использовался в египетской культуре (Рис.2.2). Как упоминалось выше, именно этот треугольник представляет собой главную геометрическую идею Пирамиды Хефрена в Гизе.

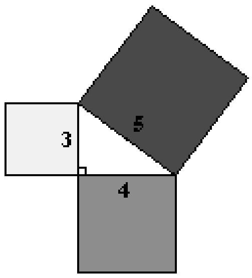


Рис. 2.2. «Священный» или «египетский» треугольник

Для египетского треугольника на Рис.2.2 теорема Пифагора (2.78) выглядит предельно просто:

$$3^2 + 4^2 = 5^2. \qquad (2.79)$$

Существует легенда, что именно соотношение (2.79) использовалось египетскими землемерами и строителями для определения прямого угла на плоскости. Для этого использовалась веревка длиной, например, 12 м, которая специальными петлями или узлами была разделена на три части в 3, 4 и 5 м. Для определения прямого угла египетский землемер натягивал одну из частей веревки, например, длиной 3 м, и фиксировал ее на земле с помощью специальных «колышек», забиваемых в две петли. Затем веревка натягивалась с помощью третьей петли и эта петля фиксировалась с помощью «колышка». Ясно, что угол, образуемый между двумя меньшими сторонами образованного таким образом треугольника, в точности равнялся $90°$. Считалось, что при закладке пирамид такую ритуальную процедуру по определению прямых углов основания пирамиды на земле выполнял сам фараон.

Фибоначчиевые «пифагоровы треугольники». Возникает вопрос: существуют ли пифагоровы треугольники другого вида, чем египетский треугольник? В работе [62] дан оригинальный ответ на этот вопрос.

Рассмотрим «четверку» соседних чисел Фибоначчи

$$F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}. \tag{2.80}$$

В качестве примера (2.80) рассмотрим следующую «четверку»:

$$1, 2, 3, 5. \tag{2.81}$$

Рассмотрим теперь следующую процедуру, которая приведет нас к бесконечному числу фибоначчиевых пифагоровых треугольников:

1. Умножить два средних или внутренних числа Фибоначчи из (2.81): $2\times3=6$. Для общего случая (2.80) мы должны вычислить произведение: $F_{n+1}\times F_{n+2}$.

2. Удвоить результат: $2\times6=12$. Для общего случая (2.80) мы должны вычислить произведение $c=2\times F_{n+1}\times F_{n+2}$. Полученное число c равно первой стороне (катету) искомого пифагорова треугольника.

3. Умножим теперь два внешних числа Фибоначчи из (2.81): $1\times5=5$. Для общего случая (2.80) мы должны вычислить произведение: $b=F_n\times F_{n+3}$. Число b представляет собой вторую сторону (катет) пифагорового треугольника.

4. Третья, самая длинная сторона (гипотенуза) находится путем суммирования квадратов внутренних чисел из (2.81): $2^2=4$ и $3^2=9$, то есть, их сумма равна: $4+9=13$. Для общего случая (2.80) мы имеем: $a=F_{n+1}^2+F_{n+2}^2$.

Нетрудно убедиться, что стороны c,b,a полученного прямоугольного треугольника действительно образуют пифагоров треугольник, поскольку: $12^2+5^2=13^2$.

Для общего случая (2.80) стороны пифагорова треугольника связаны соотношением:

$$\left(2\times F_{n+1}\times F_{n+2}\right)^2+\left(F_n\times F_{n+3}\right)^2=\left(F_{n+1}^2+F_{n+2}^2\right)^2. \tag{2.82}$$

Путем непосредственных вычислений легко проверить, что это тождество справедливо для всех возможных «четверок» чисел Фибоначчи типа (2.80). Действительно, для $n=1$ «четверка» чисел Фибоначчи принимает вид:

$$1, 1, 2, 3. \tag{2.83}$$

В соответствии с приведенным выше алгоритмом мы можем вычислить стороны пифагорова треугольника для этого случая:

$$c = 2\times1\times2; b = 1\times3 = 3; a = 1^2 + 2^2 = 1+4 = 5 .$$

Таким образом, случаю (2.83) соответствует священный или египетский треугольник, для которого теорема Пифагора имеет вид (2.79).

Рассмотрим пифагоров треугольник для случая $n = 3$. При этом «четверка» чисел Фибоначчи выглядит следующим образом:

$$2, 3, 5, 8. \tag{2.84}$$

Тогда в соответствии с приведенным выше алгоритмом стороны пифагорова треугольника могут быть найдены следующим образом:

$$c = 2\times3\times5 = 30; b = 2\times8 = 16; a = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 .$$

Теорема Пифагора для этого случая выглядит так:

$$30^2 + 16^2 = 34^2 .$$

Наконец, для случая $n = 4$ «четверка» чисел Фибоначчи имеет вид:

$$3, 5, 8, 13, \tag{2.85}$$

а стороны пифагорова треугольника соответственно равны:

$$c = 2\times5\times8 = 80; b = 13\times3 = 39; a = 5^2 + 8^2 = 89 .$$

Теорема Пифагора при этом выглядит так:

$$80^2 + 39^2 = 89^2 .$$

Для случая $n = 5$ «четверка» чисел Фибоначчи имеет вид: 5,8,13,21, а стороны пифагорова треугольника соответственно равны:

$$c = 2\times8\times13 = 208; b = 5\times21 = 105; a = 8^2 + 13^2 = 233 .$$

Теорема Пифагора при этом выглядит так:

$$208^2 + 105^2 = 233^2 .$$

Табл.2.4 дает представление о фибоначчиевых пифагоровых треугольниках для начальных значений n.

Таблица 2.4. Фибоначчиевые пифагоровы треугольники

n	F_n	F_{n+1}	F_{n+2}	F_{n+3}	c	b	a
1	1	1	2	3	4	3	5
2	1	2	3	5	12	5	13
3	2	3	5	8	30	16	34
4	3	5	8	13	80	39	89
5	5	8	13	21	205	105	233
6	8	13	21	34	546	272	610
7	13	21	34	55	1428	715	1597
8	21	34	55	89	3740	1869	4181

Существенно подчеркнуть, что сторона a пифагоровых треугольников из приведенной выше таблицы, вычисляется по формуле:

$$a = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 . \tag{2.85}$$

Используя тождество (2.14), мы можем записать: $a = F_{2n+3}$, то есть, гипотенуза a фибоначчиевого пифагорова треугольника всегда равна некоторому числу Фибоначчи, что подтверждается Табл.2.4.

Люковые пифагоровы треугольники. Оказывается, что приведенная выше процедура построения пифагоровых треугольников справедлива не только для чисел Фибоначчи, но и для чисел Люка (2.27). Например, первая «четверка» $1,3,4,7$ чисел Люка из (2.27) приводит к люковому пифагорову треугольнику со сторонами:

$$c = 2\times3\times4 = 24; b = 1\times7 = 7; a = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 .$$

Для этого пифагорова треугольника теорема Пифагора имеет вид:

$$24^2 + 7^2 = 25^2 .$$

Вторая «четверка» $3,4,7,11$ чисел Люка из (2.27) приводит еще к одному люковому пифагорову треугольнику со сторонами:

$$c = 2\times4\times7 = 56; b = 3\times11 = 33; a = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65 .$$

Для этого пифагорова треугольника теорема Пифагора имеет вид:

$$56^2 + 33^2 = 65^2 .$$

Табл.2.5 дает представление о люковых пифагоровых треугольниках для начальных значений n.

Таблица 2.5. Люковые пифагоровы треугольники

n	L_n	L_{n+1}	L_{n+2}	L_{n+3}	c	b	a
1	1	3	4	7	24	7	25
2	3	4	7	11	56	33	65
3	4	7	11	18	154	72	170
4	7	11	18	29	396	203	445
5	11	18	29	47	1044	517	1165
6	18	29	47	76	2726	1368	3050
7	29	47	76	123	7144	3567	7985
8	47	76	123	199	18696	9353	2095

Установленная выше связь чисел Фибоначчи и Люка с теоремой Пифагора позволила нам доказать существование бесконечного количества фибоначчиевых и люковых пифагоровых треугольников, что является дополнительным свидетельством фундаментального характера чисел Фибоначчи и Люка для геометрии!

2.9. Нумерологические свойства чисел Фибоначчи и Люка

Недавно на сайте «Академия Тринитаризма» опубликована статья Алексея Корнеева «Структурные тайны золотого ряда» [63], в которой описано интересное свойство чисел Фибоначчи. Корнеев решил объединить «нумерологию Пифагора» с числами Фибоначчи: $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$. Если продолжить ряд Фибоначчи до бесконечности и вычислить «по Пифагору» нумерологические значения каждого числа Фибоначчи в этой последовательности, то оказывается, что в образованном таким образом «нумерологическом ряде Фибоначчи» обнаруживается странная периодичность длиной ровно в 24 числа. При этом «период» такой нумерологической последовательности выглядит следующим образом:

$$\boxed{1,1,2,3,5,8,4,3,7,1,8,8,7,6,4.1,5,6,2,8,1,9}\,.$$

Если теперь просуммировать все числа этого «периода», то эта сумма будет равна:

1+1+2+3+5+8+4+3+7+1+8+9+8+8+7+6+4+1+5+6+2+8+1+9 = 117.

Нумерологическое значение полученной суммы снова равно числу 9. А это означает, что нумерологическое значение суммы первых 24-х чисел ряда Фибоначчи равно 9. Точно также нумерологическое значение следующих 24-х чисел ряда Фибоначчи и так далее также будет равно 9. В результате проведенных рассуждений Алексей Корнеев [64] пришел к следующему результату.

Утверждение 2.1. Нумерологический ряд Фибоначчи имеет «период», длина которого равна 24, при этом нумерологическое значение любой суммы чисел ряда Фибоначчи, состоящей точно из $(24\times k)$ членов $(k=1,2,3,...)$ всегда равно 9.

А это означает, что число 9 является некоторой «нумерологической сущностью» ряда Фибоначчи, то есть, оно выражает некоторые «сакральные» свойства ряда Фибоначчи.

«Метод Корнеева» может привести нас к новым математическим результатам. Применим этот метод к числам Люка: $1,3,4,7,11,18,29,...$. Если мы последовательно вычислим нумерологические значения чисел Люка, то мы придем к нумерологическому ряду Люка, в котором обнаруживается та же периодичность в 24 члена, при этом «период» выглядит следующим образом:

$$\boxed{1,3,4,7,2,9,2,2,4,6,1,7,8,6,5,2,7,9,7,7,5,3,8,2}.$$

Если теперь просуммировать все числа этого «периода», то эта сумма будет равна 117, а ее нумерологическое значение будет равно 9.

Используя те же рассуждения, что и для ряда Фибоначчи, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2.2. Нумерологический ряд Люка имеет «период», длина которого равна 24, при этом нумерологическое значение любой суммы чисел ряда Люка, состоящей точно из $(24\times k)$ членов $(k=1,2,3,...)$ всегда равно 9.

Таким образом, «метод Корнеева» позволяет выявить некоторые новые закономерности числовых рядов Фибоначчи, Люка и подобных им числовых последовательностей.

Несомненно, что рассмотренное выше нумерологическое свойство чисел Фибоначчи и Люка является еще одним подтверждением уникальности и эстетической красоты рассмотренных выше числовых последовательностей.

2.10. Числа Фибоначчи в природе

Прямоугольники Фибоначчи. Используем числа Фибоначчи: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ Для построения прямоугольников определенного вида. Начнем с квадрата со стороной 1. Возьмем два таких квадрата со стороной 1 (площадь каждого из них равна 1) и сложим их вместе. В результате образуется прямоугольник размером 2×1, называемый «двойным квадратом». Затем на большей стороне «двойного квадрата» построим новый квадрат размером 2×2. В результате получим прямоугольник размером 3×2. На большей стороне этого прямоугольника построим новый квадрат размером 3×3; в результате получим новый прямоугольник размером 5×3. Продолжая этот процесс, мы будем последовательно получать прямоугольники (Рис.2.3), в которых стороны являются соседними числами Фибоначчи, то есть, имеют размеры: $8\times5, 13\times8, 21\times13$ и т.д.

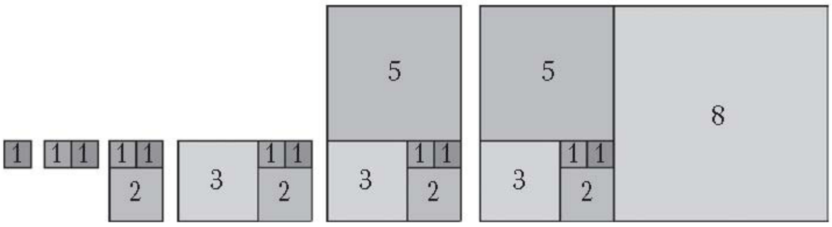


Рис. 2.3. Прямоугольники Фибоначчи

Такие прямоугольники мы будем называть прямоугольниками Фибоначчи.

Спираль Фибоначчи. А теперь в каждом из квадратов, образующих прямоугольник Фибоначчи, проведем дугу, представляющую собой четверть окружности. Соединяя эти дуги, мы получим некоторую кривую, которая напоминает по форме спираль (Рис.2.4). Строго говоря, эта кривая не является спиралью с математической точки зрения, но она является очень хорошей аппроксимацией спиралей, которые широко встречаются в природе. В дальнейшем кривую на Рис.2.4 мы будем называть спиралью Фибоначчи.

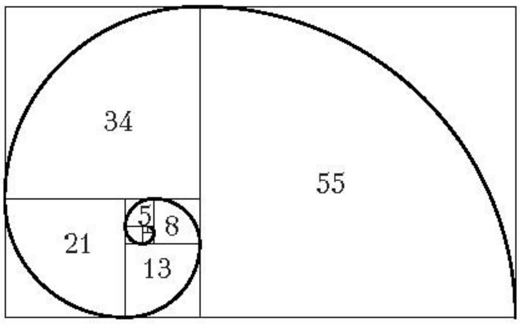


Рис. 2.4. Спираль Фибоначчи

Великий поэт и естествоиспытатель Гете считал спиральность одним из характерных признаков всех живых организмов, проявлением самой сокровенной сущности жизни. Спирально закручиваются усики растений и рога барана, по спирали происходит рост тканей в стволах деревьев, по спирали расположены семечки в подсолнечнике. Каждый из нас много раз восхищался формой морских раковин, которые также построены по спиралевидному закону. Но ведь и наша Галактика также имеет спиралевидную форму! Примером использования спирали Фибоначчи является, например, формы раковины наутилуса (Рис.2.5).

Рис. 2.5. Спираль наутилуса

Филлотаксис и числа Фибоначчи. Как известно, числа Фибоначчи и Люка лежат в основе ботанического «закона филлотаксиса» [24]. Согласно этому закону число левых и правых спиралей на поверхности так называемых филлотаксисных объектов (сосновой шишки, ананаса, кактуса, головки подсолнечника и т.д.) описывается отношениями соседних чисел Фибоначчи, то есть:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}: \quad \frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},.... \tag{2.86}$$

Эти отношения характеризуют «симметрию» филлотаксисного объекта. При этом для каждого филлотаксисного объекта характерно свое отношение соседних чисел Фибоначчи, которое называется порядком симметрии [24].

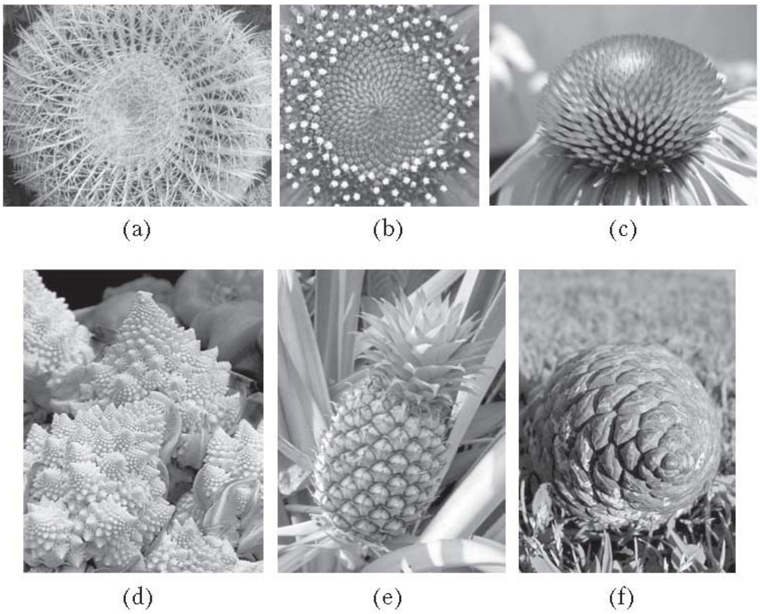


Рис. 2.6. Филлотаксисные структуры: (a) кактус; (b) головка подсолнечника; (c) эхинецея; (d) цветная капуста; (e) ананас; (f) сосновая шишка

На Рис.2.6 изображены примеры таких объектов (кактус, головка подсолнечника, эхинецея, головка цветной капусты, ананас, сосновая шишка), в которых закон филлотаксиса выражается своим порядком симметрии, образуемым отношениями соседних чисел Фибоначчи. То есть, в каждом из таких ботанических объектов семена или мелкие части объектов на их поверхности располагаются на пересечении левых и правых спиралей; при этом отношение числа левых и правых спиралей всегда равно одному из отношений (2.86) соседних чисел Фибоначчи.

На Рис.2.7 изображены геометрические модели филлотаксисных структур, которые дают образное представление об этом уникальном ботаническом явлении.

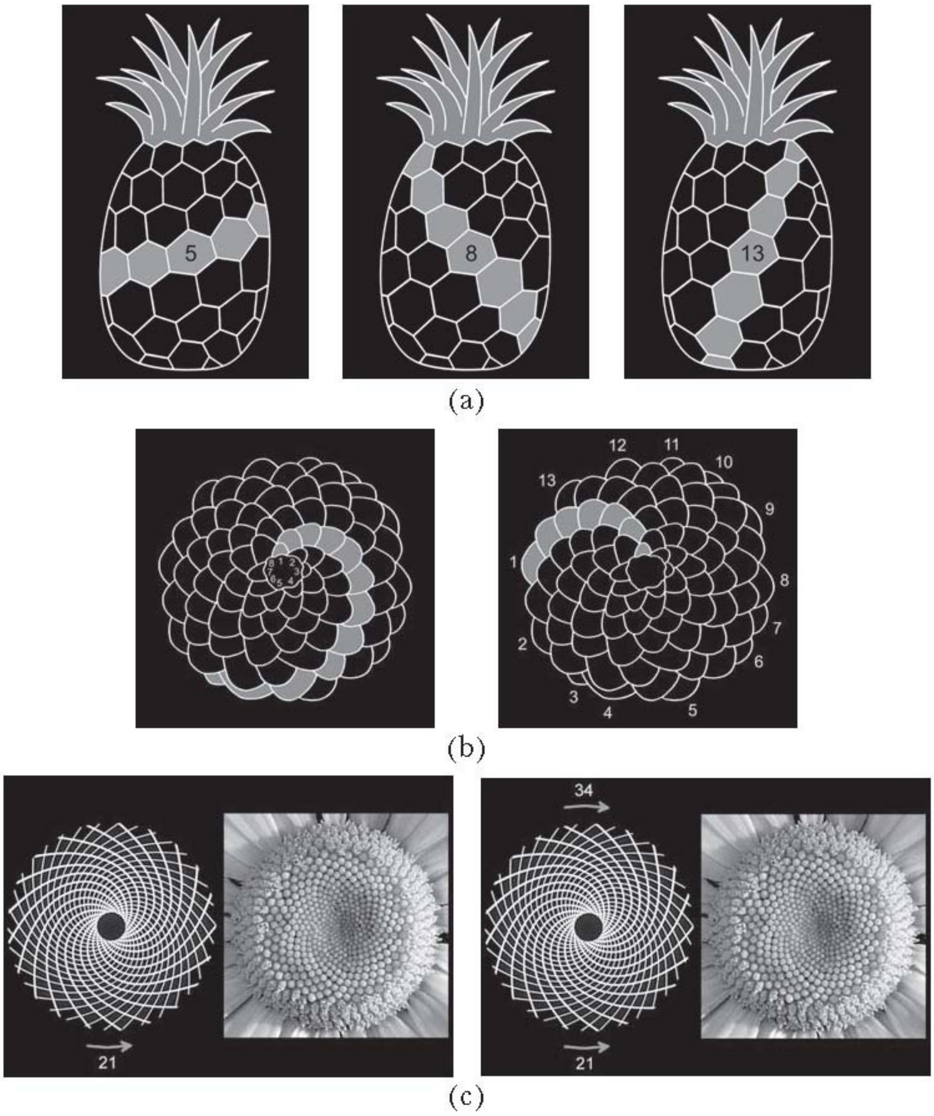


Рис. 2.7. Геометрические модели филлотаксисных структур: (а) ананас; (b) сосновая шишка; (с) ромашка

Таким образом, строгую математику мы находим и в расположении листьев на стеблях растений, лепестков на цветке розы, в спиралевидном расположении семян в сосновой шишке, головке подсолнечника, ананасе и кактусе. И эта закономерность математически выражается числами Фибоначчи и золотой пропорцией! И мы снова и снова убеждаемся в том, что все в природе подчинено единому плану, единому закону - «закону золотого сечения» – и раскрыть и объяснить этот фундаментальный закон природы во всех его проявлениях и есть главная задача науки.

2.11. Числа Фибоначчи и решение 10-й проблемы Гильберта

Летом 1900 г. математики собрались на свой второй Международный конгресс в Париже. Знаменитый немецкий математик, профессор Геттингенского университета Давид Гильберт (1862-1943) был приглашен сделать один из основных докладов. Крупнейший математик мира, он прославился своими работами по алгебре и теории чисел, а незадолго перед конгрессом решительно перестроил аксиоматику евклидовой геометрии в своем фундаментальном сочинении "Основания геометрии" (1899 г.). После долгих колебаний Гильберт выбрал необычную форму доклада. В своем докладе "Математические проблемы" он решил сформулировать те проблемы, которые, по его мнению, должны определять развитие математики в наступающем веке.

Обращение Гильберта к Международному Математическому Конгрессу, состоявшемуся в 1900 г. в Париже, является, возможно, наиболее значительной лекцией, прочитанной математиком для математиков и посвященной проблемам математики. В своей лекции Гильберт изложил 23 главные математические проблемы, которые должны быть решены в новом столетии. Лекция Гильберта была больше, чем простое собрание математических проблем. Она отражала его философию математики и предлагала проблемы, важные с точки зрения его философии. И хотя прошло более столетия, лекция Гильберта является такой же важной и может быть прочитана с большим интересом каждым, кто интересуется математическими исследованиями.

Как известно, 10-я проблема Гильберта называется "Задачей о разрешении диофантовых уравнений" и для того, чтобы объяснить суть этой проблемы, мы должны возвратиться на 17 веков назад к античному математику Диофанту. Мы очень мало знаем о Диофанте, который считается последним великим математиком античности. Его творчество сыграло столь значительную роль в истории алгебры, что многие историки математики приложили немало усилий, чтобы определить срок его жизни. Предполагается, что он жил в середине 3-го столетия н.э. и прожил 84 года. Основным произведением Диофанта была "Арифметика". Именно это фундаментальное математическое сочинение, состоящее из 13 книг, явилось поворотным пунктом в развитии алгебры и теории чисел. Диофант поставил задачу нахождения целочисленных значений алгебраических уравнений. Такие уравнения получили название диофантовых.

В своей знаменитой лекции 1900 г. Давид Гильберт изложил 10-ю проблему следующим образом:

«Задано Диофантово уравнение с некоторым числом неизвестных и рациональными целыми коэффициентами. Необходимо придумать процедуру, которая могла определить за конечное число операций - является ли уравнение разрешимым в рациональных целых числах».

Десятая проблема Гильберта была решена молодым русским математиком Юрием Матиясевичем. Его имя стало широко известным в 1970 г., когда он завершил последний недостающий шаг в "негативном решении" десятой проблемы Гильберта.

Юрий Матиясевич (родился 2 марта 1947 года, г. Ленинград) — советский и российский математик, исследователь Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, доктор физико-математических наук, академик РАН,. Внёс существенный вклад в теорию вычислимости, завершив решение десятой проблемы Гильберта.

Юрий Матиясевич

И сейчас мы приблизились к главному – использованию Матиясевичем чисел Фибоначчи при решении 10-й проблемы Гильберта. В одной из своих работ Матиясевич написал:

«Мой следующий шаг состоял в том, чтобы рассмотреть широкий класс уравнений для двоичных слов с дополнительными условиями. Так как конечной целью всегда была 10-я проблема Гильберта, я мог бы рассматривать только такие условия, которые (при подходящем кодировании) были бы представлены Диофантовыми уравнениями. Таким путем я пришел к таким уравнениями, которые я назвал «equations in words and length» (уравнениями с ограниченными длинами серий). Приведение к таким уравнениям было основано на знаменитых числах Фибоначчи. Хорошо известно, что каждое натуральное число может быть представлено единственным образом как сумма различных чисел Фибоначчи, в которой нет двух соседних чисел Фибоначчи (так называемое представление Цекендорфа). Таким образом, мы можем рассматривать натуральные числа как двоичные слова с дополнительным условием, что в таких двоичных словах две 1 рядом не встречаются. Я изловчился показать, что при таком представлении чисел двоичными словами, как последовательности слов, так и уравнения, равные длине двух слов, могут быть выражены Диофантовыми уравнениями».

И далее:

«Благодаря моей предыдущей работе, я понимал важность чисел Фибоначчи для решения 10-й проблемы Гильберта. Вот почему в течение лета 1969 года я читал с огромным интересом третье расширенное издание популярной книги по числам Фибоначчи, написанной Н.Н. Воробьевым из Ленинграда. Кажется невероятным, что в 20-м столетии можно было найти что-то новое о числах, введенных Фибоначчи еще в 13-м столетии в связи с размножением кроликов. Однако, новое издание книги содержало, кроме традиционного материала, некоторые оригинальные результаты автора. На самом деле Воробьев получил их на четверть столетия раньше, но он никогда их не публиковал. Его результаты привлекли мое внимание сразу же, но я был еще не способен использовать их непосредственно для построения Диофантовых представлений экспоненциального типа».

Оценивая влияние научных результатов Воробьева и американского математика Джулии Робинзон, на решение 10-й проблемы Гильберта, Матиясевич написал:

«Мое оригинальное доказательство ... основывалось на теореме, доказанной в 1942 г. советским математиком Николаем Воробьевым, но опубликованной только в третьем расширенном издании его популярной книги.... После того, как я прочитал статью Джулии Робинзон, я сразу же увидел, что теорема Воробьева может быть очень полезной. Джулия Робинзон не видела 3-го издания книги Воробьева до тех пор, пока она не получила копию от меня в 1970 г. Кто мог сказать, что бы случилось, если бы Воробьев включил свою теорему в первое издание своей книги? Возможно, что 10-я проблема Гильберта была решена на десять лет раньше!»

В развитие вопроса Юрия Матиясевича, мы вправе поставить следующий вопрос: а что бы случилось, если бы итальянский математик Фибоначчи не открыл числа Фибоначчи в 13 в.? Возможно, 10-я проблема Гильберта не была бы решена до сих пор. Конечно, теорема Воробьева, использованная Юрием Матиясевичем, является важным математическим результатом, но все же главным «виновником» решения 10-й проблемы Гильберта следует признать итальянского математика Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи). Еще в 1202 г. он опубликовал книгу “Liber abaci”, в которой ввел новую числовую последовательность - числа Фибоначчи.

Главный вывод из этих рассуждений состоит в том, что решение одной из наиболее сложных математических проблем – 10-й проблемы Гильберта – получено с использованием теории чисел Фибоначчи [2-4]. И этот факт сам по себе поднимает на высокий уровень как теорию чисел Фибоначчи [2-4], так и «математику гармонии» [47].

И хотя Юрий Матиясевич не внес такого вклада в развитие теории чисел Фибоначчи, как Николай Воробьев или Вернер Хоггатт, но он первым из современных математиков привел блестящий пример использования чисел Фибоначчи для решения одной из сложнейших математических проблем – 10-й проблемы Гильберта.

Глава 3

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ, *P*-ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ЗОЛОТЫЕ *P*-ПРОПОРЦИИ

3.1. Бином Ньютона

В комбинаторике [65] широко известна следующая формула, называемая биномом Ньютона:

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \tag{3.1}$$

где коэффициенты C_n^k принято называть биномиальными коэффициентами.

Коэффициенты C_n^k могут быть вычислены с использованием следующей формулы, в которой используются так называемые факториалы:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}. \tag{3.2}$$

Из школьной алгебры нам известны следующие формулы для «биномов» второй и третьей степени:

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{3.3}$$

$$\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^2. \tag{3.4}$$

Заметим, что в названии «бином Ньютона» заключена историческая несправедливость, так как эта формула была известна задолго до Ньютона многим ученым разных стран, в том числе Ал-Каши, Тарталье, Ферма, Паскалю. Заслуга Ньютона состояла в том, что он распространил ее на любое действительное число n, то есть, показал, что формула (3.1) верна и тогда, когда n является рациональным или иррациональным, положительным или отрицательным.

Формула (3.1) позволяет установить следующие свойства биномиальных коэффициентов. Примем в биноме Ньютона (3.1) $a=1$ и $b=x$. В результате получим следующую функцию от x:

$$\left(1+x\right)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n . \tag{3.5}$$

С помощью функции (3.5) можно доказать многие свойства биномиальных коэффициентов C_n^k.

Докажем, например, что

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} . \tag{3.6}$$

Для этого достаточно умножить обе части равенства (3.5) на $\left(1+x\right)$. Мы получим:

$$\left(1+x\right)^{n+1} = \left(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n\right)\left(1+x\right). \tag{3.7}$$

Выражение в левой части равенства (3.7) может быть разложено согласно (3.5). Только придется заменить в формуле бинома n на $n+1$. Поэтому коэффициентом при x^k будет C_{n+1}^k. В правой части выражения (3.7), при раскрытии скобок, член, содержащий x^k, появится дважды: при умножении $C_n^k x^k$ на 1 и при умножении $C_n^{k-1} x^{k-1}$ на x. Поэтому коэффициент при x^k в правой части равенства (3.6) имеет вид: $C_n^k + C_n^{k-1}$; отсюда вытекает справедливость тождества (3.6).

Если теперь в формуле (3.5) принять $x=1$, то получим следующее тождество:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n . \tag{3.8}$$

Если положить в формуле (3.5) $x=-1$, то получим:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + \left(-1\right)^k C_n^k + \ldots + \left(-1\right)^n C_n^n . \tag{3.9}$$

Из формулы (3.9) вытекает, что в биноме Ньютона (3.1) сумма биномиальных коэффициентов C_n^k с четными k равна сумме значений C_n^k с нечетными k.

3.2. Треугольник Паскаля

Чтобы облегчить вычисление биномиальных коэффициентов C_n^k, $k = 0,1,\ldots,n$ в биноме Ньютона (3.1), великий французский математик и физик Блез Паскаль (1623-1662) триста пятьдесят лет назад придумал специальный инструмент для определения этих самых коэффициентов — треугольник Паскаля.

Блез Паскаль (1623-1662)

Для построения «треугольника Паскаля» он использовал следующие свойства биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{3.10}$$

а также

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k. \tag{3.11}$$

Свойство (3.11) иногда называют правилом Паскаля. Используя это правило, Блез Паскаль предложил оригинальный способ вычисления биномиальных коэффициентов, расположив их в виде треугольной таблицы на Рис.3.1. Если очертить числовую таблицу на Рис.3.1, то получится равнобедренный треугольник, называемый треугольником Паскаля. В этом треугольнике на вершине и по бокам расположены единицы. Каждое «внутреннее» число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

Рис. 3.1. Треугольник Паскаля

На вершине треугольника Паскаля (Рис.3.1) находится единственный биномиальный коэффициент $C_0^0 = 1$. Это – нулевая строка треугольника Паскаля. Следующая строка, называемая первой, состоит из двух единиц, симметрично расположенных относительно единицы нулевой строки. Это - биномиальные коэффициенты $C_1^0 = 1$ и $C_1^1 = 1$. Каждая последующая строка состоит из двух единиц, расположенных по ее краям (это биномиальные коэффициенты типа $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$); каждое «внутреннее» число этой строки формируется из двух чисел предыдущей строки, стоящих над этим числом слева и справа относительно этого числа, по правилу Паскаля (3.11).

Анализируя Рис.3.1, легко обнаружить следующие свойства треугольника Паскаля:

- Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n, что соответствует формуле (3.8).
- Все строки треугольника Паскаля симметричны, что вытекает из свойства $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Заметим, что указанный выше треугольник Паскаля впервые появился в сочинении Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике» (1665 г.).

Биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля широко используются в различных разделах математики, информатики и других науках. По существу, это – один из фундаментальных и наиболее эстетичных математических объектов, лежащих в основе точных наук. Американский математик, писатель и популяризатор науки Мартин Гарднер (1914- 2010) высоко оценил треугольник Паскаля [5]:

«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике».

3.3. Диагональные суммы треугольника Паскаля и *p*-числа Фибоначчи

Диагональные суммы треугольника Паскаля. И теперь настало время рассказать еще об одной «тайне» треугольника Паскаля – его связи с числами Фибоначчи. Эта тайна была раскрыта во второй половине 20 в. несколькими математиками независимо друг от друга. Считается, что первым это сделал известный венгерский, швейцарский и американский математик и популяризатор науки Джордж Пойа (1887-1985). В 1940 г. он переехал в США. Живя в США, Пойа много работал со школьными учителями математики и внёс большой вклад в популяризацию науки. Он написал несколько книг о том, как люди решают задачи и как надо учить решать задачи.

В книге «Математическое открытие» [66] в одном из упражнений Пойа описал способ получения так называемых «диагональных сумм» треугольника Паскаля, которые приводят к числам Фибоначчи (Рис.3.2).

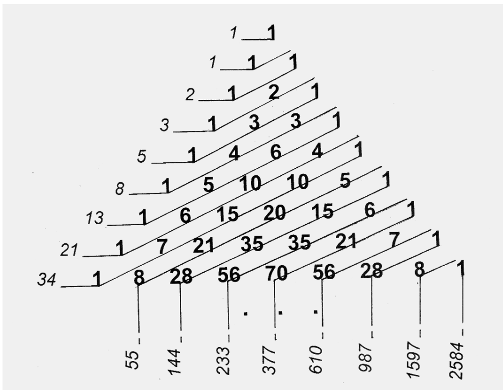


Рис. 3.2. Диагональные суммы треугольника Паскаля

Таким образом, изучая треугольник Паскаля, Джордж Пойа сделал неожиданное математическое открытие: он установил связь треугольника Паскаля с числами Фибоначчи! Следует отметить, что этот предельно простой математический результат, который, как говорится, «лежал на поверхности», в течение нескольких столетий оставался «тайной» как для Блеза Паскаля, так и для других математиков, которые соприкасались с треугольником Паскаля и числами Фибоначчи.

В своей книге [66] Пойа в виде упражнения также предложил несколько задач, связанных с треугольником Паскаля. Первая из них состоит в том, чтобы выразить числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты, то есть, найти общую формулу для «диагональных сумм» треугольника Паскаля, задаваемых Рис.3.2.

Вторая задача оказалась более интересной и более сложной. Пойа увеличил наклон диагонали на Рис.3.2 и установил, что при этом «диагональные суммы» порождают новую числовую последовательность: 1,1,1,2,3,4,9,13,... . Он предложил доказать, что эта числовая последовательность задается рекуррентной формулой: $G_n = G_{n-1} + G_{n-3}$, а также выразить G_n через биномиальные коэффициенты. А затем Пойа предложил еще больше увеличить наклон диагонали и обобщить полученный результат.

Прямоугольный треугольник Паскаля. Как известно, существует много различных форм представления треугольника Паскаля. Для наших исследований будет удобно использовать еще один способ представления биномиальных коэффициентов в виде таблицы, напоминающей прямоугольный треугольник (см. Табл.3.1). Такую таблицу биномиальных коэффициентов мы будем называть прямоугольным треугольником Паскаля.

Таблица 3.1. Прямоугольный треугольник Паскаля (в числовой форме)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2			1	3	6	10	15	21	28	36
3				1	4	10	20	35	56	84
4					1	5	15	35	70	126
5						1	6	21	56	126
6							1	7	28	84
7								1	8	36
8									1	9
9										1
	1	2	4	8	16	32	64	128	512	1024

В дальнейшем нам понадобится также изображение прямоугольного треугольника Паскаля с биномиальными коэффициентами, представленными в символической форме, то есть в виде C_n^k (Табл.3.2).

Таблица 3.2. Прямоугольный треугольник Паскаля (в символической форме)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	C_0^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	C_4^0	C_5^0	C_6^0	C_7^0	C_8^0	C_9^0
1		C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1	C_5^1	C_6^1	C_7^1	C_8^1	C_9^1
2			C_2^2	C_3^2	C_4^2	C_5^2	C_6^2	C_7^2	C_8^2	C_9^2
3				C_3^3	C_4^3	C_5^3	C_6^3	C_7^3	C_8^3	C_9^3
4					C_4^4	C_5^4	C_6^4	C_7^4	C_8^4	C_9^4
5						C_5^5	C_6^5	C_7^5	C_8^5	C_9^5
6							C_6^6	C_7^6	C_8^6	C_9^6
7								C_7^7	C_8^7	C_9^7
8									C_8^8	C_9^8
9										C_9^9
	1	2	4	8	16	32	64	128	512	1024

Как следует из Табл.3.1, в «прямоугольном треугольнике Паскаля» имеется 10 столбцов, пронумерованных числами n от 0 до 9 (верхняя строка), и 10 строк, пронумерованных числами m от 0 до 9 (крайний левый столбец). Биномиальные коэффициенты расположены в виде прямоугольного треугольника, имеющего «горизонтальный катет», «вертикальный катет» и «гипотенузу». На пересечении n-го столбца ($n = 0,1,2,3,...,9$) и m-й строки ($m = 0,1,2,3,...,9$) находится биномиальный коэффициент C_n^m. «Горизонтальный катет» в Табл.3.1 - это «нулевая» строка, которая содержит биномиальные коэффициенты: $C_0^0 = C_1^0 = C_2^0 = ... = C_9^0 = 1$ (в общем случае $C_0^0 = C_1^0 = C_2^0 = ... = C_n^0 = 1$). «Вертикальный катет» в Табл.3.1 это 9-й, то есть, правый крайний столбец, который содержит следующие биномиальные коэффициенты (сверху вниз): $C_9^0 = 1, C_9^1 = 9, C_9^2 = 36, C_9^3 = 84, C_9^4 = 126, ..., C_9^8 = 9, C_9^9 = 1$ (в общем случае $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$). Заметим, что «гипотенуза» прямоугольного треугольника Паскаля (Табл.3.1) состоит из следующих биномиальных коэффициентов: $C_0^0 = C_1^1 = C_2^2 = ... = C_n^n = 1$.

Ясно, что все «внутренние» биномиальные коэффициенты в Табл.3.1 вычисляются согласно правилу Паскаля (3.11), которое для «прямоугольного треугольника Паскаля» звучит следующим образом: любой «внутренний» биномиальный коэффициент C_n^m равен сумме двух биномиальных коэффициентов – биномиального коэффициента C_{n-1}^m, расположенного от него слева, и биномиального коэффициента C_{n-1}^{m-1}, стоящего над биномиальным коэффициентом C_{n-1}^m, то есть, $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$.

Заметим также, что в k-м столбце сверху вниз расположены следующие биномиальные коэффициенты: $C_k^0, C_k^1, C_k^2, ..., C_k^n$; при этом все клетки под «гипотенузой» являются «пустыми». Это означает, что все биномиальные коэффициенты типа $C_n^m \left(m > n\right)$ тождественно равны нулю, то есть,

$$C_n^m = 0 \text{ при } m > n. \tag{3.12}$$

Тогда, если просуммировать биномиальные коэффициенты n-го столбца рассматриваемого треугольника Паскаля, то согласно (3.8) мы получим двоичное число 2^n. Если это сделать для всех столбцов, начиная с нулевого, то мы получим широко известную «двоичную последовательность»:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., 2^n, ... \tag{3.13}$$

Эти числа расположены в нижней строке Табл.3.1.

Таким образом, мы можем сказать, что треугольник Паскаля «генерирует» двоичный ряд чисел!

1-треугольник Паскаля. А теперь сдвинем каждую строку исходного треугольника Паскаля (Табл.3.1, 3.2) на один столбец вправо относительно предыдущей строки. В результате такого преобразования мы получим некоторый «деформированный» треугольник Паскаля (Табл.3.3), который мы будем называть 1-треугольником Паскаля.

Таблица 3.3. 1-треугольник Паскаля (в числовой форме)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1			1	2	3	4	5	6	7	8
2					1	3	6	10	15	21
3							1	4	10	20
4									1	5
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты 1-треугольника Паскаля по столбцам, то, к нашему изумлению, мы обнаружим, что такое суммирование приведет нас к числам Фибоначчи (см. нижнюю строку Табл.3.3):

$$1,1,2,3,5,8,13,...,F_1(n+1)=F_{n+1},...,\tag{3.14}$$

где через $F_1(n+1)=F_{n+1}$ обозначено $(n+1)$-е число Фибоначчи, которое расположено в нижней строке n-го столбца 1-треугольника Паскаля (Табл.3.3) и задается с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$F_1(n+1)=F_1(n)+F_1(n-1) \text{ при } n>2\tag{3.15}$$

при следующих начальных условиях:

$$F_1(1)=F_2(1)=1.\tag{3.16}$$

Представим теперь Табл.3.3 в символической форме (Табл.3.4).

Таблица 3.4. 1-треугольник Паскаля (в символической форме)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	C_0^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	C_4^0	C_5^0	C_6^0	C_7^0	C_8^0	C_9^0
1			C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1	C_5^1	C_6^1	C_7^1	C_8^1
2					C_2^2	C_3^2	C_4^2	C_5^2	C_6^2	C_7^2
3							C_3^3	C_4^3	C_5^3	C_6^3
4									C_4^4	C_5^4
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

А теперь вновь обратимся к книге Джорджа Пойа [66]. Как упоминалось, в этой книге он впервые истолковал числа Фибоначчи как «диагональные суммы» треугольника Паскаля (с.113) и при этом сформулировал следующую задачу: «выразите F_n через биномиальные коэффициенты».

Впервые, насколько известно автору, «прямоугольный треугольник Паскаля» (Табл. 3.1, 3.2) для исследования «диагональных сумм» был использован в книге [9]. Такой подход оказался весьма плодотворным и привел к решению задач, поставленных Пойа в книге [66].

В частности, представление 1-треугольника Паскаля в символической форме (Табл.3.2) позволило очень просто решить все «задачи Пойа». Начнем с примеров представления чисел Фибоначчи в виде суммы биномиальных коэффициентов, которые непосредственно вытекают из Табл.3.2:

$F_1 = F_1(1) = C_0^0$
$F_2 = F_1(2) = C_1^0$
$F_3 = F_1(3) = C_2^0 + C_1^1$
$F_4 = F_1(4) = C_3^0 + C_2^1$
$F_5 = F_1(5) = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2$
$F_6 = F_1(6) = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2$
$F_7 = F_1(7) = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3$
$F_8 = F_1(8) = C_7^0 + C_6^1 + C_5^2 + C_4^3$
$F_9 = F_1(9) = C_8^0 + C_7^1 + C_6^2 + C_5^3 + C_4^4$
$F_{10} = F_1(10) = C_9^0 + C_8^1 + C_7^2 + C_6^3 + C_5^4$

(3.17)

Из примеров (3.17) вытекают следующие особенности представления чисел Фибоначчи $F_1(n+1) = F_{n+1}$. Если $n = 2k\ (k = 0,1,2,3,...)$, то числа Фибоначчи $F_1(2k+1) = F_{2k+1}$ представляются в виде суммы:

$$F_1(2k+1) = F_{2k+1} = C_{2k}^0 + C_{2k-1}^1 + C_{2k-2}^2 + ... + C_{2k-(k-1)}^{k-1} + C_k^k. \tag{3.18}$$

Если же $n = 2k+1\ (k = 0,1,2,3,...)$, то числа Фибоначчи $F_1(2k+2) = F_{2k+2}$ представляется в виде суммы:

$$F_1(2k+2) = F_{2k+2} = C_{2k+1}^0 + C_{2k}^1 + C_{2k-1}^2 + ... + C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^k. \tag{3.19}$$

Формулы (3.18), (3.19) могут быть объединены в виде одной математической формулы:

$$F_1(n+1) = F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{k+r}^k, \tag{3.20}$$

где $n = 2k + r$, k - частное, а r - остаток от деления n на 2.

Это означает, что при четном $n = 2k$ формула (3.20) сводится к формуле (3.18), а при нечетном $n = 2k + 1$ - к формуле (3.19).

Формулы (3.18)-(3.19) и есть решение первой задачи, поставленной Пойа в книге [66].

***P*-треугольники Паскаля и *p*-числа Фибоначчи**. Но представление треугольника Паскаля в прямоугольной форме позволило решить и более сложные задачи, поставленные в книге [66], а именно открыть бесконечное множество новых числовых последовательностей, названных в [9] p-числами Фибоначчи, а также выразить их через биномиальные коэффициенты.

Рассмотрим ситуацию, когда в исходном треугольнике Паскаля (Табл.3.1) мы сдвигаем биномиальные коэффициенты каждой строки на p столбцов вправо относительно предыдущей строки, где p может принимать значения из множества $\{0,1,2,3,...\}$. Полученный таким путем «деформированный» треугольник Паскаля мы будем называть p-треугольником Паскаля.

Ясно, что 0-треугольник Паскаля, то есть, p-треугольник Паскаля, соответствующий $p = 0$, есть ни что иное, как исходный треугольник Паскаля (Табл.3.1). 1-треугольник Паскаля, соответствующий случаю $p = 1$, представлен таблицами 2 и 3.

Рассмотрим p-треугольник Паскаля, соответствующий случаю $p = 2$ (Табл. 3.5 и 3.6).

Таблица 3.5. 2-треугольник Паскаля (в числовой форме)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1				1	2	3	4	5	6	7
2							1	3	6	10
3										1
	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19

Таблица 3.6. 2-треугольник Паскаля (в символической форме)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	C_0^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	C_4^0	C_5^0	C_6^0	C_7^0	C_8^0	C_9^0
1				C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1	C_5^1	C_6^1	C_7^1
2							C_2^2	C_3^2	C_4^2	C_5^2
3										C_3^3
	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19

А теперь просуммируем по столбцам биномиальные коэффициенты 2- и 3-треугольников Паскаля; в результате мы получим новую рекуррентную числовую последовательность, представленную в нижней строке Табл.3.5 и 3.6:

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, \dots . \qquad (3.21)$$

Обозначим n-й член последовательности (3.21) через $F_2(n)$. Легко усмотреть следующую рекуррентную закономерность в числовой последовательности (3.21), которую можно выразить с помощью рекуррентной формулы:

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-3) \text{ для } n > 3 \qquad (3.22)$$

при следующих начальных условиях:

$$F_2(1) = F_2(2) = F_2(3) = 1. \qquad (3.23)$$

Последовательность (3.21), задаваемую рекуррентной формулой (3.22) при начальных условиях (3.23), будем называть 2-числами Фибоначчи [9].

В общем случае (произвольное p), суммируя по столбцам биномиальные коэффициенты p-треугольника Паскаля, мы получим рекуррентную числовую последовательность, которая для заданного $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ задается следующим общим рекуррентным соотношением

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \text{ для } n > p+1 \tag{3.24}$$

при начальных условиях

$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1. \tag{3.25}$$

Числовые последовательности, задаваемые формулами (3.24), (3.25), будем называть p-числами Фибоначчи [9].

Ясно, что для случая $p = 0$ рекуррентная формула (3.24) и начальные условия (3.25) принимают следующий вид:

$$F_0(n) = F_0(n-1) + F_0(n-1) = 2F_0(n-1) \quad \text{для} \quad n > 1 \tag{3.26}$$

$$F_0(1) = 1. \tag{3.27}$$

Ясно также, что рекуррентная формула (3.26) при начальном условии (3.27) «генерирует» двоичные числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ..., которые и являются крайним частным случаем p-чисел Фибоначчи, соответствующим $p = 0$.

Теперь рассмотрим случай $p = 1$. Для этого случая формулы (3.24) и (3.25) сводятся к формулам (3.15) и (3.16), которые задают классические числа Фибоначчи (3.14).

Наконец, выясним, во что вырождаются р-числа Фибоначчи для случая $p = \infty$. Ясно, что для этого случая p-числа Фибоначчи задаются только формулой (3.25), то есть, p-числа Фибоначчи, соответствующие $p = \infty$, представляет собой бесконечную числовую последовательность, состоящую из одних единиц.

Используя представление p--треугольника Паскаля в символической форме (подобное Табл.3.4,3.6), нетрудно вывести формулу [9], позволяющую выразить р-числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F_p(n+1) = C_n^0 + C_{n-p}^1 + C_{n-2p}^2 + C_{n-3p}^3 + ... + C_{k+r}^k, \tag{3.28}$$

где $n = k(p+1) + r$, k - частное, а r - остаток от деления n на $p+1$.

Заметим, что формула (3.28) представляет собой решение общей задачи, которую поставил Д. Пойа [66], исследуя диагональные суммы треугольника Паскаля.

Напомним, что p-числа Фибоначчи были введены в работе [9] при решении задачи синтеза оптимальных фибоначчиевых алгоритмов измерения без какой-либо связи с треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами. Это является еще одним дополнительным подтверждением фундаментального характера алгоритмической теории измерения [9].

3.4. Некоторые свойства *p*-чисел Фибоначчи

Сумма из *n* подряд идущих *p*-чисел Фибоначчи. Представим рекуррентное соотношение (3.24) в виде:

$$F_p(n) = F_p(n+p+1) - F_p(n+p). \tag{3.29}$$

Используя (3.29), мы можем записать следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&F_p(1) = F_p(2+p) - F_p(1+p)\\
&F_p(2) = F_p(3+p) - F_p(2+p)\\
&F_p(3) = F_p(4+p) - F_p(3+p)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F_p(n-1) = F_p(n+p) - F_p(n+p-1)\\
&F_p(n) = F_p(n+p+1) - F_p(n+p)
\end{aligned}$$

Суммируя почленно правые и левые части этих равенств и учитывая, что $F_p(1+p)$, мы получим следующее выражение:

$$F_p(1) + F_p(2) + F_p(3) + \ldots + F_p(n) = F_p(n+p+1) - 1. \tag{3.30}$$

Заметим, что частными случаями выражения (3.30) являются следующие широко известные тождества для двоичных чисел ($p=0$) и классических чисел Фибоначчи ($p=1$):

$$\begin{aligned}
&p=0:\ 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1\\
&p=1:\ F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1
\end{aligned}.$$

Расширенные *p*-числа Фибоначчи. До сих пор мы рассматривали последовательности p-чисел Фибоначчи $F_p(n)$, задаваемые для положительных значений n. Выше (глава 2) мы ввели так называемые расширенные числа

Фибоначчи, задаваемые также и для отрицательных значений n. Проделаем то же самое с p-числами Фибоначчи, то есть, для случаев $p>0$ расширим их в сторону отрицательных значений параметра n и установим некоторые общие свойства таких расширенных последовательностей. Для вычисления p-чисел Фибоначчи $F_p(0), F_p(-1), ..., F_p(-p)$, соответствующих значениям $n=0,-1,-2,-3,...$, мы будем использовать рекуррентное соотношение (3.24) и начальные условия (3.25).

Представляя p-число Фибоначчи $F_p(p+1)$ в виде (3.24), мы получим:

$$F_p(p+1)=F_p(p)+F_p(0). \tag{3.31}$$

Так как согласно (3.25) $F_p(p)=F_p(p+1)=1$, то из (3.31) непосредственно вытекает, что

$$F_p(0)=0, \tag{3.32}$$

и это утверждение справедливо для любого заданного целого $p>0$.

Продолжая этот процесс, то есть, представляя p-числа Фибоначчи $F_p(p), F_p(p-1), F_p(p-2), ..., F_p(2)$ в виде (3.24), легко доказать:

$$F_p(0)=F_p(-1)=F_p(-2), ..., F_p(-p+1)=0. \tag{3.33}$$

Представим теперь число $F_p(1)$ в виде:

$$F_p(1)=F_p(0)+F_p(-p). \tag{3.34}$$

Так как согласно (3.25) $F_p(1)=1$ и согласно (3.32) $F_p(0)=0$, то из (3.34) вытекает, что

$$F_p(-p)=1. \tag{3.35}$$

Последовательно представляя p-числа Фибоначчи $F_p(0), F_p(-1), F_p(-2), ...$ в виде (3.24), легко установить, что

$$F_p(-p-1)=F_p(-p-2)=...=F_p(-2p+1)=0. \tag{3.36}$$

Продолжая этот процесс, мы можем получить все значения p-чисел Фибоначчи $F_p(n)$ для отрицательных значений n. Табл.3.7 дает представление о расширенных последовательностях p-чисел Фибоначчи для значений $p = 1, 2, 3, 4, 5$.

Таблица 3.7. Расширенные p-числа Фибоначчи

n	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	$-8F$
$F_1(n)$	21	13	8	5	3	2	1	1	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21
$F_2(n)$	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0	1	0	-1	1	1	-2	0
$F_3(n)$	5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	0
$F_4(n)$	4	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
$F_5(n)$	3	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Таким образом, «манипуляции» с треугольником Паскаля привели нас к небольшому математическому открытию. Мы обнаружили бесконечное количество новых числовых последовательностей, называемых p-числами Фибоначчи ($p = 0, 1, 2, 3, \ldots$), задаваемых рекуррентной формулой (3.24) при начальных условиях (3.25). Эти числовые последовательности включают в себя двоичную последовательность (случай $p = 0$) и классические числа Фибоначчи (случай $p = 1$). Эти числовые последовательности обладают рядом интересных математических свойств, а их изучение приводит к расширению классической теории чисел Фибоначчи [2-4].

3.5. Обобщение задачи о золотом сечении

Предел отношения соседних p-чисел Фибоначчи. Выше (глава 2) мы установили, что отношение соседних чисел Фибоначчи в пределе стремится к золотой пропорции, то есть,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \tag{3.37}$$

Считается, что эта формула доказана великим астрономом и математиком Иоганном Кеплером и поэтому в его честь она называется формулой Кеплера.

Рассмотрим теперь предел отношения соседних p-чисел Фибоначчи $\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}$ при $n \to \infty$. С этой целью обозначим этот предел через x, то есть,

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = x. \tag{3.38}$$

Представим теперь отношение соседних p-чисел Фибоначчи в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \frac{F_p(n-1)+F_p(n-p-1)}{F_p(n-1)} = \\ &1+\frac{1}{\dfrac{F_p(n-1)}{F_p(n-p-1)}} = 1+\frac{1}{\dfrac{F_p(n-1)F_p(n-2)\cdots F_p(n-p)}{F_p(n-2)F_p(n-3)\cdots F_p(n-p-1)}} \end{aligned}. \tag{3.39}$$

Принимая во внимание определение (3.38), при $n \to \infty$ выражение (3.39) может быть представлено в виде:

$$x = 1+\frac{1}{x^p},$$

откуда вытекает следующее алгебраическое уравнение:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0. \tag{3.40}$$

Заметим, что уравнение (3.40) задает бесконечное число алгебраических уравнений, так как каждому p соответствует свое алгебраическое уравнение типа (3.40). Обозначим через Φ_p положительный корень алгебраического уравнения (3.40).

В частности, для случая $p=0$ уравнение (3.40) вырождается в тривиальное уравнение $x=2$, корень которого $\Phi_0 = 2$.

Для случая $p=1$ уравнение (3.40) сводится к уравнению золотого сечения:

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{3.41}$$

корнем которого является золотая пропорция $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Геометрическое определение. Таким образом, уравнение (3.40) является обобщением уравнения золотого сечения (3.41). Заметим, что уравнение (3.40) может быть также получено в результате решения следующей геометрической задачи. Разделим отрезок AB точкой C в следующей пропорции (Рис.3.3):

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p, \qquad (3.42)$$

где $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

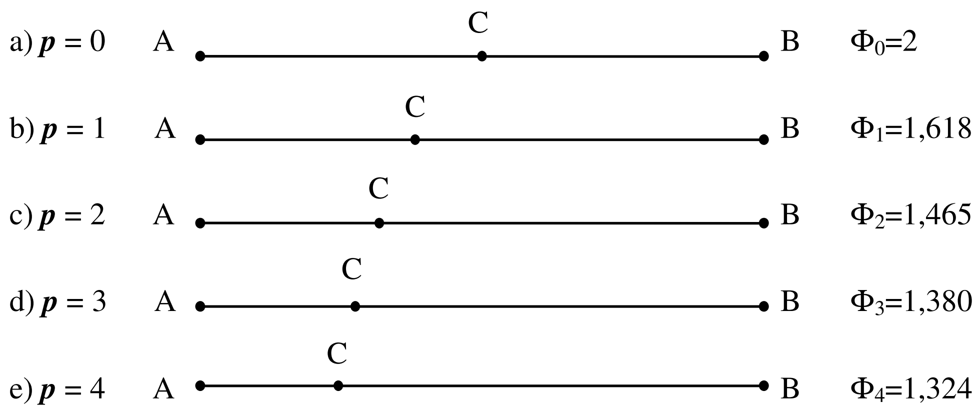


Рис. 3.3. Золотые p-сечения ($p = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

Обозначим значение искомого отношения $\frac{AB}{CB}$ через x, то есть,

$$\frac{AB}{CB} = x. \qquad (3.43)$$

Учитывая, что $AB = AC + CB$, мы можем записать:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AC + CB}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}}. \qquad (3.44)$$

Учитывая (3.42) и (3.43), выражение (3.44) может быть представлено в виде:

$$x = 1 + \frac{1}{x^p},$$

откуда вытекает алгебраическое уравнение (3.40), полученное нами при исследовании предела отношения соседних p –чисел Фибоначчи.

Заметим, что деление отрезка в пропорции (3.42) сводится к дихотомии для случая $p = 0$ (Рис.3.3-a) и к классическому золотому сечению для случая $p = 1$ (Рис.3.3-b). Учитывая это обстоятельство, деление отрезка AB точкой C в пропорции (3.42) было названо золотым p-сечением, а положительный корень уравнения (3.40) - золотой p-пропорцией [9].

Некоторые алгебраические свойства золотой p-пропорции. Представляя уравнение (3.40) в виде $x^{p+1} = x^p + 1$ и подставляя в это уравнение вместо x золотую p-пропорцию Φ_p, получим следующее тождество для золотой p-пропорции:

$$\Phi_p^{p+1} = \Phi_p^p + 1. \tag{3.45}$$

Разделив все члены тождества (3.45) на Φ_p^p, получим следующие свойства золотой p-пропорции:

$$\Phi_p = 1 + \frac{1}{\Phi_p^p} \tag{3.46}$$

и

$$\Phi_p - 1 = \frac{1}{\Phi_p^p}. \tag{3.47}$$

Заметим, что для случая $p = 0$ имеем: $\Phi_0 = 2$; тогда тождества (3.46) и (3.47) вырождаются в следующие тривиальные формулы:

$$2 = 1 + \frac{1}{1} \text{ и } 2 - 1 = \frac{1}{1}.$$

При $p = 1$ имеем: $\Phi_1 = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; тогда тождества (3.46) и (3.47) вырождаются в следующие известные тождества для классической золотой пропорции:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}; \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}.$$

Будем теперь многократно умножать и делить все члены тождества (3.45) на золотую p-пропорцию Φ_p; в результате получим следующее общее тождество, связывающее степени золотой p-пропорции:

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{n-1},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ . \qquad (3.48)$$

Заметим, что для случая $p = 0 \ (\Phi_0 = 2)$ тождество (3.48) сводится к следующему тривиальному тождеству для двоичных чисел:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots .$$

Для $p = 1$ имеем: $\Phi_1 = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; тогда тождество (3.48) сводится к следующему известному тождеству для золотой пропорции:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \ .$$

3.6. Алгебраические уравнения золотой *p*-пропорции

Общие свойства корней уравнения золотой p-пропорции. Обратимся еще раз к уравнению золотой p-пропорции (3.40). В работе [64] проведено исследование свойств корней этого алгебраического уравнения и установлены следующие общие свойства этих корней:

1. В соответствии с «правилом знака» Декарта все уравнения золотой p-пропорции типа (3.40) имеют только один положительный корень – золотую p-пропорцию Φ_p.

2. Уравнение золотой p-пропорции (3.40) имеет степень $(p+1)$; это означает, что оно имеет $(p+1)$ корней $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$. В дальнейшем, без потери общности будем считать, что корень x_1 всегда совпадает с золотой p-пропорцией, то есть, $x_1 = \Phi_p$.

3. Так как все коэффициенты 1, -1 и -1 уравнения (3.40) являются действительными числами, это означает, что комплексные корни возникают попарно, то есть, каждый комплексный корень $a+bi$ всегда возникает в паре с комплексно-сопряженным корнем $a-bi$.

4. Мы можем представить многочлен золотой p-пропорции в виде произведения двучленов:

$$x^{p+1}-x^{p}-1=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_p)(x-x_{p+1}). \tag{3.49}$$

5. Для каждого корня x_k $(k=1,2,3,...,p+1)$ имеет место следующее тождество:

$$x_k^n=x_k^{n-1}+x_k^{n-p-1}=x_k\times x_k^{n-1}, \tag{3.50}$$

где $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$.

Заметим, что частным случаем (3.50) является тождество (3.48) для золотой p-пропорции Φ_p.

Формулы Виета для уравнения золотой p-пропорции. Сравнивая уравнение (3.40) с приведенным алгебраическим уравнением $(p+1)$-й степени

$$x^{p+1}+a_1x^{p}+a_2x^{p-1}+...+a_px+a_{p+1}=0, \tag{3.51}$$

мы можем записать следующие значения для коэффициентов алгебраического уравнения (3.51) для случая уравнения (3.40):

$$a_1=-1,\ a_2=a_3=...=a_p=0,\ a_{p+1}=-1. \tag{3.52}$$

Используя формулы Виета (1.20), рассмотренные нами в главе 1, с учетом (3.52) мы можем записать следующие формулы, которые связывают коэффициенты (3.52) с корнями $x_1,x_2,...,x_{p+1}$ уравнения (3.40) [64]:

$$x_1+x_2+x_3+...+x_p+x_{p+1}=1 \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
&(x_1x_2+x_1x_3+...+x_1x_{p+1})+(x_2x_3+...+x_2x_{p+1})+...+x_px_{p+1}=0\\
&(x_1x_2x_3+x_1x_3x_4+...+x_1x_px_{p+1})+(x_2x_3x_4+...+x_2x_px_{p+1})+...+x_{p-1}x_px_{p+1}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_1x_2\cdots x_{p-2}x_{p-1}x_p+x_1x_3x_4\cdots x_{p-1}x_px_{p+1}+...+x_2x_3x_4\cdots x_{p-1}x_px_{p+1}=0
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$x_1x_2x_3\cdots x_{p-1}x_px_{p+1}=(-1)^p. \tag{3.55}$$

Как вытекает из (3.53) и (3.55), сумма всех корней уравнения (3.40) тождественно равна 1, а их произведение равно (+1) (для четных значений p) или (-1) (для нечетных значений p).

Рассмотрим следующую теорему, доказанную в работе [64].

Теорема 3.1. Для любого целого $p=1,2,3,...$ при условии, когда k принимает значения из множества $\{1,2,3,...,p\}$, справедливо следующее тождество:

$$\left(x_1+x_2+x_3+...+x_{p+1}\right)^k=x_1^k+x_2^k+x_3^k+...+x_{p+1}^k=1. \qquad (3.56)$$

Докажем эту теорему для случая $p=2$. Согласно условию Теоремы 3.1 для случая $p=2$ число k может принимать только 2 значения: $k=1$ и $k=2$, то есть, мы должны рассматривать только 2 тождества типа (3.56):

$$k=1:\left(x_1+x_2+x_3\right)^1 \text{ и } k=2:\left(x_1+x_2+x_3\right)^2.$$

Для первого случая доказательство теоремы тривиально, поскольку согласно (3.53)

$$x_1+x_2+x_3=1. \qquad (3.57)$$

Для второго случая проведем следующие элементарные преобразования:

$$\left(x_1+x_2+x_3\right)^2=\left[\left(x_1+x_2\right)+x_3\right]^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right).$$

Так как согласно (3.54) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$, а согласно (3.55) $x_1+x_2+x_3=1$, то отсюда вытекает, что

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1. \qquad (3.58)$$

Заметим, что для любого p теорема 2.1 доказана в работе [64].

Проверка формул Виета для уравнений золотой 1- и 2-пропорции. Формулы Виета для уравнения золотой 1-пропорции (3.41) проверяются путем непосредственной подстановки корней этого уравнения в «формулы Виета». Это было сделано в главе 1.

Проверим «формулы Виета» для уравнения золотой 2-пропорции:

$$x^3-x^2-1=0. \qquad (3.59)$$

Уравнение (3.59) имеет следующие корни:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{h}{6} + \frac{2}{3h} + \frac{1}{3} = 1.4655712319... \\
x_2 &= -\frac{h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right) = -0.233... - (0.793...)i \\
x_3 &= -\frac{h}{12} - \frac{1}{3h} + \frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6} - \frac{2}{3h}\right) = -0.233... + (0.793...)i \\
h &= \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}}.
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в справедливости следующих тождеств:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0; \quad x_1x_2x_3 = 1; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

3.7. Формулы Бине для *p*-чисел Фибоначчи и Люка

Общий подход. В главе 2 были найдены формулы Бине, позволяющие выразить числа Фибоначчи и Люка через корни $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ уравнения золотого сечения $x^2 - x - 1 = 0$. При этом исходным для вывода формул Бине для чисел Фибоначчи явилось следующее выражение:

$$F_n = k_1x_1^n - k_2x_2^n, \tag{3.61}$$

где постоянные коэффициенты k_1, k_2 вычисляются с использованием системы алгебраических уравнений, основанных на начальных значениях чисел Фибоначчи $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Исходным для вывода формулы Бине для чисел Люка является выражение:

$$L_n = x_1^n + x_2^n. \tag{3.62}$$

Используем этот же подход для вывода формул Бине для p-чисел Фибоначчи и Люка. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.2 (формула Бине для p-чисел Фибоначчи). Для любого заданного целого $p = 1, 2, 3, ...$любое p-число Фибоначчи $F_p(n)\ (n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...)$ может быть представлено в виде:

$$F_p(n) = k_1x_1^n + k_2x_2^n + ... + k_{p+1}x_{p+1}^n, \tag{3.63}$$

где $x_1, x_2, ..., x_{p+1}$ - корни алгебраического уравнения (3.40), а $k_1, k_2, ..., k_{p+1}$ - некоторые константы, которые вычисляются с использованием следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} F_p(0) = k_1 + k_2 + ... + k_{p+1} = 0 \\ F_p(1) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + ... + k_{p+1} x_{p+1} = 1 \\ F_p(2) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + ... + k_{p+1} x_{p+1}^2 = 1 \\ .... \\ F_p(p) = k_1 x_1^p + k_2 x_2^p + ... + k_{p+1} x_{p+1}^p = 1 \end{cases} \qquad (3.64)$$

Доказательство.

Начальные члены рекуррентной последовательности p-чисел Фибоначчи $F_p(0), F_p(1), F_p(2), ..., F_p(p)$, соответствующие значениям $n = 0,1,2,3,...,p$, задаются системой алгебраических уравнений (3.64), где члены $F_p(0), F_p(1), F_p(2), ..., F_p(p)$ задаются в виде (3.63).

Представим p-число Фибоначчи $F_p(p+1)$ в виде (3.63):

$$F_p(p+1) = k_1 x_1^{p+1} + k_2 x_2^{p+1} + ... + k_{p+1} x_{p+1}^{p+1}. \qquad (3.65)$$

Выше мы установили (Теорема 3.1), что для корней $x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_{p+1}$ справедливо следующее тождество:

$$x_k^n = x_k^{n-1} + x_k^{n-p-1} \left(k = 1,2,3,..., p+1\right) \qquad (3.66)$$

Используя тождество (3.66), мы можем представить выражение (3.65) в виде:

$$F_p(p+1) = \left(k_1 x_1^p + k_2 x_2^p + ... + k_{p+1} x_{p+1}^p\right) + \left(k_1 x_1^0 + k_2 x_2^0 + ... + k_{p+1} x_{p+1}^0\right) \qquad (3.67)$$

Используя определение (3.65), мы можем записать:

$$F_p(p+1) = F_p(p) + F_p(0), \qquad (3.68)$$

то есть, основное рекуррентное соотношение (3.24) справедливо для p-числа Фибоначчи $F_p(p+1)$.

Используя формулу (3.63) для представления p-чисел Фибоначчи $F_p(p+2), F_p(p+3), ..., F_p(n)...$ и используя тождество (3.66), нетрудно доказать, что формула (3.63) справедлива для всех положительных значений n.

Записывая тождество (3.66) в виде

$$x_k^{n-1} = x_k^n - x_k^{n-p-1} \left(k = 1, 2, 3, ..., p+1\right), \tag{3.69}$$

мы можем доказать справедливость формулы (3.63) для всех отрицательных n.

Теорема доказана.

Теорема 3.3 (формула Бине для p-чисел Люка). Для любых заданных целых $p = 1, 2, 3, ...$ и $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$ выражение

$$L_p(n) = x_1^n + x_2^n + ... + x_{p+1}^n, \tag{3.70}$$

приводит к новому классу рекуррентных числовых последовательностей - p-числам Люка $L_p(n)$, которые задаются рекуррентным соотношением

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1) \tag{3.71}$$

при начальных условиях:

$$L_p(0) = p+1; L_p(1) = L_p(2) = ... = L_p(p) = 1. \tag{3.72}$$

Доказательство.

Начнем с доказательства начальных условий (3.72). Действительно, при $n = 0$ выражение (3.70) принимает следующий вид:

$$L_p(0) = x_1^0 + x_2^0 + ... + x_{p+1}^0 = p+1.$$

Для вычисления остальных значений p-чисел Люка из (3.72) мы воспользуемся Теоремой 3.1, согласно которой для любого $k \in \{1, 2, 3, ..., p\}$, справедливо следующее тождество для корней $x_1, x_2, x_3, ..., x_{p+1}$ уравнения (3.40):

$$x_1^k + x_2^k + x_3^k + ... + x_{p+1}^k = 1. \tag{3.73}$$

Если теперь представить p-числа Люка $L_p(1), L_p(2), ..., L_p(p)$ в виде (3.70), то мы получим следующие представления:

$$\begin{cases} L_p(1) = x_1 + x_2 + ... + x_{p+1} \\ L_p(2) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{p+1}^2 \\ .... \\ L_p(p) = x_1^p + x_2^p + ... + x_{p+1}^p \end{cases} \tag{3.74}$$

Сравнивая (3.74) с (3.73), мы можем заключить:

$$L_p(1) = L_p(2) = ... = L_p(p) = 1. \qquad (3.75)$$

Теперь докажем справедливость рекуррентной формулы (3.71). Для этого достаточно воспользоваться тождеством (3.66) и представить выражение (3.70) в виде:

$$L_p(n) = \left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + ... + x_{p+1}^{n-1}\right) + \left(x_1^{n-p-1} + x_2^{n-p-1} + ... + x_{p+1}^{n-p-1}\right), \qquad (3.76)$$

откуда и вытекает справедливость рекуррентной формулы (3.71) для положительных значений n.

Для отрицательных значений n рекуррентная формула (3.71) легко доказывается, если воспользоваться тождеством (3.69).

Теорема доказана.

Таким образом, теоремы 3.2 и 3.3 задают нам в общем виде формулы Бине для p-чисел Фибоначчи $F_p(n)$ и p-чисел Люка $L_p(n)$, где дискретная переменная n принимает значения из множества $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$. Заметим, что между теоремами 3.2 и 3.3 существует принципиальное различие. Приступая к доказательству формулы Бине для p-чисел Фибоначчи $F_p(n)$, мы знали рекуррентную формулу для p-чисел Фибоначчи, задаваемую выражениями (3.24), (3.25). Формулируя Теорему 3.3, мы не знали о существовании p-чисел Люка $L_p(n)$. Мы просто предположили, что формула (3.70) задает некоторый класс рекуррентных числовых последовательностей, и затем, изучая формулу (3.70), мы открыли этот новый класс числовых последовательностей, которые при заданном целом $p = 1, 2, 3, ...$ задаются рекуррентной формулой (3.71) при начальных условиях (3.72).

Формулы Бине для 2-чисел Фибоначчи. Зададимся числом $p = 2$ и применим рассмотренный выше подход для вывода формул Бине для 2-чисел Фибоначчи. Для случая $p = 2$ рекуррентное соотношение (3.24), начальные условия (3.25) и алгебраическое уравнение (3.40) принимают следующий вил:

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-3) \qquad (3.77)$$

$$F_p(0), F_p(1) = F_p(2) = 1 \tag{3.78}$$

$$x^3 - x^2 - 1 = 0. \tag{3.79}$$

Уравнение (3.79) имеет три корня, действительный корень x_1 и два комплексно-сопряженных корня x_2, x_3, которые задаются выражениями (3.60).

Используя общее выражение (3.63), мы можем записать формулу Бине для 2-чисел Фибоначчи в следующем виде:

$$F_2(n) = k_1 x_1^n + k_2 x_2^n + k_3 x_3^n, \tag{3.80}$$

При этом система алгебраических уравнений (3.64) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} F_2(0) = k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ F_2(1) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1 \\ F_3(2) = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = 1 \end{cases} \tag{3.81}$$

Решая систему уравнений (3.81), получим:

$$k_1 = \frac{2h(h+2)}{h^3+8} \tag{3.82}$$

$$k_2 = \frac{\left[-(h+2) + i\sqrt{3}(h-2)\right]h}{h^3+8} \tag{3.83}$$

$$k_3 = \frac{\left[-(h+2) - i\sqrt{3}(h-2)\right]h}{h^3+8}, \tag{3.84}$$

где

$$h = \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}} \tag{3.85}$$

Заметим, что число (3.85) является иррациональным числом. Поэтому коэффициент k_1, задаваемый (3.79), также является иррациональным числом. При этом коэффициенты k_2, k_3, задаваемые (3.80), (3.81), являются комплексно-сопряженными числами типа $a + bi$ и $a - bi$, причем коэффициенты a и b для данного случая являются иррациональными числами.

Используя выражение (3.80), а также выражения (3.82)-(3.84), мы можем записать формулу Бине для 2-чисел Фибоначчи в виде:

$$F_2(n)=\frac{2h(h+2)}{h^3+8}\times\left(\frac{h}{6}+\frac{2}{3h}+\frac{1}{3}\right)^n+$$
$$\frac{\left(-(h+2)+i\sqrt{3}(h-2)\right)h}{h^3+8}\times\left(-\frac{h}{12}-\frac{1}{3h}+\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6}-\frac{2}{3h}\right)\right)^n+ \quad (3.86)$$
$$\frac{\left(-(h+2)-i\sqrt{3}(h-2)\right)h}{h^3+8}\times\left(-\frac{h}{12}-\frac{1}{3h}+\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6}-\frac{2}{3h}\right)\right)^n$$

Формула Бине для 2-чисел Люка. Используя общую формулу (3.70), мы можем записать формулу Бине для 2-чисел Люка в следующем виде:

$$L_2(n)=x_1^n+x_2^n+x_3^n. \quad (3.87)$$

Подставляя в (3.87) значения корней x_1, x_2, x_3, задаваемые выражениями (3.60), после несложных преобразований получим формулу Бине для 2-чисел Люка в виде:

$$L_2(n)=\left(\frac{h}{6}+\frac{2}{3h}+\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{h}{12}-\frac{1}{3h}+\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6}-\frac{2}{3h}\right)\right)^n+$$
$$\left(-\frac{h}{12}-\frac{1}{3h}+\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{h}{6}-\frac{2}{3h}\right)\right)^n. \quad (3.88)$$

Вычислим теперь начальные значения последовательности $L_2(n)$, задаваемой (3.87), (3.88). Для случая $n=0$ непосредственно из (3.87) вытекает:

$$L_2(0)=3. \quad (3.89)$$

Для случаев $n=1,2$ из (3.87) с учетом (3.73) имеем:

$$L_2(1)=L_2(2)=1. \quad (3.90)$$

На первый взгляд кажется невероятным, что формулы (3.86), (3.88), которая являются весьма сложными комбинацией комплексно-сопряженных чисел с иррациональными коэффициентами, действительно, задают целые 2-числа Фибоначчи $F_2(n)$ и целые 2-числа Люка $L_2(n)$ для любого целого $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$. И здесь мы можем только восторгаться математическим методом, который позволяет выражать сложнейшие математические истины в компактной форме.

3.8. Q_p-матрицы Фибоначчи как новые «гармоничные» матрицы математики

Понятие Q_p-матрицы. В главе 2, мы рассмотрели так называемые Q-матрицы Фибоначчи, исследованные в книге [3]. Проведя сравнительный анализ Q-матрицы Фибоначчи с золотой пропорцией, мы пришли к заключению, что Q-матрицы Фибоначчи играют среди квадратных (2×2)-матриц такую же роль, как золотая пропорция среди иррациональных чисел. Сделанный в главе 2 вывод о том, что Q-матрицы Фибоначчи являются некоторыми «гармоничными» матрицами математики, может стать началом внедрения «идеи гармонии» в теорию матриц. Это означает, что среди бесконечного количества квадратных матриц существуют особые («гармоничные») матрицы, имеющие прямое отношение к «математике гармонии» [47]. Можно высказать предположение, что для квадратных матриц произвольного размера роль «гармоничных» матриц могут играть Q_p-матрицы, введенные в [67]:

$$Q_p=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.91}$$

где $p\in\{0,1,2,3,...\}$ - заданное целое число.

Заметим, что Q_p-матрица (3.91) является квадратной матрицей размерности $(p+1)\times(p+1)$. Если в ней вычеркнуть первый столбец и последнюю строку, то оставшаяся часть матрицы будет представлять единичную матрицу размерности $(p\times p)$. Заметим, что первый столбец матрицы начинается с 1 и заканчивается 1; все остальные элементы этого столбца равны 0. Последняя строка начинается с 1, остальные элементы строки равны 0. Ниже мы установим и другие свойства матрицы (3.91).

Свойства Q_p-матриц. Возведем теперь Q_p-матрицу Фибоначчи (3.91) в n-ю степень и найдем выражение для матрицы Q_p^n. Докажем, что для заданного $p=1,2,3,...$ справедливо следующее выражение:

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}, \qquad (3.92)$$

где $F_p(n)$ - p-число Фибоначчи, $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$.

Проведем анализ матрицы (3.92). Матрица (3.92) состоит из $(p+1)$ строк и $(p+1)$ столбцов. Первая строка:

$$F_p(n+1), F_p(n), F_p(n-1), ..., F_p(n-p+2), F_p(n-p+1), \qquad (3.93)$$

вторая строка:

$$F_p(n-p+1), F_p(n-p), F_p(n-p-1), ..., F_p(n-2p+2), F_p(n-2p+1), \qquad (3.94)$$

....

p-я строка:

$$F_p(n-1), F_p(n-2), F_p(n-3), ..., F_p(n-p), F_p(n-p-1), \qquad (3.95)$$

$(p+1)$-я строка:

$$F_p(n), F_p(n-1), F_p(n-2), ..., F_p(n-p+1), F_p(n-p). \qquad (3.96)$$

Заметим, что каждая из строк (3.93) – (3.96) представляет собой последовательность p-чисел Фибоначчи, убывающих по мере продвижения слева направо. Первая строка (3.93) начинается с p-числа Фибоначчи $F_p(n+1)$ и заканчивается p-числом Фибоначчи $F_p(n-p+1)$, вторая строка (3.94) начинается с p-числа Фибоначчи $F_p(n-p+1)$ и заканчивается p-числом Фибоначчи $F_p(n-2p+1)$ и, наконец, $(p+1)$-я строка начинается с p-числа Фибоначчи $F_p(n)$ и заканчивается p-числом Фибоначчи $F_p(n-p)$. Важно подчеркнуть, что второе p-число Фибоначчи первой строки (3.93) и первое p-число Фибоначчи последней строки (3.96) совпадают и равны $F_p(n)$, третье p-число Фибоначчи второй строки (3.94), четвертое p-число Фибоначчи третьей строки, ..., и $(p+1)$-е p-число Фибоначчи p-й строки (3.92) совпадают и равны $F_p(n-p-1)$.

Справедливость выражения (3.92) доказывается методом математической индукции. Действительно, при $n=1$ выражение (3.92) принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} F_p(2) & F_p(1) & \cdots & F_p(-p+3) & F_p(-p+2) \\ F_p(-p+2) & F_p(-p+1) & \cdots & F_p(-2p+3) & F_p(-2p+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(0) & F_p(-1) & \cdots & F_p(-p+1) & F_p(-p) \\ F_p(1) & F_p(0) & \cdots & F_p(-p+2) & F_p(-p+1) \end{pmatrix}. \qquad (3.97)$$

Выше, рассматривая расширенные p-числа Фибоначчи, мы нашли следующие числовые значения p-чисел Фибоначчи, которые имеют место для любых значений p:

$$\begin{aligned} &F_p(1)=F_p(2)=...=F_p(p+1)=1 \\ &F_p(0)=F_p(-1)=F_p(-2)=...=F_p(-p+1)=0 \\ &F_p(-p)=1 \\ &F_p(-p-1)=F_p(-p-2)=...=F_p(-2p+1)=0 \end{aligned} \qquad (3.98)$$

Принимая во внимание (3.98), мы можем сделать заключение, что матрица (3.97) совпадает с Q_p -матрицей, задаваемой (3.91). Тем самым мы доказали основание индукции, то есть, при $n=1$ утверждение (3.92) справедливо.

Предположим, что утверждение (3.92) справедливо для любого целого n и докажем его справедливость для случая $n+1$. С этой целью рассмотрим произведение матриц:

$$Q_p^n \times Q_p = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.99)$$

Исследуем произведение (3.99). Если умножить первую строку матрицы Q_p^n на первый столбец матрицы Q_p в примере (3.99), мы получим значение элемента a_{11} матрицы $Q_p^{n+1} = Q_p^n \times Q_p$:

$$a_{11} = F_p(n+1) + F_p(n-p+1) = F_p(n+2).$$

Продолжая процесс матричного умножения в примере (3.99), мы получим следующие новые значения первой строки матрицы Q_p^{n+1}, которая будет выглядеть следующим образом:

$$F_p(n+2), F_p(n+1), ..., F_p(n-p+3), F_p(n-p+2). \qquad (3.100)$$

Далее проведем поэлементное сравнение первой строки матрицы Q_p^n, задаваемой (3.93), с первой строкой матрицы Q_p^{n+1}, задаваемой (3.100). Мы видим, что все аргументы p-чисел Фибоначчи в последовательности (3.100) отличаются на 1 от аргументов соответствующей последовательности p-чисел Фибоначчи, образующей первую строку (3.93) матрицы (3.92). По аналогии мы можем показать, что эта закономерность справедлива для всех элементов матрицы Q_p^{n+1}, которая формируется из матрицы Q_p^n путем умножения на матрицу Q_p в соответствии с (3.99). Из этих рассуждений вытекает справедливость выражения (3.92) для любого целого n.

Таким образом, Q_p-матрицы (3.92), действительно, связаны с новым классом «гармоничных» числовых последовательностей – p-числами Фибоначчи, задаваемыми рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1), \qquad (3.101)$$

где $p \in \{0,1,2,3,...\}$ - заданное целое число.

Важно подчеркнуть, что p-числа Фибоначчи (3.101), как было показано выше, тесно связаны еще с одним «гармоничным» объектом математики – треугольником Паскаля, который является выразителем «идеи гармонии» в комбинаторике.

Примеры Q_p -матриц. Нетрудно доказать, что произведение матриц Q_p^n и Q_p является коммутативным, то есть:

$$Q_p^{n+1} = Q_p^n \times Q_p = Q_p \times Q_p^n. \tag{3.102}$$

Используя (3.102), нетрудно также доказать справедливость следующего соотношения:

$$Q_p^n \times Q_p^m = Q_p^m \times Q_p^n = Q_p^{m+n}. \tag{3.103}$$

Раскладывая каждый элемент матрицы (3.92) - p-число Фибоначчи – в соответствии с основным рекуррентным соотношением (3.101) и используя правило сложения матриц, мы можем представить матрицу (3.92) в рекуррентной форме:

$$Q_p^n = Q_p^{n-1} + Q_p^{n-p-1}. \tag{3.104}$$

Рекуррентное соотношение (3.104) можно представить также в следующем виде:

$$Q_p^{n-p-1} = Q_p^n - Q_p^{n-1}. \tag{3.105}$$

В качестве примера, рассмотрим матрицы Q_p^n, соответствующие случаям $p = 2$ и $p = 3$:

$$Q_2^n = \begin{pmatrix} F_2(n+1) & F_2(n) & F_2(n-1) \\ F_2(n-1) & F_2(n-2) & F_2(n-3) \\ F_2(n) & F_2(n-1) & F_2(n-2) \end{pmatrix} \tag{3.106}$$

$$Q_3^n = \begin{pmatrix} F_3(n+1) & F_3(n) & F_3(n-1) & F_3(n-2) \\ F_3(n-2) & F_3(n-3) & F_3(n-4) & F_3(n-5) \\ F_3(n-1) & F_3(n-2) & F_3(n-3) & F_3(n-4) \\ F_3(n) & F_3(n-1) & F_3(n-2) & F_3(n-3) \end{pmatrix}. \tag{3.107}$$

Используя матрицы (3.106) и (3.107) и общую матрицу (3.92), мы получим некоторые специальные матрицы, в частности, матрицы типа Q_p^p и обратные матрицы типа Q_p^{-1}. Например, для случаев $p = 2,3,4,5$ матрицы типа Q_p^p и Q_p^{-1} принимают следующий вид, соответственно:

$$\underline{p=2}$$

$$Q_2^2=\begin{pmatrix} F_2(3) & F_2(2) & F_2(1) \\ F_2(1) & F_2(0) & F_2(-1) \\ F_2(2) & F_2(1) & F_2(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_2^{-1}=\begin{pmatrix} F_2(0) & F_2(-1) & F_2(-2) \\ F_2(-2) & F_2(-3) & F_2(-4) \\ F_2(-1) & F_2(-2) & F_2(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{p=3}$$

$$Q_3^3=\begin{pmatrix} F_3(4) & F_3(3) & F_3(2) & F_3(1) \\ F_3(1) & F_3(0) & F_3(-1) & F_3(-2) \\ F_3(2) & F_3(1) & F_3(0) & F_3(-1) \\ F_3(3) & F_3(2) & F_3(1) & F_3(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3^{-1}=\begin{pmatrix} F_3(0) & F_3(-1) & F_3(-2) & F_3(-3) \\ F_3(-3) & F_3(-4) & F_3(-5) & F_3(-6) \\ F_3(-2) & F_3(-3) & F_3(-4) & F_3(-5) \\ F_3(-1) & F_3(-2) & F_3(-3) & F_3(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{p=4}$$

$$Q_4^4=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_4^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{p=5}$$

$$Q_5^5=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q_5^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изучая эти матрицы, мы можем видеть, что они удовлетворяют некоторым строгим правилам. Это позволяет нам по аналогии сконструировать подобные матрицы для произвольного p. Сравнивая матрицы вида $Q_p^p\ (p=1,2,3,...)$, мы можем увидеть, что каждая матрица Q_p^p включает в себя все предыдущие матрицы вида $Q_{p-1}^{p-1}, Q_{p-2}^{p-2}, ..., Q_1^1$. Например, матрица Q_{p-1}^{p-1} может быть получена из матрицы Q_p^p путем вычеркивания в ней предпоследней строки и предпоследнего столбца матрицы Q_p^p.

Сравнивая обратные матрицы вида $Q_p^{-1}\left(p=1,2,3,...\right)$, мы можем найти следующую закономерность. Главная диагональ матрицы Q_p^{-1} всегда состоит только из 0. Все элементы, стоящие под элементами главной диагонали, всегда равны 1. Последний столбец начинается с двух единиц (1 и – 1). Все остальные элементы матрицы Q_p^{-1} равны 0.

3.9. Детерминанты Q_p-матриц и их степеней

Вычисление детерминантов квадратных матриц размерности $\left(p+1\right)\times\left(p+1\right)$ в общем случае является довольно сложной задачей. Однако, для случая «гармоничной» Q_p-матрицы (3.92) эта задача значительно упрощается, если учесть некоторые закономерности, возникающие при сравнении матриц Q_p и Q_{p-1}. Ниже представлены Q_p-матрицы, соответсвующие случаям $p=1,2,3,4$:

$$Q_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=Q;\quad Q_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix};\quad Q_3=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix};\quad Q_4=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{3.108}$$

Обратим внимание на следующую закономерность, которая связывает соседние Q_p-матрицы из (3.108). Если в матрице Q_4 вычеркнуть последний столбец и предпоследнюю строку, то возникающая при этом матрица превращается в матрицу Q_3. Если теперь произвести такое же вычеркивание в матрице Q_3, то получим матрицу Q_2, а затем матрицу Q_1. Таким образом, каждая из матриц типа Q_p содержит в себе все предыдущие матрицы $Q_1,Q_2,Q_3,...,Q_{p-1}$ и, кроме того, матрица Q_p содержится во всех последующих матрицах $Q_{p+1},Q_{p+2},Q_{p+3},...$ Заметим также, что на пересечении вычеркиваемых строки и столбца стоит 1, а их остальные элементы равны нулю. Из теории матриц [67] известно, что, если матрица Q_{p-1} получается из матрицы Q_p путем вычеркивания последнего столбца и предпоследней строки и на их пересечении стоит 1, то детерминанты этих матриц связаны очень простым соотношением:

$$\det Q_{p-1} = -\det Q_p \,. \qquad (3.109)$$

Теперь снова обратимся к матрицам (3.108). Вычислим их детерминанты, основываясь на (3.109). Ясно, что для Q_1-матрицы

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q \,, \qquad (3.110)$$

значение детерминанта равно:

$$\det Q_1 = -1 \,. \qquad (3.111)$$

Вычислим теперь детерминант Q_2-матрицы:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.112)$$

Используя (3.109), мы можем записать:

$$\det Q_2 = 1 \,. \qquad (3.113)$$

Продолжая эти рассуждения, мы приходим к заключению, что детерминанты всех Q_p-матриц (3.91) для четных $p = 2,4,6,...$ равны (+1), а для нечетных $p = 1,3,5,...$ равны (-1). Это может быть выражено в следующей компактной форме:

$$\det Q_p = (-1)^p \,. \qquad (3.114)$$

Вычислим теперь детерминанты обратных матриц типа Q_p^{-1}. С этой целью мы рассмотрим следующее известное соотношение, связывающее матрицу Q_p с ее обратной матрицей Q_p^{-1}:

$$Q_p^{-1} \times Q_p = I, \qquad (3.115)$$

где I –единичная матрица с детерминантом

$$\det I = 1 \,. \qquad (3.116)$$

Используя (3.115) и (3.116), мы можем записать:

$$\det Q_p^{-1} \times \det Q_p = \det I = 1. \qquad (3.117)$$

В соответствии с (3.114) детерминант матрицы Q_p принимает только два значения, (+1) или (-1); тогда из (3.117) вытекает:

$$\det Q_p^{-1} = \det Q_p = 1. \tag{3.118}$$

Вычислим теперь детерминант матрицы Q_p^n, используя известное свойство детерминантов квадратных матриц [64]:

$$\det\left(Q_p^n \right) = \left(\det Q_p \right)^n, \tag{3.119}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Принимая во внимание (3.114), мы можем записать:

$$\det Q_p^n = \left(-1 \right)^{pn}, \tag{3.120}$$

где $p = 1, 2, 3, \ldots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Заметим, что Q_p-матрицы (3.91) и (3.92), обладающие удивительным математическими свойствами (3.114) и (3.120), могут стать источником новых результатов в области «теории чисел Фибоначчи» [2-4].

Рассмотрим один из таких результатов на примере матрицы Q_2^n, соответствующей случаю $p = 2$:

$$Q_2^n = \begin{pmatrix} F_2(n+1) & F_2(n) & F_2(n-1) \\ F_2(n-1) & F_2(n-2) & F_2(n-3) \\ F_2(n) & F_2(n-1) & F_2(n-2) \end{pmatrix} \tag{3.121}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

В соответствии с (3.120) детерминант этой матрицы для любого n тождественно равен 1, то есть,

$$\det Q_2^n = 1. \tag{3.122}$$

Используя известное правило вычисления детерминанта квадратной матрицы размерностью (3×3) [67], мы можем выразить детерминант такой матрицы через ее элементы. Согласно (3.122), это выражение тождественно равно 1. Из этих рассуждений вытекает справедливость следующего тождества:

$$\begin{aligned}&\det Q_2^n = F_2(n+1)\left[F_2(n-2)F_2(n-2) - F_2(n-1)F_2(n-3)\right] + \\ &F_2(n)\left[F_2(n)F_2(n-3) - F_2(n-1)F_2(n-2)\right] + \\ &F_2(n-1)\left[F_2(n-1)F_2(n-1) - F_2(n)F_2(n-2)\right] = 1.\end{aligned} \qquad (3.123)$$

Но, как было установлено в главе 2, детерминант Q-матрицы Фибоначчи, возведенной в n-ю степень, совпадает с формулой Кассини, которая является одним из важнейших тождеств для классических чисел Фибоначчи. Напомним, числа Фибоначчи F_n являются частным случаем p-чисел Фибоначчи $F_p(n)$ и совпадают с ними для случая $p=1$, то есть, $F_n = F_1(n)$. Это дает нам основание утверждать, что тождество (3.123), связывающее пять соседних 2-числа Фибоначчи $F_2(n-3), F_2(n-2), F_2(n-1), F_2(n), F_2(n+1)$, есть ни что иное, как обобщение формулы Кассини для случая 2-чисел Фибоначчи $F_2(n)$.

Ясно, что при заданном $p=1,2,3,...$, вычисляя непосредственно детерминанты матриц типа Q_p^n, задаваемых выражением (3.92) и соответствующих различным p-последовательностям Фибоначчи $F_p(n)$, и приравнивая их выражению (3.120), мы получим бесконечное количество обобщенных формул Кассини, соответствующих различным значениям p. Если мы теперь еще раз вспомним, что p-числа Фибоначчи $F_p(n)$ есть н что иное, как «дмагональные суммы» треугольника Паскаля, то это дает нам основание утверждать, что выражения для Q_p-матриц Фибоначчи и их детерминантов, задаваемые (3.114) и (3.120), связывают между собой три матеатических теории: комбинаторику, теорию чисел Фибоначчи и теорию матриц.

3.10. Обратные Q_p-матрицы Фибоначчи

Выше в главе 2 мы описали очень простой способ получения обратных Q-матриц Фибоначчи Q^{-n} на основании анализа прямых матриц Q^n. Но существует еще один способ получения Q-матриц Фибоначчи $Q^n\,(n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...)$ и их обратных матриц Q^{-n}, который вытекает непосредственно из рекуррентного соотношения для чисел Фибоначчи $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Представим две последовательности чисел Фибоначчи F_{n+1} и F_n сдвинутыми на одно число друг относительно друга (Табл. 3.8).

Таблица 3.8. Последовательности Фибоначчи F_{n+1} и F_n

n	**5**	4	3	2	**1**	0	–1	–2	–3	–4	**-5**	–6
F_{n+1}	**8**	**5**	3	2	**1**	**1**	0	1	–1	2	**-3**	**5**
F_n	**5**	**3**	2	1	**1**	**0**	1	–1	2	–3	**5**	**-8**

Если выделить число $n = 1$ в первой строке Табл.3.8 и затем четыре числа Фибоначчи, находящихся под числом $n = 1$ и справа от него в двух нижних строках; легко увидеть, что совокупность этих четырех чисел Фибоначчи образуют Q-матрицу $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Эта Q-матрица выделена жирным шрифтом в Табл.3.8.

Если мы будем передвигаться в Табл.3.8 влево по отношению к Q-матрице, тогда мы получим матрицы $Q^2, Q^3, ..., Q^n$, соответственно. Если мы будем передвигаться в Табл.3.8 вправо по отношению к Q-матрице, тогда мы получим матрицы $Q^0, Q^{-1}, Q^{-2}, ..., Q^{-n}$, соответственно. Заметим, что матрица $Q^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является единичной матрицей. В Табл.3.8 жирным шрифтом выделена матрица $Q^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ и обратная к ней матрица $Q^{-5} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$.

Этот принцип конструирования «прямых» и «обратных» Q-матриц Фибоначчи может быть использован для общего случая Q_p-матриц Фибоначчи. Анализ матрицы (3.121) ($p = 2$) показывает, что все матрицы вида Q_2^n могут быть получены из (3.121), если мы представим три последовательности 2-чисел Фибоначчи $F_2(n+1), F_2(n-1), F_2(n)$, сдвинутыми друг по отношению к другу, как показано в Табл.3.9.

Таблица 3.9. 2-числа Фибоначчи $F_2(n+1), F_2(n-1), F_2(n)$

n	5	4	3	2	**1**	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7
$F_2(n+1)$	4	3	2	1	**1**	**1**	**0**	0	1	0	−1	1	1
$F_2(n-1)$	2	1	1	1	**0**	**0**	**1**	0	−1	1	1	−2	0
$F_2(n)$	3	2	1	1	**1**	**0**	**0**	1	0	−1	1	1	−2

Выделяя теперь число $n=1$ в первой строке Табл.3.9 и затем девять 2-чисел Фибоначчи, находящихся под числом $n=1$ и справа от него в трех нижних строках (выделены жирным шрифтом); легко увидеть, что совокупность этих девяти 2-чисел Фибоначчи образуют матрицу $Q_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. Если мы будем двигаться в Табл.3.9 влево по отношению к Q_2-матрице, тогда мы получим матрицы $Q_2^2, Q_2^3, ..., Q_2^n$, соответственно. Если мы будем двигаться в Табл.3.9 вправо по отношению к Q_2-матрице, тогда мы получим матрицы $Q_2^0=I, Q_2^{-1}, Q_2^{-2}, ..., Q_2^{-n}$, соответственно.

3.11. Обобщенный принцип золотого сечения

«Принцип Дихотомии» и «Принцип Золотого Сечения». В книге известного российского архитектора и исследователя гармонии Иосифа Шевелева «Метаязык живой природы» [32] исследуются наиболее общие принципы конструирования объектов живой природы, в основе которых лежит так называемый алгоритм целостности. Взяв за основу знаменитое изречение Гераклита «Из одного – все, из всего – одно», Шевелев попытался вывести из него наиболее общие принципы, лежащие в основе целостности живой природы. В качестве символа «целостности» Шевелев выбирает «Единицу» или «Монаду». Пифагорейцы учили, что 1 обозначает дух, из которого происходит весь видимый мир; единица есть разум, добро, гармония, счастье; она соединяет в себе четное с нечетным и мужское с женским. Геометрически «единица» выражает точку. Пифагорейцы называли единицу «Монадой» и считали ее матерью всех чисел.

Как известно, «Пифагорова единица» или «Монада» обладает рядом уникальных математических свойств, над которыми мы, возможно, и не задумывались. Приведем некоторые из них: (а) единица не относится ни к простым, ни к составным числам; (б) каждое натурально число имеет делителем единицу; (в) единица является единственным натуральным числом, имеющим только один делитель; (г) единица – единственное натуральное число, n-я степень которого равна тому же числу; (д) после умножения (или деления) какого-либо числа на 1 это число не меняется; (е) после деления какого-либо числа, не равного нулю, самого на себя получается 1. И не случайно, что именно «Единица» в свое время так поразила Галилео Галилея. В своих «Беседах» он написал: «Если какое-либо число должно являться бесконечностью, то этим числом должна быть единица; в самом деле, в ней мы находим условия и необходимые признаки, которым должно удовлетворять бесконечно большое число, поскольку оно содержит в себе столько же квадратов, сколько кубов и чисел вообще ... Единица является и квадратом, и кубом, и квадратом квадрата и т.д. Отсюда заключаем, что нет другого бесконечного числа, кроме единицы. Это представляется столь удивительным, что превосходит способность нашего представления».

В книге [32] Иосиф Шевелев пишет: «Опыт искусства в целом показал, что в случае, когда восприятие фиксирует совершенство формы, в ней присутствует особого рода математическая симметрия. В структуре целого можно найти элемент, из которого, подчиняясь этой симметрии, развертывается размерная и ритмическая структура всех его частей. Основополагающий элемент связывает с собой все части одним числовым законом и правилами его приложения. Тем самым все оказывается неразрывно связано в одно».

Перенося эту идею на структуры живой природы, Шевелев выбирает «Единицу» или «Монаду» в качестве «первочисла» как символа «целостности» всего сущего и пытается записать «уравнения первоосновы», то есть, тождества, позволяющее выразить «Единицу» в виде суммы простейших элементов, и создать его динамическую модель.

Простейшим принципом деления целого является «принцип дихотомии» (деления пополам), который основывается на следующем тождестве, связывающем «двоичные числа»:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}, \tag{3.124}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Для случая $n = 0$ мы можем записать:

$$1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1}. \tag{3.125}$$

В книге [32] приведена следующая «динамическая» модель «принципа дихотомии»:

$$\begin{array}{l} 1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1} \\ \qquad\qquad 2^{-1} = 2^{-2} + 2^{-2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2^{-2} = 2^{-3} + 2^{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2^{-3} = 2^{-4} + 2^{-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \end{array} \tag{3.126}$$

Эта динамическая модель приводит нас к следующему тождеству, которое Шевелев называет «уравнением первоосновы»:

$$1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}. \tag{3.127}$$

Таким образом, суть «уравнения первоосновы» (3.127) состоит в том, что «Единица» представляется в виде суммы простейших элементов – степеней числа $2^{-i}, i = 1, 2, 3, \ldots$.

В основу «уравнения первоосновы» может быть положен также известный из древних времен «принцип золотого сечения», который основывается на следующем тождестве, связывающем степени золотой пропорции $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}, \tag{3.128}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Для случая $n = 0$ мы можем записать:

$$1 = \Phi^0 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2}. \tag{3.129}$$

Используя тождества (3.128), (3.129), Шевелев конструирует следующую «динамическую» модель «принципа золотого сечения»:

$$
\begin{aligned}
1 = \Phi^0 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2} \\
\Phi^{-2} = \Phi^{-3} + \Phi^{-4} \\
\Phi^{-4} = \Phi^{-5} + \Phi^{-6} \\
\Phi^{-6} = \Phi^{-7} + \Phi^{-8}
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

....

$$1 = \Phi^0 = \Phi^{-1} + \Phi^{-3} + \Phi^{-5} + \Phi^{-7} + \Phi^{-9} + \Phi^{-11} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^{-(2i-1)}$$

которая приводит нас еще к одному «уравнению первоосновы»:

$$1 = \Phi^0 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2} = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi^{-(2i-1)} . \tag{3.131}$$

Заметим, что «принцип дихотомии», задаваемый (3.124)-(3.127), и «принцип золотого сечения», задаваемый (3.128)-(3.131), имеют огромное количество приложений (деление биологических клеток, двоичная система счисления, система счисления Бергмана [70], численные методы решения алгебраических уравнений и т.д.).

По мнению Шевелева [32], «уравнения первоосновы» (3.127), (3.131) имеют значение, далеко выходящее за пределы математических приложений. Шевелев утверждает: «Именно так строит себя живая природа. Все ее объекты возникают по этой схеме. Из одного начального элемента возникает «все», и это «все» создает взаимоскрепленное, взаимно необходимое, непостижимым образом соединенное и не распадающееся на составные части неделимое целое - объект бытия. Так растет из семени дерево, из оплодотворенной клетки – сложнейше устроенное живое существо; и так же, предположительно, из одного начального состояния, из одного Нечто возникла Вселенная: современная астрофизика, непрерывно совершенствуя модель расширяющейся Вселенной, утверждает, что вещество и энергия в наблюдаемом мире могли возникнуть буквально из ничего».

Обобщенный принцип золотого сечения. Выше мы ввели более общий класс «золотых пропорций», которые были названы «золотыми p-пропорциями» $\Phi_p\ (p = 0,1,2,3,...)$. Степени «золотой p-пропорции» связаны следующим замечательным тождеством:

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1}, \tag{3.132}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$.

При $n = 0$ тождество (3.132) принимает следующий вид:

$$1 = \Phi_p^0 = \Phi_p^{-1} + \Phi_p^{-p-1}. \tag{3.133}$$

Взяв за основу тождества (3.132) и (3.133), можно сконструировать следующую «динамическую» модель разложения «Единицы» по степеням золотой p-пропорции:

$$\begin{aligned}
1 = \Phi^0 = \Phi_p^{-1} + \Phi_p^{-(p+1)}& \\
\Phi_p^{-(p+1)} = \Phi_p^{-(p+1)-1} + \Phi_p^{-2(p+1)}& \\
\Phi_p^{-2(p+1)} = \Phi_p^{-2(p+1)-1} + \Phi_p^{-3(p+1)}& \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\
1 = \Phi^0 = \Phi_p^{-1} + \Phi_p^{-(p+1)-1} + \Phi_p^{-2(p+1)-1} + \Phi_p^{-3(p+1)-1} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_p^{-(i-1)(p+1)-1}&
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Основным результатом исследования, проведенного в [70], является получение более общего «уравнения первоосновы»:

$$1 = \Phi_p^{-1} + \Phi_p^{-(p+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_p^{-(i-1)(p+1)-1}, \tag{3.135}$$

которое задает более общий научный принцип – «обобщенный принцип золотого сечения». Ясно, что этот общий принцип содержит в себе в качестве частных случаев «принцип дихотомии» ($p = 0$) и «принцип золотого сечения» ($p = 1$).

Если опять обратиться к идеям книге Шевелева [32], то мы должны признать, что «уравнение первоосновы», задаваемое (3.135), возможно, задает нам бесконечное число «гармонических» структур, которые могут быть созданы Природой (или Богом), используя комбинаторные соотношения.

3.12. Закон структурной гармонии систем Эдуарда Сороко

Что такое философия? Слово "philosophia" в переводе с греческого означает "любовь к мудрости". В наиболее общем виде она определяется как учение об общих принципах бытия и познания, об отношении человека и мира; наука о всеобщих законах развития природы, общества и мышления. Философия зародилась на заре человеческой цивилизации в Индии, Китае, Египте, но своей классической формы достигла в Древней Греции. Первые философы античного мира стремились главным образом открыть единый источник многообразных природных явлений. Таким источником, по мнению древних философов, была гармония. Эта идея наиболее четко выражена у Гераклита, который считал, что в процессах развития всех систем "господствует закон гармонизации противоположных сторон, неравновеликих, неравнозначных, различающихся между собой вещей, но принадлежащих к единому кругу, подчиняющихся одному и тому же логосу".

Ясно, что повышение интереса к проблеме гармонии и золотого сечения, что является одной из важнейших тенденций в развитии современной науки, не мог не привести к появлению оригинальных идей и открытий в современной философской науке. Одно из таких открытий было сделано белорусским философом Эдуардом Сороко, который выдвинул и развил в 80-е годы чрезвычайно интересную концепцию структурной гармонии систем [13]. Эта концепция и вытекающий из нее закон структурной гармонии систем, основанный на понятии "обобщенных золотых сечений", по праву можно считать одним из крупных философских достижений 20-го века.

Понятие аттрактора. В синергетике широко используется понятие «аттрактора». В «Кратком энциклопедическом словаре философских терминов» [71] дается следующее определение этого понятия: «Аттрактор (однокоренные слова – тракт, трактир, трактор, аттракцион, аттрактанты и др.; букв. «притягивать», «привлекать») – важнейшее понятие синергетики, рассматривающий мир состоящим из устойчивостей и неустойчивостей, симфоний (гармоний) ансамблей и какофоний (дисгармоний), источников и стоков...

Аттракторы-структуры – те реальные частично упорядоченные формирования объективного мира, которые обладают набором оптимальных характеристик. В них стремятся превратиться структуры менее совершенные и это обретает характер закона (принцип Ле Шателье): движение направлено в ту сторону, где испытывается наименьшее сопротивление среды. Из всех других структур они наиболее гармоничны, а потому сравнительно легко выдерживают конкуренцию в борьбе за жизненное пространство. Есть аттракторы и в области размерностей систем ... и в области свойств, отношений, проявляющих симметрию, достоинства инвариантов (см. Обобщенные золотые сечения). Выявление таких отношений – одна из важнейших задач научного поиска в теории систем и в синергетике ».

Что же является причиной возникновения «аттракторов-структур», которые «обладают набором оптимальных характеристик» и «из всех других структур ... наиболее гармоничны».

В системах различного рода широко распространено явление резонанса, который возникает при определенных количественных соотношениях между элементами системы. Поэтому мы можем выдвинуть предположение, что «аттракторы-структуры» - это такие структуры, в которых возникают своеобразные «резонансы», приводящие к стабильному состоянию системы, при котором система функционирует «оптимально» или «гармонично». И поиск таких количественных отношений, который приводят систему в гармоническое состояние, - «одна из важнейших задач научного поиска в теории систем и в синергетике».

Обоснование «закона структурной гармонии систем». Главная идея Сороко [13] состоит в том, чтобы рассмотреть реальные системы с "диалектической точки зрения". Как известно, всякий объект природы может быть представлен как диалектическое единство двух противоположных сторон A и B. Это диалектическая связь может быть выражена в виде следующего равенства:

$$A + B = U\left(universum\right). \tag{3.136}$$

Равенство (3.136) является наиболее общей формой выражения так называемого закона сохранения. Здесь A и B - различия внутри единства, логически непересекающиеся классы или состояния субстрата некоторого целого.

Единственное условие: A и B должны измеряться одной и той же мерой, быть членами отношения, лежащего внутри единства. Примерами (3.136) могут быть вероятность и невероятность событий, масса и энергия, ядро атома и его оболочка, вещество и поле, анод и катод, животные и растения, духовное и материальное начала в системе ценностей, доход и расход и т.д.

Выражение (3.136) может быть представлено в следующей нормализованной форме:

$$\overline{A}+\overline{B}=1, \qquad 3.137)$$

где $\overline{A}$ и $\overline{B}$ - относительные "веса" частей A и B, формирующих некоторое единство. Заметим, что в качестве $\overline{A}$ и $\overline{B}$ могут быть взяты образующие универсум вероятность события и его невероятность: $p+q=1$; удельная потенциальная энергия $\overline{\Pi}=\Pi/E$ и удельная кинетическая энергия $\overline{K}=K/E$, отнесенные к полной энергии системы: $\overline{\Pi}+\overline{K}=1$ и т.п.

Ясно, что в законе сохранения (3.137) одна из составляющих $\overline{A}$ или $\overline{B}$ является независимой (центральной) составляющей единого, задаваемого (3.137); при этом ее изменение вызывает также и изменение ее «антипода» $\overline{B}$, что выражается связью $\overline{B}=f\left(\overline{A}\right)$.

Частным случаем (3.137) является "закон сохранения информации":

$$I+H=\log N, \qquad (3.138)$$

где I - количество информации и H - энтропия системы, которая может находиться в одном из N состояний; при этом энтропия задается выражением, введенным американским ученым Клодом Шенноном:

$$H\left(A\right)=-\sum_{i=1}^{N}p_i\log_2 p_i, \qquad (3.139)$$

где $p_1, p_2, ..., p_N$ - вероятности состояний системы, связанные друг с другом соотношением:

$$p_1+p_2+...+p_N=1. \qquad (3.140)$$

Напомним, что предельные значения входящих в выражение (3.138) слагаемых I и H равны:

$$I_{\max} = \log N, H_{\min} = 0; \quad I_{\min} = 0, H_{\max} = \log N. \tag{3.141}$$

«Закон сохранения информации (3.138) в нормированной форме выглядит так:

$$\overline{I} + \overline{H} = 1. \tag{3.142}$$

Первое слагаемое $\overline{I} = \frac{I}{\log N} = R$ Шеннон назвал относительной избыточностью, а второе $\overline{H} = \frac{H}{\log N}$ - относительной энтропией.

С учетом введенных выше определений соотношение (3.142) может быть записано также в следующем виде:

$$R + \overline{H} = 1. \tag{3.143}$$

Из всего множества значений $\overline{H}$ и R в соотношении (3.143) два варианта ($\overline{H} = 0, R = 1$ и $\overline{H} = 1, R = 0$) представляют особый случай, поскольку этим граничным значениям переменных $\overline{H}$ и R отвечают вырожденные состояния структур.

Как подчеркивает Эдуард Сороко [13], «под структурной избыточностью .... понимают меру того, насколько действительная сложность структуры превышает ее минимальное значение, при котором еще возможно функционирование ... Поэтому избыточность есть, прежде всего, структурная характеристика системы, определяющая ее организацию». И далее [13]: «Избыточность не случайно называют жемчужиной в творческом наследии К. Шеннона. Только в последние годы осознано, сколь большое место занимает это понятие в самых различных сферах реальности: в изучении закономерностей природы и управлении, в техническом проектировании машин и качестве лекционной пропаганды и т.д.»

Ясно, что избыточность непосредственно связана с такими качествами систем как надежность и живучесть. Чему равен оптимальный порог избыточности - один из центральных вопросов проектирования информационных систем. Поэтому вопрос об оптимальном соотношении между $\overline{H}$ и R в соотношении (3.140) имеет чрезвычайно важное значение в различных сферах практической деятельности.

Для установления характера этой связи Сороко обращается к принципу кратных отношений. Этот принцип хорошо известен в химии как "Закон Дальтона", а в кристаллографии как "Закон рациональных параметров". Сороко выдвигает гипотезу, что принцип кратных отношений является общим принципом мироздания. Поэтому в соответствии с этим принципом он выдвигает гипотезу, что между R и $\overline{H}$ существует следующее соотношение, которое связывает компоненты R и $\overline{H}$, представленные в логарифмической форме, в равенстве (3.143):

$$\log R = (s+1)\log \overline{H} \tag{3.144}$$

или

$$\log \overline{H} = (s+1)\log R, \tag{3.145}$$

где число s называется рангом кратности, который может принимать следующие значения: $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Представим выражения (3.144), (3.145) в экспоненциальной форме:

$$R = \left(\overline{H}\right)^{s+1} \tag{3.146}$$

$$\overline{H} = R^{s+1}. \tag{3.147}$$

Подставив выражения (3.143), (3.144) в равенство (3.140), мы получим соответственно следующие алгебраические уравнения:

$$\left(\overline{H}\right)^{s+1} + \overline{H} - 1 = 0 \tag{3.148}$$

$$R^{s+1} + R - 1 = 0. \tag{3.149}$$

Обозначая через y переменные R и $\overline{H}$ в уравнениях (3.145), (3.145), мы получим следующее алгебраическое уравнение:

$$y^{s+1} + y - 1 = 0. \tag{3.150}$$

Обозначим положительный корень уравнения (3.150), соответствующий заданному s, через φ_s.

Введем теперь новую переменную $x=\frac{1}{y}$ для уравнения (3.150). Подставляя $y=\frac{1}{x}$ в (3.150), после выполнения соответствующих преобразований получим следующее алгебраическое уравнение:

$$x^{s+1}-x^{s}-1=0. \tag{3.151}$$

Ясно, что при заданном s корень этого уравнения Φ_s связан с корнем φ_s следующим соотношением:

$$\Phi_s=\frac{1}{\varphi_s}. \tag{3.152}$$

Сравним теперь уравнение (3.152) с уравнением $x^{p+1}-x^{p}-1=0$, корнями которого являются золотые p-пропорции Φ_p. Поскольку эти уравнения совпадают, мы можем записать: $\Phi_s=\Phi_p$ при $s=p$. Это означает, что корни алгебраического уравнения (3.150) связаны с золотыми p-пропорциями обратно-пропорциональной зависимостью. Чтобы различать числа Φ_p, называемые золотыми p-пропорциями, от чисел φ_s, будем в дальнейшем называть числа φ_s золотыми s-пропорциями. Ниже в Табл.3.10 приведены значения золотых p-пропорций Φ_p и соответствующих им золотых s-пропорций φ_s для $p=s$.

Таблица 3.10. Числовые инварианты φ_s и Φ_p

$s=p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
φ_s	0.5000	0.6180	0.6823	0.7245	0.7549	0.7781	0.7965	0.8117	0.8213
Φ_p	2	1.6180	1.4656	1.3802	1.3247	1,2852	1.2555	1.2320	1.2176

В соответствии с концепцией Сороко [13], положительные корни φ_s уравнения (3.151), которые связаны с золотыми p-пропорциями Φ_p соотношением обратной пропорциональности (3.152), и выражают закон структурной гармонии систем, который сформулирован Сороко в следующем виде:

«Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, стуктурно-функциональную …устойчивость».

В чем же принципиальная особенность "Закона Сороко"? Начиная с Пифагора, ученые связывали понятие гармонии с числом $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$ или обратным ему числом $\Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618$. "Закон Сороко" утверждает, что гармоничное состояние системы, соответствующее классической золотой пропорции, не является единственным и что для одной и той же системы может существовать бесконечное количество "гармоничных" состояний, соответствующих числам φ_s, обратно-пропорциональным золотым p-пропорциям.

Энтропийный подход. Рассмотрим приложение закона Сороко для термодинамических и информационных систем. Состояние термодинамической и информационной системы выражается с помощью понятия энтропии, которое является важнейшим понятием в термодинамике и теории информации. Как упоминалось, выражение для энтропии источника информации с алфавитом $A = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ задается выражением (3.139).

Как известно, энтропия (3.136) достигает своего максимального значения

$$H_{\max} = \log N \tag{3.153}$$

для случая, когда вероятности букв равны между собой, то есть,

$$p_1 = p_2 = ... = p_N = \frac{1}{N}. \tag{3.154}$$

Используя понятие относительной энтропии

$$\overline{H} = \frac{H}{\log N}, \tag{3.155}$$

мы можем записать следующее очевидное равенство:

$$\overline{H} \log N = H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i. \tag{3.156}$$

В соответствии с "законом структурной гармонии систем" каждая система переходит в свое "гармоничное" состояние в случае, когда ее относительная энтропия $\overline{H} = \frac{H}{\log N}$ удовлетворяет уравнению (3.148). Корнем этого уравнения является золотая $s-$пропорция φ_s. Из этих рассуждений вытекает следующее выражение для энтропии "гармоничной" системы:

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i = \varphi_s \log N . \tag{3.157}$$

Ясно, что для заданного параметра s проблема получения множества значений вероятностей $p_i\left(i = 1, 2, 3, ..., N\right)$, дающих оптимальное значение энтропии, имеет много решений. Однако, тем не менее, соотношение (3.157) играет роль некоторой "целевой" функции для решения различных научных и технических проблем, потому что оно указывает путь поиска "оптимальных" вариантов.

Гармоничные бинарные сплавы. Эдуард Сороко в своей книге [13] приводит много интересных примеров, подтверждающих действие его закона. Особое место занимает его использование в технологии сложных веществ, изготовляемых из несколько различных фракций. Речь идет о структурно сложных составах, смесях, соединениях простых компонентах. Сороко пишет: «Уже наиболее простой тип соединений – бинарные сплавы – четко проявляют это действие. Так, хорошо изученные двойные сплавы обладают особыми, ярко выраженными функциональными свойствами (устойчивость в термическом отношении, твердость, хрупкость, износостойкость, устойчивость к окислению и т.п.) лишь в том случае, если веса входящих в них конкрементов составляют одну из пропорций, в которых легко узнать числа уже известного нам ряда: $38.2:61.8;\quad 31.8:68.2;\quad 27.5:72.5$ и т.д.»

Сухой воздух как гармоничная структура. В более сложных случаях, когда сложный продукт состоит из нескольких фракций можно использовать формулу для энтропии (3.139), дающую возможность рационально подбирать «веса» фракций и тем самым получать вещества с необходимым качеством или отвечающим определенным функциональным требованиям. Следует отметить, что в случае вещества, состоящего из N фракций, задача выбора «весового» вектора

$\{p_1, p_2, ..., p_N\}$, выражающего строение целого, не имеет однозначного решения, потому что число переменных $\{p_1, p_2, ..., p_N\}$ превышает число уравнений, которые их связывают. Число переменных превышает 2, а для решения задачи выбора «гармоничного» решения мы имеем только два уравнения. Это – уравнение (3.139) и соотношение (3.140), связывающее «веса» фракций.

Тем не менее, и в этом случае, соотношение (3.157) может быть использовано в технологических разработках. Сороко подчеркивает: «Особенно важно принимать это во внимание при разработке технологических рецептур в ряде производств: в пищевой промышленности, в парфюмерии (оптимизация «весовых» эфирных масел и растворителя), в виноделии (подбор оптимальных сочетаний весовых частей различных виноградных вин для получения наилучшего вкусового букета), в производстве табачных изделий (гармоничное сочетание скелетных и элитных табаков в составе сигарет, папирос, сигар), в фармацевтике при сочетании конкрементов в создаваемых препаратах». Действительно, если воспользоваться соотношением (3.154), тогда «процесс технологического конструирования структурно сложного продукта обретает характер научно направленного эксперимента, поскольку внимание концентрируется только на перспективных вариантах, а варианты, не гарантирующие качества, в таких случаях заведомо исключаются» [13].

Соотношение (3.157) может быть использовано для оценки «гармоничности» тех или иных природных образований или экономических структур. Сороко приводит в своей книге [13] ряд интересных примеров из различных областей природы, демонстрирующих действие своего закона. Например, рассмотрим такой объект как сухой воздух, который является основой жизни на земле. Является ли структура воздуха оптимальной? Теория Сороко дает положительный ответ на это вопрос. Действительно, химический состав сухого воздуха таков: азот 78.084%; кислород – 20.948%; аргон – 0.934%; углекислый газ – 0.031%; неон – 0.002%; гелий – 0.001%. Если теперь рассчитать энтропию воздуха в соответствии с формулой (3.139) и затем вычислить его относительную энтропию по формуле (3.155), то полученное значение относительной энтропии будет равно

0.683, что с высокой точностью соответствует инварианту $\varphi_2 = 0.6823$. Это означает, что в процессе самоорганизации сухой воздух приобрел оптимальную, то есть, "гармоничную" структуру. Этот пример является весьма показательным в том отношении, что "закон Сороко" может быть уже сейчас использован для контроля за состоянием биосферы, в частности, воздушного и водного бассейна.

Ясно, что практическое использование "закона структурной гармонии систем" может принести существенный выигрыш при решении многих технологических, экономических, экологических и других задач, в частности, совершенствовать технологию изготовления структурно-сложных продуктов, контролировать биосферу и т.д.

Исследования М.С. Радюка. Идея обобщенных p-чисел Фибоначчи, основанных на треугольнике Паскаля, и обобщенных золотых пропорций («золотых p-пропорций и золотых s-пропорций) всколыхнула научную мысль. Начались поиски их проявлений в природных явлениях. В этой связи значительный интерес представляет статья белорусского исследователя М.С. Радюка «Второе золотое сечение (1.465...) в природе» [72]. Радюк исходит из предположения, что «золотые пропорции, следующие за классической (по крайней мере, первая из них) находят свое отражение в природе».

О чем идет речь в статье [72]? Для ответа на этот вопрос рассмотрим рассмотренные выше 2-числа Фибоначчи $F_2(n)$ $(p=2)$:

$$1,1,1,2,3,4,6,9,13,19,28,41,60,88,129,189,277,406,595,872,... \quad (3.158)$$

Как показано выше, отношение соседних 2-чисел Фибоначчи в пределе стремится к числовой константе $\Phi_2 \approx 1.465$, которую Радюк называет «вторым золотым сечением».

Что же увидел М.С. Радюк в числовой последовательности (3.158)? В качестве объекта для исследований М.С. Радюк выбрал движение Луны вокруг Земли. И эти исследования привели его к неожиданным результатам. Действительно, период обращения Луны вокруг Земли близок к 28 суткам (2-число Фибоначчи); в году около 13 лунных месяцев (еще одно 2-число Фибоначчи).

Перигей лунной орбиты совершает один оборот за период около 9 лет (2-число Фибоначчи), а восходящий узел орбиты - за период около 19 лет (2-число Фибоначчи).

Радюк обращает внимание еще на некоторые факты, связанные с движением Луны. Скорость движения Луны наряду с минимумом, обусловленным его прохождением через афелий, имеет минимум, повторяющийся через каждые 248 суток. Отношение продолжительности года в сутках к этому периоду равно «второму золотому сесчению» 1.465. Отметим также, что $365-248=117$ суток. Полный оборот перигей лунной орбиты совершает за 117 витков Луны вокруг Земли; узлы лунной орбиты совершают полный оборот по эклиптике за 248 витков (2-число Фибоначчи). Умножив эти числа на продолжительность сидерического месяца, получим уже упоминавшиеся периоды в 9 и 19 лет (2-числа Фибоначчи). Сравнивая полученные числа и отношения, характеризующие некоторые элементы орбит Земли и Луны, нельзя не отметить их близость к величинам «второго золотого сечения» 1.465 и к числам соответствующей ему рекуррентноой последовательности (3.158).

Не менее поразительные открытия, основанные на использовании «второго золотого сечения» 1.465, сделаны Радюком при исследовании обращения Земли вокруг Солнца. Период обращения включает 365 оборотов Земли вокруг своей оси (суток). Если мы расположим число 365 между двумя меньшим и большим его числами рекуррентной последовательности (3.158): $\left(...19,28,41,60,88,129,189,277,\boxed{365},406,595,...\right)$, то заметим, что разность между ними (365-277 и 406-365) равна 2-числам Фибоначчи 88 и 41. Следовательно, число 365 делит промежуток между числами 277 и 406 в пропорции «второго золотого сечения» 1.465.

Приведенные выше результаты М.С. Радюка, полученные при анализе «второго золотого сечения» 1.465, является убедительным примером эффективного использования современной «золотой» научной парадигмы (или «закона структурной гармонии систем») в природных явлениях. Самое удивительное, что открытие новых закономерностей в движении Луны и Земли, сделанны М.С. Радюком [72] в области, которая, казалось бы, исследована настолько досконально, что просто невозможно было ожидать здесь каких-либо открытий. И статья Радюком [72] является прекрасным примером использованию новой «золотой» парадигмы!

Фибоначчиево деление биологических клеток. Способность к делению - важнейшее свойство биологических клеток. Без деления невозможно представить себе увеличение числа одноклеточных существ, развитие сложного многоклеточного организма из одной оплодотворенной яйцеклетки, возобновление клеток, тканей и даже органов, утраченных в процессе жизнедеятельности организма. Общепринятым является представление о симметричном делении биологической клетки на две идентичные клетки, однако в последние годы появились работы, опровергающие такие представления [73,74]. Впервые гипотеза об асимметричном делении биологических клеток (F -деление) выдвинута в работе [73]. В соответствии с этой гипотезой каждая клетка на каждом шаге делится на две клетки, одна из которых пропускает следующий шаг деления. В результате F -деления число биологических клеток, возникающих от исходной клетки на каждом шаге деления, подчиняется «фибоначчиевой» закономерности: $1,2,3,5,8,13,\ldots$.

Гипотеза F -деления [73] получила неожиданное развитие в работе [74], в которой показано, что процесс F -деления подчиняется закономерности обобщенных p -чисел Фибоначчи; при этом рассматриваются биологические объекты, в которых деление подчиняются не только классическим числам Фибоначчи, но также 2-числам Фибоначчи: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, ... и 3-числам Фибоначчи: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, ...

Таким образом, работа [74] важна в том отношении, что в ней по существу показано использование «закона структурной гармонии систем» (или новой «золотой» парадигмы) в биологии.

Кумулятивный рост и уменьшение, основанные на *p*-числах Фибоначчи. В заключение этого параграфа хотелось бы привлечь внимание к двум статьям турецких исследователей F. Büyükkılıç и D. Demirhan [75,76], опубликованных в международном журнале Chaos, Solitons and Fractals по рекомендации автора настоящей книги.

Суть статей [75,76] состоит в использовании p-чисел Фибоначчи и золотых p-сечений для моделирования механизмов кумулятивного роста и уменьшения, которые наблюдаются в реальных системах природы. Статья является подтверждением эффективности использования "закона структурной гармонии систем" в современном теоретическом естествознании.

Таким образом, заключая этот раздел, мы должны отметить, что не только классические числа Фибоначчи и золотое сечение, но и p-числа Фибоначчи и золотые p-сечения начинают использоваться в современном теоретическом естествознании.

Глава 4

ПЛАТОНОВЫ ТЕЛА: ОТ КОСМОЛОГИИ ПЛАТОНА ДО ФУЛЛЕРЕНОВ И КВАЗИКРИСТАЛЛОВ

4.1. Золотое сечение в Платоновых телах

Правильные многоугольники и многогранники. Человек проявляет интерес к правильным многоугольникам и многогранникам на протяжении всей своей сознательной деятельности – от двухлетнего ребенка, играющего деревянными кубиками, до зрелого математика. Некоторые из правильных и полуправильных тел встречаются в природе в виде кристаллов, другие – в виде вирусов, которые можно рассмотреть с помощью электронного микроскопа.

Что же такое многоугольник и многогранник? Для ответа на этот вопрос напомним, что собственно геометрию определяют иногда как науку о пространстве и пространственных фигурах – двумерных и трехмерных. Двумерную фигуру можно определить как множество отрезков прямых, ограничивающих часть плоскости. Такая плоская фигура называется многоугольником. Из этого следует, что многогранник можно определить как множество многоугольников, ограничивающих часть трехмерного пространства. Многоугольники, образующие многогранник, называются его гранями.

Издавна ученые интересовались идеальными или правильными многоугольниками, то есть, многоугольниками, имеющими равные стороны и равные углы. Простейшим правильным многоугольником можно считать равносторонний треугольник, поскольку он имеет наименьшее число сторон, которое может ограничить часть плоскости. Общую картину интересующих нас правильных многоугольников наряду с равносторонним треугольником составляют: квадрат (четыре стороны), пентагон (пять сторон), гексагон (шесть сторон), октагон (восемь сторон), декагон (десять сторон) и т.д. Очевидно, что теоретически нет каких-либо ограничений на число сторон правильного многоугольника, то есть число правильных многоугольников бесконечно.

Что же такое правильный многогранник? Правильным называется такой многогранник, все грани которого равны (или конгруэнтны) между собой и при этом являются правильными многоугольниками. Сколько же существует правильных многогранников? На первый взгляд ответ на этот вопрос очень простой – столько же, сколько существует правильных многоугольников. Однако это не так. В «Началах Евклида» мы находим строгое доказательство того, что существует только пять выпуклых правильных многогранников, а их гранями могут быть только три типа правильных многоугольников: треугольники, квадраты и пентагоны.

Платоновы тела. Теории многогранников посвящено много книг. Одной из наиболее известных является книга английского математика М. Веннинджера «Модели многогранников» [77]. Книга начинается с описания так называемых правильных многогранников, то есть, многогранников, образованных простейшими правильными многоугольниками одного типа. Эти многогранники принято называть Платоновыми телами, названными так в честь древнегреческого философа Платона, который использовал правильные многогранники в своей космологии. Мы начнем наше рассмотрение с правильных многогранников, гранями которых являются равносторонние треугольники (Рис.4.1).

Первым (и простейшим) среди правильных многогранников является тетраэдр ((tetrahedron). В тетраэдре три равносторонних треугольника встречаются в одной вершине; при этом их основания образуют новый равносторонний треугольник. Тетраэдр имеет наименьшее число граней среди Платоновых тел и является трехмерным аналогом плоского правильного треугольника, который имеет наименьшее число сторон среди правильных многоугольников.

Следующее тело, которое образуется равносторонними треугольниками, называется октаэдром (octahedron). В октаэдре в одной вершине встречаются четыре треугольника; в результате получается пирамида с четырехугольным основанием. Если соединить две такие пирамиды основаниями, то получится симметричное тело с восемью треугольными гранями – октаэдр (octahedron).

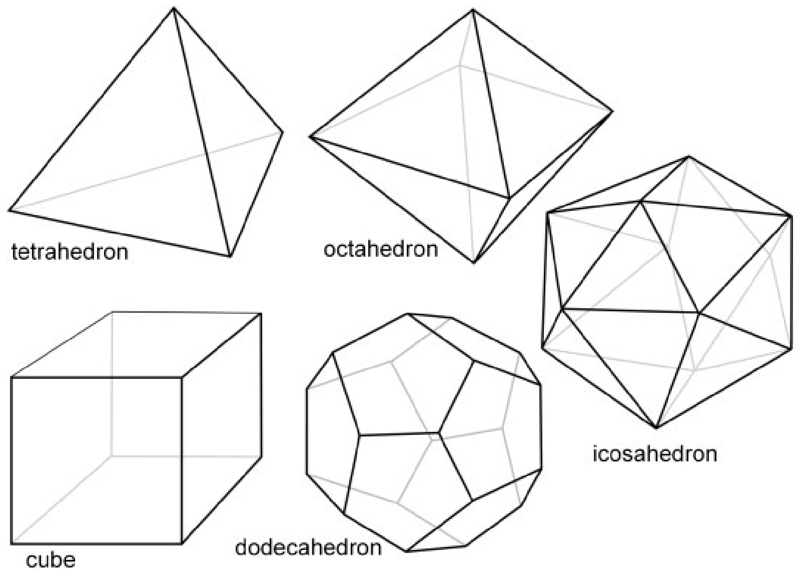


Рис. 4.1. Платоновы тела: тетраэдр (tetrahedron), октаэдр (octahedron), куб (cube) додекаэдр (dodecaedron), икосаэдр (icosahedron)

Теперь можно попробовать соединить в одной точке пять равносторонних треугольников. В результате получится фигура с 20 треугольными гранями – икосаэдр (icosahedron).

Следующая правильная форма многоугольника – квадрат. Если соединить три квадрата в одной точке и затем добавить еще три, мы получим совершенную форму с шестью гранями, называемую гексаэдром или кубом (cube).

Наконец, существует еще одна возможность построения правильного многогранника, основанная на использовании следующего правильного многоугольника – пентагона. Если собрать 12 пентагонов таким образом, чтобы в каждой точке встречалось три пентагона, то получим еще одно Платоново тело, называемое додекаэдром (dodecahedron).

Следующим правильным многоугольником является шестиугольник. Однако если соединить три шестиугольника в одной точке, то мы получим плоскость, то есть, из шестиугольников нельзя построить объемную фигуру.

Любые другие правильные многоугольники выше шестиугольника не могут образовывать тел вообще. По существу мы повторили рассуждения, которые провел Евклид в Книге XIII своих «Начал». Именно эта книга посвящена изложению завершенной геометрической теории Платоновых тел. И именно из этих рассуждений вытекает, что существует только пять правильных многогранников, гранями которых могут быть только равносторонние треугольники, квадраты и пентагоны.

Существуют удивительные геометрические связи между всеми правильными многогранниками. Так, например, куб (cube) и октаэдр (octahedron) дуальны, т.е. получаются друг из друга, если центры тяжести граней одного принять за вершины другого и обратно. Аналогично дуальны икосаэдр (icosahedron) и додекаэдр (dodecahedron). Тетраэдр (tetrahedron) дуален сам себе.

Числовые характеристики Платоновых тел. Основными числовыми характеристиками Платоновых тел является число сторон грани m, число граней n, сходящихся в каждой вершине, число граней *Г*, число вершин *В*, число ребер *Р* и число плоских углов *У* на поверхности многогранника Эйлер открыл и доказал знаменитую формулу:

$$В - Р + Г = 2,$$

связывающую число вершин, ребер и граней любого выпуклого многогранника. Указанные выше числовые характеристики приведены в Табл.4.1.

Таблица 4.1. Числовые характеристики Платоновых тел

Многогранник	Число сторон грани, m	Число граней, сходящихся в вершине, n	Число граней *Г*	Число вершин *В*	Число ребер *Р*	Число плоских углов на поверхности *У*
Тетраэдр	3	3	4	4	6	12
Гексаэдр (куб)	4	3	6	8	12	24
Октаэдр	3	4	8	6	12	24
Икосаэдр	3	5	20	12	30	60
Додекаэдр	5	3	12	20	30	60

Золотое сечение в додекаэдре и икосаэдре. Додекаэдр (dodecahedron) и двойственный ему икосаэдр (icosahedron) занимают особое место среди Платоновых тел. Прежде всего, необходимо подчеркнуть, что геометрия додекаэдра и икосаэдра непосредственно связана с золотым сечением. Действительно, гранями додекаэдра являются пентагоны, то есть, правильные пятиугольники, основанные на золотом сечении. Если внимательно посмотреть на икосаэдр, то можно увидеть, что в каждой его вершине сходится пять треугольников, внешние стороны которых образуют пентагон. Уже этих фактов достаточно, чтобы убедиться в том, что золотое сечение играет определяющую роль в конструкции этих двух Платоновых тел.

Но существуют более глубокие математические подтверждения фундаментальной роли, которую играет золотое сечение в икосаэдре и додекаэдре. Известно, что эти тела имеют три специфические сферы. Первая (внутренняя) сфера вписана в тело и касается его граней. Обозначим радиус этой внутренней сферы через R_i. Вторая или средняя сфера касается ее ребер. Обозначим радиус этой сферы через R_m. Наконец, третья (внешняя) сфера описана вокруг тела и проходит через его вершины. Обозначим ее радиус через R_c. В геометрии доказано, что значения радиусов указанных сфер для додекаэдра и икосаэдра, имеющего ребро единичной длины, выражается через золотую пропорцию Ф (Табл.4.2).

Таблица 4.2. Золотая пропорция в сферах додекаэдра и икосаэдра

Многогранник	R_c	R_m	R_i
Икосаэдр	$\frac{1}{2}\Phi\sqrt{3-\Phi}$	$\frac{1}{2}\Phi$	$\frac{\frac{1}{2}\Phi^2}{\sqrt{3}}$
Додекаэдр	$\frac{\Phi\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\Phi^2}{2}$	$\frac{\Phi^2}{2\sqrt{3-\Phi}}$

Заметим, что отношение радиусов $\frac{R_c}{R_i} = \frac{\sqrt{3(3-\Phi)}}{\Phi}$ одинаково для икосаэдра и додекаэдра. Таким образом, если додекаэдр и икосаэдр имеют одинаковые вписанные сферы, то их описанные сферы совпадают. Доказательство этого математического результата дано в «Началах Евклида».

Таким образом, существует огромное количество соотношений, полученных еще античными математиками, подтверждающих замечательный факт, что именно золотая пропорция является главной пропорцией додекаэдра и икосаэдра, и этот факт является особенно интересным с точки зрения так называемой «додекаэдро-икосаэдрической доктрины», которую мы рассмотрим ниже.

4.2. Архимедовый усеченный икосаэдр и звездчатые многогранники

Архимедовы тела. Известно еще множество совершенных тел, получивших название Архимедовых или полуправильных многогранников. У них также все многогранные углы равны и все грани являются правильными многоугольниками, но несколько разных типов. Существует 13 полуправильных многогранников, открытие которых приписывается Архимеду.

Мы не будем останавливаться на всех Архимедовых телах и отсылаем интересующихся их теорией к книге [77]. Наибольший интерес для нас в дальнейшем будут представлять так называемые Архимедовы усеченные тела, которые получаются из Платоновых тел в результате их усечения. Усеченное тело – это тело с отрезанными верхушками. Для Платоновых тел усечение может быть сделано таким образом, что и получающиеся новые грани и остающиеся части старых были правильными многоугольниками. К примеру, тетраэдр (Рис.4.1) можно усечь так, что его четыре треугольные грани превратятся в четыре гексагональные, и к ним добавятся четыре правильные треугольные грани. Таким путем могут быть получены пять Архимедовых усеченных тел: усеченный тетраэдр, усеченный гексаэдр (куб), усеченный октаэдр, усеченный додекаэдр и усеченный икосаэдр (Рис.4.2).

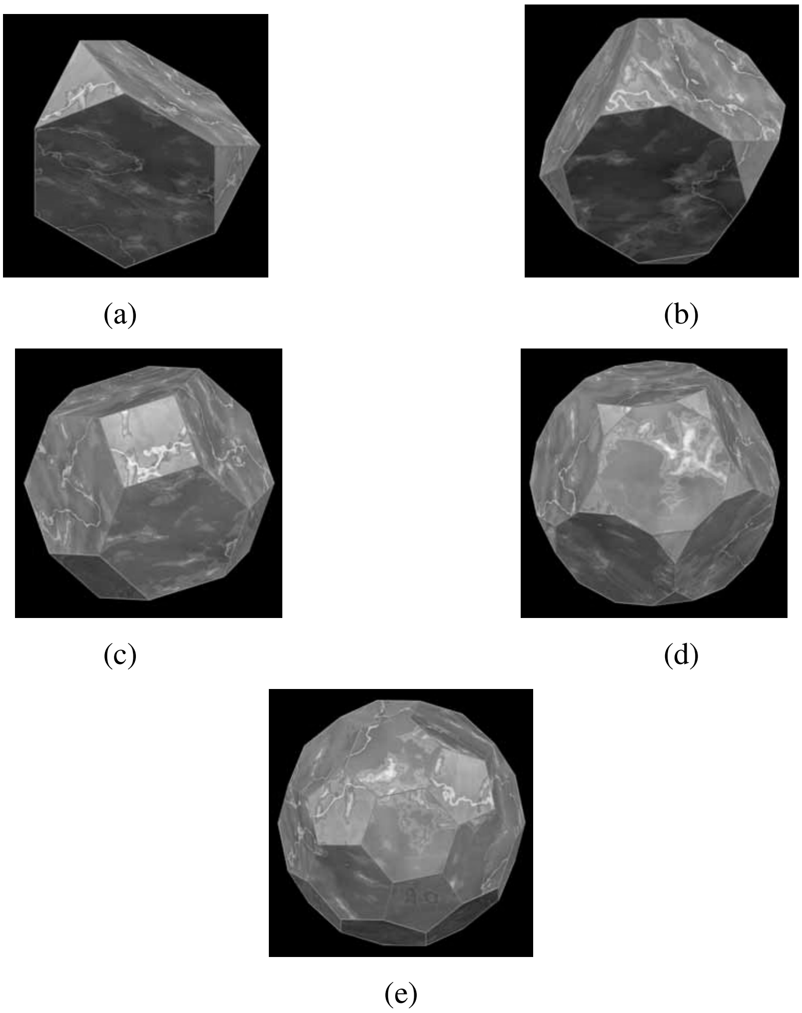


Рис. 4.2. Архимедовы усеченные тела: (a) усеченный тетраэдр, (b) усеченный куб, (c) усеченный октаэдр, (d) усеченный додекаэдр, (e) усеченный икосаэдр

Архимедов усеченный икосаэдр. Среди пяти Архимедовых усеченных тел наибольший интерес представляет усеченный икосаэдр. Этот интерес связан с открытием фуллеренов, за которое группа ученых (Роберт Керл, Харолд Крото, Ричард Смолли) была удостоена в 1996 г. Нобелевской Премии по химии. В своей Нобелевской лекции американский ученый Ричард Смолли, один из авторов экспериментального открытия фуллеренов, говорит об Архимеде (287-212 гг. до н.э.) как о первом исследователе усеченных многогранников, в частности, усеченного икосаэдра, правда, оговариваясь, что, возможно, Архимед присваивает себе эту заслугу и, возможно, икосаэдры усекали задолго до него. Достаточно упомянуть найденные в Шотландии и датированные около 2000 г. до н.э. сотни каменных предметов (по всей видимости, ритуального назначения) в форме сфер и различных многогранников (тел, ограниченных со всех сторон плоскими гранями), включая икосаэдры и додекаэдры. Оригинальная работа Архимеда, к сожалению, не сохранилась, и ее результаты дошли до нас, что называется, «из вторых рук».

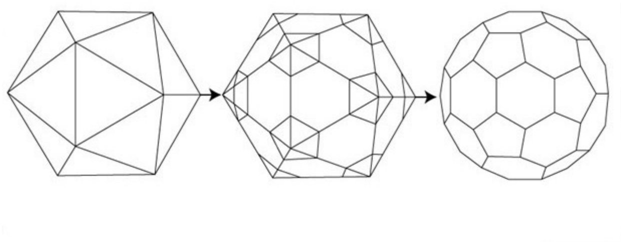


Рис. 4.3. Конструирование Архимедового усеченного икосаэдра из Платонового икосаэдра

Итак, как же сконструировать Архимедов усеченный икосаэдр из Платонова икосаэдра? Ответ иллюстрируется с помощью Рис.4.3. Действительно, как видно из Рис.4.3, в любой из 12 вершин икосаэдра сходятся 5 граней. Если у каждой вершины отрезать (отсечь) 12 частей икосаэдра плоскостью, то образуется 12 новых пятиугольных граней. Вместе с уже имеющимися 20-ю гранями, превратившимися после такого отсечения из треугольных в шестиугольные, они составят 32 грани усеченного икосаэдра. При этом ребер будет 90, а вершин 60 (Рис.4.4).

Рис. 4.4. Усеченный икосаэдр

В упомянутой книге Венниджера «Модели многогранников» [77] читатель может найти 75 различных моделей правильных многогранников. «Теория многогранников, в частности выпуклых многогранников, - одна из самых увлекательных глав геометрии» - таково мнение русского математика Л.А. Люстернака, много сделавшего именно в этой области математики. Развитие этой теории связано с именами выдающихся ученых.

Звездчатые многогранники. Большой вклад в развитие теории многогранников внес Иоганн Кеплер (1571-1630). Во времена Возрождения все Архимедовы тела одно за другим были «открыты» заново. В конце концов, Кеплер в 1619 г. в своей книге «Harmonicus Mundi» («Гармония мира») дал исчерпывающее описание всего набора архимедовых тел — многогранников, каждая грань которых представляет собой правильный многоугольник, а все вершины находятся в эквивалентном положении. В свое время он написал этюд «О снежинке», в котором высказал такое замечание: «Среди правильных тел самое первое, начало и прародитель остальных – куб, а его, если позволительно так сказать, супруга – октаэдр, ибо у октаэдра столько углов, сколько у куба граней». Кеплер первым опубликовал полный список тринадцати Архимедовых тел и дал им те названия, под которыми они известны поныне.

Кеплер первым начал изучать так называемые звездчатые многогранники, которые в отличие от Платоновых и Архимедовых тел являются правильными невыпуклыми многогранниками. В начале прошлого столетия французский математик и механик Л. Пуансо (1777-1859), геометрические работы которого относятся к звездчатым многогранникам, в развитие работ Кеплера открыл существование еще двух видов правильных невыпуклых многогранников. Итак, благодаря работам Кеплера и Пуансо стали известны четыре типа таких фигур (Рис.4.5). В 1812 г. О. Коши доказал, что других правильных звездчатых многогранников не существует.

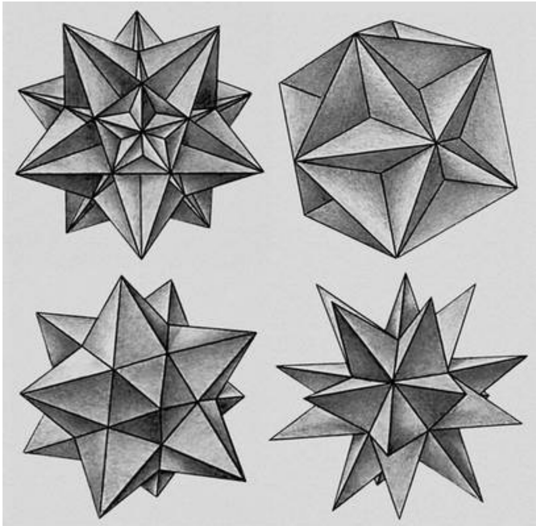


Рис. 4.5. Правильные звездчатые многогранники (тела Пуансо)

4.3. Тайна Египетского календаря

Что такое календарь? Русская пословица гласит: «Время – око истории». Все, что существует во Вселенной: Солнце, Земля, звезды, планеты, известные и неизвестные миры, и все, что есть в природе живого и неживого, все имеет пространственно-временное измерение. Время измеряется путем наблюдения периодически повторяющихся процессов определенной длительности.

Еще в глубокой древности люди заметили, что день всегда сменяется ночью, а времена года проходят строгой чередой: за зимой наступает весна, за весной лето, за летом осень. В поисках разгадки этих явлений человек обратил внимание на небесные светила – Солнце, Луну, звезды – и на неукоснительную периодичность их перемещения по небосводу. Это были первые наблюдения, которые предшествовали зарождению одной из самых древних наук – астрономии.

В основу измерения времени астрономия положила движение небесных тел, которое отражает три фактора: вращение Земли вокруг своей оси, обращение Луны вокруг Земли и движение Земли вокруг Солнца. От того, на каком из этих явлений основывается измерение времени, зависят и разные понятия времени.

Астрономия знает звездное время, солнечное время, местное время, поясное время, декретное время, атомное время и т.д.

Солнце, как и все остальные светила, участвует в движении по небосводу. Кроме суточного движения, Солнце обладает так называемым годичным движением, а весь путь годичного движения Солнца по небосводу называется эклиптикой. Если, например, заметить расположение созвездий в какой-нибудь определенный вечерний час, а затем повторять это наблюдение через каждый месяц, то перед нами предстанет иная картина неба. Вид звездного неба изменяется непрерывно: каждому времени года свойственна своя картина вечерних созвездий и каждая такая картина через год повторяется. Следовательно, по истечении года Солнце относительно звезд возвращается на прежнее место.

Для удобства ориентировки в звездном мире астрономы разделили весь небосвод на 88 созвездий. Каждое из них имеет свое наименование. Из 88 созвездий особое место в астрономии занимают те, через которые проходит эклиптика. Эти созвездия, кроме собственных имен, имеют еще обобщенное название – зодиакальные (от греческого слова “zoop” - животное), а также широко известные во всем мире символы (знаки) и разнообразные аллегорические изображения, вошедшие в календарные системы.

Известно, что в процессе перемещения по эклиптике Солнце пересекает 13 созвездий. Однако астрономы сочли нужным разделить путь Солнца не на 13, а на 12 частей, объединив созвездия Скорпион и Змееносец в единое - под общим названием Скорпион (почему?).

Проблемами измерения времени занимается специальная наука, называемая хронологией. Она лежит в основе всех календарных систем, созданных человечеством. Создание календарей в древности являлось одной из важнейших задач астрономии.

Что же такое «календарь» и какие существуют системы календарей? Слово календарь происходит от латинского слова calendarium, что буквально означает «долговая книга»; в таких книгах указывались первые дни каждого месяца – календы, в которые в Древнем Риме должники платили проценты.

С древнейших времен в странах Восточной и Юго-Восточной Азии при составлении календарей большое значение придавали периодичности движения Солнца, Луны, а также Юпитера и Сатурна, двух гигантских планет Солнечной системы. Есть основание предполагать, что идея создания юпитерианского календаря с небесной символикой 12-летнего животного цикла связана с вращением Юпитера вокруг Солнца, который делает полный оборот вокруг Солнца примерно за 12 лет (11,862 года). С другой стороны вторая гигантская планета Солнечной системы – Сатурн делает полный оборот вокруг Солнца примерно за 30 лет (29, 458 года). Желая согласовать циклы движения гигантских планет, древние китайцы пришли к идее введения 60-летнего цикла Солнечной системы. В течение этого цикла Сатурн делает 2 полных обороты вокруг Солнца, а Юпитер - 5 оборотов.

При создании годичных календарей используются астрономические явления: смена дня и ночи, изменение лунных фаз и смена времен года. Использование различных астрономических явлений привело к созданию у различных народов трех типов календарей: лунные, основанные на движении Луны, солнечные, основанные на движении Солнца, и лунно-солнечные.

Структура египетского календаря. Одним из первых солнечных календарей был египетский, созданный в 4-м тысячелетии до н.э. Первоначально египетский календарный год состоял из 360 дней. Год делился на 12 месяцев ровно по 30 дней в каждом. Однако позже было обнаружено, что такая длительность календарного года не соответствует астрономическому. И тогда египтяне добавили к календарному году еще 5 дней, которые, однако, не были днями месяцев. Это были 5 праздничных дней, соединявших соседние календарные годы. Таким образом, египетский календарный год имел следующую структуру: $365 = 12 \times 30 + 5$. Заметим, что именно египетский календарь является прообразом современного календаря.

Возникает вопрос: почему египтяне разделили календарный год на 12 месяцев? Ведь существовали календари с другим количеством месяцев в году. Например, в календаре майя год состоял из 18 месяцев по 20 дней в месяце.

Следующий вопрос, касающийся египетского календаря: почему каждый месяц имел ровно 30 дней (точнее суток)? Можно поставить некоторые вопросы и по поводу египетской системы измерения времени, в частности по поводу выбора таких единиц времени, как час, минута, секунда. В частности, возникает вопрос: почему единица часа была выбрана таким образом, чтобы она ровно 24 раза укладывалась в сутки, то есть, почему 1 сутки = 24 (2×12) часа? Далее: почему 1 час = 60 минут, а 1 минута = 60 секунд? Эти же вопросы относятся и к выбору единиц угловых величин, в частности: почему окружность разбита на 360°, то есть, почему $2\pi=360°=12\times30°$? К этим вопросам добавляются и другие, в частности: почему астрономы признали целесообразным считать, что существует 12 зодиакальных знаков, хотя на самом деле в процессе своего движения по эклиптике Солнце пересекает 13 созвездий? И еще один «странный» вопрос: почему вавилонская система счисления имела весьма необычное основание – число 60? Нет ли между этими фактами какой-то связи?

Связь египетского календаря с числовыми характеристиками додекаэдра. Анализируя египетский календарь, а также египетские системы измерения времени и угловых величин, мы обнаруживаем, что в них с удивительным постоянством повторяются четыре числа: 12, 30, 60 и производное от них число $360=12\times30$. Возникает вопрос: не существует ли какой-то фундаментальной научной идеи, которая могла бы дать простое и логичное объяснение использованию этих чисел в египетских системах?

Для ответа на это вопрос еще раз обратимся к додекаэдру (Рис.4.6).

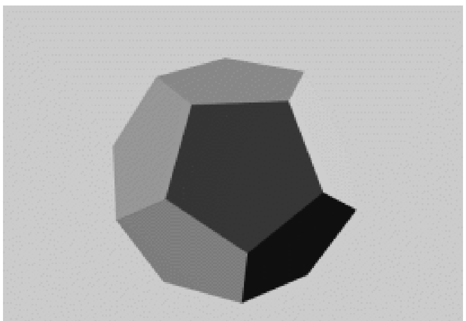


Рис.4.6. Додекаэдр

Возникает вопрос: знали ли египтяне додекаэдр? Историки математики признают, что древние египтяне обладали сведениями о правильных многогранниках. Но знали ли они все пять правильных многогранников, в частности додекаэдр и икосаэдр, как наиболее сложные из них? Древнегреческий философ и математик Прокл приписывает построение правильных многогранников Пифагору. Но ведь многие математические теоремы и результаты (в частности теорему Пифагора) Пифагор позаимствовал у древних египтян в период своей весьма длительной «командировки» в Египет (по некоторым сведениям Пифагор прожил в Египте в течение 22 лет!). Поэтому мы можем предположить, что знание о правильных многогранниках Пифагор, возможно, также позаимствовал у древних египтян (а возможно, у древних вавилонян, потому что согласно легенде Пифагор прожил в древнем Вавилоне 12 лет). Но существуют и другие, более веские доказательства того, что египтяне владели информацией о всех пяти правильных многогранниках. В частности, в Британском Музее хранится игральная кость эпохи Птолемеев, имеющая форму икосаэдра, то есть, «Платонового тела», дуального додекаэдру. Все эти факты дают нам право выдвинуть гипотезу о том, что египтянам был известен додекаэдр. И если это так, то из этой гипотезы вытекает весьма стройная система, позволяющая дать объяснение происхождению египетского календаря, а заодно и происхождению египетской системы измерения временных интервалов и геометрических углов.

Ранее мы установили, что додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 60 плоских углов на своей поверхности (Табл.4.1). Если исходить из гипотезы, что египтяне знали додекаэдр и его числовые характеристики $12, 30, 60$, то каково же было их удивление, когда они обнаружили, что этими же числами выражаются циклы Солнечной системы, а именно, 12-летний цикл Юпитера, 30-летний цикл Сатурна и, наконец, 60-летний цикл Солнечной системы. Таким образом, между такой совершенной пространственной фигурой, как додекаэдр (Рис.4.6), и Солнечной системой, существует глубокая математическая связь! Такой вывод сделали античные ученые. Это и привело к тому, что додекаэдр был принят в качестве «главной фигуры», которая символизировала гармонию Мироздания. И тогда египтяне решили, что все их главные системы (календарная система, система измерения времени, система измерения углов) должны соответствовать числовым параметрам додекаэдра! Поскольку по представлению древних движение Солнца по эклиптике имело строго круговой характер, то, выбрав 12 знаков Зодиака, дуговое расстояние между которыми равнялось ровно 30°, египтяне удивительно красиво согласовали годичное движение Солнца по эклиптике со структурой своего календарного года: один месяц соответствовал перемещению Солнца по эклиптике между двумя соседними знаками Зодиака! Более того, перемещение Солнца на один градус соответствовало одному дню в египетском календарном году! При этом эклиптика автоматически получалась разделенной на 360°. Разделив каждые сутки на две части, следуя додекаэдру, египтяне затем каждую половину суток разделили на 12 частей (12 граней додекаэдра) и тем самым ввели час – важнейшую единицу времени. Разделив один час на 60 минут (60 плоских углов на поверхности додекаэдра), египтяне таким путем ввели минуту – следующую важную единицу времени. Точно также они ввели секунду – наиболее мелкую на тот период единицу времени.

Таким образом, выбрав додекаэдр в качестве главной «гармонической» фигуры мироздания, и строго следуя его числовым характеристикам $12, 30, 60$, египтянам удалось построить чрезвычайно стройный календарь, а также системы измерения времени и угловых величин. Эти системы полностью согласовывалась с их «Теорией Гармонии», основанной на золотой пропорции, поскольку именно эта пропорция лежит в основе додекаэдра.

На Рис.4.7 представлен современный календарь, выполненный в виде додекаэдра. В этом календаре каждая из 12 граней додекаэдра соответствует определенному календарному месяцу.

Рис. 4.7. Календарь в виде додекаэдра

Вот такие удивительные выводы вытекают из сопоставления додекаэдра с Солнечной системой. Но ведь главной пропорцией додекаэдра является золотая пропорция! И тогда, если наша гипотеза правильна (пусть кто-нибудь попытается ее опровергнуть), то отсюда следует, что вот уже много тысячелетий человечество живет под знаком золотого сечения! И каждый раз, когда мы смотрим на циферблат наших часов, который также построен на использовании числовых характеристик додекаэдра $12, 30, 60$, мы прикасаемся к главной «Тайне Мироздания» - золотому сечению, сами того не подозревая!

О календаре майя. Известно, что календарный год в календаре майя имел следующую структуру: 1 год = 360 + 5 = 20×18 + 5 дней, откуда вытекает, что год майя разделили на 18 месяцев по 20 дней в каждом. Числа 20 и 360 были использованы майя в качестве «узловых» чисел своей системы счисления. Однако по своей структуре календарный год майя был подобен структуре египетского календарного года: 1 год = 360 + 5 = 12×30 + 5 дней, в котором числа 12 и 30 были числами додекаэдра. Но что такое число 20 в календаре майя? Обратимся теперь к икосаэдру (Рис.4.8).

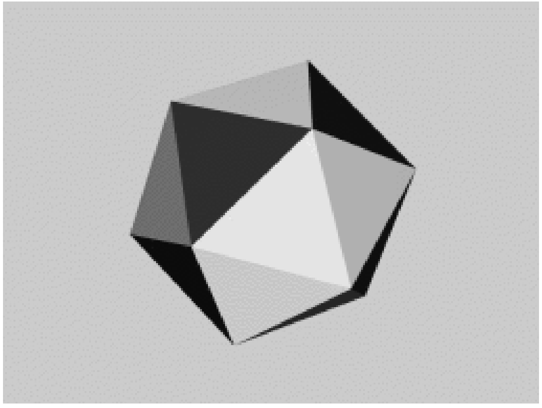


Рис.4.8. Икосаэдр

В икосаэре (Рис.4.8) число граней равно 20 (см. Табл.4.1). Таким образом, древние майя, несомненно, использовали именно эту числовую характеристику икосаэдра как в своем календаре (разделив год на 20 месяцев), так и в своей системе счисления (выбрав числа 20 и 360 в качестве «узловых» чисел своей системы счисления).

4.4. Додекаэдро-икосаэдрическая доктрина

Истоки доктрины. Согласно замечанию комментатора последнего издания сочинений Платона, у него «вся космическая пропорциональность покоится на принципе золотого деления, или гармонической пропорции». Как упоминалось, космология Платона основывается на правильных многогранниках, называемых телами Платона. Представление о «сквозной» гармонии мироздания неизменно ассоциировалось с ее воплощением в этих пяти правильных многогранниках, выражавших идею повсеместного совершенства мира. И то, что главная «космическая» фигура - додекаэдр, символизировавший тело мира и вселенской души, был основан на золотом сечении, придавало последнему особое очарование, смысл главной пропорции мироздания.

Космология Платона стала основой так называемой икосаэдро-додекаэдрической доктрины, которая с тех пор красной нитью проходит через всю человеческую науку. Суть этой доктрины состоит в том, что додекаэдр и икосаэдр есть типичные формы природы во всех ее проявлениях, начиная с космоса и заканчивая микромиром.

Форма Земли. Лучшие умы с незапамятных времён искали гармонию в триединстве: Земля, Человек, Космос. И мысль о том, что в первооснове всего лежат некие простые математические соотношения, крепко пустила корни в древней и современной науке.

Происхождение Земли по гипотезе О.Ю. Шмидта связано с гравитационным уплотнением вещества протопланетного облака более 4-х млрд. лет назад. Первичный состав напыляющейся прото-Земли был однородным и представлял смесь всех видов метеоритного вещества. Согласно Б. Л. Личкову - сотруднику Вернадского - эволюция планеты могла идти путём постепенных переходов от скопления астероидов через простые объёмные угловатые формы ко всё более сложным правильным геометрическим телам, поскольку именно они обладают особыми геометрическими свойствами, удобными для данной эволюции. Переходной стадией к современной форме Земли по мнению Личкова мог быть додекаэдр и Земля должна была бы об этом «хранить память». Землю уподобили кристаллоподобным многогранникам многие исследователи (Пуанкаре, Бомон, Грин, Кислицын, Шафрановский и др.), однако они рассматривали лишь деформацию коры.

В 1929 году российский исследователь Кислицын предлагал использовать модели геокристалла для поисков алмазов и позднее - нефти на территории Союза. Но ещё Платон (а по другим данным Сократ) утверждал, что: «Земля, если взглянуть на неё сверху, похожа на мяч, сшитый из 12-ти кусков кожи». Так представляли нашу планету и все пифагорейцы. Эта гипотеза нашла дальнейшее научное развитие в трудах физиков, математиков и геологов. Так, французский геолог де Бимон и известный математик Пуанкаре считали, что Земля по своей форме представляет собой деформированный додекаэдр.

Как утверждается на сайте «Земля не шар, а растущий кристалл» http://nlo-mir.ru/chudesa-nauki/12782-2012-02-15-17-21-56.html, в России одним из первых сторонников гипотезы "Земля - кристалл" был Степан Кислицын. Но то, что Бимон и Пуанкаре сочли финишем, он принял за старт, полагая, что у непрерывного преобразования лика планеты не может быть конечной, намертво застывшей формы. По гипотезе ученого, около 400-500 миллионов лет назад, когда деформации подверглась геосфера, преимущественно состоявшая из базальтов, додекаэдр перешел в икосаэдр. Он предположил также, что переход из одной кристаллической формы в другую не был полным. И додекаэдр, который напоминает футбольный мяч, сшитый из 12 пятиугольных лоскутов, оказался вписанным в сетку икосаэдра из 20 треугольных граней.

Практическое использование гипотезы "Земля - это растущий кристалл" для объяснения процессов, идущих не только в недрах и на поверхности планеты, но и оказывающих влияние на изменение живого мира и даже на развитие цивилизаций, предприняли еще в СССР Н. Гончаров, В. Макаров, В. Морозов. По их мнению, силовое поле этого растущего кристалла обуславливает икосаэдро-додеакаэдрическую структуру Земли. Эти многогранники вписаны друг в друга. На поверхности Земли проступают проекции икосаэдра и додекаэдра. 62 вершины и середины ребер этого сложного кристалла обладают особыми свойствами. Магнитные, гравитационные, тектонические и другие аномалии соответствуют вершинам и ребрам этих фигур. С их узлами связаны очаги зарождения и развития человеческих цивилизаций: тибетско-китайской; района Двуречья; древнеегипетской; центра Южной Америки; центра Украины.

С узлами совпадают и постоянные районы зарождения ураганов: Багамские острова; Аравийское море; район Моря дьявола, севернее Новой Зеландии; архипелаги Туамоту, Таити. Гигантские завихрения океанических течений тоже действуют вокруг узлов системы, часто совпадая с центрами атмосферного давления. Перелеты птиц на юг осуществляются в узлы системы (запад и юг Африки, Пакистан, Камбоджа, север и запад Австралии). Морские звери, рыба, планктон скапливаются в узлах системы. Киты и тунцы мигрируют из узла в узел по ребрам системы.

С вершинами кристалла совпадают и многочисленные аномальные зоны Земли, наиболее крупные из них: Бермудский треугольник, Море дьявола, Магические ромбы И. Сандерсона. Бермудский треугольник лежит между Майами на полуострове Флорида, Бермудскими островами и Пуэрто-Рико. Еще одна крупнейшая, но малоизвестная аномальная зона располагается в районе Мраморного моря. Следующая аномальная зона совпадает с одним из треугольников икосаэдра, образуя тектонический клубок, где сплетаются в единый узел горные системы: Гималаи, Гиндукуш, Каракорум, Куньлунь, Памир, Тянь-Шань, Алтай.

Представление о Земле как об огромном растущем кристалле является частью научных представлений, которые начали интенсивно развиваться в конце XX века. Согласно все больше и больше привлекающей ученых точки зрения, все во Вселенной либо является кристаллом, либо стремится принять упорядоченную кристаллическую структуру. Так называемые стихийные природные процессы на самом деле являются процессами закономерной перестройки невидимых упорядоченно-кристаллических сетей. Существуют как родственные друг другу, так и антагонистические кристаллические поля. В их взаимодействии в природе способны проявляться процессы синтеза и анализа, построения и разрушения. Таким кристаллом является не только планета Земля, но и сам человек.

Для нас самое главное в этих исследованиях состоит в том, что в этих удивительных моделях структуры Земли едва не главную роль играют додекаэдр и икосаэдр – два Платоновых тела, которые в античной науке выражали гармонию Мироздания.

4.5. Иоганн Кеплер: от «Мистерии» до «Гармонии»

“Misterium Cosmographicum”. Среди патриархов новоевропейской науки нет фигуры загадочней, чем Иоганн Кеплер. С одной стороны, Кеплер — профессиональный астролог, фантазер и фантаст, чей стиль мышления был неприемлем как для творцов классической науки, включая Галилея и Ньютона, так и для ее историков, по крайней мере, историков классической формации. С другой стороны, именно этот — почти средневековый по стилю мышления — звездочет ввел в современную науку ее основные понятия. Современное, то есть механистическое, понимание силы авторы исторического словаря философии возводят к Кеплеру. Он же, оказывается, ввел в обиход слово инерция, отличающее нашу физику от всей прежней, а заодно и физическое понятие энергии, не говоря уже о том, что ему принадлежат первые количественные законы астрономии. Кеплер — учредитель физики неба. Это замечательное словосочетание входит в подзаголовок его основного сочинения: «Новая астрономия, основанная на причинах, или физика неба».

Иоганн Кеплер (1571 - 1630)

Иоганн Кеплер родился в 1571 г. в бедной протестантской семье. В 1591 г. он поступил в Тюбингенскую академию, где получил хорошее математическое образование. Именно там будущий великий астроном познакомился с гелиоцентрической системой мира Николая Коперника.

После окончания академии Кеплер получил степень магистра и затем был направлен преподавателем математики в гимназию г. Грац (Австрия). Его первым астрономическим сочинением была небольшая книжечка со следующим названием: «Предвестник космографических исследований, содержащий тайну мироздания относительно чудесных пропорций между небесными кругами и истинных причин, числа и размеров небесных сфер, а также периодических движений, изложенных с помощью пяти правильных тел Иоганном Кеплером из Вюртемберга, математиком из достославной провинции Штирии». Сам он называл эту книгу, опубликованную в 1597 г., «Misterium Cosmographicum» («Тайна космографии»).

Читая первое сочинение Кеплера «Misterium Cosmographicum» («Тайна космографии»), не устаешь удивляться его фантазии. Глубокое убеждение в существовании гармонии мира наложило отпечаток на все мышление Кеплера. Цель своих исследований, изложенных в «Тайне космографии», Кеплер сформулировал в предисловии:

«Любезный читатель! В этой книжке я вознамерился доказать, что всеблагой и всемогущий Бог при сотворении нашего движущегося мира и при расположении небесных орбит избрал за основу пять правильных тел, которые со времен Пифагора и Платона и до наших дней снискали столь громкую славу, выбрал число и пропорции небесных орбит, а также отношения между движениями выбрал в соответствии с природой правильных тел. Сущность трех вещей - почему они устроены так, а не иначе – особенно интересовали меня, а именно: число, размеры и движения небесных орбит».

Раскрыть тайну мироздания значило, по Кеплеру, ответить на вопрос, который он сам же себе и поставил впервые в истории астрономии. Именно в книжке «Тайна космографии» Кеплеру удалось раскрыть эту тайну. Ее сущность, по мнению Кеплера, состоит в следующем:

«Земля (орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия».

Знаменитый Кеплеров Космический кубок (Рис.4.7), вправляющий в Платоновы тела хрустальные сферы, воплощает эту модель в материи. Самое драгоценное достояние античной геометрии (Платоновы тела) встроено, наконец, в пифагорейскую астрономию.

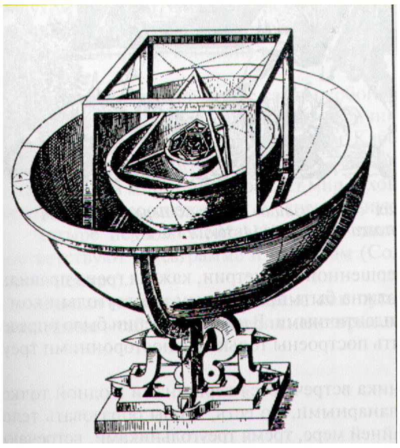


Рис. 4.9. «Космический кубок» – Кеплерова модель Солнечной системы

Конечно, создание Космического кубка было большим успехом молодого астронома, он сделал Кеплеру научное имя. Космический кубок обеспечивал ему доступ к бесценным наблюдательным данным, собранным в «Небесном замке» Тихо Браге. Кеплер ассистирует великому астроному по части изучения Марса. Космический кубок позволил Кеплеру прийти к важному выводу, раскрывающему «тайну мироздания»: Вселенная оказалась устроенной на основе единого геометрического принципа! Но радость оказалась преждевременной. При всей своей экзальтированности Кеплер был наделен всеми качествами, присущими настоящему ученому. Кеплер понимал, что теория должна согласовываться с результатами наблюдений. Сдерживая восторг, охвативший Кеплера при мысли о своем столь чудесном открытии, Кеплер берется за проверку своей модели.

Единый геометрический принцип, вытекающий из Космического кубка, позволил Кеплеру дать ответ на два из трех поставленных им вопросов: (1) объяснить число известных тогда планет (с помощью пяти «Платоновых тел» можно построить 6 сфер, откуда вытекает вывод о существовании 6 планет); (2) дать ответ на вопрос о расстоянии между планетами.

Ответ на третий вопрос (о движении планет) оказался наиболее трудным, и он был получен Кеплером много лет спустя.

Мы не будем останавливаться на всех научных открытиях и достижениях Иоганна Кеплера. Они широко известны. Достаточно упомянуть о трех знаменитых законах Кеплера, которые увековечили его имя.

Но со смертью Кеплера, наступившей в 1630 г., забывают и о золотом сечении, которое он считал одним из «сокровищ геометрии», сравнимым с теоремой Пифагора. И это странное забвение продолжалось почти два столетия. Интерес к золотому сечению и связанным с ним числам Фибоначчи вновь возродился только в 19-м столетии в работах французских математиков Люка и Бине, о работах мы рассказывали в главе 2.

4.6. Икосаэдр как главный геометрический объект математики

Феликс Клейн. Как упоминалось, среди пяти Платоновых тел икосаэдр и додекаэдр занимают особое место. Эти два Платоновых тела непосредственно связаны с пентаклом, а через него – с золотой пропорцией. Додекаэдр и икосаэдр лежат в основе так называемой додекаэдро-икосаэдрической доктрины, которая пронизывает историю всей человеческой культуры, начиная от Пифагора и Платона. И наверное, нельзя считать случайным, что эта доктрина получила неожиданное развитие в трудах выдающегося немецкого математика Феликса Клейна (1849 -1925).

Феликс Клейн родился в Дюссельдорфе в 1849 г. В 1865 г. он поступает в Боннский университет. В 1872 г. Клейн работает в Эрлангене, с 1875 г. – профессор высшей технической школы в Мюнхене, с 1880 г. – профессор университета в Лейпциге. В 1886 он переехал в Геттинген, где возглавил математический институт Геттингенского университета, который на протяжении первой четверти 20-го века был признанным мировым математическим центром. Основные работы Клейна посвящены неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраических уравнений, теории эллиптических функций, теории автоморфных функций. Свои идеи в области геометрии Клейн изложил в работе «Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований» (1872), известной под названием Эрлангенская программа.

Феликс Клейн (1849 - 1925)

Группы симметрий правильных многогранников. По Клейну, каждая геометрия является теорией инвариантов специальной группы преобразований. Расширяя или сужая группу, можно перейти от одного типа геометрии к другому. Евклидова геометрия – это наука об инвариантах метрической группы, проективная геометрия – об инвариантах проективной группы. Классификация групп преобразований дает нам классификацию геометрий. Существенным достижением Клейна является доказательство непротиворечивости неевклидовой геометрии.

Исследуя дискретные группы, Клейн рассмотрел группы симметрий правильных многогранников. Рассмотрим эти понятия на конкретных примерах. Начнем с плоскости симметрии P. Плоскость симметрии в природе проявляется очень часто. Выдающийся русский кристаллограф Г.В. Вульф (1863-1925) назвал плоскость симметрии «основным ключевым элементом симметрии».

Легко убедиться, что квадрат имеет четыре плоскости симметрии – $4P$, а в прямоугольнике можно провести только две плоскости симметрии – $2P$. Таким же образом обнаруживаются плоскости симметрии и для более сложных фигур. Нетрудно убедиться, что куб имеет 9 плоскостей симметрии (Рис.9.8), то есть $9P$.

Рассмотрим теперь второй тип элементов симметрии – оси симметрии. Наиболее наглядной иллюстрацией к понятию «ось симметрии» может служить граненный стакан в подстаканнике, в точности повторяющем форму вкладываемого в него стакана. Вынув стакан из такого подстаканника и вложив его обратно в повернутом положении, мы по существу выполняем операцию «самосовмещения». Количество всевозможных «самосовмещений», которые могут быть выполнены вокруг данной оси, называется ее порядком. Обычно ось симметрии обозначают буквой L, а ее порядок маленькой цифрой, стоящей вслед за этой буквой. Так, например, L_3 обозначает ось симметрии 3-го порядка. Ясно, что равносторонний треугольник имеет ось симметрии L_3, квадрат – L_4, а пентаграмма – L_5, а круг имеет ось симметрии бесконечного порядка L_∞.

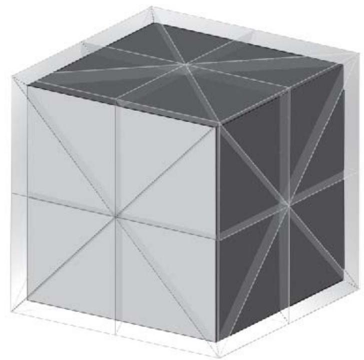


Рис. 4.10. Девять плоскостей симметрии куба

В качестве примера для демонстрации осей симметрии снова рассмотрим куб (Рис.4.10). Перпендикулярно каждой паре граней куба через центры квадратов проходит четверная ось симметрии (Рис.4.10). Это означает, что куб имеет 3 оси симметрии четвертого порядка, то есть, $3L_4$. Куб имеет 8 вершин. Через каждые противоположные пары вершин проходит тройная ось симметрии, которая совпадает с телесной диагональю куба (Рис.4.10). Это означает, что куб имеет 4 оси симметрии третьего порядка, то есть, $4L_3$. В кубе имеется 12 ребер. Через середины каждой пары ребер, параллельно диагоналям граней, проходит двойная ось симметрии (Рис.4.8). Это означает, что куб имеет 6 осей симметрии 2-го порядка, то есть, $6L_2$. Следовательно, полная характеристика осей симметрии куба такова: $3L_4; 4L_3; 6L_2$.

Существуют геометрические тела, имеющие оси симметрии бесконечного порядка L_∞. Такими осями симметрии обладают так называемые «тела вращения», цилиндр, конус и т.д. Любой диаметр шара также представляет собой ось L_∞. Это означает, что шар имеет бесконечное множество осей симметрии бесконечного порядка, то есть, ∞L_{∞}.

Рассмотрим теперь еще один элемент симметрии - центр симметрии C. Ярким примером геометрической фигуры, имеющий центр симметрии, является куб.

Обычно для характеристики симметрии некоторого объекта приводится полная совокупность элементов симметрии. Например, группа симметрий снежинки имеет вид $L_6\,6P$. Это означает, что снежинка имеет одну ось симметрии шестого порядка L_6, то есть, может 6 раз «самосовмещаться» при повороте вокруг оси, и 6 плоскостей симметрии P. Группа симметрий цветка ромашки, имеющего 24 лепестка, имеет вид $L_{24}\,24P$, то есть, этот цветок имеет одну ось 24-го порядка и 24 плоскости симметрии P. Суммируя все элементы симметрии, установленные для куба, приходим к следующей группе симметрий: $3L_4\,4L_3\,6L_2\,9P\,C$.

Как мы уже знаем, куб является одним из 5 Платоновых тел. В Табл.4.2 приведены группы симметрий всех Платоновых Тел.

Таблица 4.2. Группы симметрий Платоновых тел

Многогранник	Форма граней	Симметрия
Тетраэдр	Равносторонние треугольники	$4L_3\,3L_2\,6P$
Гексаэдр(куб)	Квадраты	$3L_4\,4L_3\,6L_2\,9P\,C$
Октаэдр	Равносторонние треугольники	$3L_4\,4L_3\,6L_2\,9P\,C$
Икосаэдр	Равносторонние треугольники	$6L_5\,10L_3\,15L_2\,15P\,C$
Додекаэдр	Пентагоны	$6L_5\,10L_3\,15L_2\,15P\,C$

Анализ симметрий Платоновых тел, приведенных в Табл.4.2, показывает, что группы симметрий куба и октаэдра, а также додекаэдра и икосаэдра совпадают. Это связано с тем, что додекаэдр дуален икосаэдру, а куб дуален октаэдру.

Роль икосаэдра в развитии математики. Кроме Эрлангенской программы и других выдающихся математических достижений, гениальность Феликса Клейна проявилась также в том, что более чем 100 лет назад он сумел предсказать выдающуюся роль Платоновых тел, в частности, икосаэдра, в будущем развитии науки, в частности, математики. В 1884 г. Феликс Клейн опубликовал еще одну книгу «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени» [78], посвященную геометрической теории икосаэдра.

В первой части книги определено место икосаэдра в математике. Согласно Ф. Клейну, ткань математики широко и свободно разбегается листами отдельных теорий. Но есть объекты, в которых сходятся несколько листов, - своеобразные точки ветвления. Их геометрия связывает листы и позволяет охватить общематематический смысл разных теорий. Именно таким математическим объектом, по мнению Клейна, является икосаэдр. Клейн трактует икосаэдр как математический объект, из которого расходятся ветви пяти математических теорий: геометрия, теория Галуа, теория групп, теория инвариантов и дифференциальные уравнения.

Таким образом, главная идея Клейна чрезвычайно проста: «каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра».

В чем же состоит значение идей выдающегося математика с точки зрения теории гармонии? Прежде всего, в качестве объекта, объединяющего «главные листы» математики, выбрано «тело Платона» - икосаэдр, основанный на золотом сечении. Отсюда естественным образом мы можем сделать заключение, что именно золотое сечение и является той главной геометрической идеей, которая, согласно Клейну, может объединить всю математику.

Современники Клейна не сумели по достоинству понять и оценить революционный характер «икосаэдрической» идеи Клейна. Ее значение было понято ровно через 100 лет, то есть только в 1984 г., когда израильский физик Дан Шехтман опубликовал заметку, подтверждающую существование специальных сплавов (названных квазикристаллами), обладающих так называемой «икосаэдрической» симметрией, то есть симметрией 5-го порядка, что строго запрещено классической кристаллографией. В 2011 г. Автор этого открытия Дан Шехтман был удостоен Нобелевской Премии в области химии.

Таким образом, еще в 19-м веке гениальная интуиция Феликса Клейна привела его к мысли о том, что одна из древнейших геометрических фигур – икосаэдр – является главной геометрической фигурой математики. Тем самым Клейн в 19 в. вдохнул новую жизнь в развитие «додекаэдро-икосаэдрического представления» о структуре Вселенной, последователями которого были великие ученые и философы: Платон, построивший свою космологию на основе правильных многогранников, Евклид, посвятивший свои «Начала» изложению теории Платоновых тел, Иоганн Кеплер, использовавший Платоновы тела при создании своего Космического кубка, оригинальной геометрической модели Солнечной системы.

4.7. Использование правильных многогранников в искусстве

В 2002 г. журнал «Энергия» опубликовал серию статей кандидата физико-математических наук Е.А. Каца под названием «Искусство и наука — о многогранниках вообще и усеченном икосаэдре в частности» [79]. Статья содержит много интересной информации об использовании правильных многогранников в искусстве. Материал этой статьи использован автором при написании настоящего параграфа.

Методы изображения Леонардо да Винчи правильных многогранников. Многие авторы отмечают оригинальные способы пространственного изображения икосаэдра, додекаэдра, усеченного икосаэдра и других многогранников, автором которых был Леонардо да Винчи, и приводят репродукции этих прекрасных изображений из иллюстрированной Леонардо книги его современника, францисканского монаха и математика Луки Пачоли (1445-1514) «Божественная пропорция», изданной в 1509 г. Видимо, нельзя считать случайностью причастность Леонардо к изучению этих совершенных геометрических фигур. Более того, это глубоко символично. Титан Возрождения, живописец, скульптор, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи (1452-1519) — символ неразрывности искусства и науки, а следовательно, закономерен его интерес к таким прекрасным, высокосимметричным объектам, как выпуклые многогранники.

Ниже (Рис.4.11) приведены изображения додекаэдра, сделанные Леонардо для книги «Божественная пропорция» двумя методами – методом жестких ребер (Рис.4.11-а) и методом сплошных граней (Рис.4.11-b).

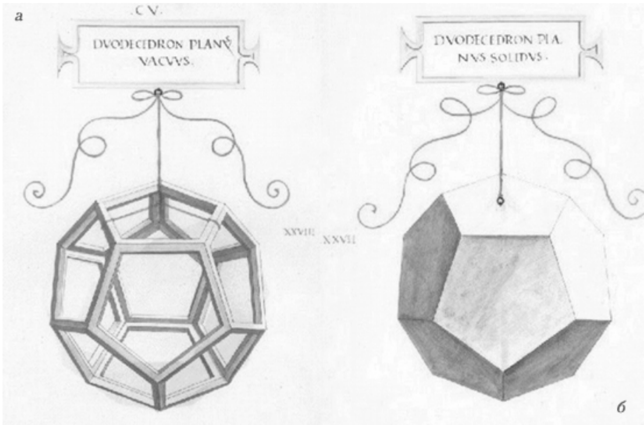


Рис. 4.11. Изображения Леонардо да Винчи додекаэдра методом жестких ребер (a) и методом сплошных граней (b), нарисованные Леонардо да Винчи для книги Луки Пачоли «Божественная пропорция»

Сравнение этих методов на примере додекаэдра убедительно показывает преимущество метода жестких ребер. Суть метода жестких ребер состоит в том, что грани многогранника изображены «пустыми» — не сплошными. Строго говоря, грани не изображаются вовсе, они существуют только в нашем воображении. Зато ребра многогранника изображены не геометрическими линиями (которые, как известно, не имеют ни ширины, ни толщины), а жесткими трехмерными сегментами. Такая техника изображения многогранников позволяет зрителю, во-первых, безошибочно определить, какие из ребер принадлежат передним, а какие — задним граням многогранника (что практически невозможно при изображении ребер геометрическими линиями), и, во-вторых, взглянуть как бы сквозь геометрическое тело, ощутить его в перспективе, глубине, которые теряются при использовании техники сплошных граней.

Ниже дано также изображение усеченного додекаэдра, сделанное Леонардо да Винчи для книги Луки Пачоли по методу жестких граней. Гравюру с изображением усеченного икосаэдра (Рис.4.12) Леонардо предваряет надписью по латыни Ycocedron Abscisus (усеченный икосаэдр) Vacuus. Термин Vacuus как раз и означает, что грани многогранника изображены «пустыми» — не сплошными.

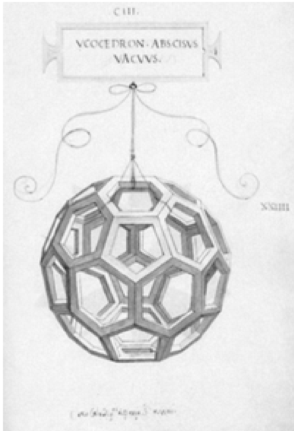


Рис. 4.12. Изображение усеченного додекаэдра методом жестких ребер, нарисованные Леонардо да Винчи для книги Луки Пачоли «Божественная пропорция»

Заметим, что Иоганн Кеплер использовал метод жестких граней при изображении многогранников, составляющих его «Космический кубок» (Рис.4.9).

Полихедра Луки Пачоли. Книга Пачоли, для которой Леонардо выполнил 60 иллюстраций различных многогранников, оказала большое влияние на развитие геометрии того времени, в частности, стереометрию многогранников. Как упоминалось, Пачоли был также одним из крупнейших европейских алгебраистов 15-го века и, что не менее важно, изобрел принцип так называемой двойной записи, который и в настоящее время применяется во всех без исключения системах бухгалтерского учета. Так что его смело можно называть «отцом современной бухгалтерии». Однако довольно загадочная и противоречивая личность Пачоли до наших дней вызывает ожесточенные споры историков науки. Достоверно известно, что Лука Пачоли родился в 1445 г. в итальянском городке Борго-Сан-Сеполькро. В детстве он учился в мастерской художника и математика Пьеро дела Франческа, а затем в университете Болоньи, который в 15-16-м веках был одним из лучших в Европе (в разное время его студентами были, например, Коперник и Дюрер). В 1472 г. Пачоли под именем Фра Лука ди Борго-Сан-Сеполькро вернулся в родной город и начал работу над самым знаменитым из своих сочинений, книгой «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», напечатанной в Венеции в 1494 г. В 1496 г. его приглашают с лекциями в Милан, где он знакомится с Леонардо да Винчи. Леонардо, прочитав «Сумму», забросил работу над собственной книгой по геометрии и начал готовить иллюстрации к новому труду Пачоли «Божественная пропорция».

Некоторые исследователи обвиняют автора «Божественной пропорции» в плагиате неизданных рукописей, принадлежащих перу его учителя Пьеро дела Франческа. Другие, наоборот, защищают Пачоли от этих обвинений. В общем — дело темное. А вот внешность Пачоли нам доподлинно известна благодаря его портрету (Рис.4.13) кисти Якопо Барбари (1440-1515). Работа Барбари прекрасна во всех отношениях и, прежде всего, в передаче личности изображаемых персонажей. Каждая деталь композиции на картине Барбари полна смысла. Художник проявляет глубокое понимание взаимосвязи искусства и науки, так свойственное именно мастерам Возрождения. Пачоли в рясе францисканского монаха изображен стоящим за столом с геометрическими инструментами и книгами (в правом нижнем углу картины — модель додекаэдра).

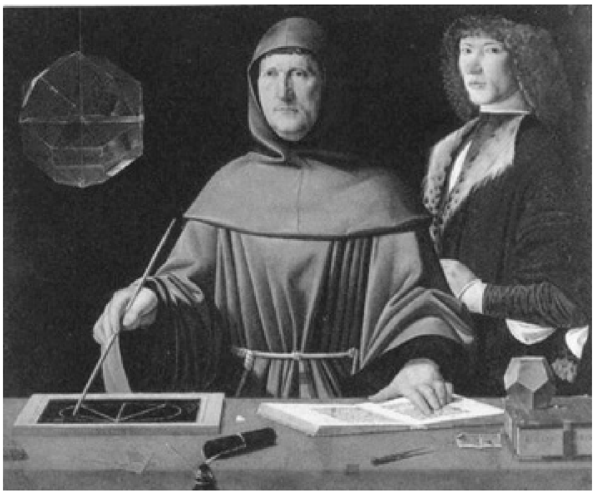


Рис. 4.13 . Картина «Лука Пачоли» кисти художника Якопо Барбари

Внимание Пачоли и красивого молодого человека, стоящего справа и чуть сзади от него, приковано к изучению многогранника, подвешенную стеклянную модель которого мы видим в левом верхнем углу композиции. Выбор многогранника не случаен: это ромбический кубооктаэдр или полихедра (Рис.4.14). По мнению современного математика и художника Джорджа Харта, Пачоли сам выбрал его для картины, так как особенно гордился его открытием.

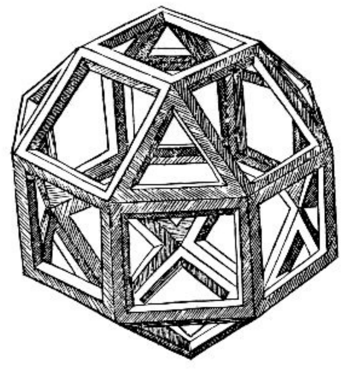


Рис. 4.14. Ромбический кубооктаэдр или полихедра Луки Пачоли

Альбрехт Дюрер. Личность молодого человека, стоящего рядом с Пачоли на картине Якопо Барбари (Рис.4.11), до сих пор вызывает споры историков искусства, одни из которых считают, что это автопортрет самого Барбари, другие же отождествляют его с Альбрехтом Дюрером (1471-1528), художником и графиком, величайшим представителем немецкого Ренессанса. Это предположение, по меньшей мере, спорно. Зато, и это гораздо более важно в нашем контексте, доподлинно известно другое. Дюрер был поражен художественной манерой Барбари, строившего свои композиции на основе глубокого изучения системы пропорций, то есть, строго определенного соотношения частей изображаемого между собой. «Я в то время более желал узнать, в чем состоит его способ, нежели приобрести королевство», — признавался Дюрер впоследствии.

Дюрер стал изучать законы перспективы, мечтал встретиться с прославленными итальянскими мастерами, учиться у них, состязаться с ними. С этой целью в 1505 г. Дюрер отправляется в путешествие по Италии. Кто были его учителями в школе перспективы, в точности неизвестно (среди прочих называются имена Луки Пачоли и Пьеро дела Франческа), но обучение в этой школе Дюрер продолжал всю жизнь. За три года до смерти, в 1525 г., пятидесятичетырехлетний мастер, автор более шестидесяти живописных полотен и нескольких сотен гравюр, спешит поделиться с потомками секретами перспективы, накопленными им за жизнь. Он издает трактат «Руководство к измерению» (а затем еще два: «Наставление к укреплению городов» в 1527 г. и «Четыре книги о пропорциях» в 1528 г.). Книга Дюрера — серьезный научный вклад в теорию перспективы, стереометрию многогранников. Он первым описал несколько неизвестных в то время архимедовых тел, а также разработал и впервые опубликовал в своей книге модели плоских разверток различных многогранников, включая развертку усеченного икосаэдра. В наше время подобные развертки, из которых собираются объемные модели многогранников, широко используются при изучении элементарных форм кристаллов, структуры молекул (фуллеренов, например), вирусов и т.д. и т.п.

В 1512 году в черновом варианте своего первого трактата о пропорциях Дюрер писал: «Все потребности человека настолько пресыщаются преходящими вещами в случае их избытка, что последние вызывают в нем отвращение, исключая одну только жажду знаний... Желание много знать и через это постигнуть сущность всех вещей заложено в нас от природы». Эти слова стали прологом к теоретическим трудам Дюрера. Жаждой знаний проникнуто и все искусство той эпохи, крупнейшие представители которой становятся учеными-естествоиспытателями. Идею единства художественного вдохновения и математической теории отражает и его созданная в 1514 г. знаменитая гравюра «Меланхолия», воплотившая образ причастного к Божественному наитию существа, окруженного инструментами геометрии (Рис.4.15). Присутствие на гравюре многогранника (скорее всего, усеченного ромбоэдра), конечно же, не случайно.

Сотни страниц исписаны искусствоведами в попытках объяснить значения символов, использованных Дюрером. Один из них, Э. Пановски, считает: «Дюрер представил "Меланхолию" как один из четырех темпераментов и как одно из семи свободных искусств — геометрию. Он воплощает в ней тип художника Ренессанса, который ценит практическое умение, не избегает математической теории, и который, чувствуя себя причастным божественному вдохновению, одновременно страдает от всего человеческого несовершенства и ограниченности. Таким образом, это в некотором смысле духовный автопортрет Дюрера».

Рис. 4.15. Альбрехт Дюрер. «Меланхолия»

Пьеро дела Франческо. Многие художники разных эпох и стран испытывали постоянный интерес к изучению и изображению многогранников. Пик этого интереса приходится, конечно, на эпоху Возрождения. Изучая явления природы, художники Возрождения стремились найти опирающиеся на опыт науки способы их изображения. Учения о перспективе, светотени и пропорциях, построенные на математике, оптике, анатомии, становятся основой нового искусства. Они позволяют художнику воссоздавать на плоскости трехмерное пространство, добиваться впечатления рельефности предметов. Для некоторых мастеров Возрождения многогранники являлись просто удобной моделью для тренировки мастерства перспективы. Другие восхищались их симметрией и лаконичной красотой. Третьих, вслед за Платоном, привлекали их философские и мистические символы.

Список крупнейших мастеров Возрождения, часто изображавших и глубоко изучавших геометрию многогранников (кроме уже названных Леонардо и Дюрера), необходимо начать с Пьеро дела Франческа (около 1420-1492). О жизни и личности Пьеро дела Франческа, гениального художника, серьезного теоретика искусства и выдающегося геометра сохранилось мало достоверных сведений. Известно, что он родился в семье ремесленника в небольшом городе Борго-Сан-Сеполькро в Умбрии, учился во Флоренции, затем работал в ряде городов Италии, в том числе в Риме. Творчество Пьеро дела Франческа вышло за рамки местных живописных школ и определило искусство итальянского Возрождения в целом. Однако немногие знают, что дела Франческа был выдающимся математиком, внесшим, в частности, существенный вклад в теорию многогранников. При жизни он был непререкаемым авторитетом в геометрии и науке о перспективе. Однако после смерти имя дела Франческа-ученого было на долгое время предано забвению. Во многом это произошло из-за того факта, что, по-видимому, сразу же после смерти художника Лука Пачоли, который был учеником дела Франческо, опубликовал большую часть его работ в своей книге (без ссылок на авторство дела Франческа). К счастью, в начале 20-го века были обнаружены оригиналы трех, считавшихся утерянными, математических рукописей дела Франческа (сейчас они находятся в Библиотеке Ватикана). После пяти веков забвения слава великого математика своего времени вернулась к художнику. В настоящее время доподлинно известно, что именно Пьеро дела Франческа был первым из мастеров Возрождения, открывшим (не зная, конечно, что это уже было сделано Архимедом) и подробно описавшим архимедовы тела, в частности пять усеченных Платоновых тел: усеченные тетраэдр, октаэдр, додекаэдр и, что особенно важно, усеченный икосаэдр. В его рукописи «О пяти правильных телах» («Libbelus de quinque corporibus regularibus»), датированной 1480 г., обнаружено старейшее из дошедших до наших дней изображение усеченного икосаэдра.

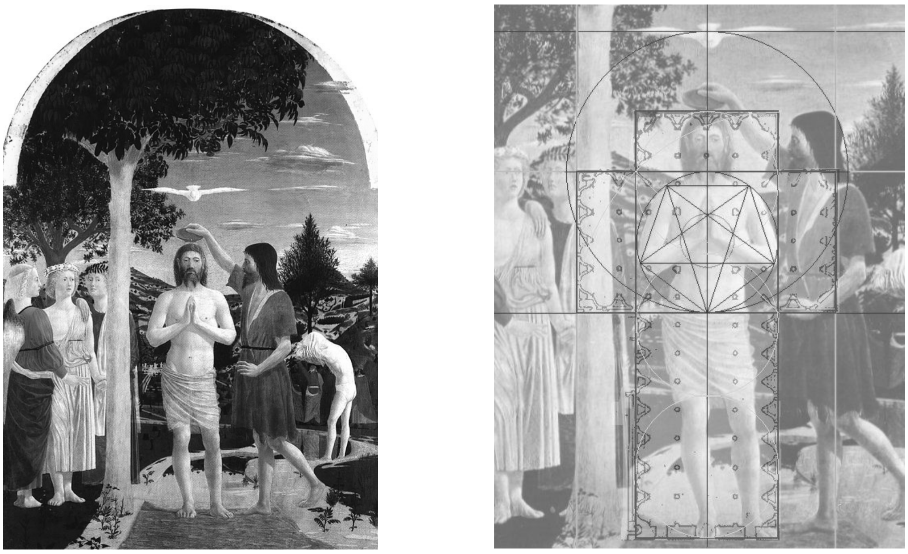


Рис. 4.16. Картина Пьеро дела Франческа "Крещение Христа" (1450-55) и ее гармонический анализ, основанный на золотом сечении

Художественные произведения Пьеро дела Франческа отличаются величественной торжественностью, благородством и гармонией образов, глубокой продуманностью пропорций, разумной ясностью перспективных построений. Одним из ярких примеров его художественного стиля является картина "Крещение Христа" (1450-55), хранящаяся в Лондонской галерее (Рис.4.14). В центре картины Христос. Он по щиколотку в водах реки, его руки сложены в католическом молитвенном жесте. Рядом Иоанн Креститель, он льет воду из блюдца на голову Христу (крещение обливанием). Над головой Иисуса парит голубь – Святой Дух.

Искусство интарсии. В конце 15-го — начале 16-го веков в северной Италии было очень популярно искусство интарсии (intarsia) — особого вида инкрустации, мозаики, собранной из тысяч мелких кусочков различных пород дерева. Два выдающихся образца этого искусства с изображением многогранников показаны на Рис.4.17. Обе мозаики созданы Фра Джованни да Верона (1457-1525) для церкви Santa Maria in Organo в Вероне ориентировочно в 1520 г. Изображение полуоткрытых ставень создает эффект объемности на плоской мозаике, который усиливается изображением многогранников (в том числе, усеченного икосаэдра) в разработанной Леонардо технике жестких ребер.

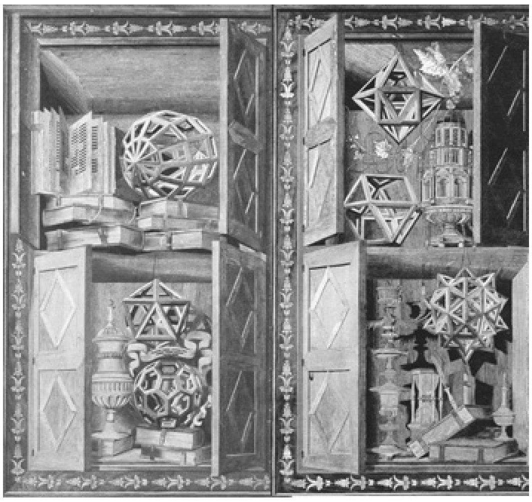


Рис. 4.17. Интарсии работы Фра Джовани да Верона, созданные для церкви Santa Maria in Organo в Вероне

«Тайная вечеря» Сальвадора Дали. Нельзя удержаться от удовольствия привести примеры изображений многогранников, выполненных знаменитым художником 20-го века Сальвадором Дали (1904-1989). Несколько слов об этом оригинальном художнике. Как известно Сальвадор Дали - испанский художник. Один из самых известных представителей сюрреализма. Превосходный рисовальщик и живописец, Дали создавал похожие на кошмарные видения образы, которые сам называл "рисованными снимками сновидений". Некоторые наиболее часто повторяющиеся образы, например часы, под лучами солнца теряющие форму, стали своего рода фирменным знаком Дали. В 1940 г. Дали уезжает в США, где ведёт жизнь затворника. В 1955 г. Дали возвращается в Испанию. Дали также занимался скульптурой, оформлением книг, его авторству принадлежат ювелирные изделия, декорации для театра и кино. Творчество Сальвадора Дали до сих пор вызывает споры (многие критики считают, что после 1930-х гг. он не создал ничего заслуживающего внимания).

В 1955 году Дали создает одну из самых знаменитых своих работ — "Тайную вечерю" (Рис.4.18).

Рис. 4.18. Сальвадор Дали. Тайная вечеря (1955)

Это большое полотно — подлинный шедевр живописи. Додекаэдр в этой картине олицетворяет духовную гармонию, нравственную чистоту и величие. Представляется интересной трактовка этого произведения Завадской, которая писала: "В нем воплощено философско-религиозное и эстетическое кредо Дали. Здесь воздух и свет, и конструкция, и сон, и явь, и надежда, и сомнение. В центре большого горизонтального полотна (167x288) изображен Христос в трех ипостасях — как сын, сошедший на Землю, он сидит за столом со своими учениками, но потом мы замечаем, что он вовсе и не сидит за столом, а погружен по пояс в воду — то есть крестится водой, или духом святым, тем самым воплощая вторую ипостась троицы, а над ним призрачно высится мужской торс, словно часть композиции "Вознесение" — возвращение к Богу Отцу. Апостолы изображены низко склонившими головы на стол — они словно поклоняются Христу (или спят!) — в этом случае есть аллюзия на евангельский текст, содержащий просьбу Христа не спать, пока он молит Бога: "Чашу мимо пронеси". К этому необходимо лишь присовокупить идеи, высказанные академиком Б.Раушенбахом в статье "О логике триединости": "...непостижимой является вовсе не логическая структура Троицы (она вполне разумна), а кардинальное качество Троицы, жизнь Бога в Самом Себе".

Творчество Маурица Эшера. Эшер Мауриц Корнелис (Escher, Maurits Cornelis) (1898–1972), голландский график. Родился 17 июня 1898 в Леувардене (Голландия) в семье инженера-гидравлика. В 1919 поступил в Школу архитектуры и декоративных искусств в Харлеме, но вскоре оставил архитектуру ради занятий графикой. До 1937 много путешествовал по Европе, делал наброски, обращая особое внимание на обманчивые, двусмысленные элементы пейзажа.

Творчество Эшера весьма почитаемо учеными, в частности, математиками и кристаллографами. М.П. Шаскольская, одна из основателей советской школы кристаллографии, ученица академика А.В. Шубникова, в своей книге «Очерки о свойствах кристаллов» пишет: «Каждый кристаллографический конгресс обычно сопровождается выставками: кристаллографического оборудования, книг, фотографий, наилучших искусственно выращенных кристаллов. А на кристаллографическом конгрессе в Кембридже (1960) событием стала выставка картин голландского художника Маурица Эшера. Сам художник, пожилой человек с узким смуглым лицом, живыми глазами и небольшой бородкой, присутствовал как делегат конгресса, давал пояснения к своим рисункам и рассказал о них в докладе на конгрессе. Нет, Эшер не был ученым-кристаллографом, он — художник, график, окончивший в 1922 году школу архитектуры в Гарлеме, продолжавший затем свое художественное образование в Испании и Италии, известный миру по многим художественным выставкам. И вот теперь его рисунки привлекли внимание кристаллографов. Художник и кристаллография? Что общего между ними? А дело в том, что Мауриц Эшер в своих рисунках как бы открыл и интуитивно проиллюстрировал законы сочетания элементов симметрии, т.е. те законы, которые властвуют над кристаллами, определяя и их внешнюю форму, и их атомную структуру, и их физические свойства. Эшер увлекается периодическими рисунками, составлением мозаичных узоров из повторяющихся фигур. Он вписывает или, вернее, вырисовывает одно изображение в другое, так чтобы одинаковые фигурки периодически повторялись, и между ними не оставалось пустых мест». Но ведь это и есть закон, по которому размещаются частицы в структуре кристалла — закон плотнейшей упаковки: периодическое повторение одинаковых групп частиц, без промежутков и нарушений.

Мир Матюшки Тейи Крашек. Матюшка Тейя Крашек (Matjuska Teja Krasek) получила степень бакалавра живописи в Колледже визуальных искусств (Любляна, Словения) и является свободным художником. Живет и работает в Любляне. Ее теоретическая и практическая работа фокусируется на симметрии как связующей концепции между искусством и наукой. Ее художественные работы представлялись на многих международных выставках и опубликованы в международных журналах (Leonardo Journal, Leonardo on-line).

М.Т. Крашек на своей выставке ‘Kaleidoscopic Fragrances’ , Любляна, 2005

Художественное творчество Матюшки Тейи Крашек связано с различными видами симметрии, плитками и ромбами Пенроуза, квазикристаллами, золотым сечением как главным элементом симметрии, числами Фибоначчи и др. С помощью рефлексии, воображения и интуиции она пытается подобрать новые отношения, новые уровни структуры, новые и различные виды порядка в этих элементах и структурах. В своих работах она широко использует компьютерную графику как весьма полезное средство для создания художественных работ, которое является связующим звеном между наукой, математикой и искусством.

На Рис.4.19 приведена композиция Т.М. Крашек, связанная с числами Фибоначчи. Если мы выберем одно из чисел Фибоначчи (например, 21 см) для длины стороны ромба Пенроуза в этой ощутимо нестабильной композиции, мы можем наблюдать, как длины некоторых отрезков в композиции образуют последовательность Фибоначчи.

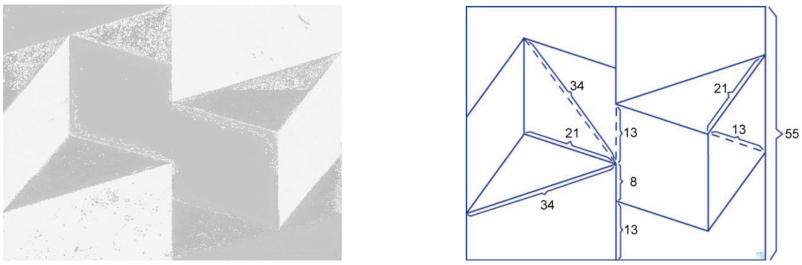
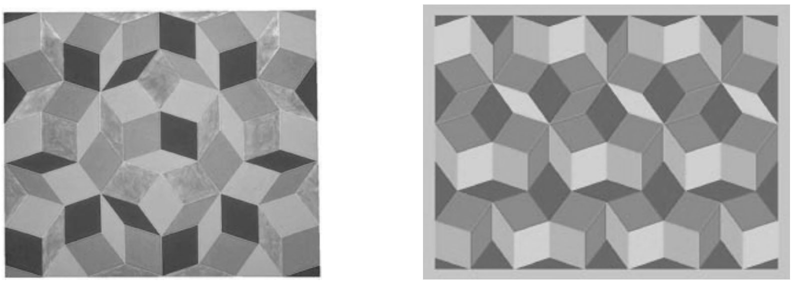
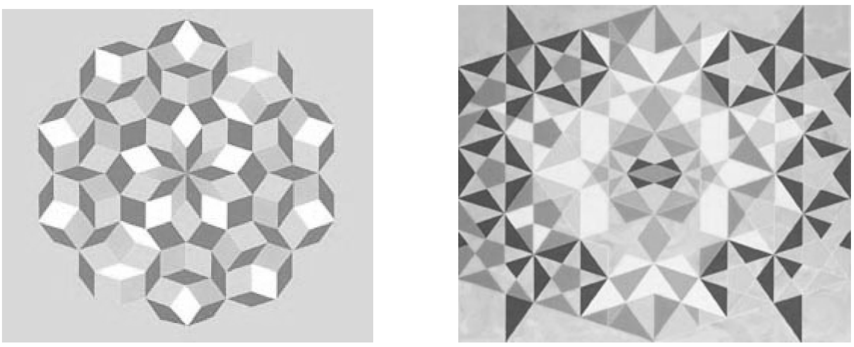


Рис. 4.19. Матюшка Тейя Крашек «Числа Фибоначчи», холст, 1998

Большое количество художественных композиций художницы посвящено квазикристаллам и решеткам Пенроуза (Рис.4.20).



(a) (b)



(c) (d)

Рис. 4.20. Мир Тейи Крашек: (a) Мир квазикристаллов. 1996;
(b) Звезды. 1998; (c) 10/5. 1998; (d) Квазикуб. 1999

В композиции Крашек “Stars for Donald” (Рис.4.21) мы можем наблюдать бесконечное взаимодействие ромбов Пенроуза, пентаграмм, пятиугольников, уменьшающихся к центральной точке композиции. Отношения золотой пропорции представлены многими различными способами в различных шкалах.

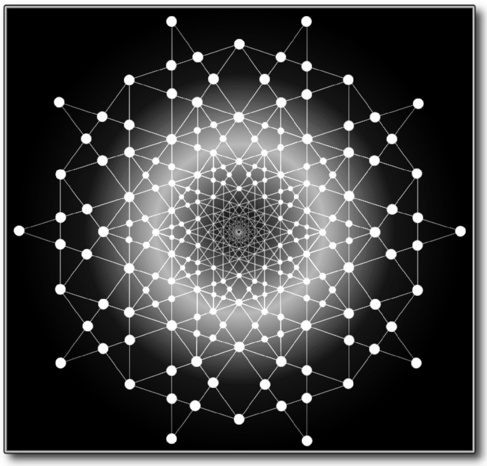


Рис. 4.21. Матюшка Тейя Крашек “Stars for Donald”, 2005

Художественные композиции Матюшки Тейи Крашек привлекли огромное внимание представителей науки и искусства. Ее искусство приравнивают к искусству Маурица Эшера и называют словенскую художницу «Южно-европейским Эшером» и «Словенским подарком» мировому искусству.

4.8. Квазикристаллы Дана Шехтмана

Открытие квазикристаллов. 12 ноября 1984 г. в небольшой статье, опубликованной в авторитетном журнале «Physical Review Letters” израильским физиком Даном Шехтманом, было предъявлено экспериментальное доказательство существования металлического сплава с исключительными свойствами. При исследовании методами электронной дифракции этот сплав проявил все признаки кристалла. Его дифракционная картина составлена из ярких и регулярно расположенных точек, совсем как у кристалла. Однако эта картина характеризуется наличием «икосаэдрической» или «пентангональной» симметрии, строго запрещенной в кристалле из геометрических соображений. Такие необычные сплавы были названы квазикристаллами. Менее чем за год были открыты многие другие сплавы подобного типа. Их было так много, что квазикристаллическое состояние оказалось намного более распространенным, чем это можно было бы представить.

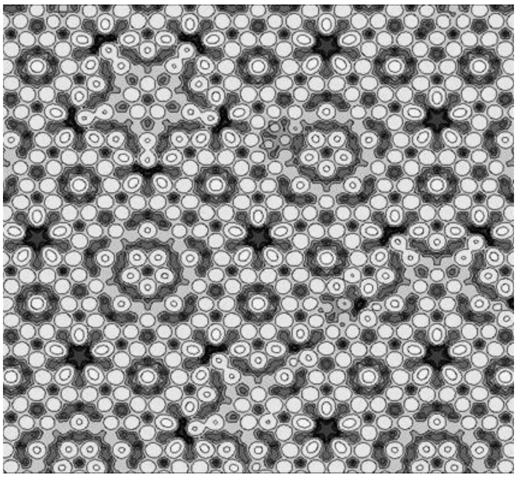
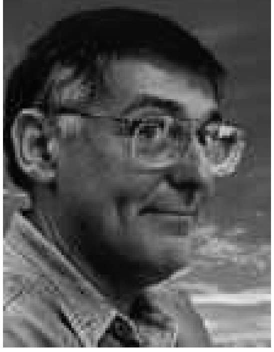


Рис. 4.22. Атомная модель квазикристалла

Квазикристаллы наблюдались впервые Даном Шехтманом в экспериментах по дифракции электронов на быстроохлаждённом сплаве Al6Mn, проведение 8 апреля 1982 года, за что ему в 2011 году была присвоена Нобелевская премия по химии. Первый открытый им квазикристаллический сплав получил название «шехтманит» (англ. Shechtmanite). Полученная картина дифракции содержала типичную для кристаллов картину, но при этом в целом имела точечную симметрию икосаэдра, то есть, в частности, обладала осью симметрии пятого порядка, невозможной в трёхмерной периодической решётке. Было показано, что симметрия квазикристаллов присутствует на всех масштабах, вплоть до атомного (Рис.4.22), и необычные вещества действительно являются новой структурой организации материи.

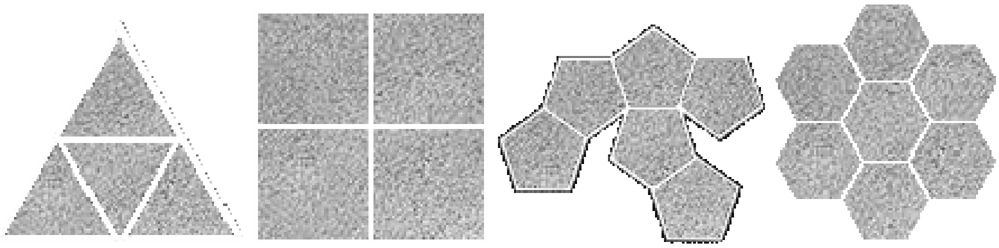


Израильский физик Дан Шехтман

Понятие квазикристалла представляет фундаментальный интерес, потому что оно обобщает и завершает определение кристалла. Теория, основанная на этом понятии, заменяет извечную идею о «структурной единице, повторяемой в пространстве строго периодическим образом», ключевым понятием дальнего порядка. Как подчеркивается в статье «Квазикристаллы» известного физика Д Гратиа [80], «это понятие привело к расширению кристаллографии, вновь открытые богатства которой мы только начинаем изучать. Его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике».

Основной закон кристаллографии. Что же такое квазикристалл? Каковы его свойства и как его можно описать? Как известно, согласно основному закону кристаллографии, на структуру кристалла накладываются строгие ограничения. Согласно классическим представлениям, кристалл составляется ad infinitum из единственной ячейки, которая должна плотно (грань к грани) «устилать» всю плоскость без каких-либо ограничений.

Как известно, плотное заполнение плоскости может быть осуществлено с помощью треугольников (Рис.4.23-a), квадратов (Рис.4.23-b) и шестиугольников (Рис.4.23-d). С помощью пятиугольников (пентагонов) такое заполнение невозможно (Рис.4.23-c).



a) b) c) d)

Рис. 4.23. Плотное заполнение плоскости может быть осуществлено с помощью треугольников (a), квадратов (b) и шестиугольников (d)

Таковы были каноны традиционной кристаллографии, которые существовали до открытия необычного сплава алюминия и марганца, названного квазикристаллом. Такой сплав образуется при сверхбыстром охлаждении расплава со скоростью 106К в секунду. При этом при дифракционном исследовании такого сплава на экране упорядоченная картина, характерная для симметрии икосаэдра, обладающего знаменитыми запрещенными осями симметрии 5-го порядка.

Экспериментальное изучение квазикристаллов. Несколько научных групп во всем мире на протяжении нескольких последующих лет изучили этот необычный сплав посредством электронной микроскопии высокого разрешения. Все они подтвердили идеальную однородность вещества, в котором симметрия 5-го порядка сохранялась в макроскопических областях с размерами, близкими к размерам атомов (несколько десятков нанометров).

Согласно современным воззрениям разработана следующая модель получения кристаллической структуры квазикристалла. В основе этой модели лежит понятие «базового элемента». Согласно этой модели, внутренний икосаэдр из атомов алюминия окружен внешним икосаэдром из атомов марганца. Икосаэдры связаны октаэдрами из атомов марганца. В «базовом элементе» имеется 42 атома алюминия и 12 атомов марганца. В процессе затвердевания происходит быстрое формирование «базовых элементов», которые быстро соединяются между собой жесткими октаэдрическими «мостиками». Напомним, что гранями икосаэдра являются равносторонние треугольники. Чтобы образовался октаэдрический мостик из марганца, необходимо, чтобы два таких треугольника (по одному в каждой ячейку) приблизились достаточно близко друг к другу и выстроились параллельно. В результате такого физического процесса и образуется квазикристалличсеская структура с «икосаэдрической» симметрией.

В последние десятилетия было открыто много типов квазикристаллических сплавов. Кроме имеющих «икосаэдрическую» симметрию (5-го порядка) существуют также сплавы с декагональной симметрией (10-го порядка) и додекагональной симметрией (12-го порядка). Физические свойства квазикристаллов начали исследовать лишь недавно.

Каково же практическое значение открытия квазикристаллов? Как отмечается в упомянутой выше статье Гратиа [81], «механическая прочность квазикристаллических сплавов резко возрастает; отсутствие периодичности приводит к замедлению распространения дислокаций по сравнению с обычными металлами … Это свойство имеет большое прикладное значение: применение икосаэдрической фазы позволит получить легкие и очень прочные сплавы внедрением мелких частиц квазикристаллов в алюминиевую матрицу».

Плитки Пенроуза. Когда Дан Шехтман привел экспериментальное доказательство существования квазикристаллов, обладающих икосаэдрическиой симметрией, физики в поисках теоретического объяснения феномена квазикристаллов, обратили внимание на математическое открытие, сделанное на 10 лет раньше английским математиком Роджером Пенроузом. В качестве «плоского аналога» квазикристаллов были выбраны плитки Пенроуза, представляющие собой апериодические регулярные структуры, образованные «толстыми» и «тонкими» ромбами, подчиняющиеся пропорции «золотого сечения». Именно плитки Пенроуза были взяты на вооружение кристаллографами для объяснения феномена квазикристаллов. При этом роль ромбов Пенроуза в пространстве трех измерений начали играть икосаэдры, с помощью которых и осуществляется плотное заполнение трехмерного пространства.

Рассмотрим еще раз внимательно пентагон, изученный нами в главе 2 (Рис.4.24).

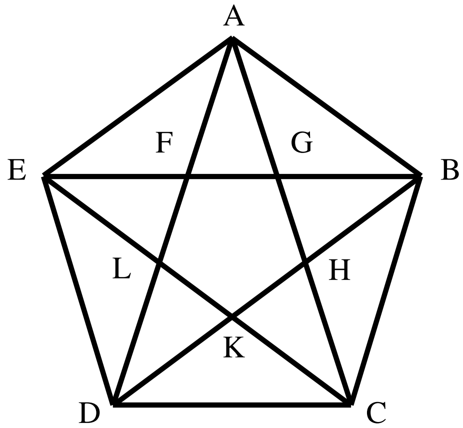


Рис. 4.23. Пентагон

После проведения в пентагоне диагоналей исходный пентагон *ABCDE* может быть представлен как совокупность трех типов геометрических фигур. В центре находится новый пентагон *FGHKL*, образуемый точками пересечения диагоналей. Кроме того пентагон на Рис.4.24 включает в себя пять равнобедренных треугольников 1-го типа (*AGF, BGH, CKH, DLK, EFL*) и пять равнобедренных треугольников 2-го типа (*ABG, BCH, CDK, DEL, EAF*). Треугольники 1-го типа являются «золотыми», так как отношение бедра к основанию равно золотой пропорции; они имеют острые углы в 36° при вершине и острые углы в 72° при основании. Треугольники 2-го типа также являются «золотыми», так как отношение основания к бедру равно золотой пропорции; они имеют тупой угол в 108° при вершине и острые углы в 36° при основании.

А теперь соединим два равнобедренных треугольника 1-го типа своими основаниями, а затем то же самое сделаем с равнобедренными треугольниками 2-го типа. В результате мы получим два типа «золотых» ромбов (Рис.4.25) .

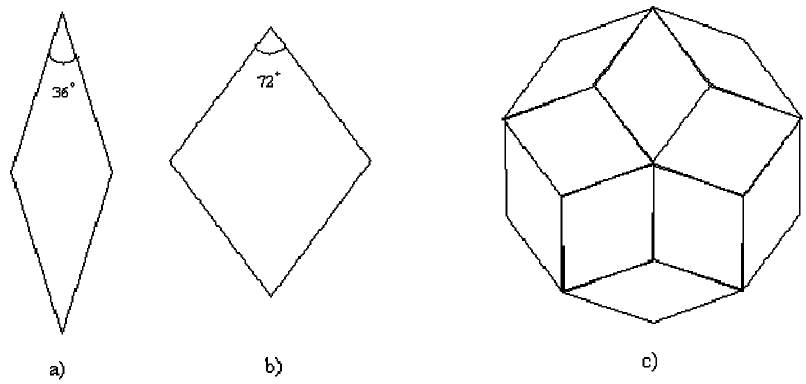


Рис. 4.25. «Золотые» ромбы: a) «тонкий» ромб; b) «толстый» ромб; c) начало конструирования мозаики Пенроуза

Каждый «золотой» ромб 1-го типа, называемый тонким ромбом (Рис.4.25-a), имеет углы в 36° и 144°, «золотой» ромб 2-го типа, называемый толстым ромбом (Рис.4.25-b), имеет углы в 108° и 72°. Рисунок (4.25-c) демонстрирует начало построения "плитки Пенроуза". Возьмем 5 "золотых" ромбов типа (b) и образуем из них пятиугольную звезду. После этого добавим к пятиугольной звезде 5 "золотых" ромбов типа (a). В результате мы получим декагон, то есть, правильный десятигранник. Продолжая этот процесс, то есть, пристраивая к декагону новые "золотые" ромбы, можно покрыть плоскость с использованием только двух типов ромбов (а) и (b). При этом возникает некоторая апериодическая структура, называемая "мозаикой Пенроуза" (Рис.4.26).

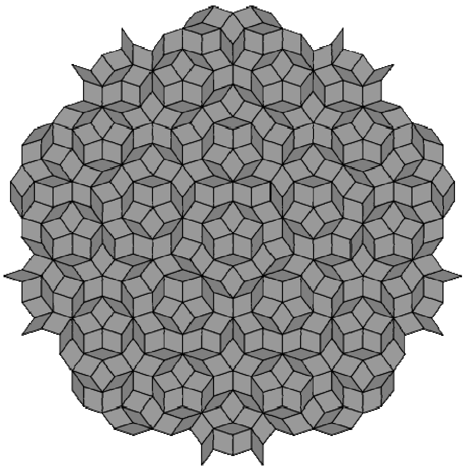


Рис. 4.26. Мозаика Пенроуза

Мозаика на Рис.4.26 названа в честь английского математика и физика Роджера Пенроуза (Рис.4.27), интересовавшегося проблемой «замощения», то есть, заполнения плоскости фигурами одной формы без зазоров и перекрываний.

Рис. 4.27. Роджер Пенроуз стоит на полу, покрытом мозаикой Пенроуза

Обычно такая задача («задача паркета») решается замощением плоскости фигурами (Рис.4.23), создающими периодически повторяющийся рисунок, но Пенроуз хотел отыскать именно такую фигуру, которая при замощении плоскости не создавала бы повторяющихся узоров. Считалось, что нет таких плиток, из которых строились бы только непериодические мозаики. Пенроуз подбирал множество плиток различной формы, в итоге их оказалось только две фигуры ромбовидной формы (Рис.4.25-a,b), в основе которых лежит принцип «золотого треугольника». Получившиеся узоры имеют квазикристаллическую форму, которая имеет осевую симметрию 5-го порядка. Структура мозаики связана также с последовательностью Фибоначчи.

Важно подчеркнуть, что плитки Пенроуза имеют «пентагональную» симметрию или симметрию 5-го порядка, а отношение числа толстых ромбов к тонким стремится к золотой пропорции!

Как оказалось, мозаика Пенроуза является хорошим аналогом квазикристалла. Трехмерное пространство кристалла заполняется элементарными ячейками так же, как в паркете двухмерное пространство заполняется «злотыми» ромбами. Идея Пенроуза о плотном заполнении плоскости с помощью "золотых" ромбов (Рис.4.25-a,b) была трансформирована на трехмерное пространство. При этом роль «золотых» ромбов в новых пространственных структурах играют икосаэдры. Эти пространственные структуры и представляют собой "квазикристаллы" или "шехтманиты".

И в заключение еще одно замечание, касающееся истории развития «додекаэдро-икосаэдрической доктрины». Как упоминалось выше, гениальный немецкий математик Феликс Клейн, еще в прошлом веке предсказал выдающуюся роль икосаэдра в развитии науки [78]. Любопытно, что это предсказание было сделано в 1884 г., то есть, ровно за 100 лет до момента опубликования журналом «Physical Review Letters” статьи Шехтмана об открытии квазикристаллов.

В чем же состоит методологическое значение открытия квазикристаллов? Прежде всего, открытие квазикристаллов является моментом великого торжества «додекаэдро-икосаэдрической доктрины», которая пронизывает всю историю естествознания и является источником глубоких и полезных научных идей. Во-вторых, квазикристаллы разрушили традиционное представление о непреодолимом водоразделе между миром минералов, в котором «пентагональная» симметрия была запрещена, и миром живой природы, где «пентагональная» симметрия является одной из наиболее распространенных. И не следует забывать, что главной пропорцией икосаэдра является «золотая пропорция». И открытие квазикристаллов является еще одним научным подтверждением, что, возможно, именно «золотая пропорция», проявляющая себя как в мире живой природы, так и в мире минералов, является главной пропорцией Мироздания.

4.9. Фуллерены

Что такое «фуллерены»? А теперь расскажем еще об одном выдающемся современном научном открытии в области химии [81]. Это открытие было сделано в 1985 г., то есть, несколькими годами позже квазикристаллов. Речь идет о так называемых «фуллеренах». Термином «фуллерены» называют замкнутые молекулы типа $C_{60}, C_{70}, C_{76}, C_{84}$, в которых все атомы углерода находятся на сферической или сфероидальной поверхности. В этих молекулах атомы углерода расположены в вершинах правильных шестиугольников или пятиугольников, которые покрывают поверхность сферы или сфероида. Центральное место среди фуллеренов занимает молекула C_{60}, которая характеризуется наибольшей симметрией и как следствие наибольшей стабильностью.

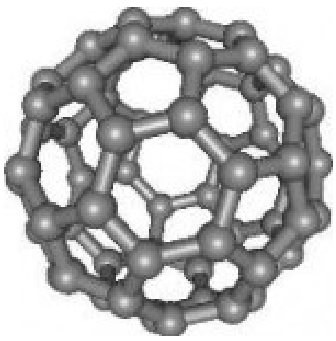


Рис. 4.28. Молекула C_{60} и футбольный мяч

В этой молекуле, имеющую структуру правильного усеченного икосаэдра и напоминающей покрышку футбольного мяча (Рис.4.28), атомы углерода располагаются на сферической поверхности в вершинах 20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников, так что каждый шестиугольник граничит с тремя шестиугольниками и тремя пятиугольниками, а каждый пятиугольник граничит с шестиугольниками.

История открытия. В 1985 оду группа ученых Роберт Керл, Харолд Крото, Ричард Смолли, Хис О’Брайен — исследовали масс-спектры паров графита, полученных при лазерном облучении твёрдого образца, и обнаружили пики с максимальной амплитудой, соответствующие кластерам состоящими из 60 и 70 атомов углерода. Они предположили, что данные пики отвечают молекулам C_{60} и C_{70} и выдвинули гипотезу, что молекула C_{60} имеет форму усечённого икосаэдра. Полиэдрические кластеры углерода получили название фуллеренов. В 1966 группа ученых (Роберт Керл, Харолд Крото, Ричард Смолли) была удостоена Нобелевской Премии в области химии за открытие фуллеренов.

Термин «фуллерен» берет свое начало от имени американского архитектора Бакминстера Фуллера (1995-1983), который, оказывается, использовал такие структуры при конструировании куполов зданий (еще одно применение усеченного икосаэдра!). В 1942 году Фуллер разработал новую картографическую проекцию мира (Рис.4.28), составленную из шести прямоугольников и восьми треугольников, которая имела ряд преимуществ по сравнению с глобусом.

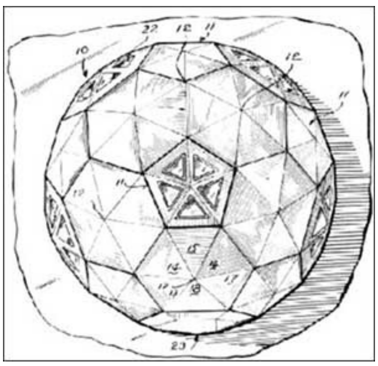


Рис. 4.29. Картографическая картина мира

С 1947 года Фуллер разрабатывал пространственную конструкцию «геодезического купола» представляющего собой полусферу, собранную из тетраэдров. Геодезические купола принесли Фуллеру международное признание (в 1959 году для Американской национальной выставки в Москве был построен «золотой купол», в 1967 году — павильон США на Всемирной выставке в Монреале). Фуллер преподавал в Университете Южного Иллинойса с 1959 по 1970 в Школе искусства и дизайна. В 1965 году Фуллер открыл Мировое десятилетие научного дизайна (с 1965 по 1975) на встрече Международного союза архитекторов в Париже. Десятилетие было, по его собственным словам, посвящено применению принципов науки к решению проблем человечества.

Рис. 4.30. Павильон США на Всемирной выставке в Монреале (1967)

Приложения фуллеренов. Имеется много направлений использования фуллеренов: оптические затворы, материалы для полупроводниковой техники. Ведутся исследования по использованию фуллеренов для создания сверхпроводящих материалов. Среди других интересных приложений следует отметить аккумуляторы и электрические батареи, в которых так или иначе используются добавки фуллеренов.

Фуллерены могут быть также использованы в фармакологии для создания новых лекарств. В этом направлении интересные исследования проведены в Харьковском институте физиологически активных соединений. В статье [82] описана разработка харьковских ученых, которую они назвали диетической добавкой «C_{60}Water of Life» («C_{60} Вода Жизни»). Указанная диетическая добавка относится к совершенно новому поколению продуктов с многоплановым системным характером действия на организм. В результате многолетних исследований было установлено, что продукт, содержащий малые дозы гидратированного фуллерена C_{60}, проявляет обширный, универсальный спектр положительной биологической активности.

В настоящее активные исследования по использованию фуллеренов в различных прикладных областях продолжаются. Несмотря на это, на данном этапе пока сложно определить наиболее эффективные области использования фуллеренов. Российские ученые А.В. Елецкий и Б.М. Смирнов в своей статье «Фуллерены» [81], отмечают, что «фуллерены, существование которых было установлено в середине 80-х, а эффективная технология выделения которых была разработана в 1990 г., в настоящее время стали предметом интенсивных исследований десятков научных групп. За результатами этих исследований пристально наблюдают прикладные фирмы. Поскольку эта модификация углерода преподнесла ученым целый ряд сюрпризов, было бы неразумным обсуждать прогнозы и возможные последствия изучения фуллеренов в ближайшее десятилетие, но следует быть готовым к новым неожиданностям».

4.10. Платоновы тела и новые идеи в теории строения элементарных частиц

Икосаэдр и элементарные частицы. В последние годы удивительные симметрии Платоновых тел привлекли пристальное внимание физиков-теоретиков, специалистов в теории элементарных частиц [83]. Крупнейший российский специалист по физике высоких энергий академик Л.Б. Окунь писал: «Физиков можно назвать охотниками за симметриями: в некотором смысле они отличаются от остальных людей тем, что отыскивают в природе все более скрытые и все более фундаментальные типы симметрий».

Главное методологическое значение статьи [83] состоит в том, что она нацеливает физиков-теоретиков на использование Платоновых тел при создании современной теории элементарных частиц, а это и есть отражение «гармонических идей» древних греков в теоретической физике.

Статья [83] заканчивается разделом «Вперед, к Платону!», в котором сказано следующее: «Среди Платоновых тел наиболее интересен икосаэдр, и с ним сталкиваются, порой совершенно неожиданно, в самых разных разделах математики. Этот факт должен послужить эвристикой при работе над единой теорией элементарных частиц – ведь в природе наверняка воплощена самая изощренная абстрактная структура. Ее нахождение – прометеева задача наших дней. Как писал Вернер Гейзенберг, «развитие физики выглядит так, словно в конце концов будут найдены очень простые законы природы – такие, какими их надеялся увидеть Платон». Не исключено, что эти законы окажутся связанными с правильными многогранниками. Даже когда знания о физической реальности были еще очень скудны, находились мыслители (Платон, Кеплер), видевшие в этих фигурах ключ к ее пониманию. Наверное, они составляют, тот арьергард, который всегда впереди».

Кварковый икосаэдр Юрия Владимирова. В 2003 г. в Виннице (Украина) состоялась международная конференция «Проблемы гармонии, симметрии и золотого сечения в природе, науке и искусстве». На пленарном заседании этой конференции с большим интересом была заслушана лекция известного московского физика-теоретика проф. Юрия Владимирова «Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга». Доклад был опубликован в трудах конференции (Винница, 2003, издательство Винницкого аграрного университета) [84]. Аннотация к статье гласит следующее: «Показано, что понятие поколений кварков и значения зарядов взаимодействий кварков связаны с дискретными симметриями икосаэдра, в 12 вершинах которого помещены левые и правые компоненты кварков шести ароматов. При описании икосаэдра в цилиндрических координатах имеются три варианта выбора оси симметрии: (1) через середины противоположных ребер, (2) через середины противоположных граней и (3) через противоположные вершины. Первый вариант позволяет определить три поколения кварков, второй – ввести четыре заряда, описывающих Z-взаимодействия кварков и вычислить угол

Вайнберга, третий – определить квазиэлектрические заряды и ввести понятие квазипространств».

Итак – вновь Платонов икосаэдр применительно к теории «элементарных частиц». И автором статьи является весьма известный в физических кругах ученый, представляющий престижную кафедру теоретической физики Московского университета и автор книги [85]. Любопытно, что книга заканчивается приложением П.5. Угол Вайнберга и «золотое сечение». Последнее предложение книги звучит следующим образом:

«Таким образом, можно утверждать, что в теории электрослабых взаимодействий возникают отношения, приближенно совпадающие с «золотым сечением», играющим важную роль в различных областях науки и искусства».

Послесловие к первой части книги

Как упоминалось в Предисловии, настоящая книга является первой частью трехтомной книги автора «Основы математики гармонии и ее приложения». Главная цель трехтомной книги – популяризация «математики гармонии» как нового междисциплинарного направления современной науки. При написании первой части книги в основном использовались материалы книги автора “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”, опубликованной международным издательством “World Scientific” в 2009 г. [47] и книги «Код да Винчи и ряды Фибоначчи», опубликованной издательством «Питер» (Санкт-Петербург) в 2006 г. [42].

Первая часть трехтомной книги представляет собой популярное введение в проблематику золотого сечения, чисел Фибоначчи и Платоновых тел и освещение их роли в истории науки и культуры.

Хотя в первой части излагаются в основном известные сведения об этих математических достижениях античной и средневековой науки, но тем не менее в нашем Послесловии мы хотели бы еще раз подчеркнуть уникальность и значимость классических и некоторых новых результатов, полученных в последние десятилетия, для развития современной науки и математики и привлечь к ним внимание читателей:

Гипотеза Прокла. «Гипотеза Прокла» отвечает на вопрос: с какой целью Евклид написал свои знаменитые «Начала»? Ответ очень простой: главной целью Евклида было построить завершенную теорию правильных многогранников, которые известны в современной науке под названием Платоновых тел. Для этого он уже в Книге II вводит «задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении», известную в современной науке как «золотое сечение». К «золотому сечению» Евклид обращается многократно в последующих Книгах, в том числе, в завершающей книге – Книге XIII, в которой Евклид и помещает созданную им геометрическую теорию Платоновых тел. «Гипотеза Прокла» приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, из «Начал» Евклида берут свое начало два направления математической науки - «Классическая Математика», позаимствовавшая в «Началах» аксиоматический подход, теорию чисел, теорию иррациональностей и геометрические аксиомы, и «Математика Гармонии», которая акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотом сечении») и на теории Платоновых тел, изложенной в Книге XIII «Начал» Евклида. Таким образом, «Гипотеза Прокла» переворачивает наши представления об истории математики и ее происхождении и подчеркивает роль древнегреческой идеи Гармонии, «золотого сечения» и Платоновых тел в истории математики. К сожалению, «гипотеза Прокла» проигнорирована российскими историками математики, несмотря на мнение выдающегося российского историка математики Мордухай-Болтовского, который в своих комментариях «Начал» Евклида написал следующее: «Тщательный анализ "Начал" меня решительно убеждает, что построение правильных тел, и еще более – доказательство существования пяти и только пяти тел – представляло некогда, еще до Евклида, конечную цель того труда, из которого произошли «Начала». К счастью, в работах западных историков математики «гипотеза Прокла» не замалчивается и обсуждается с возрастающим интересом. В работах [86-88] обсуждается история «гипотезы Прокла» и ее влияние на научное творчество Иоганна Кеплера. «Гипотеза Прокла» также оказала влияние и на творчество выдающегося математика Феликса Клейна» [78]. И это вселяет надежду, что истина восторжествует и одна из главных «стратегических ошибок» в истории математики будет исправлена, а «математика гармонии», восходящая к Пифагору, Платону и Евклиду, займет достойное место в системе современных математических знаний и образовании.

«Золотая пропорция» как уникальное иррациональное число. Исследуя представление «золотой пропорции» в виде бесконечной цепной дроби, советские математики А.Я. Хинчин [61] и Н.Н. Воробьев [2] пришли к заключению, что такое представление выделяет золотую пропорцию Φ среди других иррациональных чисел, так как золотая пропорция наиболее медленно аппроксимируется рациональными дробями. Это означает, что золотая пропорция является уникальным иррациональным числом. Об этом древние математики не знали, но их научная интуиция привела к тому, что именно «золотое сечение» стало главным выразителем Гармонии Мироздания.

Книга Принца Чарльза. В 2010 г. Принц Чарльз опубликовал книгу «Harmony: a New Way Of Looking At Our World» («Гармония – новый взгляд на наш мир») [48]. В книге [48], наследник британского престола разделяет свое убеждение в том, что наиболее актуальные проблемы человечества коренятся в нашей дисгармонии с природой, и что мы можем решить их путем восстановления баланса с естественным порядком. Один из разделов книги [48] посвящен детализации понятия "Грамматики Гармонии", куда входят главные математические константы, подобные золотой пропорции, и числовые последовательности, подобные числам Фибоначчи; они пронизывают всю природу.

Числа Фибоначчи и Люка. Открытая в 13 в. рекуррентная числовая последовательность, в которой каждое число равно сумме двух предыдущих и которая лежит в основе ботанического явления филлотаксиса, в течение нескольких столетий, начиная с Иоганна Кеплера, привлекает внимание исследователей. В 19 в. числа Фибоначчи были обобщены французским математиком Люка, который ввел в рассмотрение числа Люка – еще один вид рекуррентной числовой последовательности, получившей всеобщее признание. Работы французских математиков Бине и Люка стали стартовой площадкой для современных математиков-фибоначчистов (Николай Воробьев, Вернер Хоггатт и др.).

Формула Кассини. В 17 в. выдающийся французский астроном Кассини вывел математическую формулу, которая связывает три соседних числа Фибоначчи. Суть формулы Кассини состоит в том, что квадрат некоторого числа Фибоначчи F_n всегда отличается от произведения двух соседних чисел Фибоначчи

F_{n-1} и F_{n+1}, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от индекса n числа Фибоначчи F_n; если индекс n является четным числом, то число 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом. Эта формула вызывает благоговейный трепет, если представить себе, что она справедлива для любого значения n и истинное эстетическое наслаждение, потому что чередование +1 и –1 в указанной формуле при последовательном прохождении всех чисел Фибоначчи от -∞ до +∞ вызывает неосознанное чувство ритма и гармонии

Формулы Бине. В 19 в. еще один энтузиаст чисел Фибоначчи и золотой пропорции французский математик Бине вывел две замечательные формулы, которые связывают золотую пропорцию с числами Фибоначчи и Люка. На первый взгляд, представление целых чисел, которыми являются числа Фибоначчи и Люка, через золотую пропорцию, которая является иррациональным числом, кажется чем-то невероятным. Эти формулы также доставляют глубокое эстетическое наслаждение и по праву могут быть причислены к разряду выдающихся математических формул. Заметим, что исследования Люка и Бине стали той стартовой площадкой, с которой в современной математике начала развиваться «теория чисел Фибоначчи» [1-4].

***Q*-матрица Фибоначчи**. Эта простейшая квадратная матрица типа $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ стала предметом восторга и пристального внимания выдающегося фибоначчиста Вернера Хоггатта, который изложил теорию этой матрицы в своей книге [3]. Оказалось, что при возведении этой матрицы в $n-$ю степень обнаруживается ее связь с числами Фибоначчи. Более того, если вычислить детерминант такой матрицы, то мы обнаружим, что он совпадает с формулой Кассини. Доказано, что Q-матрица Фибоначчи играет в теории квадратных $(2\times 2)-$матриц такую же роль, как и «золотая пропорция» в теории иррациональных чисел.

Нумерологические свойства чисел Фибоначчи и Люка. Это – одно из неожиданных свойств чисел Фибоначчи и Люка, открытых совсем недавно [63]. Оказывается, что если последовательно вычислить все нумерологические значения чисел в последовательностях Фибоначчи и Люка, то возникающие при этом числовые последовательности являются периодическими с периодом 24. По-видимому, в этом свойстве чисел Фибоначчи и Люка скрыта какая-то тайна, которую предстоит еще раскрыть.

Числа Фибоначчи и решение 10-й проблемы Гильберта. В 1970 г. молодой советский математик решил одну из сложнейших математических проблем – 10-ю проблему Гильберта. Оценивая влияние научных результатов Воробьева и американского математика Джулии Робинзон, на решение 10-й проблемы Гильберта, Матиясевич написал: «Мое оригинальное доказательство ... основывалось на теореме, доказанной в 1942 г. советским математиком Николаем Воробьевым, но опубликованной только в третьем расширенном издании его популярной книги.... После того, как я прочитал статью Джулии Робинзон, я сразу же увидел, что теорема Воробьева может быть очень полезной. Джулия Робинзон не видела 3-го издания книги Воробьева до тех пор, пока она не получила копию от меня в 1970 г. Кто мог сказать, что бы случилось, если бы Воробьев включил свою теорему в первое издание своей книги? Возможно, что 10-я проблема Гильберта была решена на десять лет раньше!». В развитие вопроса Юрия Матиясевича, мы вправе поставить следующий вопрос: а что бы случилось, если бы итальянский математик Фибоначчи не открыл числа Фибоначчи в 13 в.? Возможно, 10-я проблема Гильберта не была бы решена до сих пор. Конечно, теорема Воробьева, использованная Юрием Матиясевичем, является очень важным математическим результатом, но все же главным «виновником» решения 10-й проблемы Гильберта следует признать итальянского математика Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи). Еще в 1202 г. он опубликовал книгу "Liber abaci", в которой и была описана знаменитая «задачу о размножении кроликов», благодаря которой математика пополнилась новой уникальной числовой последовательностью - числами Фибоначчи.

Треугольник Паскаля и числа Фибоначчи. Известно, что треугольник Паскаля, предложенный в 17 в. гениальным французским математиком и физиком Блезом Паскалем для вычисления биномиальных коэффициентов, является одним из наиболее изящных математических объектов. Мартин Гардин выразил свое восхищение треугольником Паскаля в следующих словах: «Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике». Именно поэтому обнаружение глубокой математической связи между числами Фибоначчи и треугольником Паскаля по праву можно считать одним из важных открытий в современной математике. Это открытие было сделано американским математиком Пойа в 1962 г. [66] при исследовании так называемых «диагональных сумм» треугольника Паскаля. Но исследуя «диагональные суммы» треугольника Паскаля, Пойа наметил путь к открытию нового класса рекуррентных числовых последовательностей, названных p-числами Фибоначчи [9,89].

***P*-числа Фибоначчи**. Эти числовые последовательности были введены автором совместно с талантливым математиком Игорем Витенько в 1970 г. при решении «задачи о выборе наилучшей системы гирь», названной в российской историко-математической литературе задачей Баше-Менделеева [89]. Эта задача является первой оптимизационной задачей в теории измерения. Именно при решении этой задачи были найдены оптимальные алгоритмы измерения, основанные на p-числах Фибоначчи, и эти «фибоначчиевы алгоритмы» стали началом так называемой алгоритмической теории измерения [9]. И тот факт, что известный американский математик Джордж Пойа в виде увлекательного упражнения наметил еще один путь нахождения p-чисел Фибоначчи («диагональные суммы» треугольника Паскаля) [66] только подчеркивает фундаментальный характер фибоначчиевых алгоритмов измерения, которые привели еще к одному математическому результату, важному для информатики –

p-кодам Фибоначчи - и новой машинной арифметике – арифметике Фибоначчи (об этом мы расскажем в части 2 настоящей книги)

Золотые p-пропорции. Если взять отношение соседних p-чисел Фибоначчи, то по мере увеличения номеров этих чисел их отношение стремится в пределе к некоторой математической константе $\Phi_p \left(p = 0,1,2,3,... \right)$, которая являются положительным корнем алгебраического уравнения $x^{p+1} = x^p + 1$. На том основании, что при $p = 1$ константа Φ_p совпадает с «золотой пропорцией», эти константы названы «золотыми p-пропорциями». Золотые p-пропорции стали основой так называемых кодов золотой p-пропорции [12], представляющих интерес для информатики (об этом также будет рассказано в части 2 настоящей книги).

Обобщение формул Бине для p-чисел Фибоначчи и Люка. В работе Алексея Стахова и Бориса Розина [90] выведены обобщенные формулы Бине, которые позволяют выразить p-числа Фибоначчи и Люка через корни алгебраического уравнения $x^{p+1} = x^p + 1$. Наиболее неожиданным результатом работы [90] является введение нового класса рекуррентных числовых последовательностей - p-чисел Люка $L_p(n)$. Теория p-чисел Фибоначчи и Люка и золотых p-пропорций значительно расширяет область «фибоначчиенвых исследований» и является источником новых научных открытий (закон структурной гармониии систем, фибоначииево деление биологических клеток и др.).

Платоновы тела. Эпиграфом для книги Веннинджера «Модели многогранников» [77] выбрано следующее высказывание Бертрана Рассела: «Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой - красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства». Эти слова в наибольшей степени относятся, прежде всего, к Платоновым телам, которые ассоциировались в Древней Греции с гармонией Мироздания. В 1884 г.

выдающиеся геометр Феликс Клейн написал книгу «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени» [78]. В этой книге Клейн трактует икосаэдр как математический объект, из которого расходятся ветви пяти математических теорий: геометрия, теория Галуа, теория групп, теория инвариантов и дифференциальные уравнения. Таким образом, главная идея Клейна чрезвычайно проста: «каждый уникальный геометрический объект, так или иначе, связан со свойствами икосаэдра».

Квазикристаллы и фуллерены. Квазикристаллы были открыты израильским физиком Даном Шехтманом в 1982 г., а в 2001 г. ему была присуждена Нобелевская Премия по химии за это открытие. Фуллерены были открыты в 1985 г., а в 1996 г. группа ученых (Роберт Керл, Харолд Крото, Ричард Смолли) была удостоена Нобелевской Премии в области химии за это открытие. Что объединяет эти два выдающихся научных открытия? Один из наиболее известных видов квазикристалов, названный шехтманитом, обладает икосаэдрической симметрией, то есть, в его основае лежит одно из наиболее известных Платоновых тел – икосаэдр, описанный в «Началах» Евклида. С другой стороны, один из наиболее известных типов фуллеренов – молекула C_{60} - основана на усеченном икосаэдре. Обе упомянутые выше геометрические фигуры (икосаэдр и усеченный икосаэдр) основаны на «золотом сечении» - великом математическом открытии античной науки. Благодаря квазикристаллам и фуллеренам античная идея о числовой гармонии Мироздания вошла в современное теоретическое естествознание. И эти открытия являются вдохновляющим примером для будущих Нобелевских Лауреатов!

Список литературы

1. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry New York: John Wiley and Sons, 1961.

2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1984. – 144 с. (первое издание - 1961).

3. Hoggat V. E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.

4. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Harwood Limited, 1989.

5. Gardner Martin. Mathematics, Magic and Mystery. New York: Publishing House “Dover”, 1952.

6. Brousseau Alfred. An Introduction to Fibonacci Discovery. San Jose, California: Fibonacci Association, 1965.

7. Huntley H. E. The Divine Proportion: a Study in Mathematical Beauty. Dover Publications, 1970.

8. Ghyka Matila. The Geometry of Art and Life. Dover Publications, 1977.

9. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Советское Радио, 1977. – 288 с.

10. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. М.: Знание, 1979. – 64 с. (Новое в жизни, науке и технике. Серия «Математика и кибернетика», 6).

11. Реньи Альфред. Трилогия математики (пер. с венг.). М.: Мир, 1980. – 376 с.

12. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

13. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.

14. Grzedzielski Jan. Energetycno-geometryczny kod Przyrody. Warszawa: Warszwskie centrum studenckiego ruchu naukowego, 1986 (in Polen). – 140 p.

15. Шевелев И.Ш. Принцип пропорции. М.: Стройиздат, 1986.- 200 с.

16. Garland T.H. Fascinating Fibonacci: Mystery and Magic in Numbers. Dale Seymour, 1987.

17. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев: Высшая школа, 1989. – 143 с.

18. Стахов А.П. (редактор). Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г. – 64 с.
19. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. М.: Молодая Гвардия», 1990. – 238 с.
20. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. Три взгляда на гармонию природы. М.: Стройиздат, 1990. – 343 с.
21. Runion G.E. The Golden Section. Dale Seymour, 1990.
22. Fisher Robert, Fibonacci Applications and Strategies for Traders. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
23. Шмелев И.П. Феномен Древнего Египта. Минск: РИТС, 1993. – 343 с.
24. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994. – 204 с.
25. Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific, 1997.
26. Цветков В.Д. Сердце, золотая пропорция и симметрия. Пущино: ОНТИ РНЦ РАУ, 1997. – 155 с.
27. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998. – 373.
28. Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, Inc., 1998. – 195 p.
29. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
30. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (Русский перевод: Мидхат Газале. Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.).
31. Prechter, Robert R. The Wave Principle of Human Social Behaviour and the New Science of Socionomics. Gainesville, Georgia: New Classics Library, 1999.
32. Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. М.: Воскресенье, 2000. – 352 с.
33. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2001. – 490 p.
34. Kappraff Jay. “Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth and Number”. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002. – 584 p.

35. Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley, 2001.
36. Livio, M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadway Books, 2002.
37. Стахов А.П. Новая математика для живой природы. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Винница: ITI, 2003. – 264 с.
38. Стахов А.П. Под знаком «Золотого Сечения». Исповедь сына студбатовца. Винница: ITI, 2003. – 284 с.
39. Боднар О.Я. Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві. Львів: Українскі Технології, 2005. – 197 с.
40. Петруненко В.В. Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления. Минск: Право и экономика, 2005. – 390 с.
41. Сороко Э.М. Золотое сечение, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем. Москва: URSS, 2006. – 264 с.
42. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006. – 320 с.
43. Olsen Scott. The Golden Section: Nature’s Greatest Secret. New York: Walker Publishing Company, 2006. – 58 p.
44. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.-316 с.
45. Шевелев И.Ш. Основы гармонии. Визуальные и числовые образы реального мира. М.: Луч, 2009. – 360 с.
46. Южанников А.Ю. Золотое сечение и техноценозов в систмах электроснабжения. Красноярск: Поликор, 2009. – 288 с.
47. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathemartics and Computer Science. New Jersy, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2009. – 697 p.
48. HRH Charles The Prince of Wales. Harmony: A New Way of Looking at Our World. Harper Publisher, 2010. – 330 p.
49. Аракелян Грант. Теория ЛМФ и принцип золотого сечения. В 4 частях. Академия Тринитаризма, 2011 (электронная публикация).

50. Григорьев Ю., Мартыненко Г. Типология последовательностей Фибоначчи: Теория и приложения. Введение в математику гармонии. LAMBERT Academic Pudlishing Gmbh & Co.KG. Saarbruecken, Germany, 2012. – 298 с.
51. Клайн М. Математика. Утрата определенности (пер. с англ). М.: Мир, 1984. – 434 с.
52. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991. – 224 с.
53. Harmony of spheres. The Oxford dictionary of philosophy, Oxford University Press, 1994, 1996, 2005.
54. Dimitrov Vladimir. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics. Morrisville Lulu Press, 2005.
55. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004. – с. 1143 – 1150.
56. Начала Евклида. Книги I-VI. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
57. Начала Евклида. Книги VII-X. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
58. Начала Евклида. Книги XI-XV. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
59. Бунин В.А. Код биоподобия. Троеначальный Код Метагармонии как биоподобия техногенных систем по критерию целевой функции // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15669, 24.11.2009
60. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. М.: Наука, 1973. – 256 с.
61. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961 (первое издание, 1935).
62. Radoslav Jovanovic. Phythagoras theorem and Fibonacci numbers
http://milan.milanovic.org/math/english/Pythagoras/Pythagoras.html
63. Корнеев А.А. Структурные тайны золотого ряда // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14359, 21.04.2007
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321047.htm

64. Stakhov A., Rozin B. The “golden” algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 2005, 27 (5): 1415-1421.

65. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. – 328 с.

66. Пойа Д. Математическое открытие (перевод с англ.). М.: Наука, 1970. – 452 с. (английское издание, том 1, 1962, том 2, 1965).

67. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci Q-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.

68. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Киев: Техника, 1975.- 768 с.

69. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.

70. Stakhov A. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals 2005, 26 (2): 263-289.

71. Кикель П.В., Сороко Э.М. Краткий энциклопедический словарь философских терминов. Минск: БГПУ, 2006. – 266 с.

72. Радюк М.С. Второе золотое сечние (1,465...) в природе. Збірник наукових праць міжнародної конференції «Проблеми гармонії, симметрії і золотого перетину в природі, науці та мистециві» искусстве. Вінницький державний аграрний університет, вип. 15, 2003. – с. 58-68.

73. Розин Б.Н. Золотое сечение - морфологический закон живой природы. Труды международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница – 2003. – с.178-188.

74. Spears C.P., Bicknell-Johnson M. Asymmetric cell division: binomial identities for age analysis of mortal vs. immortal trees, Applications of Fibonacci Numbers, Vol. 7, 1998, 377-391.

75. Büyükkılıç F., and Demirhan D.. Cumulative growth with fibonacci approach, golden section and physics. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 42 (1), 24-32

76. Büyükkılıç F., and Demirhan D.. Cumulative Diminuations with Fibonacci Approach, Golden Section and Physics, Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 47 (3), 35-43.

77. Веннинджер М. Модели многогранников. Пер. с англ. М.: Мир, 1974. – 236 с.

78. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989. – 336 с.
79. Кац Е.А. Искусство и наука — о многогранниках вообще и усеченном икосаэдре в частности. Энергия, "2002, №10, с. 42-47; №11, с. 45-50; № 12, с. 56-60.
80. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2.
81. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены, Успехи физических наук,1993, том 163, №2.
82. Андриевский Г.В., Стахов А.П., О Харькове, *p*-числах Фибоначчи, математике гармонии, фуллеренах и диетической добавке «C_{60} Water of Life» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17108, 15.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322084.htm
83. Верховский Л.И. Платоновы тела и элементарные частицы. Химия и жизнь, 2006, №6.
84. Владимиров Ю.С. Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга. Труды международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница – 2003. – с.69-79.
85. Владимиров Ю.С. Метафизика. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2002. – 550 с.
86. Kann Charles H. Pythagoras and Pythagoreans. A Brief History. Hackett Publishing Co, Inc., 2001.
87. Zhmud Leonid. The origin of the History of Science in Classical Antiquity. Published by Walter de Gruyter, 2006.
88. Smorinsky Craig. History of Mathematics. A Supplement. Springer, 2008
89. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970. – с.20-36.
90. Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2005, 27 (5): 1162-1177.

Научная биография Алексея Стахова

1. **Алексей Стахов** является одним из лидеров мировой науки в области «золотого сечения» и «математики гармонии». С 2003 г. он является Президентом Международного Клуба Золотого Сечения, а с 2005 г. - Директором Института Золотого Сечения Академии Тринитаризма (Россия). Он был инициатором создания так называемой «Славянской Золотой Группы» (Киев, 1992) и научным руководителем Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, 2010). Имеет широкие международные связи с учеными США, России, Украины, Беларуси, Армении, Англии, Германии, Аргентины, Бразилии, Турции, Чили и других стран. Владеет русским, украинским и английским языками.
2. **Образование.** В 1961 г. закончил радиотехнический факультет Харьковского авиационного института (сейчас – Национальний аэрокосмический университет),
3. **Ученые степени и звания**: кандидат технических наук в области технической кибернетики (1966), доцент (1968), доктор технических наук в области вычислительной техники (1972), профессор (1974), академик Академии инженерных наук Украины (1992)
4. **Основные этапы научно-преподавательской деятельности**:
   - Заведующий кафедрой информационно-измерительной техники Таганрогского радиотехнического института, 1971 – 1977.
   - Заведующий кафедрой вычислительной техники Винницкого политехнического института (сейчас – Винницкий национальный технический университет), 1977 – 1988.
   - Директор Специального конструкторско-технологического бюро "Модуль" при Виницком политехническом университете, 1986 – 1989.
   - Заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительных систем Винницкого технического университета, 1989 – 1995.

- Заведующий кафедрой информатики Винницкого государственного аграрного университета, 1997-2003.

5. **Подготовка научных кадров**: подготовил 30 кандидатов наук, 4 ученика проф. Стахова защитили докторские диссертации.
6. **Краткая характеристика научной деятельности, основные теоретические достижения**:

- 6.1. Создал новое направление в теории измерения – алгоритмическую теорию измерения. В этой области имя проф. Стахова стоит рядом с именами признанных ученых в области теоретической метрологии.
- 6.2. Создал новое направление в области вычислительной техники, а именно, новые системы счисления, основанные на числах Фибоначчи и золотой пропорции, и выдвинул проект «Компьютеры Фибоначчи». Мировой приоритет в этой области защищен 65 зарубежными патентами США, Японии, Англии, Франции, Германии, Канады и других стран. В 1989 г. выступил с докладом «Компьютеры Фибоначчи» на специальном заседании Президиума Академии наук Украины.
- 6.3. Разработал «Математику гармонии», как новое междисциплинарное направление, касающееся оснований математики, теоретической физики, компьютерной науки и математического образования. Впервые концепция «математики гармонии» была изложена профессором Стаховым в докладе "The Golden Section and Modern Harmony Mathematics", сделанном на 7-й Международной конференции «Числа Фибоначчи и их приложения» (Австрия, Грац, 1996). Его главным научным достижением в этой области является книга “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” (World Scientific, 2009), вызвавашая большой интерес в современной науке.
- 6.4. В этой области опубликовал около 500 научных работ, среди них – 15 книг, 65 зарубежных патентов, 130 авторских свидетельств СССР. За период работы в Канаде (2004-2012) опубликовал около 30 статей в

известных международных журналах (Chaos, Solitons and Fractals, Applied Mathematics, Congressus Numerantium, Arc Combinatoria, Visual Mathematics и др.).

-
- **Наиболее важные научные доклады**:

  - Доклад «Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики» на объединенном заседании компьютерного и кибернетического обществ Австрии (Вена, 1976);
  - Доклад «Компьютеры Фибоначчи» на заседании Президиума Академии наук Украины (Киев, 1989);
  - Доклад "The Golden Section and Modern Harmony Mathematics" на 7-й Международной конференции «Числа Фибоначчи и их приложения» (Австрия, Грац, 1996);
  - Доклад «Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении" на совместном заседании семинара "Геометрия и Физика" кафедры теоретической физики Московского университета и Междисциплинарного семинара "Симметрии в науке и искусстве" при Институте машиноведения РАН (Москва, МГУ, май 2003).

7. **Научные награды, работа в зарубежных университетах:**
   - 7.1. Работа «Приглашенным профессором»:
     - Венский технический университет (1976),
     - Йенский университет (1986),
     - Дрезденский технический университет (1988),
     - Университет Аль Фатех (Триполи, Ливия, 1995-1997),
     - Университет Эдуардо Мондлане (Мапуту, Мозамбик, 1998-2000),
   - 7.2. Премии, награды:
     - Премия Министерства образования Украины в области науки за лучшую научную публикацию (1980)

- Памятная медаль имени Генриха Баркхаузена, выданная Дрезденским Техническим Университетом как «Приглашенному профессору» кафедры имени Генриха Баркхаузена (1988)
- Почетное звание «Рыцарь науки и искусств» (Российская Академия Естественных Наук, 2009)
- Почетное звание «Доктор Священной Геометрии в Математике» (Американское Общество Золотого Сечения, 2010)

8. Научные форумы, проведенные под руководством Алексея Стахова:

- Научный руководитель Международных семинаров «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем» (Киев, 1992, 1993).
- Научный руководитель Международной Конференции „Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве" (Винница, октябрь 2003)
- Научный руководитель Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, октябрь 2010)
- Научный руководитель Международного online семинара по Математике Гармонии (Институт Золотого Сечения Академии Тринитаризма, ноябрь, декабрь 2011, январь 2012)