Автор книги, Грант Аракелян – видный учёный, Доктор философских наук, ведущий научный сотрудник Института философии, социологии и права Национальной академии наук Республики Армения, физик по образованию, автор трудов по основаниям фундаментальной науки, теории математических и физических констант.

В своей новой книге он всесторонне рассматривает математическую теорию золотого сечения и её возможные расширения. Представлены основания теории золотого сечения, геометрия, теоретико-числовой формализм и допустимые уровни обобщения. Подробно излагается история «божественной пропорции» с древнейших времен до начала 1970-х гг.

Широкое использование первоисточников позволяет читателям непосредственно заглянуть в творческую лабораторию причастных к истории золотого сечения таких выдающихся исследователей как Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Леонардо да Винчи, Дюрер, Кеплер, Цейзинг, Фехнер, Люка, Клейн, Томпсон, Корбюзье, Дали. Немало здесь и российских авторов: Г. Гримм, Э. Розенов, Л. Сабанеев, П. Флоренский, А. Лосев, С. Эйзенштейн, Н. Воробьёв, Ю. Матиясевич и другие. Освещается история пентаграммы, вводящая в таинственный мир эзотерических толкований, используемых в магической практике оккультных сообществ.

Книга богато иллюстрирована, содержит обширный список литературы по своей теме и именной указатель.

Грант Аракелян МАТЕМАТИКА И ИСТОРИЯ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

ЛОГОС

Грант Аракелян

МАТЕМАТИКА И ИСТОРИЯ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
Институт философии социологии и права

Грант Аракелян

Математика и История Золотого Сечения

Издательская группа «Логос»
Москва 2014

УДК 51–7
ББК 22.1г/22–11
А79

Рекомендовано к печати
Институтом философии социологии и права
Национальной академии наук Армении

А79 **Аракелян Г.**
Математика и История золотого сечения / Г.Аракелян. – М.: Логос, 2014. – 404 с.

ISBN 978-5-98704-663-0

Это вторая монография автора, целиком посвящённая золотому сечению и комплексу связанных с ним проблем. В первой части, вслед за обсуждением исходных положений, вопросов философско-методологического характера, различных определений золотого сечения и золотой константы ϕ, подробно, на основе общих принципов, рассматривается математическая теория золотого сечения и её возможные расширения. Отдельными главами представлены основания, геометрия, теоретико-числовой формализм и допустимые уровни обобщения. В четырёх главах второй части излагается история золотого сечения с древнейших времен до начала 70-х гг. прошлого века. Обширные выдержки из первоисточников дают возможность непосредственно заглянуть в творческую лабораторию причастных к истории золотого сечения таких выдающихся исследователей как Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Леонардо да Винчи, Дюрер, Кеплер, Бине, Цейзинг, Фехнер, Люка, Клейн, Корбюзье, Дали. Немало здесь и российских авторов: Г. Гримм, Э. Розенов, Л. Сабанеев, П. Флоренский, А. Лосев, С. Эйзенштейн, Н. Воробьёв и другие Особняком стоит изложенная в шестой главе история пентаграммы, вводящая в таинственный мир эзотерических толкований, используемых в магический практике оккультных сообществ. Представлен обширный материал иллюстративного характера, большой список цитированной литературы, книга снабжена именным указателем.

Для всех, кто проявляет интерес к вопросам, связанным с идеей математической гармонии, к элементарной и высшей математике золотого сечения. В равной степени книга адресована читателям-гуманитариям, интересующимся прежде всего богатой и интригующей историей золотого сечения, включая ее эзотерическую составляющую.

УДК 51-7
ББК 22.1г/22-11

ISBN 978-5-98704-663-0

Оглавление

Часть II

ИСТОРИЯ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Предисловие

Настоящая работа является последней частью гексалогии, касающейся золотого сечения (ЗС) и множества связанных с ним вопросов. В самом начале, в 1989 году, был двадцатистраничный фрагмент в трёхсотстраничной монографии *Числа и величины в современной физике* [Аракелян[3]] (в дальнейшем А[3]), относящийся к обобщению математической модели ЗС. Значительно позже, в 2007 году, в трёх главах из девяти капитальной монографии *Фундаментальная теория ЛМФ* [А[7, e, f, g]] ЗС рассматривается как приложение фундаментальной теории ЛМФ, основанной на идее единства математической логики (Л), числовой математики (М) и фундаментальной физической теории (Ф). После появились работы, целиком посвящённые различным проявлениям принципа золотого сечения (ПЗС). Всесторонний анализ и обсуждение этого принципа, включая его основания, обширный материал справочного характера по применению ПЗС в природе и искусстве и обобщение в рамках теории ЛМФ, содержится в книге *Теория ЛМФ и принцип золотого сечения* [А[15, a−h]]. В статье *Пик "острова стабильности" и принцип золотого сечения* [А[14]] предпринята попытка применения ПЗС в ядерной физике при анализе таблицы химических элементов Менделеева. Наконец, о содержании последней по времени большой статьи *О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях* [А[16]] говорит само название.

В мире интерес к ЗС и "вокруг него" сейчас выше, чем когда-либо. Тема ЗС повсеместно включается в программы школьного и университетского образования, а количество всевозможных публикаций по данной тематике и смежным вопросам практически необозримо. Есть немало профессионально написанных работ, но ещё больше любительской экзотики, чрезмерной восторженности, некритических оценок и недостоверных данных, выдающих желаемое за действительное. Вопреки распространённому мнению, достаточно надёжные факты применения ПЗС за пределами математики можно пересчитать на пальцах. История ЗС полна заблуждений, спорных гипотез и "притянутых за уши" фактов, основанных на сомнительных измерениях. Вместе с тем, это заслуживающий серьёзного отношения важный фрагмент философии, методологии, науки, культуры и оккультизма. Отдельный интерес представляет история двумерного символа ЗС – пентаграммы и её модификаций, которая является преимущественно историей эзотерических толкований, нередко используемых в магический практике, и лишь в малой степени затрагивается исследованиями научного характера. Заметна потребность и в законченной *теории золотого сечения* (ТЗС) в узком и расширенном вариантах. Формальные исследования различных сторон ЗС и его ближайшего окружения, особенно чисел Фибоначчи, Люка и Пелля, в последние десятилетия настолько продвинулись, что фактически стали приобретать статус отдельной области чистой математики, почти готовой к представлению в виде цельной теории и в качестве составной части общей теории математической гармонии.

Предлагаемая вниманию читателя книга задумана как работа, призванная, во-первых, представить ТЗС в её простейшем и обобщённом вариантах в виде системы, состоящей из элементов, объединяемых на основе исходных положений и таких универсальных принципов, как сохранение, наименьшее действие, минимальность и оптимальность; во-вторых, изложить историю ЗС в форме очерков, охватывающих период с древнейших времён до начала семидесятых прошлого столетия. Арифметику ЗС с её многочисленными формулами, дополняемыми таблицами и графиками, как и геометрию ЗС с множеством двумерных фигур и трёхмерных тел, мы постараемся свести в одну математическую структуру, выводимую из нескольких постулатов общего типа, неизменно приводящих к золотой константе ϕ – центральному числовому элементу всей модели. В изложении истории ЗС особое место занимают обширные выдержки из первоисточников, которые дают возможность ощутить вкус реальной истории, которую не заменить пересказами и можно только слегка дополнить комментариями и пояснениями. При этом, подобно тому как достаточно полное представление математики ЗС невозможно без большого количества формул, геометрических фигур, таблиц и графиков, изложение истории ЗС связано с необходимостью показа множества рисунков, иллюстрирующих текст наглядными образами, наполняющими его живым содержанием.

Среди потока публикаций по золотому сечению заметное место занимают работы, претендующие на обобщение ТЗС. Обычно рассматриваются квадратные уравнения, рекуррентные последовательности второго и высших порядков, гиперболические и тригонометрические функции, связи золотого числа ϕ с другими математическими константами (МК) и некоторые другие формы математического представления ЗС. Одна из главных задач настоящей работы – выяснить, как, в каких пределах и какими средствами допустимо обобщение ТЗС без потери формальной и онтологической связи с канонизированной математической первоосновой и традиционными толкованиями. В противном случае может получиться, возможно, и интересная, математическая конструкция, уводящая, однако, в сторону, в оторванные от золотых истоков заоблачные математические дали. Следует полагать, что любая математическая модель прикладного характера, претендующая на описание реалий внешнего мира, должна ограничиться применением лишь тех формальных средств, того математического инструментария, который необходим для решения поставленной цели и который онтологически оправдан.

Уже здесь, в предисловии, приходится признать, что это непростая, а в рамках самой теории практически неразрешимая, трудно поддающаяся корректной формулировке и постановке задача методологического свойства. Метатеоретический анализ, рефлексия над обобщаемой теоретической конструкцией, как правило, чреваты неоднозначностью, необязательностью выбора, наличием альтернатив. По крайней мере, так обычно обстоит дело в фундаментальной науке. Выражаясь вольно, можно сказать, что когда исследователь в полном математическом снаряжении начинает атаку на реальные или мнимые тайны природы, пытаясь *поверить алгеброй гармонию* (А.С. Пушкин. *Моцарт и Сальери*), он имеет дело с лукавым, неподатливым и невосприимчивым к лихим наскокам противником. Субъективный фактор в серьёзной интерактивной игре типа "математика–природа" практически неустраним. В большинстве подобных случаев *логическая непреложность*, *абсолютная объективность* и *единственность выбора* существуют лишь в научно-популярной литературе и учебниках, не лучшего притом образца. Конкретно, если речь о таком непростом вопросе, как обобщение ТЗС, при любом его решении не следует делать вид, что *это и есть **то самое**, другого не дано*. Надо быть откровенным до конца и открыто признавать, что в действительности это всего лишь выбор автора, в который он верит, более того, в котором он, возможно, искренне и глубоко убеждён и старается убедить в этом других, пытаясь представить своё субъективное понимание и полученное решение в объективном свете.

Коротко об особенностях работы в целом. Основной текст монографии состоит из двух *Частей*, с четырьмя *Главами* в каждой и *Приложения* к шестой главе, а также из *Предисловия* и *Заключения*. Имеются *Именной указатель* и большой список цитированной *Литературы*. В именном указателе ссылки на имена авторов приводятся только в тех случаях, когда они даны не в квадратных скобках ссылок, или не являются частью какого-либо известного термина, понятия или словосочетания, таких как *числа Фибоначчи*, *закон Бенфорда*, *печать Кромвеля*, *Начала Евклида*, *космология Платона*. В работе много таблиц и графиков, очень много, особенно в приложении, рисунков; полные списки тех и других даны в самом конце работы. Выдержки из первоисточников выделены золотистым или серым фоном, используются и другие формы выделения, в том числе шрифты, более или менее созвучные исторической эпохе обсуждаемого автора. Фамилии цитируемых авторов даются в тексте, безымянные работы представлены своими названиями, иногда в сокращении. В случае упоминания двух и более работ данного автора обычно используется аббревиатура его имени из одной, иногда, во избежание разночтений, нескольких букв, причём работы пронумерованы. Отдельные же главы обозначены латинскими индексами a, b, c, $\ldots$. Например, $\mathrm{A}^{7,d}$ означает главу с индексом d в работе под номером 7 автора с присвоенной ему аббревиатурой А. Добавим, что большинство цитированных работ, в том числе старинные трактаты, выложены в интернете и соответствующие гиперссылки даны стандартным синим цветом в списке литературы.

В качестве полезного для читателя ориентира представим в краткой, тезисной форме содержание отдельных глав и Заключения.

Часть I. *Математика золотого сечения*

состоит из вводной главы, содержащей общие идеи, положения, понятия и определения, и трёх глав сугубо математического содержания, включая обобщения теории золотого сечения

Глава 1. ***Определения и общие положения*** – это как бы *преамбула*, *пролегомены* к тексту последующих трёх глав. В самых общих чертах даны различные эксплицитные и имплицитные определения золотого сечения и константы ϕ, подробнее рассмотренные в третьей главе. Обсуждаются некоторые вопросы философско-методологического характера, в частности представление о теории золотого сечения как о важнейшем фрагменте концепции мировой гармонии, восходящей к глубокой древности. Очерчены границы *золотого домена*: в первом, нуждающемся в дальнейшем уточнении и конкретизации приближении ТЗС определена как *теория геометрических носителей золотой пропорции, константы ϕ, чисел Фибоначчи и их гомологов*.

Глава 2. ***Геометрия ТЗС*** начинается с традиционного деления отрезка в крайнем и среднем отношении, с геометрических построений первого и второго золотого сечения и завершается платоновыми (додекаэдр и икосаэдр), архимедовыми, дуальными им каталановыми телами и правильными звёздчатыми многогранниками. Приведены все основные фигуры и тела ЗС: всевозможные треугольники, пентаграмма, десятиугольник, ромбы, эллипсы, парабола и параболоид вращения, овалы Кассини, логарифмическая спираль, архимедовы, синусоидальные спирали и так далее, а также золотые фракталы, "золотоносные" плитки для плотного заполнения плоскости. Даны важнейшие числовые параметры и характеристики геометрических объектов золотой геометрии, включая координаты трёхмерных тел в декартовой системе координат как наиболее эффективный способ их идентификации. В этой главе немало формул, но ещё больше рисунков с изображением геометрических объектов.

Глава 3. ***Теоретико-числовой формализм ТЗС*** является наиболее объёмной и заполненной математическими конструкциями среди всех глав Части I. Многое из того, что лишь слегка обозначено в первой главе, в том числе результаты исследования по золотым подмножествам квадратных уравнений, даётся здесь в развёрнутом виде. Подробно рассмотрены такие важные фрагменты ТЗС, как последовательности Люка, числа и полиномы Фибоначчи и Люка, полиномы Чебышева, составленный из симметрично расположенных биномиальных коэффициентов треугольник Паскаля, производящие функции с их характеристическими уравнениями и соответствующие последовательности для чисел Фибоначчи и Люка. Достаточно полно представлена связь этих чисел с фундаментальными математическими константами (ФМК), в том числе предложенные Рамануджаном необычные соотношения. Любопытны неординарные свойства, касающиеся чисел Фибоначчи и правила третьего члена, как и малоизвестные математические константы, получаемые бесконечным суммированием величин, обратных числам Фибоначчи, Люка и их производным. Особое внимание уделено экспоненциальным – прямым и обратным гиперболическим и тригонометрическом формам выражения золотой константы и её гомологов, а также закону Бенфорда в приложении к числам Фибоначчи. Глава содержит более четырёх с половиной сотен пронумерованных формул, в особенности для чисел Фибоначчи и Люка, немало таблиц, графиков и небольшое количество рисунков.

Глава 4. ***Обобщения и возможные расширения ТЗС*** завершает Часть I. Обобщение математической теории, или модели прикладного значения – дело достаточно тонкое, о чём уже сказано выше. Чисто механические обобщения, каких видимо-невидимо, далеко не всегда приемлемы, поскольку недопустимо искусственно разрывать “пуповину”, соединяющую обобщённую конструкцию с исходным началом. Рассмотрены три уровня обобщения ТЗС, связанные с *правилом сохранения мантиссы* (ПСМ), *экспоненциальным обобщением* в рамках теории ЛМФ и *последовательностями Люка*. В обобщённых теориях появляются семейства констант, начинающиеся с константы ϕ, которая тем самым утверждается в статусе уникума бесконечного множества однотипных математических величин. Подробно рассмотрена, в отдельности и в сопоставлении с золотым числом ϕ, вторая по значимости *константа да Винчи*, двумерным геометрическим символом которой является правильный восьмиугольник, или вписанная в него восьмиконечная звезда. Обобщения приводят к появлению новых интересных особенностей, связанных, в частности, с квазифибоначчиевыми последовательностями, периодами в так называемых приведённых последовательностях и с обобщённым законом Бенфорда.

Часть II. *История золотого сечения*

состоит из четырёх глав и приложения к шестой главе и рассчитана на массового читателя, включая избегающих математических текстов гуманитариев

Глава 5. ***С древнейших времён до Кеплера*** начинается с отрывков из *Истории* Геродота и *Начал* Евклида и завершается *Гармонией мира* Кеплера. Изложены *Гипотеза Прокла*, золотая космология пифагорейцев и Платона по *Тимею*, построение додекаэдра по XIII книге *Начал*. Любопытна и познавательна история последовательности Фибоначчи, которая фактически начинается не с задачи о кроликах в трактате *Liber abaci* средневекового итальянского купца и математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи), а с правил стихосложения, предложенных античным индийским математиком Пингала. Приведён отрывок из изданного в начале XVI века трактата францисканского монаха и математика Пачоли, который считается первой в истории книгой, целиком посвящённой золотому сечению, названному им *De divina proportione – божественной пропорцией*. Представление таких авторов, как Фибоначчи, Лука Пачоли, Леонардо да Винчи, Альбрехт Дюрер и Иоганн Кеплер сопровождается текстами и рисунками из их произведений.

Глава 6. ***История пентаграммы*** заметно отличается от остальных трёх глав второй части тем, что науки здесь почти нет совсем и вся по меньшей мере пятитысячелетняя история основного двумерного символа золотого сечения это, по сути, история его многочисленных эзотерических толкований. Мистическая сила, приписываемая пентаграмме в различных культурах и почти во все времена, включая и современную эпоху, настолько сильна и многосложна, что рассмотрением пентаграммы и её модификаций затрагиваются самые разные стороны магической символики и оккультной практики. Здесь и знаковая символика различных оккультных сообществ и тайных организаций, загадочный Бафомет Элифаса Леви, его же тетраграмма и перевёрнутая пентаграмма, идея микрокосма, печать Кромвеля и карты Таро, теософ Елена Блаватская и масон Альберт Пайк, розенкрейцеры, масоны, мормоны, вычерчиваемая на небе Венерой и обнаруживаемая энтузиастами в разных частях земной поверхности пентаграмма и многое другое. Глава и особенно ***Приложение*** к ней содержат огромное количество рисунков, относящихся к разным периодам истории и отражающих в многообразии её форм всевозможные грани, толкования и применения этого наиболее, пожалуй, популярного магического символа.

Глава 7. ***С XVII века до начала XX века*** включает период резкого падения интереса к ЗС с последующим, начиная с известной книги Цейзинга, возрождением интереса к нему и даже возведением *Goldener Schnitt* в ранг универсального закона гармонии. Помимо Адольфа Цейзинга, основными на данном отрезке истории исследователями золотой пропорции могут считаться Густав Фехнер, Феликс Клейн, Герман Гримм, Теодор Кук, Д’Арси Томпсон, Джей Хэмбидж и Лейси Каски, представленные выдержками и многочисленными рисунками из их оригинальных работ. Французской математик Эдуард Люка ввёл удовлетворяющие линейным рекуррентным уравнениям второго порядка и названные впоследствии его именем последовательности, частным случаем которых являются ряды Фибоначчи и Люка. Изложена также история филлотаксиса (листорасположения), ведущая своё начало с трудов “отца ботаники” Теофраста и *Истории растений* Плиния Старшего, продолженная много позже исследованиями Леонардо да Винчи, Иоганна Кеплера, Шарля Бонне, братьев Браве, Вильгельма Гофмейстера и других, а фактически завершённая уже в наши дни созданием основанной на ЗС и числах Фибоначчи адекватной математической модели филлотаксиса.

Глава 8. ***До начала 70-х годов XX века*** посвящена исследованиям, предшествующим более позднему и современному периоду повышенного интереса к ЗС, ознаменовавшегося появлением специализированных журналов, ассоциации и основанного А.П. Стаховым *Института Золотого Сечения*, многостраничных, красочно оформленных сайтов в интернете, изданием многочисленных работ по ЗС, числам Фибоначчи и смежным вопросам. Здесь много российских имён: Эмилий Розенов, Леонид Сабанеев, Павел Флоренский, Алексей Лосев, Сергей Эйзенштейн, Иван Жолтовский, Николай Воробьёв, Юрий Матиясевич, наряду с такими зарубежными авторами, как Ральф Эллиотт, Абрахам Витгоф, Сриниваса Рамануджан, Матилла Гика, Вольфганг фон Версин, Генрих Тимердинг, Ле Корбюзье, Сальвадор Дали, Джордж Бергман, Эдуард Цекендорф, Вернер Хоггатт, Альфред Бруссо и другие. Выдержки из трудов большинства этих и других авторов могут сказать читателю больше, чем любой пересказ или комментарий. В завершение главы дана портретная антология почти всех наиболее значительных, или традиционно предполагаемых таковыми, "золотоискателей" за весь доступный обозрению исторический период, за исключением не успевших ещё стать историей последних четырёх десятилетий.

Заключение представляет собой нечто вроде развёрнутой аннотации или обширного резюме из сотни кратких тезисов, отражающее наиболее существенные положения, выводы, построения, содержательные особенности и "изюминки" настоящей работы. При этом наиболее важные понятия, элементы, концептуально значимые универсалии, первоисточники и имена авторов отмечены курсивом. А в самом конце указаны относящиеся к ТЗС, её истории и возможным обобщениям основные постулаты, ключевые положения, позиции, выводы и оценки.

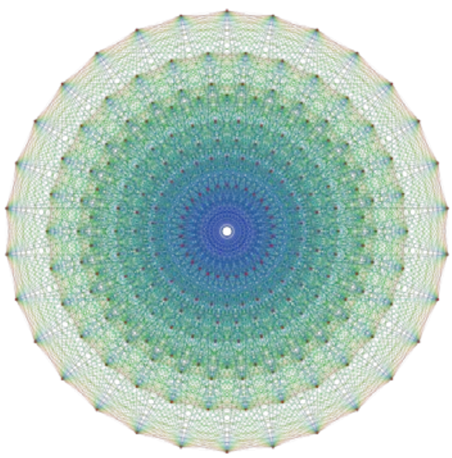
Остаётся лишь добавить, что монография адресована как любителям математики золотого сечения, включая её высшие разделы, "неизвестные страницы" и последние исследования автора, так и тем, кто сторонится математики или же больше интересуется многотысячелетней историей "божественной пропорции" и связанными с ней фактами и развитиями. Спецификой второй части работы обусловлено и рассмотрение в главе об истории пентаграммы толкований, способных привлечь внимание любителей эзотерики – мистики, числовой магии и сакральной геометрии.

Автор искренне признателен всем, кто принял активное участие в обсуждении рукописи монографии и своими замечаниями, советами, пожеланиями и дополнениями способствовал улучшению текста. С благодарностью будут приняты и любые замечания читателей по поводу содержания, структуры, оформления и т.п. книги, которые могут быть отправлены по электронному адресу hrantara@gmail.com.

Особая благодарность дорогому племяннику, разносторонне развитой личности Ованесу Львовичу Оганяну, который с самого начала энергично поддержал идею написания данной книги и оказал неоценимую финансовую помощь, необходимую для издания работы в её нынешнем виде.

Часть I

МАТЕМАТИКА ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ



Глава 1. Определения и общие положения

Глава 2. Геометрия ТЗС

Глава 3. Теоретико-числовой формализм ТЗС

Глава 4. Обобщения и возможные расширения ТЗС

Глава 1.
Определения и общие положения

1. Геометрические построения

Числа, в особенности фундаментальные математические константы (ФМК) и такие величины, как "золотое" число ϕ, входят в узкий круг важнейших научных элементов, необходимых и, вероятно, достаточных для адекватного математического описания мироздания в целом и отдельных его сторон. Есть множество методов явного и неявного представления практически любой значимой числовой величины, конкретно константы ϕ. Исторически первичным является *геометрический* метод деления отрезка в соответствующей пропорции, используемый при построении золотой (ставить кавычки, за редким исключением, больше не будем) фигуры или тела. Два хорошо известных отрывка из *Начал* Евклида непосредственно относятся к тому, что принято сейчас называть *золотым сечением*.

Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключённый между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке [Евклид, Кн. 2, предложение 11, с. 75].

Говорится, что прямая делится в крайнем и среднем отношении, если, как целая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему [Там же, Кн. 6, определение 3, с. 173].

В несколько замысловатом предложении из Книги 2 прослеживается, как полагают, влияние более ранней пифагорейской математики, а вот определение 3 из Книги 6 – это немеркнущая, вечнозелёная классика, с которой начинается едва ли не каждая работа по ЗС. Золотое построение используется Евклидом при построении правильного пятиугольника [Там же, Кн. 4, предложение 11, с. 133] и составленного из 12 таких фигур додекаэдра [Там же, Кн. 13, предложение 17, с. 132] – двумерного и трёхмерного геометрических символов ЗС.

Посредством циркуля и линейки нетрудно осуществить и построение прямоугольного треугольника, длины катетов и гипотенузы которого находятся в пропорции $1:\sqrt{\phi}:\phi$, то есть образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным константе второго золотого сечения. Названный именем Иоганна Кеплера (Johannes Kepler, 1571–1630), этот треугольник, при соответствующем толковании фразы Геродота (др.-греч. Ἡρόδοτος Ἁλικαρνᾱσσεύς, ок. 484–ок. 425 до н.э.), записанной со слов египетских жрецов, живших спустя два тысячелетия после эпохи Хеопса (Хуфу, др.-греч. Χέωψ), также является примером древней золотой фигуры, получаемой в вертикальном сечении Большой пирамиды. Но чисел как таковых во всех этих и других схожих построениях нет; они выявляются лишь в результате числового анализа, перевода геометрических пропорций на язык арифметики. Тем не менее, едва ли справедливо отказывать, как это делают некоторые, древним в знании золотой константы. Можно сказать, что здесь она фигурирует в геометрическом обличье, наподобие, скажем, точек декартовой системы, являющихся приближённым геометрическим отображением вполне определённых чисел. Не исключено, конечно, и знание древними неплохих рациональных приближений, например 13/8 или 21/13 – в современных обозначениях, к числу, появляющемуся в результате золотых построений. Ещё более вероятно, если не бесспорно, понимание несоизмеримости отрезков, получаемых при делении в крайнем и среднем отношении.

Иррациональные числа, точнее отрезки, несоизмеримые с отрезком единичной длины, были известны ещё Гиппасу из Метапонта (др.-греч. Ἵππασος ὁ Μεταποντῖνος, 574–522 до н.э.). Неизвестно, правда, рассматривался ли при этом квадрат или же пентаграмма. В последнем случае, если Гиппас действительно имел дело с диагональю и стороной правильного пятиугольника, именно он должен считаться отцом-основателем математической теории золотого сечения, притом в более продвинутой, чем в *Началах* форме. В наличии любопытное, хотя (увы!) недостоверное историческое свидетельство о том, что за два с лишним тысячелетия до создания законченной теории иррациональных чисел и доказательства иррациональности ФМК π и e иррациональность золотой константы уже была выявлена Гиппасом, который, согласно преданию, за разглашение своего открытия подвергся суровым гонениям со стороны пифагорейцев – ярых поборников единственности и всеобщности натуральных чисел. Если действительно исследовался пятиугольник, а не квадрат, то в высшей степени символично, что самое иррациональное число математики оказалось исторически первым выявленным иррациональным числом; в случае квадрата пальма первенства остаётся за константой Пифагора.

2. Алгебраическая форма

Более точное, хотя и с потерей наглядности непосредственного визуального восприятия представление константы ϕ возможно *аналитически*, методами числовой математики. Мы полагаем, что в рамках универсальной логико-дедуктивной аксиоматики лишь 0 и несколько других ФМК, получаемые в качестве однозначного решения системы функциональных уравнений, являются первичными, независимыми от остальных числовыми величинами [А^{7,c}; А$^{8,a-d}$, А^{15}, Гл. 1]. Отсюда, остальные числа бесконечного континуума комплексных чисел, подмножеством которого являются числа действительные, независимыми математическими величинами считаться не могут. В формальной иерархии математических величин все они, включая и число ϕ, являются вторичными образованиями, так или иначе обусловленными исходными величинами. При этом, если формальные свойства вторичной математической константы (МК) недостаточно изучены (как, например, в случае констант Фейгенбаума), установить её аналитическую связь с ФМК удаётся не сразу. Для самой константы ϕ вопрос решается просто и многообразно.

Разумеется, в бесконечном континууме чисел существует неисчислимое множество самых разнообразных и неожиданных числовых формул и соотношений, являющихся неиссякаемым источником радости и вдохновения для огромной армии любителей математики. Но в любом случае непосредственное, явное представление МК это его запись посредством других известных величин. Сама *форма представления* имеет огромное, а нередко и решающее значение для понимания эвристической роли, научной ценности, теоретического статуса, а также прикладных потенций исследуемой константы. Важно не только *что* представляется, но и *как* это делается. Здесь мы, безусловно, имеем дело с фактором первостепенной значимости, и его недооценка – источник многих скороспелых суждений и творческой слепоты.

Принимая во внимание сказанное относительно важности формы явного аналитического представления числа, приведём, с краткими комментариями, несколько наиболее известных и интересных представлений константы ϕ.

Алгебраическая форма:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \tag{1.1}$$

Это наиболее известная и очень простая запись константы ϕ в конечном виде. Наличие радикала означает, что ϕ является числом иррациональным, но не трансцендентным – в отличие от большинства тех МК, формальная структура которых к настоящему времени выявлена. Очевидна соотнесённость с натуральными числами 1, 2 и 5, с рациональной дробью 1/2. Особенно интересен радикал $\sqrt{5}$, представляющий и самостоятельную ценность, особенно в теории чисел, где величина $1/\sqrt{5}$ выступает как граница между бесконечным счётным и конечным множествами рациональных чисел (теорема Гурвица, см. [Бухштаб, 235]). Связь с дробью 1/2 особенно наглядна при записи (1.1) в форме

$$\phi = 1/2 + \sqrt{(1/2)^2+1}\,. \tag{1.1$'$}$$

3. Вычисление и запись

Существует несколько способов вычисления константы ϕ в позиционной, в частности десятичной, системе счисления. Известно, что в рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{1.2}$$

переменная x_n с увеличением n стремится к $\sqrt{a}$. Хотя и нет явных свидетельств, но не исключено, что подобный метод вычисления квадратных корней был известен ещё в древнем мире, поэтому иногда его называют *вавилонским методом*, хотя алгоритм (1.2) больше известен как *итерационная формула Герона*. Таким образом, имеем сходящуюся к $\sqrt{5}$ рекурсию

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right), \tag{1.3}$$

откуда получение значения для ϕ уже тривиально: прибавить к x_{n+1} единицу и сумму разделить на 2.

Квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ для ϕ, разговор о котором ещё впереди, даёт возможность использовать существующие алгоритмы вычисления корней уравнений любой степени и типа с произвольной степенью точности. Наибольшей популярностью пользуется *метод касательных Ньютона*, который в общем виде сводится к рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.4}$$

В нашем случае

$$f(x) = x^2 - x - 1,$$

а $f'(x)$ – производная функции $f(x)$. Полагая $x_0 = x$, после элементарных преобразований имеем рекурсию

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1} \tag{1.5}$$

Можно брать за исходное уравнение $x - 1 - 1/x = 0$ и тогда

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n}{x_n^2 + 1} \tag{1.6}$$

Остаётся в каждом из трёх вариантов оценить скорость приближения переменных к общему пределу ϕ. Для этого надо выбрать какое-то значение для начального x_0, желательно не слишком далёкое от 1,618. Пусть, удобства ради, во всех трёх рекурсиях это число 2. Результаты для первых шести шагов итерации для абсолютной величины разности $x_{n+1} - \phi$ (в случае формулы Герона разности $[(x_{n+1} + 1)/2 - \phi]$) даны в таблице. Заметим, что при начальном условии $x_0 = 2$ алгоритм Ньютона приводит во втором и третьем случаях к таким последовательностям для переменной x_{n+1} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$F_5/F_4,\ \ F_9/F_8,\ \ F_{17}/F_{16},\ \ F_{33}/F_{32},\ \ F_{65}/F_{64},\ \ldots,\ F_{1+2^{n+1}}/F_{2^{n+1}},\ \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$F_6/F_5,\ \ F_{12}/F_{11},\ \ F_{24}/F_{23},\ \ F_{48}/F_{47},\ \ F_{96}/F_{95},\ \ldots,\ F_{6\cdot 2^{n-1}}/F_{6\cdot 2^{n-1}-1},\ \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

где F_n – числа последовательности Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, … . Понятно, что конкретные значения членов рекуррентной последовательности обусловлены выбором начального члена x_0, но, глядя на таблицу, нетрудно заметить, что скорость сходимости к пределу одинакова во всех трёх случаях и с переходом от n-го к $n+1$-му шагу итерации погрешность отклонения от константы ϕ уменьшается по квадратичному закону: $\Delta(x_{n+1}) \approx \Delta^2(x_n)$. Следовательно, здесь мы имеем быструю сходимость рекуррентной последовательности к своему пределу, а с практической точки зрения наиболее простым и удобным представляется вавилонский метод.

Таблица

Скорости сходимости трёх рекурсий к пределу ϕ

Рекуррентная формула	**Отклонение от ϕ для чисел итераций $n = 1, 2, \ldots, 6$**					
	1	2	3	4	5	6
$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$	$7\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-10}$	$2\cdot10^{-20}$	$2\cdot10^{-40}$	$1\cdot10^{-80}$
$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1}$	0,38	0,05	$1\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-7}$	$9\cdot10^{-14}$	$4\cdot10^{-27}$
$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n}{x_n^2 + 1}$	0,02	$5\cdot10^{-5}$	$5\cdot10^{-10}$	$5\cdot10^{-20}$	$4\cdot10^{-40}$	$3\cdot10^{-80}$

Ниже даны лишь 50 знаков после запятой, а всего к сегодняшнему дню вычислен триллион десятичных знаков константы ϕ [Gourdon *and* Sebah].

$$\phi = 1{,}61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ 09179\ 80576\ldots$$

С таким показателем, уступая известному с точностью в 10 триллионов десятичных знаков числу π [Yee & Kondo], она делит 2–4 места с константами e и $\sqrt{2}$. Это явное свидетельство повышенного интереса к золотому сечению, никому ведь и в голову не придёт вычислять на суперкомпьютерах малозначительную математическую величину с такой умопомрачительной степенью аппроксимации. Как разновидность интеллектуального спорта не имеющий прикладного значения *математический альпинизм* признаёт лишь “зияющие числовые вершины”, и константа ϕ – один из излюбленных маршрутов подобного “горного” восхождения. На практике больше сорока десятичных знаков не требуется, причём обычно достаточно и нескольких знаков, а нередко число ϕ берут в приближении 1,618 и даже в грубом округлении 1,62. Другое дело теоретические исследования, особенно статистические. Из последовательности в триллион знаков можно, при желании, извлечь много любопытных числовых особенностей. Прикладного значения они, правда, не имеют, но многочисленных любителей числовой математики это как раз меньше всего заботит. Довольствуясь здесь полусотней знаков, отсылаем любителя к известной программе *Wolfram Mathematica*, в которой набрав комбинацию N[GoldenRatio, n], где вместо n записывается определённое число, можно на обыкновенном PC получить пусть не триллион, но по крайней мере десятки миллионов знаков.

Приведём для справки, со скромной точностью в 20 знаков после запятой, значения константы ϕ в двоичной, пятеричной и двенадцатеричной системах счисления, а также в основанной на золотой константе системе $\phi(\phi)$ и в минимально-битовом представлении Цекендорфа, основанном на числах Фибоначчи.

$\phi(2) \;= 1{,}10011\ 11000\ 11011\ 10111\ldots$

$\phi(5) \;= 1{,}30211\ 13423\ 04120\ 24223\ldots$

$\phi(12) = 1{,}74bb\ 67728\ 02a46\ a6a18\ldots$ (символ a означает натуральное число 10, b – число 11)

$\phi(F_n) = 10{,}00100\ 01010\ 10000\ 00100\ 01001\ 01001\ 00001\ 00000\ 00100\ldots$

$\phi(\phi) \;= 10$

Заметим, что в системе счисления с основанием 12, имеющей серьёзное теоретическое и прикладное преимущество перед системой с основанием 10 (четыре делителя вместо двух), ориентиром для золотоискательства, при одинаковом уровне относительной погрешности в $\approx 0{,}1\%$, сегодня служило бы не десятичное 1,62 = 162/100 = 81/50, а более удобное двенадцатеричное 1,75 = 7/4.

4. Одинарный код

Константа ϕ – единственное иррациональное число континуума, записываемое в виде цепной дроби одинарным кодом, то есть одним символом и одинаково во всех системах счисления. Благодаря такой особенности она в определённом смысле является *самым иррациональным числом*, наиболее трудным для числовой рационализации. По сути, именно в этой формальной уникальности числа ϕ и кроется один из основных “секретов” его уникальности. Содержательно это означает сохранение, стабильность, оптимальность, экстремальность, устойчивость по отношению к различным воздействиям. Без формул для цепной дроби золотой константы сколь-нибудь полное понимание её особой отмеченности, формальной выделенности едва ли возможно.

Цепной называется непрерывная дробь типа

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots] \tag{1.7}$$

где a_j – положительные целые числа, включая 0. Равенством всех a_i единице и характеризуется число золотого сечения:

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} \tag{1.8}$$

Здесь самое место указать на тонкую грань между эксплицитным и имплицитным, которая может быть стёрта при определённом задании математической величины. Для ясности сформулируем задачу, теоретическая важность которой несомненна: *найти самое иррациональное число*. Известно, что любое иррациональное число r может быть аппроксимировано рациональными дробями, образующими сходящуюся к пределу r числовую последовательность, каждый последующий член которой обеспечивает лучшую степень приближения, чем предыдущий. Известно также, что бесконечная последовательность рациональных приближений любого вещественного числа r может задаваться посредством цепных дробей, то есть непрерывных дробей типа (1.7). В отличие от рациональных чисел, цепная дробь иррациональных чисел бесконечна. Минимизация последних, в смысле наиболее медленной сходимости последовательности, называемых подходящими дробями, конечных отрезков цепной дроби к пределу вполне очевидна: все a_i (i = 0, 1, 2,…, n, ...) должны быть равны единице. Получается соотношение (1.8), но уже не как запись непрерывной дробью заданного числа, а как решение математической задачи достаточно общего типа.

Переоценить значение такой формальной особенности константы ϕ довольно трудно. Это не просто одна из числовых диковинок, которых в математическом "паноптикуме" видимо-невидимо, а нечто, относящееся к корневой структуре числового множества, с выходами в область её многочисленных приложений. Принцип минимума (экстремума, оптимума, наименьшего действия) играет большую роль в математике и теоретическом естествознании, и, не слишком утрируя, можно сказать, что это излюбленное математическое правило Всевышнего, Творца, Демиурга, Природы (дело не в названии). Принцип минимума оказывается востребованным и реализуется всюду, где удаётся достичь предельной ясности и адекватности математического описания реалий внешнего мира. По сути, это важнейший элемент того, что называют *математикой гармонии*, *математической гармонией мира* и т.п. Следует полагать, что именно причастность ЗС к такой математической и природной фундаменталии, как принцип минимума, а не бесчисленные и большей частью сомнительные его обнаружения везде и всюду, определяет реальный теоретический вес принципа золотого сечения (ПЗС) и место золотой константы среди других констант.

Интересна также составленная из единиц запись золотой константы в виде бесконечной последовательности радикалов

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}, \qquad (1.9)$$

которую легко получить из уравнения $x = \sqrt{1+x}$, с последующей подстановкой квадратного корня на место переменной под корнем. Заметим, что число в левой части и повторяющееся число под радикалом, различные в данном соотношении, могут быть одинаковыми лишь в случае ФМК 2:

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} \qquad (1.9')$$

В этом легко убедиться возведением в квадрат соотношения общего типа

$$a = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots}}} \qquad (1.9'')$$

с последующей подстановкой и делением на a.

5. Определённый интеграл и бесконечные ряды

Существуют различные представления золотой константы посредством интегралов, бесконечных рядов и произведений. Из внушительного множества рядов, приводящих в бесконечности к константе ϕ, лишь немногие не содержат под знаком суммы числа Фибоначчи F_n и Люка L_n. Два таких ряда, из которых второй [Andrews *et al.*] менее известен, чем первый, относятся к категории тех математических равенств, которые, безотносительно к их познавательной или прикладной значимости, ценятся как произведения формального математического искусства. Интересно, что золотая константа, или же её вечный спутник $\sqrt{5}$, нередко фигурирует в обеих частях равенства.

a) *Интеграл*

$$\phi = \int_0^1 \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} + \frac{3}{2} \right) dx \qquad (1.10)$$

b) *Бесконечные ряды*

$$\phi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{n!(n+2)!\,2^{4n+6}} \qquad (1.11)$$

c) $$\phi = \exp\left[\frac{\sqrt{5}}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14}\right) + \ldots \right) \right] \qquad (1.12)$$

Известно, что сумма бесконечной геометрической прогрессии $q + q^2 + q^3 + \dots q^n + \dots$, где $|q| < 1$ равна $q/(1-q)$. Если $q = \phi^{-1}$, тогда сумма прогрессии $\phi^{-1} + \phi^{-2} + \dots + \phi^{-n}\dots$ равна $\phi^{-1}/(1-\phi^{-1})$, а это не что иное, как константа ϕ. Следовательно, имеем обусловленное формальными свойствами числа ϕ интересное и единственное в своём роде равенство

$$d)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\phi^k} = \phi \qquad (1.13)$$

Если же суммирование начать с нуля, получим

$$e)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\phi^k} = 1 + \phi = \phi^2 \qquad (1.13')$$

6. Тригонометрические и экспоненциальные представления

Они важны для понимания ϕ как математической величины, формально выражаемой посредством фундаментальных математических констант – проточисел e, π, i и 2, натурального ряда и чисел 5 и 10, геометрически же непосредственно связанной с правильными пяти- и десятиугольником. Константу ϕ можно, разумеется, выразить через любую из шести тригонометрических функций, составляющих систему взаимосвязанных математических преобразований типа e-i-2, но проще и удобнее использовать две основные и обратные им функции. Исходные соотношения, подробнее рассмотренные в третьей главе, фактически определяющие *золотое* ядро замкнутых и в меньшей мере незамкнутых геометрических многообразий, от плоских фигур до трёхмерных тел, достаточно просты:

$$\phi = 2\cos(\pi/5),\quad \phi = 2\sin(3\pi/10),\quad \phi = \sec(2\pi/5)/2,\quad \phi = \csc(\pi/10)/2 \qquad (1.14)$$

Отсюда, в угловых единицах золотыми являются углы в 18°, 36°, 54° и 72°. Понятно, что в силу периодичности и других особенностей тригонометрических функций связь константы ϕ с ними сохраняется для углов $n\cdot\pi/5$ или $n\cdot\pi/10$ при любом целом значении n. Просто здесь она несколько сложнее. Например, для косинуса угла $19\pi/10$ имеем:

$$\phi = 4\cos^2(19\pi/10) - 2,$$

а, допустим, для устрашающего “угла зверя” 666° равенство $\phi = -2\sin(666°)$ выполняется по той простой причине, что 666° = 2·360° – 54°, то есть здесь мы фактически имеем дело с взятым со знаком минус золотым углом 54°. Заметим, что истинная природа косинуса, синуса и других тригонометрических функций, считающихся ранее просто угловыми функциями, впервые была установлена Леонардом Эйлером (Leonhard Euler, 1707–1783) при сравнении независимо полученных выражений для $2\cos x$ и $e^{ix} + e^{-ix}$ с помощью разложения их в ряд [Вилейтнер, 157–158]. По сути это один из поворотных моментов в истории математики и теоретического естествознания, значение которого для науки и техники трудно переоценить.

По определению, представляющему для нас особый интерес, “Экспонента – показательная функция $\exp = e^x$, где e – основание натуральных логарифмов e = 2,7182818284590452… .” [Экспонента], а все тригонометрические функции являются производными от экспоненты:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\quad \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}},\quad \csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{2i}{e^{ix} - e^{-ix}} \qquad (1.15)$$

Ясно поэтому, что правые части равенств (1.14) – это различные комбинации экспоненты с небольшим набором переменных, включая число π. Но существуют и другие, менее известные, но не менее любопытные соотношения – с единственной экспонентой, обратными тригонометрическими функциями и уже без константы π. В двух столбцах, различаемых наличием или отсутствием константы i перед экспонентой, даны соответствующие соотношения для всех шести тригонометрических функций (вместо csc x иногда пишут cosec x, а для двух последних функций часто используются обозначения arctan x и arccot x).

$$\phi = e^{-i\arcsin(i/2)} \qquad \phi = -i\,e^{i\arcsin(\sqrt{5}/2)} \qquad (1.16)$$

$$\phi = e^{-i\arccos(\sqrt{5}/2)} \qquad \phi = i\,e^{-i\arccos(-i/2)} \qquad (1.17)$$

$$\phi = e^{-i\,\mathrm{arcsec}(2/\sqrt{5})} \qquad \phi = i\,e^{-i\,\mathrm{arcsec}(2i)} \qquad (1.18)$$

$$\phi = e^{-i\,\mathrm{arccsc}(-2i)} \qquad \phi = -i\,e^{i\,\mathrm{arccsc}(2/\sqrt{5})} \qquad (1.19)$$

$$\phi = e^{\mathrm{i}\,\mathrm{arctg}\,(-\mathrm{i}/\sqrt{5})} \qquad \phi = \mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{5}\,\mathrm{i})} \tag{1.20}$$

$$\phi = e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arcctg}\,(-\sqrt{5}\,\mathrm{i})} \qquad \phi = \mathrm{i}\,e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arcctg}\,(-\mathrm{i}/\sqrt{5})} \tag{1.21}$$

Принимая здесь во внимание зависимость обратных тригонометрических функций от констант i, 2 и $\sqrt{5}$ и обозначая их обобщённым символом $g = g(\mathrm{i},\, 2,\, \sqrt{5}\,)$, можно записать равенства в столбцах в виде

$$\phi = e^{\pm g} \quad \text{и} \quad \phi = \pm\mathrm{i}\,e^{\pm g} \tag{1.22}$$

Переход от обратных тригонометрических к обратным гиперболическим функциям, то есть от e-i-2-x преобразований к более удобным e-2-x преобразованиям нетрудно осуществить по известным формулам. Однако для наших целей нет необходимости переводить все двенадцать равенств в гиперболическую форму; ограничимся простейшим выражением. Это самое первое соотношение, которое теперь запишется в виде

$$\phi = e^{\mathrm{arsh}(1/2)} \tag{1.23}$$

Через анализ экспоненциально-тригонометрических форм представления константы ϕ мы пришли к простому и изящному равенству, положенному нами в работе [A[7,g]], см. также [A[15,h]], в основу Обобщённой Теории Золотого Сечения (ОТЗС), рассматриваемой как приложение теории ЛМФ. С удовлетворением добавим, что равенство (1.23), в противовес критике в [Василенко[1,2]], сейчас уже встречается в MathWorld [Weisstein[1]] (в дальнейшем W), в on-line-энциклопедии OEIS [Sloane[1]] (в дальнейшем S), целочисленных последовательностей [S[2]], на сайтах GoldenNet [Phi and Mathematics; The number Five (5) and Phi] и [MetPhys], в статьях в Википедии о ЗС на немецком и французском, в работах, посвящённых золотому сечению или гиперболическим функциям. Причём всё чаще в качестве основного, наряду с (1.1), соотношения для золотой константы. Иначе, наверное, и не могло быть. Экспонента открывает такие двери в математику и её приложения, в которые раньше не могли войти, либо вообще не знали об их существовании. Это краеугольный камень дифференциального и интегрального исчисления, она фигурирует в решении дифференциальных уравнений любого типа и любого порядка; играет ключевую роль во всех теориях числовой математики.

Одно только перечисление выражаемых посредством экспоненты и обратной ей функции натурального логарифма наиболее известных функций о многом скажет. Помимо 24 тригонометрических, гиперболических и обратных им функций, а также их интегральных форм, это гамма- и бета-функции, гипергеометрическая и вырожденная гипергеометрическая функции, цилиндрические функции Бесселя, сферические функции Лежандра, эллиптические функции Якоби, Вейерштрасса и тета-функция, функции эллиптического цилиндра Матьё, функции параболического цилиндра Вебера, дзета-функция Римана, ортогональные многочлены (полиномы) Эрмита, Чебышева, Лагерра, интеграл вероятности, интеграл Фурье, а также функция излучения Планка, функции Ланжевена, Дебая, Планка – Эйнштейна из физической теории. Список можно ещё очень долго продолжать, и он никогда не кончится, тем более что из года в год пополняется всё новыми функциями. Принято считать, что произвольная математическая функция может быть представлена, притом единственным образом, в виде конечного, а чаще бесконечного e-i-2-преобразования, то есть тригонометрического ряда, частный случай которого – ряды Фурье, причём для очень широкого класса функций это доказано, см. [Зигмунд].

Для более ясного понимания особенностей данного соотношения и целесообразности его выбора в качестве наиболее удобного из числа двадцати четырёх аналогичных соотношений подойдём к его получению с другой стороны, забыв на время о соотношениях (1.16)–(1.21) и их гиперболических “двойниках”. Известно, что последовательное применение $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ прямого и обратного операторов не приводит к каким-либо изменениям математического выражения и может лишь сопровождаться появлением постоянных. Если операторы $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ это экспонента e^x и логарифмическая функция $\ln x$, новых постоянных нет и выполняется равенство $e^{\ln x} = x$, в частности $e^{\ln\phi} = \phi$. Такая запись числа в принципе бесполезна, и задача состоит в том, чтобы заменить обратную экспоненте функцию $\ln x$ какой-то другой функцией, с другим аргументом. Иначе говоря, суперпозицию $f[f^{-1}(\phi)]$ прямой и обратной функций требуется заменить суперпозицией $f[h(a)]$, где h – некая функция, a – константа. Это практически всегда остающаяся “за кадром” самоочевидная математическая процедура составления равенства, в котором с одной стороны стоит константа, с другой его функциональная запись с какими-то числовыми величинами. Так, в равенствах (1.14) аргументами тригонометрических функций являются константы e, π, i, 2, натуральный ряд, числа 5 и 10. Очевидно, что функция h не должна быть слишком сложной, но главное требование – значимость константы a; в противном случае замена числа её функциональным представлением посредством прямой и обратной функций ничем не оправдана и “игра не стоит свеч”.

Вот тут-то и оказались востребованными свойства золотой константы и функциональная связь логарифма с обратным гиперболическим синусом. Посмотрим вначале, как это выглядит для ФМК π. Получим равенство

$$\pi = e^{\mathrm{arsh}(1{,}41164\ldots)}$$

с ничем не примечательным аргументом функции. В случае произвольного числа x показатель степени выражается дробью $\frac{x^2-1}{2x}$, которая как раз для $x=\phi$ равна 1/2. К этому можно было прийти сразу, учитывая формулу

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \tag{1.24}$$

При значении x = 1/2 выражение в скобках – это попросту равенство (1.1′) для ϕ; в некоторых работах, например [W[1]], данное свойство упоминается в форме sinh(ln ϕ) = 1/2 как *особое значение* (*special value*) гиперболического синуса. Трудно найти другое, более убедительное свидетельство связи золотой константы с функцией натурального логарифма, одной из двух, наравне с обратной ему экспонентой, истинно фундаментальных (*материнских* – по терминологии теории ЛМФ, см. [A[7,c]]) математических функций. Фактически безальтернативен и выбор функции $\operatorname{arsh} x$ (используются и такие формы записи: $\operatorname{arsinh} x$, $\sinh^{-1} x$, $\operatorname{argsh}(x)$ и др.) для экспоненциального представления константы ϕ, поскольку для остальных обратных гиперболических функций их связь с логарифмом приводит к более сложным, чем (1.23) равенствам.

Рассматривая различные способы представления золотой константы, мы вплотную подошли к одному из узловых моментов настоящей работы. Пользуясь случаем, нарушая в порядке исключения последовательность изложения, забежим вперёд – в четвёртую главу, в область естественных обобщений ТЗС. Фактически всё упирается в особенности выражения

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{x} \tag{1.25}$$

которое при “заурядности” значения x означает подмеченную С.Л. Василенко и действительно ничем не оправданную замену константы её усложнённой функциональной записью. С другой стороны, такое выражение может служить в качестве формального “сепаратора”, отделяющего золотую и золотоносную “фракции” от “пустой породы”. Руководствуясь принципом простоты, надо только приравнять показатель степени полуцелому числу $m/2$ (или целому m, а в более общем случае – рациональной дроби k/m), и тогда придём к эксплицитной экспоненциальной формуле

$$\phi_{m/2} = e^{\operatorname{arsh}(m/2)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{1.26}$$

для золотоносного семейства $\phi_{m/2}$ и его имплицитному эквиваленту в форме квадратного уравнения

$$x^2 - mx - 1 = 0 \tag{1.27}$$

Это один из основных способов обобщения ТЗС, полученный нами в [A[7,i]] в рамках теории ЛМФ, которая жёстко навязывает форму представления золотой константы и всего семейства $\phi_{m/2}$ посредством основных математических функций: экспоненты e^x и обратной ей функции натурального логарифма $\ln x$. Заметим также, что при таком обобщении уместно говорить не о принижении значимости и роли константы ϕ, а скорее наоборот, о её “возвеличивании” как родоначальника, первенца семейства констант. Золотая константа в бесконечном множестве однотипных числовых величин фактически выделяется использованием принципа минимума, который входит в узкий круг математических, естественнонаучных и природных фундаменталий.

7. Квадратное уравнение

Различные представления изначально известной константы – как бы штрихи большей или меньшей важности к её математическому портрету, который законченным никогда не бывает. Они могут многое сказать о константе: определить принадлежность к тому или иному классу чисел, раскрыть его формальные свойства и характеристики, выявить связь с другими математическими величинами, прежде всего с ФМК. Остаётся, однако, открытым вопрос о том, откуда и зачем появилась данная константа и какова её теоретическая потенция и практическая значимость. Более или менее полный ответ на такой вопрос возможен лишь введением константы через какой-либо принцип, формальное построение, либо её появлением при решении математической задачи. При этом демаркация границы между эксплицитным – явным и имплицитным – неявным введением константы не всегда легко осуществима.

Введение ФМК посредством функциональных уравнений в рамках аксиоматической системы универсальной математики [Там же] или, скажем, непредвиденное появление константы при решении задачи – это, конечно, примеры неявного задания исконных математических величин. Но к какому типу отнести приведённые выше построения из *Начал* Евклида, где ставится не отвлечённая, а вполне конкретная задача построения золотой точки, являющейся геометрическим образом числовой величины? В случае ФМК e предельные соотношения

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \text{и} \quad e = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \tag{1.28}$$

мы считаем явными определениями, поскольку здесь речь идёт о вычислении с произвольной точностью алгоритмически заданной величины. А вот решение уникальной задачи: *Найти функцию, производная которой равна самой функции*, однозначно приводящее к показательной функции с основанием e, уже пример неявного определения. Неявными определениями выявляется теоретический, а частично и онтологический статус золотой константы, её принадлежность уже не к обширным классам, а более узким семействам математических чисел, соотнесённость с различными математическими структурами, числовыми последовательностями и моделями.

Как и любая другая математическая величина, константа ϕ может задаваться эксплицитно и имплицитно. В первом случае число выражается посредством других известных величин, например, знаков n-ичной позиционной системы счисления, или же с помощью радикалов, цепных дробей и тому подобное. В менее наглядных формальных конструкциях, которые также вправе считаться способами явного задания числа, оно определяется через функциональную зависимость как конкретное значение функции, либо как результат интегрирования, или бесконечного суммирования, бесконечного произведения, в основе которых лежит операция предельного перехода. Есть и другие возможности эксплицитной записи, но и в самых сложных случаях речь идёт о том или ином способе задания числа посредством соотношений между постоянными и переменными величинами, учитывая при этом принципиальное отличие связанных переменных, скажем, в определённом интеграле, от независимых параметров рекурсии.

Имплицитное определение величины, уже по определению, характеризуется большей степенью *скрытности*. Если очень коротко, то эксплицитное определение конкретно константы ϕ – это явные или вычисляемые соотношения, а имплицитное определение – уравнения с неизвестными, либо определённый принцип построения числовой конструкции. Простейшим способом неявного определения золотой константы, а также взятой с обратным знаком её обратной величины является не раз уже упомянутое квадратное уравнение

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{1.29}$$

с корнями ϕ и $-\phi^{-1}$, произведение которых равно –1, а сумма равна 1. Это классика золотого сечения, запись на языке современной математики изначального ἄκρος καὶ μέσος λόγος – деление отрезка в крайнем и среднем отношении, или, в словесной формулировке, *целое относится к большей части как большая часть к меньшей*. Обычно с этого начинается знакомство с математикой золотого сечения, а порой этим оно и заканчивается.

Квадратичная функция $f(x) = x^2 - x - 1$ геометрически представляет собой показанную во второй главе параболу, которая пересекает ось абсцисс в точках $x = \phi$ и $x = -\phi^{-1}$ (корни квадратного уравнения), ось ординат – в точке $y = -1$, имеет минимум в точке (1/2, –5/4). Само уравнение (1.29) является частным случаем квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.30}$$

когда коэффициенты a, b, c равны $+1$ либо -1. Сохраняя абсолютные значения коэффициентов и меняя лишь знаки перед ними, имеем восемь вариантов распределения значений $+1$ и -1 между тремя коэффициентами a, b, c. На самом деле их только четыре, если учесть изменение знака величины при переходе с одной стороны равенства на другую. В области действительных чисел дискриминант $D = a^2 - 4bc$ уравнения не может быть отрицательным числом, поэтому здесь только два случая:

$$a = 1,\ b = -1,\ c = -1 \quad \text{и} \quad a = 1,\ b = 1,\ c = -1,$$

то есть уравнение (1.29) с корнями ϕ и $-\phi^{-1}$ и уравнение $x^2 - x + 1 = 0$ с корнями ϕ^{-1} и $-\phi$.

В двух других случаях уравнения

$$x^2 \pm x + 1 = 0 \tag{1.31}$$

приводят к комплексным корням

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \quad \text{и} \quad x'_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \tag{1.32}$$

ничего общего с константой ϕ не имеющим. Квадраты модулей этих чисел равны 1, а их экспоненциальная форма выражается посредством ФМК e, π, i:

$$x_1 = e^{8\pi\mathrm{i}/3},\quad x_2 = e^{4\pi\mathrm{i}/3};\quad x'_1 = e^{\pi\mathrm{i}/3},\quad x'_2 = e^{-\pi\mathrm{i}/3} \tag{1.33}$$

Очевидно, что отличие от единицы коэффициентов a, b и c квадратного уравнения (1.30) выводит его за рамки формализма элементарной теории золотого сечения, но это уже тема последующих глав.

8. Линейная рекурсия второго порядка

В рекуррентных формулах “спрятано” великое множество интригующих математических “тайн”. Наряду с функциональными уравнениями это, возможно, наиболее интересный и значительный способ неявного определения математических величин, а теория рекурсивных функций относится к числу развитых областей математики и нашла широкое применение в компьютерной технике. Сущность рекурсии в том, что задаётся один или множество начальных членов последовательности, а каждый последующий является функцией предыдущих членов. С рекуррентными формулами (1.3), (1.5) и (1.6) мы уже имели дело при рассмотрении вавилонского метода и метода касательных Ньютона в применении к вычислению константы ϕ с произвольной степенью аппроксимации, а сейчас нас интересуют линейные рекуррентные последовательности второго порядка.

В достаточно общем виде, в символической записи рекуррентная формула k-го порядка может быть записана в виде

$$u_n = f(n, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_{n-k}), \tag{1.34}$$

где порядок k определяется числом заданных начальных членов. В виде суммы n-ая переменная рекурсии с заданными начальными членами $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ выражается суммой предыдущих k членов:

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i}, \quad n \geq k \tag{1.35}$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – постоянные коэффициенты, которыми определяется характеристическое уравнение k-ой степени

$$p(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - a_3 x^{k-3} - \ldots - a_k \tag{1.36}$$

Если все корни $r_1, r_2, \ldots, r_k$ последнего уравнения различны, n-ый член линейной последовательности выражается в виде суммы

$$u_n = p_1 r_1^n + p_2 r_2^n + \ldots + p_k r_k^n \tag{1.37}$$

где множители $p_1, p_2, \ldots, p_k$ определяются из начальных условий.

Последовательности Люка

Общие сведения из теории линейных последовательностей нужны для понимания обсуждаемых здесь вопросов, понадобятся они нам и в дальнейшем, см. **[**Lucas sequence**]**. Интересующие нас линейные рекуррентные последовательности второго порядка впервые были рассмотрены французским математиком Эдуардом Люка (François Edouard Anatole Lucas, 1842–1891) во второй половине XIX века. В общем виде они представляют собой пару последовательностей $\{U_n(P, Q)\}$ и $\{V_n(P, Q)\}$, определяемых следующим заданием начальных членов и рекуррентных отношений:

$$U_0(P, Q) = 0 \quad U_1(P, Q) = 1 \quad U_n(P, Q) = P \cdot U_{n-1}(P, Q) - Q \cdot U_{n-2}(P, Q) \quad \text{для } n > 1 \tag{1.38}$$

$$V_0(P, Q) = 2 \quad V_1(P, Q) = P \quad V_n(P, Q) = P \cdot V_{n-1}(P, Q) - Q \cdot V_{n-2}(P, Q) \quad \text{для } n > 1 \tag{1.39}$$

Нетрудно догадаться, что вся “соль” в коэффициентах P и Q, которые могут быть очень разными, но подробнее об этом в *п.* 1, гл. 3, здесь же перечислим для большей ясности основные случаи, с указанием в $U_n(P, Q)$ и $V_n(P, Q)$ значений параметров P и Q **[**Lucas sequence**]**.

$U_n(1, -1)$ числа Фибоначчи

$V_n(1, -1)$ числа Люка

$U_n(x, -1)$ полином Фибоначчи

$\mathrm{V}_n(x, -1)$ полином Люка

$U_n(2, -1)$ числа Пелля

$V_n(2, -1)$ числа Пелля–Люка

$U_n(1, -2)$ числа Якобшталя

$V_n(1, -2)$ числа Якобшталя–Люка

$U_n(3, 2)$ числа Мерсенна $2^n - 1$

$V_n(3, 2)$ числа типа $2^n + 1$

Сюда могут быть добавлены и многочлены (полиномы) Чебышева первого и второго рода, нередко определяемые через дифференциальные уравнения второй степени, являющиеся дифференциальным аналогом квадратного уравнения. Нас, понятно, интересуют лишь случаи, которые непосредственно соотносятся с золотой константой и могут рассматриваться как её неявные определения. Позже, при обсуждении возможных путей обобщения ТЗС будут рассмотрены и другие возможности.

9. Числа Фибоначчи и Люка

Следует заметить, что с именами Фибоначчи и Люка связано немало математических понятий и терминов. С общей теорией линейных рекуррентных последовательностей второго порядка – *последовательностями Люка* мы уже знакомы, *числа Фибоначчи и Люка* рассматриваются в общих чертах в настоящем разделе, намного подробнее – в третьей главе, а *полиномы Фибоначчи и Люка* относятся уже к области обобщений ТЗС. Внесём вначале ясность в терминологию. Условимся в дальнейшем, во избежание путаницы, упорядоченное множество чисел Люка $\{L_n\}$, являющееся частным случаем последовательности Люка $V_n(1, -1)$, называть *рядом Люка*, сохраняя за множеством $U_n(1, -1) \equiv \{F_n\}$ названия-синонимы *ряд Фибоначчи* и *последовательность Фибоначчи*.

Бесконечная последовательность $\{F_n\}$ является одной из наиболее значимых в математике и, пожалуй, самой известной в научно-популярной литературе и массовой культуре системой чисел. Строится она, как известно из предыдущего раздела, по алгоритму $U_n(1, -1)$, из которого следует, что *каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих членов*:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \tag{1.40}$$

Это *правило третьего члена*, которое в простейшем варианте $u_0 = F_0 = 0$, $u_1 = F_1 = 1$ приводит к классическому ряду Фибоначчи

$$0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, \ldots \tag{1.41}$$

дающему в пределе золотую константу:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \tag{1.42}$$

Любопытно отметить, что исторический путь к этому простому предельному соотношения был долог и извилист. Геометрические построения золотого сечения, в частности деление отрезка в крайнем и среднем отношении, а возможно, и носящий сейчас имя Кеплера золотой треугольник, были известны ещё в античном мире, а вот константа ЗС, как определяемое с определённой десятичной точностью число, была вычислена лишь в начале XVII века. Что касается последовательности чисел 1, 2, 3, 5, 8, …, ещё до Фибоначчи (Леонардо Пизанский; лат. Leonardus Pisanus, итал. Leonardo Pisano, ок. 1170–ок. 1250) она использовалась в Индии в связи с правилами стихосложения. Первая “встреча” константы ЗС со своей последовательностью произошла в XVII веке, а строгое доказательство отношения типа (1.42) было получено в середине XVIII века (подробнее об этом сказано в Части II).

Подставляя значения $P = 1$ и $Q = -1$ во вторую из последовательностей Люка, придём опять-таки к рекуррентной формуле (1.40), но уже с начальными членами $u_0 = L_0 = 2$, $u_1 = L_1 = 1$. Это ряд Люка

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, \ldots \tag{1.43}$$

также сходящийся к золотой константе:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \phi \tag{1.44}$$

Квадратное уравнение (1.29) является характеристическим уравнением для чисел F_n и L_n, а производящие функции двух рекурсий, то есть бесконечные степенные ряды с нулевым и целочисленными показателями степеней, коэффициентами которого являются члены данной последовательности, понятно, различны:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + 34x^8 \ldots = \frac{x}{1 - x - x^2} \tag{1.45}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = 2 + x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 11x^5 + 18x^6 + 29x^7 + 47x^8 \ldots = \frac{2 - x}{1 - x - x^2} \tag{1.46}$$

Числа Фибоначчи и Люка, их особенности и свойства, среди них немало удивительных, многочисленные связи между собой и константой ϕ, другими математическими конструктами и множествами и так далее составляют важнейший фрагмент ТЗС, обсуждаемой в последующем. А в настоящей, в каком-то смысле вводной главе рассматриваются, с многочисленными отсылками к другим главам, различные способы эксплицитного и имплицитного представления золотой константы. Её неявное, посредством рекуррентных формул и предельных переходов для чисел F_n и L_n введение производится здесь в рамках теории последовательностей Люка, которая, несмотря на кажущуюся простоту, является общей формальной основой для целого ряда числовых последовательностей и полиномов. Многие из важнейших характеристик чисел $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$ будут получены в дальнейшем подстановкой конкретных значений параметров P и Q в соответствующие формулы общей теории. Именно равенство по абсолютной величине этих параметров единице приводит к рекурсии (1.40), для которой отношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{1.47}$$

равно константе ϕ в обоих случаях.

Варьируя в $U_n(P, Q)$ и $V_n(P, Q)$ независимые параметры P и Q, можно получить целый ряд конкретных последовательностей, включая классический ряд Фибоначчи. Однако и сами U_n и V_n относятся к категории рекуррентных последовательностей частного типа, допускающих различные обобщения. Можно, во-первых, отказаться от стеснительного и в принципе ничем не оправданного условия равенства начальных членов рекурсии натуральным числам. Континуум ведь не сводится к ним, почему не перейти к общему случаю, то есть произвольным комплексным числам

$$u_0 = a + b\mathrm{i},\ u_1 = a + b\mathrm{i},$$

не равным, во избежание вырожденного случая, одновременно нулю? Во-вторых, рекуррентная формула может содержать не два, а произвольное число слагаемых. В-третьих, предполагается, что P и Q – вещественны. В общем же случае, даже оставаясь в рамках *линейных* последовательностей, речь идёт о рекурсиях типа

$$u_{n+k} = a_1u_n + a_2u_{n+1} + a_3u_{n+2} + \ldots + a_ku_{n+k-1},\ \ n \ge k \tag{1.48}$$

с k членами ($k \ge 2$) и комплексными u_i, называемых также возвратными последовательностями.

Ограничимся пока лишь первой возможностью. Пусть

$$u_0 = a + b\mathrm{i} \quad \text{и} \quad u_1 = c + d\mathrm{i}$$

– произвольные комплексные числа, и хотя бы одно из действительных a, b, c, d не равно нулю. Строя рекурсию по правилу третьего члена, получим последовательность комплексных чисел с формулой для общего члена

$$u_{n+2} = aF_n + cF_{n+1} + (bF_n + dF_{n+1})\mathrm{i},\ \ n \ge 2 \tag{1.49}$$

в которой коэффициенты при a, b, c, d, каждый в отдельности, образуют ряд Фибоначчи [A[3], 245–246]. В частности, если все коэффициенты за исключением c нули, получим $u_n = cF_{n-1}$, то есть смещённый на одно место влево ряд Фибоначчи с кратными произвольному действительному числу c членами. Случаю $c = n$ (n = 1, 2, 3, …) соответствует целочисленный положительный ряд. Если же и $a = m$ (m = 1, 2, 3, …), последовательность

$$u_n = mF_{n-2} + nF_{n-1} \tag{1.50}$$

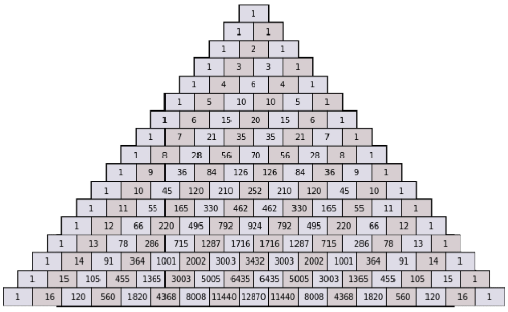
представляет собой сумму увеличенных в m и n раз и соответственно смещённых на два и одно место влево классических рядов Фибоначчи. В частности, если m = 1, а n = 3, получим одну из формул связи между числами Люка и Фибоначчи:

$$L_{n+2} = F_n + 3F_{n+1} \tag{1.51}$$

В разделе 1 главы 3 покажем, что в самом общем случае, независимо от значений не равных одновременно нулю начальных членов $u_0 = a + b\mathrm{i}$ и $u_1 = c + d\mathrm{i}$, обобщённый ряд Фибоначчи представляет собой сумму двух обычных и двух мнимых рядов Фибоначчи и число ϕ по-прежнему его константа. Отсюда, выбор начальных членов на конечный результат не влияет, и рассматриваемая рекурсия во всех случаях может считаться способом имплицитного определения золотой константы.

10. Треугольник Паскаля

Любопытная конфигурация трёх, казалось бы, независимых математических конструкций – биномиальных коэффициентов, числового треугольника и чисел Фибоначчи, приводящих в бесконечности к золотой константе, и есть знаменитый треугольник Паскаля. Так он назван в честь французского математика XVII века Блеза Паскаля (Blaise Pascal, 1623–1662), хотя задолго до него о таком треугольнике, у которого есть и другие названия, знали в Индии, Греции, Иране, Китае, Германии и Италии (см. раздел 14 в Главе 8). Треугольник Паскаля (в этом разделе в дальнейшем просто *треугольник*) представляет собой бесконечную таблицу биномиальных коэффициентов, расположенных в форме “равностороннего”, с одинаковым количеством чисел на сторонах треугольника.



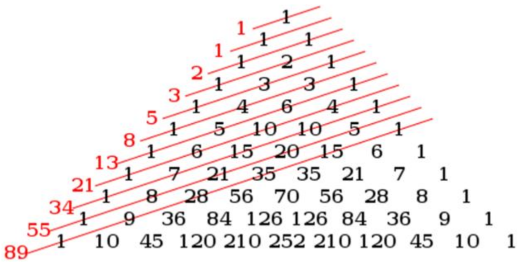
Треугольник Паскаля

Его боковые "грани" состоят из одних единиц, каждое число во внутренней части, начиная с третьего ряда, равно сумме двух расположенных над ним чисел (sic! – правило третьего члена), вертикальная ось делит на две симметричные части, а строки треугольника – выстроенные в ряд отдельно для каждого n коэффициенты при x и y в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad \text{где} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1.52)$$

Поскольку от x и y значения биномиальных коэффициентов не зависят, из выражения $(1 + 1)^n$ сразу следует, что сумма чисел n-ой строки треугольника равна 2^n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). А если, скажем, все нечётные числа окрасить в чёрный цвет, а чётные в белый, образуется фрактальная структура, называемая *треугольником Серпинского*.

Уже отсюда видно, что такая, в общем-то несложная конфигурация чисел легко реализуема, содержит в себе немало интересных соотношений и особенностей и не случайно так популярна с античной эпохи по сей день. Числа Фибоначчи в ней непосредственно не просматриваются, но если провести, как на рисунке, представленном ниже, диагонали, окажется, что сумма чисел на каждой из диагоналей есть число Фибоначчи. Подробности, как обычно, в третьей главе (*п*. 10 и *п*. 12), а здесь лишь отметим, что это формально хоть и не простой, но эксплицитный способ определения константы ϕ, и лишний раз убеждаемся в некоторой условности границы между двумя типами определений.



Треугольник Паскаля и числа Фибоначчи

11. О математической гармонии

Предыдущая часть настоящей главы была целиком посвящена основным геометрическим и теоретико-числовым определениям, формам записи и вычислениям золотой константы. Как и любая другая значимая математическая величина, константа ϕ имеет множество различных форм явного и неявного представления, разница между которыми, как мы видели, не всегда чётко различима. В случае неявного определения, когда исходным началом служит некий принцип построения, например рекуррентная формула, константа является неподвижной точкой – аттрактором данной конструкции, конечным и как правило предельным продуктом формальной системы. В окончательном итоге, посредством переменных устанавливается аналитическая связь между отдельными постоянными элементами математической структуры и её константой, например между числами Фибоначчи и золотой константой, между ϕ и биномиальными коэффициентами. С этого места определение константы, если "забыть" про её генетические корни, может считаться эксплицитным. Однако часто важен не только конечный результат, но и метод его получения, а тем более сама постановка задачи, начальные условия, отправная точка построения и в первую очередь научный контекст, в котором фигурирует константа.

Следует ещё раз отметить, что сугубо формальный анализ характеристик и особенностей константы, особенно в соотнесённости с другими важнейшими математическими реалиями, исключительно важен для понимания её природы и теоретических потенций. Это в полной мере относится к константе ϕ, но есть у неё и собственный *золотой домен*, в котором ϕ со своими производными властвует почти безраздельно. Речь о теории золотого сечения (ТЗС), которая всё чаще воспринимается как важнейший фрагмент философско-математической концепции мировой гармонии, восходящей к глубокой древности. Прежде чем приступить к изложению ТЗС, не уйти от хотя бы краткого обсуждения интересного и трудноуловимого вопроса о математической гармонии.

Многими выдающимися авторами, от продолжившего пифагорейскую традицию Платона (др.-греч. Πλάτων, 428 или 427 до н.э.–348 или 347 до н.э.) до Поля Дирака (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984) и наших современников, сказано множество красивых слов о том, как всё замечательно устроено и согласовано: геометрическое совершенство Космоса, изящество математических формул теоретического естествознания, простота и компактность математического моделирования природы. Остаётся только от общих слов о единстве мира, соразмерности, согласованности его частей и т.п. перейти к более конкретным, содержательным, с меньшей долей неопределённости определениям и формулировкам. И тогда оказывается, что общепринятых критериев математического совершенства нет, есть только красивые фразы, восторженные реплики и субъективное восприятие того, что одним кажется прекрасным, а других оставляет равнодушными.

Между тем, идея математической гармонии это основа мировосприятия многих мыслителей древнего мира и заветная мечта современных учёных, озабоченных состоянием современного знания, представляющего собой конгломерат различных областей науки. В хаотическом нагромождении научных дисциплин должен по идее быть какой-то философско-гносеологический, методологический, с некоторым, быть может, религиозным оттенком стержень, на который можно будет нанизывать всё то ценное, непреходящее, что получено к сегодняшнему дню, хотя бы в естественных науках. В противном случае оказывается выхолощенной сама суть научного поиска, который наиболее видными представителями науки всегда полагался как поиск *вечных истин*. Если даже конечная цель недостижима и базируется на излишней самонадеянности и переоценке реальных возможностей в деле постижения глубинных сущностей, стремление к цели необходимо для того, чтобы избежать превращения науки в лишённую мировоззренческой ценности “заземлённую” обслугу практических потребностей общества [A[11, 18]].

При всей неопределённости и субъективности понимания математической гармония и отсутствии чётких критериев её однозначного распознавания есть в математике вещи, которыми трудно не любоваться. Для нас это прежде всего формула Эйлера

$$e^{\pi \mathrm{i}/2} = \mathrm{i}, \tag{1.53}$$

нередко используемая в качестве некоего “бренда”, символизирующего в упрощённой, получаемой из исходной возведением в квадрат форме $e^{\pi \mathrm{i}}$ современную математику, подобно тому как формула $E = mc^2$ символизирует современную физику. К слову сказать, такой формулы за рамками теории размерностей, строго говоря, нет, а истинная формула $E_0 = mc^2$ содержит индекс 0, означающий, что речь идёт о частном случае энергии покоящегося тела, в общем же случае формула для энергии сложнее.

Удивительно красиво и интуитивно непредсказуемо появление ФМК e в предельном соотношении между двумя составленными из натуральных чисел и стремящимися к бесконечности последовательностями, степенно-показательной функцией и факториалом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = e. \tag{1.54}$$

А разве не удивительно, что для большей части действительных чисел, за исключением квадратных корней, рациональных и некоторых других чисел, среднее геометрическое всех коэффициентов a_i цепной дроби одно и то же и равно константе Хинчина K [Khinchin]:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{M}(a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = 2{,}68545\ 20010\ 65306\ 44530\ \ldots, \tag{1.55}$$

которая имеет интересное интегральное выражение посредством ФМК, экспоненциальной, логарифмической, тригонометрической функций и Гамма-функции:

$$\mathrm{K} = 2\exp\left(\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{1}{x(1+x)} \ln\frac{\pi\, x(1-x^2)}{\sin \pi\, x}\, dx\right) = 2\exp\left(\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{\ln[\Gamma(2-x)\Gamma(2+x)]}{x(1+x)}\, dx\right) \tag{1.56}$$

Удивительны и особо символичны в контексте настоящей работы близкие по значению единице известные соотношения *математического Паганини* Рамануджана (Сриниваса Рамануджан Айенгор, там. ஸ்ரீனிவாஸ ராமானுஜன் ஐயங்கார், 1887–1920) для непрерывных дробей [Ramanathan], в которых наряду с ФМК π, e и 2, чётными натуральными числами фигурирует и константа ϕ, со своими спутниками 5 и $5^{1/2}$ (см. *п.* 4, гл. 3). Подлинным шедевром математического творчества Рамануджана справедливо считается соотношение

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\ldots}}}}}}=\sqrt{\frac{e\pi}{2}} \qquad (1.57)$$

соединяющее бесконечную сумму и непрерывную дробь в редкую комбинацию ФМК e, π и 2 под квадратным корнем.

Константа Хинчина, соотношения Рамануджана, как и многое другое в математике, вправе считаться продуктами чистой теории, порождёнными изобретательностью ума, высокоразвитой интуицией и виртуозной техникой. Это прекрасные образцы формального *искусства для искусства*, прикладного значения, насколько можно судить, не имеющие. В этом их отличие от константы ϕ, за которой стоит принцип золотого сечения, являющийся проявлением универсального принципа минимума. Можно думать, что любая математическая константа, любое соотношение, каким бы замечательным оно ни выглядело, только тогда начинает по-настоящему "работать" за пределами узкой области своего формального определения, когда оно не *само по себе*, а компонент каких-то общих принципов или теоретических конструкций.

Резюмируя, можно полагать, что математическая гармония мира, метафорически называемая *математикой гармонии* и обычно понимаемая как руководящая идея построения единой, согласованной в отдельных частях картины мира, может быть реализована в виде модели, основанной на универсальных логико-математических и естественнонаучных началах, в том числе и ПЗС. Роль основных математических констант, включая ϕ, в такой модели безусловно велика. Вводимые посредством основополагающих принципов, это, по сути, краеугольные камни нашего понимания количественных характеристик мироздания, образующие его наполняемый богатым содержанием числовой каркас. Собственно говоря, так было всегда, когда, не довольствуясь мало что говорящим уму и сердцу качественным описанием, возникала потребность в числовых моделях, вносящих ту самую определённость, без которой разум блуждает в тёмных лабиринтах общих положений и красивых деклараций. В этом отношении цель, стоящая сегодня перед адептами математики гармонии, та же, что когда-то на другом уровне знаний решалась жрецами древнего Вавилона и Египта, пифагорейцами и Платоном, Кеплером и Эддингтоном (Артур Стэнли Эддингтон, Arthur Stanley Eddington, 1882–1944).

Тысячелетиями человеческая мысль билась над поиском всеобщего закона, первичной субстанции, праматерии, начальных элементов всего сущего. Какие только теоретические построения не предлагали метафизика, натурфилософия и наука, не говоря уж о мифологии, теологии и мистике. Вода Фалеса, вечный огонь Гераклита и четыре стихии Эмпедокла, бесконечная, вечная, вневременная и объемлющая все миры первичная субстанция Анаксимандра, неделимые атомы Демокрита и Левкиппа, неделимые атомы и эфир науки девятнадцатого века, абсолютные пространство и время Демокрита–Евклида–Ньютона, числа-боги Пифагора и его последователей, треугольники пифагорейцев и Платона, единство и борьба противоположностей Гераклита и Гегеля, апейрон греков, дао и ци китайцев, прана индусов, элементарные частицы и фундаментальные постоянные физической теории, а также вакуум, проточастицы и другие экзотические первоэлементы в некоторых современных спекулятивно-гипотетических построениях. Всего не перечислишь, а в ретроспекции это выглядит как интеллектуальная игра, обусловленная, быть может, не только жаждой познания, но и неосознанным чувством космического одиночества. Тысячелетние поиски *Начала* можно, при желании, считать попыткой найти достойное место в окружающем мире, упрочить своё незначительное во вселенском масштабе существование, гармонично вписавшись в качестве "микрокосма" в большой космос, общую структуру мироздания путём постижения её глубинной сущности, первичной основы и расшифровкой тайного кода природы.

Современная наука, в силу известных причин, прежде всего своего стремительного, приведшего к дифференциации развития, оказалась изгнанной из гармоничного мировоззренческого рая древних и силится сейчас туда вернуться. В своё время надежды на интеграцию научного знания были связаны с концепцией *физикализма*, *аксиоматическим методом*, *кибернетикой*, *общей теорией систем*, наследницей которой в какой-то мере может считаться *теория самоорганизации*, известная больше под поэтическим псевдонимом *синергетика*. Аксиоматический метод использовался и для сведения всей математики к *арифметике натуральных чисел*, или к *логике* посредством логико-дедуктивных формализмов, или к *теоретико-множественной основе*, см. [A[1]]. На роль общефизической теории в разное время претендовали, а в некоторых случаях продолжают претендовать и сейчас всевозможные *единые теории*, *алгебраический и теоретико-групповой подходы*, теории *суперсимметрии*, *супергравитации*, *суперструн*. Побочный эффект, влияние на науку, философию, культуру, технику и жизнь общества в целом этих порой титанических усилий, с участием многих светлых голов велико и не всегда, как например в случае навязывания теоретико-множественных стандартов в математике, отрицательно. А вот надежды по большому счёту ни разу не оправдались. Единство знания, характерное для античного периода и утерянное с дифференциацией науки, непросто вернуть, хотя бы в ограниченном охвате.

Вместе с тем, идея *математической теории мировой гармонии* или, скромнее, *математических начал теории мировой гармонии* не так утопична, как может казаться при оглядке на недавнее прошлое. Любая теоретическая проблема, когда-то, кем-то поставленная, может быть решена лишь в том случае, если для этого есть необходимый теоретический инструментарий, иначе мысль, как птица в клетке, будет биться в тесных границах своих ограниченных возможностей. Так, математика даже близко не подошла к решению некоторых числовых задач, поставленных ещё во времена Евклида (др.-греч. Εὐκλείδης, ок. 300 г. до н.э.) и касающихся, например, определения конечности или бесконечности множества совершенных – равных сумме своих собственных делителей – чисел. Сегодня, помимо осознания ведущими представителями научного сообщества необходимости создания единой научной картины мира, в самой науке, в таких её фундаментальных областях, как числовая математика и физическая теория можно видеть предпосылки для постановки данной проблемы, с более серьёзными надеждами на её успешное решение, чем раньше [Arakelian[1]] (в дальнейшем Ar[1]).

Объективно, есть несколько внушающих умеренный оптимизм обстоятельств. Во-первых, математика, при всём том, что с проблемами, связанными с бесконечностью, она не всегда справляется, достигла такого уровня развития, когда решение проблем теоретического и прикладного характера не упирается в отсутствие соответствующего математического инструментария. Если же такие препятствия и возникают, они довольно быстро устраняются разработкой соответствующих методов и моделей. К тому же при скорости передачи информации в современных суперкомпьютерах, постепенно приближающейся к уровню эксабайт/с (10^{18} байт в секунду), оказывается возможным решение таких задач, к которым раньше нельзя было даже подступиться. Научная, в частности естественнонаучная мысль, с достаточно полной ясностью сформировавшаяся в голове исследователя, всегда может быть записана на универсальном языке математики. Теоретическое бесплодие – это, как правило, отсутствие оригинальных идей, а не технических средств их реализации.

Во-вторых, человек, если и не венец природы (по Шекспиру), то, по крайней мере, её органическая часть. Примерно так это воспринималось в древнем мире, но затем физическое познание со времён Галилео Галилея (Galileo Galilei, 1564–1642) и Исаака Ньютона (Isaac Newton, 1642–1727) всячески пыталось изгнать субъективность из своих рассуждений, отгородиться от того, что принято называть *человеческим фактором*. Из участника процесса человек превратился в стороннего *наблюдателя*, созерцателя, оторванного от объекта своего созерцания. Впрочем, идея неразрывной связи и зависимости Вселенной от человека никогда не умирала, имела своих приверженцев и на западе и на востоке, о чём можно судить хотя бы по небольшому отрывку из известного диалога между Альбертом Эйнштейном (Albert Einstein, 1879–1955) и Рабиндранатом Тагором (бенг. রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর, 1861–1941) [Эйнштейн].

Эйнштейн. Существуют две различные концепции относительно природы Вселенной:

1) мир как единое целое, зависящее от человека;
2) мир как реальность, не зависящая от человеческого разума.

Тагор. Когда наша Вселенная находится в гармонии с вечным человеком, мы постигаем её как истину и ощущаем её как прекрасное.

Эйнштейн. Но это – чисто человеческая концепция Вселенной.

Тагор. Другой концепции не может быть. Этот мир – мир человека. Научные представления о нём – представления учёного. Поэтому мир отдельно от нас не существует.

Здесь просматривается представление о человеке как об элементе мировой гармонии, не существующей отдельно от него. Идея, призванная связать фундаментальные характеристики мира с существованием человека в качестве наблюдателя, явно выражена в принципе, названном *антропным* [Картер]. В полушутливой форме, не слишком отличающейся от имеющихся, звучит примерно так: "Вот он *Я*, какой должна быть Вселенная?". Может показаться, что это просто шутовской манифест самовлюблённой космической козявки с гипертрофированными представлениями о собственной значимости и с отказом от научной рациональности, разрывом причинно-следственной зависимости. По словам нобелевского лауреата Дэвида Гросса (David Jonathan Gross, 1941):

Люди в поиске аргументов часто обращаются к антропному принципу из-за неверия в свои силы, из-за нашего неумения ответить на очень сложные вопросы [Гросс].

Пусть так, но "сложные вопросы", требующие ответа, всё равно возникли, от них уже не спрячешься, не убежишь, а обсуждаемая нами проблема мировой гармонии предстаёт в неожиданном ракурсе.

В самом деле, если длительная эволюция Вселенной, пройдя через множество этапов развития, от предполагаемого Большого взрыва до возникновения планет и тяжёлых химических элементов, в какой-то момент приводит к появлению разумных существ, а сам факт их существования

Можно рассматривать как биологический селективный эффект, позволяющий объяснить численные значения фундаментальных физических постоянных, не поддающиеся никакому другому объяснению [Девис, 11].

Задача поставлена, и никуда от неё уже не уйти. Требуется объяснить значения ФФП, что непосредственно связано с понятием мировой гармонии; именно поэтому антропному принципу уделено здесь столько места.

Можно, не мудрствуя лукаво, сослаться на божий промысел, сотворивший мир с таким расчётом, чтобы позже он оказался населённым разумными существами, неустанно воздающими хвалу великой мудрости Творца. Но это уже телеология, метафизика, а науке нужно другое. И вот началась названная тонкой подстройкой увлекательная игра с числами, безразмерными физическими постоянными. Что было бы, если бы отношение масс протона и нейтрона отличалось от реального всего на несколько десятых процента? Ничего хорошего, существование атомов оказывается невозможным. И так шаг за шагом, от анализа одних отношений к анализу других, от тонкой подстройки к сверхтонкой, когда речь идёт уже об очень малых изменениях, вплоть до уровня 10^{-60} см. [A[7,j], *п*. 9.3]. И каждый раз анализ самых разных безразмерных отношений ФП неизменно приводит к выводу о невозможности Вселенной в её нынешнем виде при каких-либо других значениях ФП. Похоже на то, что даже самое незначительное изменение численных значений существующего набора ФП означает другую Вселенную, свободную от задающего неуместные вопросы наблюдателя.

Пытались решить проблему, а точнее перевести её в другое русло, отрицанием уникальности, существования в единственном экземпляре Вселенной, или же предполагая, что Вселенная, включая наблюдателя, не более чем игра случая, удачно брошенная для нас *кость*. По счастливой случайности в момент Большого взрыва начальные условия – физические законы, параметры и согласованный набор постоянных оказались в точности такими, какие нужны для дальнейшего появления человека. Считая, что возможны другие начальные условия, можно рассуждать о статистическом чуде, которому живая материя обязана своим существованием. Альтернативой подобным представлениям служит гипотеза множественности Вселенных, постулирующая существование наряду с нашей целого ансамбля других Вселенных, каждая со своими законами и набором постоянных. Тогда мы находимся не в одном из возможных миров, чудесным образом приспособленном для нашего в нём проживания, а в одном из одновременно существующих миров, среди которых обитаем только наш. Возможность сообщения с другими Вселенными более чем проблематична, а каких-либо данных в пользу этой и других непроверяемых гипотез спекулятивного характера нет.

Для более полного понимания проблемы уместно провести аналогию с одной относительно малоизвестной особенностью золотой константы [A[15,e], *п*. 5.4]. Из теории непрерывных дробей известна формула Леви [Lévy] для числителей P_n и знаменателей Q_n подходящих дробей числа a:

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/a)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\pi^2}{12\ln 2}} \tag{1.58}$$

Составленная из ФМК e, π, i и магического числа 12 величина

$$e^{\frac{\pi^2}{12\ln 2}} = 3{,}27582\,29187\,21811\,15978\,76818\,8245\ldots, \tag{1.59}$$

называемая константой Хинчина–Леви, равна предельным значениям выражений $(Q_n)^{1/n}$ и $(P_n/a)^{1/n}$ большинства, но, как и в случае константы Хинчина, не всех действительных чисел. Для константы ϕ и её ближайших степеней $\phi^{\pm n}$ (n = 1, 2) эти выражения равны в пределе ϕ. Но что интересно, даже при малейшем, сколь угодно малом отклонении от числа 1,6180339… имеем в пределе опять-таки константу Хинчина–Леви [Там же]. Геометрически это означает, что на числовой оси в окрестности точки ϕ любая другая, сколь угодно близкая к ней точка относится к разряду “обычных” чисел, поскольку указанным свойством уже не обладает.

В естествознании, где величины определяются экспериментально с некоторой погрешностью, такое даже трудно представить. Абсолютная точность достижима в математике благодаря тому, что математическая величина определяется безотносительно к каким-либо эмпирическим процедурам, как некая абстрактная данность, аналитически связанная с другими величинами. Но не та же картина наблюдается в случае сверхтонкой подстройки Вселенной, где малейшее изменение двуединой безразмерной постоянной, являющейся по сути не только физической величиной, но и математическим числом, меняет буквально всё? В такой трактовке математика нечто большее, чем просто *язык природы*. Согласованный с абсолютной точностью математический каркас Вселенной скорее напоминает пифагорейско-платоновскую картину мира, которую бог, демиург реализует в совершенных геометрических пропорциях, в том числе золотой [Платон, 31c–32b], и телах, включая икосаэдр и додекаэдр, “который бог определил для Вселенной и прибегнул к нему, когда разрисовывал её и украшал” [Платон, 55c].

Соотнесённая со сверхтонкой подстройкой Вселенной идея математики гармонии может считаться исторической наследницей своей пифагорейско-платоновской предшественницы. Важно отметить, что при таком понимании это не приближённая, а *точная* математическая модель Вселенной, рассматриваемой как математический уникум, основанный на фундаментальных принципах, определяющих числовые модели со строго согласованным и единственно возможным набором констант. Принимая во внимание сводимость безразмерных физических постоянных к математическим константам и вспомогательным величинам [A[6,7,8,15]; Ar[4]], следует иметь в виду, что краеугольными элементами такой модели должны служить важнейшие МК, среди них и золотая константа, а возможно, и некое число Фибоначчи [A[13]]. Тем самым, ТЗС должна считаться не просто математической теорией со своей более или менее сформировавшейся структурой, со своими исходными положениями, понятиями, геометрическими построениями, числовыми моделями и тому подобное, но также и необходимым компонентом общей теории мировой гармонии. Именно в этом контексте, а не благодаря сомнительным в большинстве случаев "обнаружениям" ЗС куда ни глянь, она приобретает свой онтологический статус, хотя и не вполне определённый, поскольку сама идея математической гармонии всё ещё далека от реализации.

12. Константа ϕ в математике

Возникает и другой вопрос: если теория ЗС со своей замечательной константой ϕ так хороша, почему она не особенно заметна в математике, если же отсечь огромный пласт сомнительных и не вполне достоверных её применений за пределами математики, то и в других областях науки, в частности в физической теории? Явное обнаружение золотого следа в таких природных явлениях, как филлотаксис (листорасположение) в ботанике, фуллерены в химии и пентагональная симметрия квазикристаллов в физике твердого тела [Shechtman *et al.*] способно, конечно, внушить золотоискательский оптимизм, но не повод для победных реляций. Между тем, константа ϕ, обусловленная универсальным принципом минимума, причастная к фундаментальным характеристикам числового континуума и определяющая параметры важнейших геометрических фигур и тел, безусловно, заслуживает большего. Демиург (или, если угодно, *Природа*) наилучший математик, и трудно допустить, что превосходная "визитная карточка" константа ϕ и заманчивые перспективы ТЗС в деле создания теории математической гармонии выпали из поля его зрения и не использованы в полной мере.

Проблема всё же, думается, в другом. Многое из того, что известно о константе ϕ, говорит о её двуединой природе: математическое число определённого типа и безразмерная природная постоянная. Но работающих безразмерных постоянных высокого ранга в основных канонизированных теориях естествознания сегодня почти нет. Современная физика, которая с меньшей, чем раньше, уверенностью, но всё ещё сохраняет свою историческую роль естественнонаучного лидера, начиналась с классической механики Ньютона, где вообще не было ФФП. Позже, одна за другой стали появляться размерные постоянные. Вначале это была гравитационная постоянная G, хоть и названная именем Ньютона, но в его теории всемирного тяготения отсутствующая и введённая много лет спустя в качестве коэффициента пропорциональности, обеспечивающего одинаковую размерность частей в формуле закона всемирного тяготения. Затем появились скорость света в вакууме c, постоянные Планка $\hbar$, Больцмана k, Ферми G_F, играющие, в отдельности или в сочетании с другими постоянными, большую роль в электродинамике Максвелла, в специальной и общей теориях относительности, в классической и релятивистской термодинамике, в теории элементарных частиц…, см. [A[4,5]]. Структурно размерная ФФП представляет собой произведение размерности на число, определяемое через произвольно выбранные единицы измерения – эталоны.

Такие числа случайны, формально ничем не примечательны. А математическая гармония в её высоком понимании может базироваться только на значимых числах, выделенных безотносительно к каким-либо системам измерения точках континуума, математических константах и безразмерных физических постоянных. Фактически единственная нецелочисленная ФФП, окончательно утвердившаяся и играющая существенную роль в современной физической теории, это постоянная Зоммерфельда (тонкой структуры). Есть ещё ряд вполне серьёзных безразмерных претендентов на аналогичную роль (константы взаимодействия, угол Вайнберга и некоторые другие), однако их реальный теоретический статус пока не так высок. Можно сказать, что теоретическое естествознание только-только вплотную подошло к тому уровню, когда в качестве основных величин, определяющих числовую структуру теоретического описания природы, выступают МК и сводимые к ним безразмерные ФП.

О том, насколько важен переход от качественного к основанному на математических константах количественному описанию, можно судить хотя бы на частном примере уравнения Навье–Стокса, которое представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, моделирующую движение жидкости. Так вот, получить более точную картину такого теоретически сложного и крайне важного для техники явления как турбулентность удаётся лишь с использованием константы Фейгенбаума [Фейгенбаум] – аттрактора, характеризующего удвоения периода при переходе к детерминированному хаосу. Сценарий подобного удвоения, означающий переход от упорядоченного состояния или периодического режима к хаосу или апериодическому режиму, носит достаточно универсальный характер и относится к различным динамическим системам, включая социальные структуры. Здесь принципиально то, что ограниченность возможностей качественного описания снимается применением математической константы посредством порождающего её механизма.

Вернёмся, с учётом сказанного, к вопросу об относительной малозаметности в математике и особенно в физической теории ПЗС и числа ϕ. В настоящее время в математике и её приложениях широко используются лишь ФМК, являющиеся необходимыми и узловыми элементами чистой математики. Они вездесущи, и даже простое перечисление некоторых наиболее характерных примеров применения ФМК в пределах чистой математике весьма показательно. Константа 0 – начало всего множества чисел, и этим уже очень многое сказано. Посредством фундаментальных экспоненциальной и логарифмической функций с помощью констант e, π, i, 2, γ, а также арифметических действий, операции предельного перехода, приводящей к бесконечным рядам и произведениям, производной и интегралам различных типов, строится несметное множество всевозможных математических функций. Среди них и элементарные тригонометрические (e-i-2-преобразования) и гиперболические (e-2-преобразования).

Если же говорить о каждой из ФМК, взятой в отдельности, то число π, характеризующее вообще переход от прямолинейного к криволинейному, является основной константой геометрии, играет исключительную роль в математическом анализе и теории чисел, в частности в теории интегралов, бесконечных рядов, произведений, кроме того определяет бесконечное множество особых точек самых разных функций. Константа e, называемая также числом Эйлера или числом Непера, характеризующая быстрое увеличение или уменьшение, играет важнейшую роль в решении дифференциальных уравнений любого типа и любой степени; посредством экспоненты e^x выражаются вероятностные процессы и явления, такие как нормальное распределение Гаусса или информационная энтропия. Константа 2, хотя и фигурирует повсюду, но из-за своей целочисленности менее заметна, чем остальные; двойка появляется всегда при переходе от линейных связей к нелинейным. Константа i как бы символизирует континуум чисел в его целостности, означает переход от действительных чисел к комплексным, от теории функций действительного переменного к теории комплексной переменной, с её помощью выражаются все периодические процессы. Переход же от экспоненциальной, логарифмической, тригонометрической и гиперболической функций к их интегральным формам сопровождается появлением константы Эйлера−Маскерони γ. Наконец, постоянная суперпозиции косинуса ɯ и омега константа Ω как глобальные аттракторы множества всех действительных и мнимых чисел, получаемые наряду с остальными ФМК в качестве решений функциональных уравнений в рамках аксиоматической системы универсальной математики [A[7,c], *п*. 2.15; A[8,c]; Ar[3]], обозначают переход от множественного к единичному, от бесконечного множества чисел к фиксированным точкам.

Краткий и далеко не полный обзор важнейших характеристик ФМК призван показать тот широчайший спектр вопросов чистой теории, которые невозможно решить без участия этих основных числовых величин математики. Сотни МК, см. [Finch], более низкого ранга, помимо того, что являются вторичными в иерархической структуре континуума числовыми величинами, относятся, как правило, к узкой теоретической области, чем и обусловлен ограниченный характер их применения. Но можно выделить и небольшую группу элитных, наиболее известных МК, интерес к которой неизменно высок и проявляется не только в вычислении огромного числа десятичных знаков. А здесь золотая константа практически всегда, во всех известных нам списках уже на одном из первых, если не на первом месте. Такое нельзя приписать случайности или пытаться объяснить причинами только психологического характера, скажем, популярностью, “народностью” золотого сечения. Не подобает путать следствие с причиной. Остаётся ещё раз допустить, что всё дело в уникальности формальных свойств числа ϕ, пусть даже пока не обеспечивающей ему подобающий теоретический статус в математике и достаточно широкое и надёжное применение за её пределами, но вместе с тем внушающее надежду на перспективу широкого использования ПЗС в будущем.

В самых общих чертах *принцип золотого сечения* означает возможность адекватного описания математической конструкции или эмпирического явления в рамках математического аппарата теории золотого сечения. Для этого, естественно, необходимо более или менее чётко очертить границы самой ТЗС, обозначить пределы её применимости, что не так просто и входит в круг рассматриваемых в настоящей и следующих главах вопросов. Есть, конечно, немало не вызывающих сомнений случаев, например двумерные и трёхмерные золотые геометрические объекты, построение которых не требует, кстати, обязательного знания константы ϕ, а тем более её десятичного значения. Столь же бесспорно выявление числа ϕ и его гомологов в рамках теории чисел. Чистая математика всегда считалась бастионом логической непогрешимости, воздвигнутым из абстракций, скреплённых строгостью формальных правил. Это и адекватный, фактически единственно возможный язык природы, но в математическом языке много слов и предложений и часто нет полной уверенности в том, что произносятся именно те из них, которые отвечают существу дела. Недостаточно тщательно продуманный выход математики в эмпирическую действительность чреват осложнениями и недоразумениями, здесь кажущееся нередко принимается за реальное. Наблюдаемое только тогда приобретает статус научного факта, когда оно хорошо укладывается в ту или иную математическую “шкатулку”, другими словами, когда под него подводится солидная теоретическая база, вроде принципа минимума, конкретной реализацией которого и является данное явление. Возможность описания природного феномена, процесса, эмпирического факта посредством математического аппарата теории золотого сечения – проблема, требующая серьёзного обсуждения и анализа в каждом отдельном случае. Подобные вопросы рассмотрены в [A[7, 8, 15, 16]], а в настоящей работе, как отмечено уже в предисловии, всё внимание уделено основным положениям, математике и истории ЗС. Что же касается эмпирии, то можно сказать, что ПЗС выявляется там, где удаётся достичь высокой степени уверенности в сопричастности получаемых из опыта реалий золотой математике.

При желании можно поспорить и относительно статуса ТЗС. Мы ещё не очертили её границы и допустимые пределы возможных обобщений, но какими бы они ни были, имеется множество разного уровня сложности работ с математическим уклоном, так или иначе причисляемых к понимаемому в широком смысле слова *золотому* *сечению*. Это отдельные монографии и неисчислимое количество статей, публикуемых здесь и там. В настоящее время почти всё, что делается в этой области, делается на нескольких языках, в том числе, в немалой притом степени, на русском. Свой пятидесятилетний юбилей справляет математическая ассоциация [The Fibonacci Association], основанная в 1963 г. исследователем в области теории чисел и чисел Фибоначчи Вернером Хоггаттом (Verner Emil Hoggatt, Jr., 1921–1980), автором ставшей классической небольшой монографии [Hoggatt[1]], а также монахом-учёным Альфредом Бруссау (Brother Alfred Brousseau, F.S.C., 1907–1988). С 1963 года издаётся и специализирующийся на исследовании чисел Фибоначчи интернациональный журнал [The Fibonacci Quarterly]. ЗС и всё, что с ним связано, подробно и в красочном оформлении представлено на обширном сайте [Knott[1]], а более популярное изложение даётся в [GoldenNumber.Net]. Много статей по ЗС, числам Фибоначчи и Люка, а также смежным темам можно найти в английской и других версиях Википедии, в математической энциклопедии MathWorld, а различные “золотоносные” последовательности – в on-line-энциклопедии OEIS.

Русскоязычным эквивалентом указанных сайтов является [Музей Гармонии], существующий также в английском варианте. Его главный составитель А.П. Стахов – автор сотен работ по ЗС, в том числе и таких капитальных, как монография на английском [Stakhov]. В задачу основанного и бессменно возглавляемого им *Института Золотого сечения* входит

> Проведение фундаментальных исследований в области Золотого Сечения, касающихся теории Золотого сечения и чисел Фибоначчи и их Приложений в Природе, Науке и Искусстве,

а также просветительская деятельность [Стахов[2]] (в дальнейшем С[2]). Большая работа по исследованию ЗС с разных сторон и позиций проделана в последние десятилетия множеством русскоязычных авторов: С.К. Абачиев, С.Х. Арансон, О.Я. Боднар, С.Л. Василенко, Н.А. Васютинский, В.Л. Владимиров, А.П. Дубров, Д.С. Клещёв, Г.Я. Мартыненко, М.А. Марутаев, А.В. Никитин, С.В. Петухов, И.Г. Райлян, Б.Н. Розин, Н.Ф. Семенюта, П.Я. Сергиенко, Э.М. Сороко, А.А. Татаренко, И.С. Ткаченко, А.С. Харитонов, В.Д. Цветков, Ю.И. Цымбалист, О.А. Черепанов, А.Ф. Черняев, И.Ш. Шевелев, В.П. Шенягин, И.П. Шмелёв и многие другие; более подробные сведения можно найти на сайте Академии Тринитаризма [Страницы авторов], а также в [A[7, f], *п*. 5.5; С[9]].

13. Геометрия золотого домена

Уточним, что здесь под словом *домен* (по аналогии со средневековым доменом, как исконным владением феодала, бесспорным с точки зрения *права собственности*) подразумеваются те математические конструкции, которые непосредственно связаны с константой ϕ и её производными. Некоторые из них были уже представлены при обсуждении различных способов определения золотой константы, поэтому ограничимся лишь их кратким перечислением, почти без комментариев и рисунков. Чуть подробнее остановимся на принципах, которые могут быть положены в основу ТЗС, на основных элементах её формальной структуры, включая относительно малоизвестные фрагменты теории, на отношениях между различными объектами теории, на связях константы ϕ и её гомологов с другими математическими объектами и прежде всего математическими константами; будет уделено внимание и ранее не опубликованным результатам.

В первом приближении ТЗС можно считать *Теорией геометрических носителей золотой пропорции, константы ϕ, чисел Фибоначчи и их гомологов*. Конкретно имеются в виду простейшие построения золотого сечения, “золотые” геометрические фигуры и тела, в частности платоновы, архимедовы и каталановы, фракталы и конечно связанные с числом ϕ и её производными фрагменты теории чисел, включая теорию классического ряда Фибоначчи и квазифибоначчиевых рядов, в том числе комплексных. Особую группу составляют значимые математические задачи на экстремум, оптимум, в решении которых фигурирует число ϕ или хотя бы его производные. По сути это высший дивизион (в смысле признания теоретического статуса, а в некотором роде и внешнего оправдания) для константы ϕ, поскольку нет ничего более полезного для репутации любой константы, чем неожиданное появление в непредусмотренном месте, особенно в задачах, соотносящихся с реальностью.

Имея в своем распоряжении, в качестве введения в ТЗС, систему взаимосвязанных определений золотой константы, вначале вкратце перечислим элементы её изначальной, исторически первичной и наиболее простой, доступной обозрению – геометрической составляющей, после чего можно будет приступить к обсуждению оснований самой теории в более широком, преимущественно теоретико-числовом объёме.

Золотые отрезки, фигуры, тела и фракталы

Несколько десятков подобных геометрических конструкций, с соответствующими рисунками, а в некоторых случаях пояснениями и набором основных числовых параметров представлены в Главе 2. Вообще, та часть ТЗС, которую с некоторой долей условности можно считать геометрической, наглядна и за редкими исключениями, вроде числового треугольника Паскаля, непосредственно связана с константой ϕ, через которую выражаются отношения между различными геометрическими параметрами. В принципе вся геометрия ЗС формально может быть полностью сведена к числовым формулам и соотношениям, однако с серьёзными дидактическими потерями, полным отсутствием наглядности, без которой трудно себе представить значительную часть математической теории. Конечно, числовая математика, далеко не всегда соотносимая с визуально воспринимаемыми образами, намного богаче своего геометрического собрата и, естественно, более значима. Но прежде чем перейти к её рассмотрению, перечислим основные построения золотой геометрии.

Не нарушая историческую традицию, упомянем вначале ἄκρος καὶ μέσος λόγος – деление отрезка в крайнем и среднем отношении, запись которого в современных обозначениях приводит к известному квадратному уравнению. Заметим, что в тринадцати книгах *Начал* Евклида то, что принято сегодня называть золотым сечением, используется на правах ничем особо не выделенного способа построения различных геометрических фигур и тел, включая правильный пятиугольник, додекаэдр и икосаэдр. И всё же нельзя не заметить, что построения, так или иначе, в различных формах связанные с ЗС, во множестве случаев используются в *Началах*. Следует добавить, что помимо золотого деления отрезка точкой на части b и a в пропорции $b : a = \phi$, есть ещё деление в пропорции $1 : \sqrt{\phi}$, называемое вторым золотым сечением.

Двумерная золотая геометрия намного богаче. В случае прямоугольного четырёхугольника всё достаточно просто, но для большинства других фигур, в особенности треугольников, возможны различные варианты. Золотыми чаще всего считают равнобедренные треугольники с углами в 36°, 54° и 72°, но в принципе “золотистость” должна определяться посредством тригонометрических функций с аргументами $n(\pi/10)$, которым соответствуют углы 18°, 36°, 54°, 72°, 108° и 144°. Отсюда, исключая теоретически возможные экзотические варианты, имеем *четыре равнобедренных*:

{18°, 18°, 144°}, {36°, 36°, 108°}, {54°, 54°, 72°}, {72°, 72°, 36°}

и *два прямоугольных*:

{18°, 72°, 90°}, {36°, 54°, 90°}

треугольника. Золотым является и знаменитый прямоугольный *треугольник Кеплера* с отношением длин сторон $1 : \sqrt{\phi} : \phi$, а также прямоугольный треугольник с острыми углами $\operatorname{arctg}\phi \approx 58{,}28°$ и $\operatorname{arctg}\phi^{-1} \approx 31{,}72°$. Из четырёх одинаковых прямоугольных треугольников составляется ромб. Наиболее известен *золотой ромб* – с отношением диагоналей равным ϕ и с углами ≈116,565° и ≈63,435°, равными удвоенным углам последнего треугольника. Остальные случаи вполне очевидны. Константе ϕ равно отношение большой и малой осей *золотого эллипса*. *Пентаграмма*, или пятиконечная звезда, основной двумерный геометрический символ ЗС, содержит пять золотых треугольников с углами {72°, 72°, 36°}. Если же вписать пентаграмму в *правильный пятиугольник*, добавится 5 треугольников с углами {36°, 36°, 108°}. Тонкой нитью частных значений связаны с золотым сечением *овалы Кассини*, в особенности *лемниската Бернулли*, и *архимедовы спирали*. Архимедовой *спиралью Ферма*, называемой также *параболической спиралью*, моделируется явление филлотаксиса. Значима связь с ЗС *параболы* – посредством квадратного уравнения, *гиперболы*, уравнение которой в экспоненциальной форме аналогично формуле Бине, а также некоторых семейств *синусоидальных спиралей*, выражаемых с помощью золотоносных чисел 5 и 10.

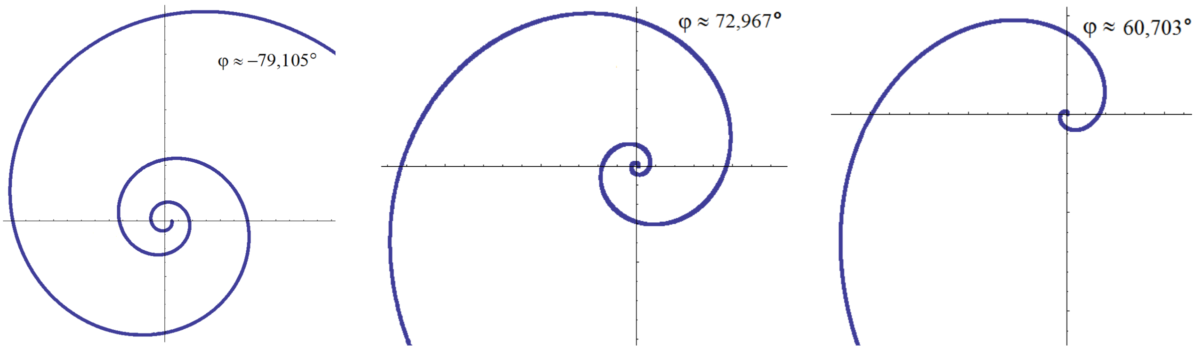
Среди золотых фигур особенно популярна *логарифмическая спираль* с постоянным углом между радиусом-вектором и касательной к кривой

$$\varphi = \operatorname{arcctg}[(2\ln\phi)/\pi] = 1{,}27352\,50220\ldots \tag{1.60}$$

или, в градусах, $\varphi \approx 72{,}96760\,8870^{\circ}$. На это обстоятельство не всегда обращают должное внимание. Отличие золотой спирали от почти неотличимых от неё нелогарифмической и фибоначчиевой спиралей мы покажем в следующей главе, а здесь заметим, что значением угла φ определяется не только степень, но также и направление закрученности спирали. Из последней формулы, которая в общем случае произвольного числа a запишется в виде

$$\varphi = \operatorname{arcctg}[(2\ln a)/\pi], \tag{1.60′}$$

видно, что угол φ положителен, если $a > 1$, отрицателен при $0 < a < 1$ и равен $\pi/2$, если $a = 1$; в последнем случае имеем окружность, как частный случай логарифмической спирали. Для большей ясности сравним золотую спираль с логарифмической спиралью с равным константе да Винчи $\phi_{11} = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414 > \phi$ параметром a и со спиралью, у которой a равен ФМК ɯ $< \phi$ и которая обладает совершенно уникальной особенностью, связывающей две знаменитые спирали: для любой точки логарифмической ɯ-спирали длина её дуги равна радиусу-вектору $r = b\alpha$ в той же точке архимедовой спирали, если только $b = 1/$ɯ [A[15,e], *п*. 6].



Логарифмические спирали (слева направо) с константами $\text{ш} \approx 0{,}739$, $\phi \approx 1{,}618$ и $\phi_{11} \approx 2{,}414$

Ложные равенства

Для любителей нумерологических диковинок укажем на близость значений золотого угла логарифмической спирали $\varphi \approx 1{,}2735$ и константы второго золотого сечения $\sqrt{\phi} \approx 1{,}272$ (относительное отклонение $\delta = 1 \cdot 10^{-3}$) и на близость по абсолютной величине отношения логарифмов $\ln \text{ш} / \ln \phi$ золотому углу $\pi/5$, притом с неплохим приближением $\delta = 4 \cdot 10^{-5}$. Впрочем, в чистой математике нестрогие равенства немногого стоят, а в приложениях математики, как учит нас история науки, они, за редким исключением, лишь вводят в заблуждение и являются неиссякаемым источником неверных суждений и далёких от реальности гипотез. В самой математике числовые ловушки в виде приближённых равенств, “замаскированных” под абсолютно точные соотношения, расставлены повсюду. Даже в насчитывающей великое множество числовых соотношений коллекции Рамануджана изредка встречаются ложные равенства, принимаемые им за истинные.

Обычно речь идёт о комбинациях математических констант, представляемых в виде целых чисел, чаще всего единицы. Язык натуральных чисел, крайне ограниченный в плане теоретических возможностей, проще, ближе и понятнее, чем менее наглядные и требующие специальных знаний математические константы. Не случайно, что даже в достаточно развитой математической культуре древней Греции сама идея чисел, отличных от натуральных, отвергалась как недопустимая ересь. Не случайны и тысячелетние попытки выразить число π в виде отношения двух целых чисел, см. [Chronology of computation of π], которым был положен конец лишь в 1761 г. доказательством его иррациональности Иоганном Ламбертом (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777), окончательно в 1794 г. Адриеном Лежандром (Adrien-Marie Legendre, 1752–1833). Причём доказательство трансцендентности числа π было получено только спустя столетие, в 1882 г. Фердинандом Линдеманом (Carl Louis Ferdinand von Lindemann, 1852–1939) и усовершенствовано в 1894 г. Феликсом Клейном (Felix Christian Klein, 1849–1925).

Есть, очевидно, нечто особо притягательное в неистребимом желании свести всё и вся к чему-то очень простому, элементарному, доступному пониманию каждого. Без подобной устремлённости к поиску по-разному понимаемого абсолюта научное познание, прогресс фундаментальной науки едва ли возможны. Другое дело, что *кроме амбиций нужна и амуниция*. В числовой математике нет ничего проще для восприятия, чем натуральные числа. Но далеко не всегда удаётся отыскать такие важные для чистой теории и практики точные соотношения, как формулы Бине, устанавливающие связь между степенями иррациональной константы и целыми числами классических рядов Фибоначчи, Люка, а также Пелля и других, рассмотренных в четвёртой главе последовательностей, получаемых в рамках обобщённых моделей.

В качестве примера ложного равенства, с участием ФМК π и e, золотой константы и гамма-функции, приведём любопытное соотношение [W[12]]

$$C = \frac{10\,\phi\,[\Gamma(3/4)]^2}{e^{\frac{5\pi}{6}}\sqrt{\pi}}$$

Вычисляя данное выражение с точностью $\delta = 10^{-13}$, предельной, кстати, на сегодняшний день в естествознании, получим равенство числа C единице. Было бы в высшей степени интересно, если подобная, не совсем простая комбинация математических констант с гамма-функцией оказалась равной единице, но в действительности это не так. Истинное значение

$$C = 1{,}000\,000\,000\,000\,045\,422\ldots$$

содержит 13 нулей после запятой и отличается на $\approx 4{,}54 \cdot 10^{-14}$ от 1, так что перед нами не математическая жемчужина, а всего лишь числовая диковинка, рассчитанная исключительно *на любителя*.

Геометрическая и цветовая символика ТЗС

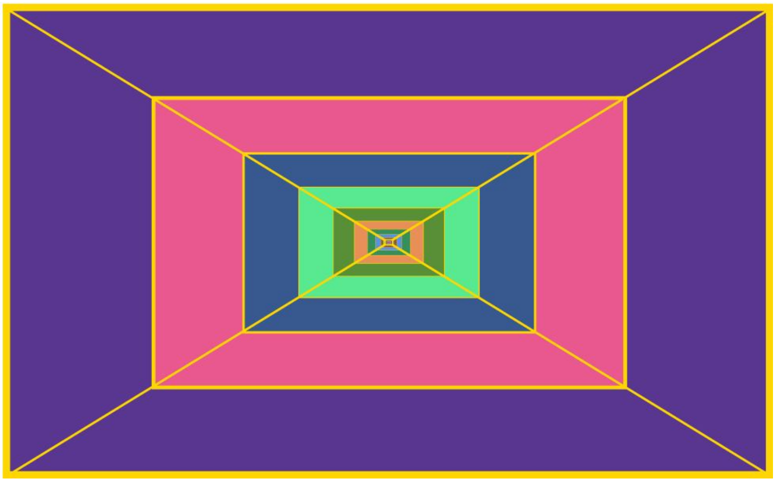
Вернёмся, однако, к золотой теории и поиграем немного в её “нетрадиционную” геометрическую символику. Некоторые геометрические и числовые особенности ТЗС отображены в рисунке, составленном из двенадцати вложенных золотых четырёхугольников, которые видны при высоком разрешении изображения. Диагоналями прямоугольники делятся на 24 остроугольных равнобедренных золотых треугольника

{58,28°, 58,28°, 63,435°}

и 24 золотых тупоугольных треугольника

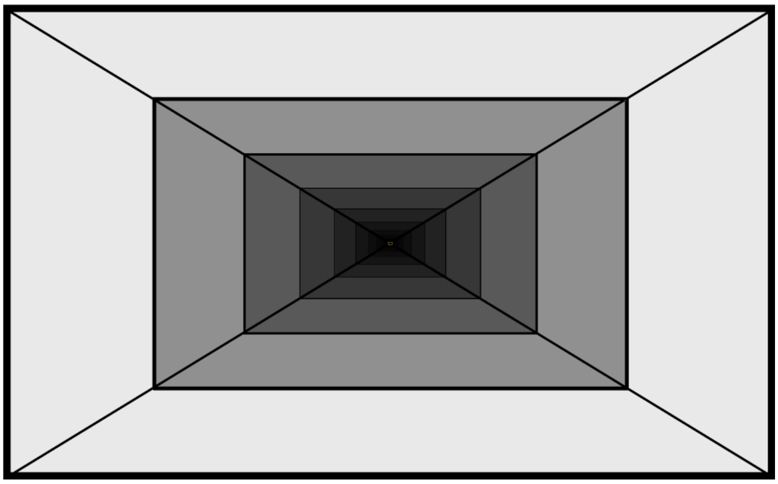
{31,72°, 31,72°, 116,565°}.

Все линейные размеры шестидесяти геометрических фигур меняются в пропорции ϕ, образуя (с различными в каждом случае множителями a_j, зависящими от выбора единицы длины) геометрические прогрессии типа a_j, $a_j\phi$, $a_j\phi^2$, …, $a_j\phi^{11}$. Соответствующее изменение размеров вписанных фигур пропорционально квадрату золотой константы. Ширина золотистых границ рамок меняется согласно числовому значению второго золотого сечения, точнее в геометрической прогрессии со знаменателем $\sqrt{\phi}$. Наконец, выражаемые тремя цифровыми параметрами цвета подобраны не случайно, а являются наглядным цветовым представлением определенного алгоритма, составленного посредством чисел Фибоначчи F_{10}–F_{13}.



Цветное графическое отображение некоторых геометрических и числовых особенностей ТЗС

Разумеется, связанные с числами Фибоначчи алгоритмы, а следовательно и соответствующие цветовые отображения могут быть очень разными. Используя, например, другой алгоритм, уже для всех первых тринадцати чисел F_n (n = 1, 2, …, 13), заменив все золотистые линии на чёрные и не меняя всё остальное, получим совсем другую, светло-тёмную картину.



Графическое отображение особенностей ТЗС с использованием цифрового кода для первых тринадцати чисел F_n

Всё это похоже на игру с золотыми фигурами и числами, и, возможно, так оно и есть. Оправданием такой игры служит, скорее всего, визуально наглядная демонстрация многообразия не вполне традиционных способов представления различных элементов ТЗС.

Трёхмерные тела

Перейдём теперь к трёхмерным золотым телам, где чаще других упоминаются додекаэдр и икосаэдр – платоновы тела, многогранники, составленные из однотипных правильных многоугольников. Хорошо известна и пространственная логарифмическая спираль, трёхмерный аналог своего двумерного прототипа. Особым вниманием, в связи с предполагаемыми пропорциями Большой пирамиды Хеопса, пользуется золотая пирамида (второе золотое сечение, квадратный корень из числа ϕ). Известны также золотые призмы, эллипсоиды, ромбоэдры, 13 архимедовых тел – полуправильные многогранники, составленные из правильных многоугольников двух или более типов, столько же двойственных (дуальных) им каталановых тел, составленных подобно правильным многогранникам из одинаковых, но уже неправильных многоугольников, а также сотни других трёхмерных тел, включая четыре правильных звёздчатых многогранника, называемые телами Кеплера–Пуансо. Золотым, по таким характеристикам, как площадь поверхности и средняя кривизна, является параболоид вращения, у которого радиус равен высоте.

Принадлежность геометрического тела к золотому семейству может быть выявлена определением координат его вершин в трёхмерной декартовой системе. Совместив центр тела с началом декартовой системы и, не умаляя общности, приняв длину a ребра многогранника равной 2, надо просто определить координаты всех вершин. Для додекаэдра (30 рёбер, 20 вершин) имеем следующую систему координат [Dodecahedron]:

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1), \quad (0, \pm 1/\phi, \pm\phi), \quad (\pm 1/\phi, \pm\phi, 0), \quad (\pm\phi, 0, \pm 1/\phi)$$

для дуального ему икосаэдра (30 рёбер, 12 вершин) [Icosacahedron]:

$$(0, \pm 1, \pm\phi), \quad (\pm 1, \pm\phi, 0), \quad (\pm\phi, 0, \pm 1)$$

а, допустим, в случае архимедова ромбоикосододекаэдра (120 ребер, 60 вершин):

$$(\pm 1, \pm 1, \pm\phi^3), \ (\pm\phi^3, \pm 1, \pm 1), \ (\pm 1, \pm\phi^3, \pm 1), \ (\pm\phi^2, \pm\phi, \pm 2\phi), \ (\pm 2\phi, \pm\phi^2, \pm\phi), \ (\pm\phi, \pm 2\phi, \pm\phi^2), \ (\pm(2+\phi), 0, \pm\phi^2),$$
$$(\pm\phi^2, \pm(2+\phi), 0), \ (0, \pm\phi^2, \pm(2+\phi)).$$

Аналогично и для других архимедовых – икосододекаэдра, курносого додекаэдра, усечённого додекаэдра, усечённого икосаэдра, ромбоусечённого икосододекаэдра – и шести дуальных им каталановых тел. Разумеется, через константу ϕ выражаются не только декартовы координаты вершин, но и другие параметры тел: двугранные углы, радиусы вписанных и описанных сфер, площади граней и всей поверхности, объёмы тел (все подробности в Главе 2, где с формулами, численными значениями и иллюстрациями представлены и несколько золотых фракталов). В итоге 2 многогранника из 5 среди платоновых тел и 12 из 26 в группе архимедовых и каталановых тел являются золотыми. Следовательно, почти половина наиболее важных трёхмерных тел непосредственно причастна к золотой пропорции. Это объективный и важный показатель геометрической значимости золотой пропорции, выявляемый наличием константы ϕ.

14. Границы золотого домена

Наиболее совершенным, раскрывающим скрытые потенции теории способом её представления принято считать аксиоматику, удовлетворяющую самым суровым требованиям логической строгости и однозначности выводов. Надо "только", имея тщательно продуманный, без лакун и излишеств, список исходных элементов и допустимых правил оперирования ими, составить систему постулатов и аксиомных схем, из которых дедукцией извлекаются теоремы, и перед нами стройная математическая конструкция как произведение доведённого до логического блеска формального искусства, см. [A[1]]. И никаких противоречий и парадоксов, если, конечно, не затевать опасные теоретико-множественные игры с бесконечностью и не пытаться *объять необъятное* (Козьма Прутков). Похоже на красивую математическую сказку с заранее предопределённым счастливым концом, но есть подводные течения и рифы, существующие, как известно, для того, чтобы сказка не становилась былью. Помимо вопросов, касающихся доказательства непротиворечивости и полноты аксиоматической системы, разрешимости её формул и тому подобное, которые в случае систем ограниченного охвата не столь существенны, есть и деликатные вопросы содержательного характера. Можно, при критическом настрое, усомниться в том, что формальная структура является точным отображением, учитывающим все тонкие нюансы своего содержательного прототипа. Но главное – *степень готовности* содержательной теории к аксиоматизации, которая всенепременно должна быть высокой, иначе ничего получиться не может.

Конкретно, в случае ТЗС такой готовности не видно. В содержательном смысле мы, как указывалось выше, рассматриваем ТЗС как важный компонент существующей пока ещё только в проекции теории мировой гармонии. В этом, думается, её онтологический статус. Что касается формальной стороны дела, следует, конечно, учесть, что математика золотого сечения давно уже выросла из "коротких штанишек" элементарных построений, вроде знаменитой пропорции, известного квадратного уравнения или простейшей рекуррентной формулы. Они, разумеется, исторически значимы и сохраняют теоретическую ценность в качестве слов, которые могут быть и начальными в структуре математического формализма, но есть и многое другое, менее простое, окончательно не устоявшееся и стоящее как бы особняком, но с ЗС так или иначе связанное. Лишь по достижении определённой степени системной упорядоченности возможна аксиоматизация ТЗС на основе некоторых характерных свойств и особенностей.

Теоретическая зрелость имеющей онтологический статус математической теории или модели определяется знанием постулатов, начальных элементов, аналитических связей между структурными компонентами и хотя бы приблизительным знанием границ применимости всей конструкции. Словом, имеется в виду формальная система, границы которой более или менее чётко обозначены. Вот здесь и возникают горячие споры, поскольку демаркация границ (что в науке, что на практике) – дело тонкое, с изрядной долей условности и субъективности. Хорошо известно, в частности из физики, что вопрос о пределах применимости теории не может быть решён средствами самой теории: для этого нужен взгляд со стороны, с более общих позиций, в рамках теории более общего типа, содержащей в себе исходную в качестве частного случая и связанной с ней *принципом соответствия*. Обсуждение этого непростого вопроса отложим до четвёртой главы, когда речь зайдёт о допустимых пределах обобщения ТЗС, а пока ограничимся данным выше определением, то есть фактически отнесём к золотому домену всё то, что аналитически – соотношениями, включая предельные, формулами и уравнениями – непосредственно связано с константой ϕ или её гомологами.

Конструктивное начало, приводящее к появлению золотой константы как центрального элемента домена, может быть выбрано с известной долей произвола. Перечислим наиболее важные варианты, связанные с определениями константы ϕ:

линейная рекурсия второго порядка

экспонента, включая тригонометрические и гиперболические функции

квадратное уравнение

цепная дробь

определённый интеграл

треугольник Паскаля.

Формально все варианты равноправны, можно начать с любого из них и получить все остальные. Имея в виду идею дальнейшего обобщения ТЗС, следует исключить из списка цепную дробь и треугольник Паскаля, как наименее удобные с чисто прагматической, дидактической точки зрения возможности. Для нас по большому счёту наиболее перспективна экспонента, посредством которой не только легко получить остальные варианты, но сразу открываются двери в мир специальных математических функций и теории комплексного переменного. Однако в этом случае надо объяснить, почему ТЗС должна считаться приложением теории ЛМФ, сказать о связи константы ϕ с выводимой в рамках формализма теории ЛМФ системой восьми ФМК, а это уведёт нас в сторону к работам [A[7]; A[8]; A[15]; Ar[4]], где эти и другие подобные вопросы подробно рассмотрены. Поэтому в качестве исходного конструктивного начала мы предпочитаем рекурсию второго порядка, точнее изложенные выше последовательности Люка, обеспечивающие прямой выход к числам Фибоначчи и Люка, а также к другим числовым рядам и полиномам, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Напомним, что последовательности Люка задаются рекуррентными формулами (1.38) и (1.39). В частности, когда P и Q берутся равными $+1$ и -1, имеем последовательности Фибоначчи и Люка:

$$U_n(1,-1) = \{F_n\} \text{ и } V_n(1,-1) = \{L_n\}.$$

Фактически вся канонизированная классика теории рядов Фибоначчи $\{F_n\}$ и Люка $\{L_n\}$ целиком содержится в последовательностях Люка, которые являются достаточно общей, хотя, как будет видно из дальнейшего, не универсальной теоретической основой для ТЗС и её обобщений. Это, по сути, наполненный числовыми соотношениями неисчерпаемый математический “резервуар”, из которого и профессиональные математики, и многочисленные любители-фибоначчисты всегда будут “выуживать” всё новые и новые числовые диковинки. Придётся только глубоко погружаться, поскольку с ближних глубин всё уже взято, см., например, [Knott].

Одна из особенностей ТЗС, как, впрочем, и многих других математических теорий и моделей общего типа, состоит в простоте исходного начала и соответствующего формализма. Это касается и таких естественнонаучных теорий, как, скажем, общая теория относительности и квантовая механика, исходные положения которых могут быть сформулированы в виде двух-трёх принципов, которые остаётся только записать математически. И на такой, казалось бы, элементарной основе вырастает мощная теория, с возрастающим по сложности формализмом, по мере удаления от начала. Особенностью, хотя по-прежнему не уникальной, золотого сечения можно считать то, что золотой след может обнаруживаться в разных уголках чистой математики. Примером могут служить два квадратных уравнения

$$x^2 \mp px - q = 0 \tag{1.61}$$

с положительными целочисленными коэффициентами p и q. Все корни этих уравнений являются действительными числами:

$$x_{\mp} = \pm \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \tag{1.62}$$

Нетрудно видеть, что в каждом уравнении будет по одному положительному и отрицательному корню. Заставляя переменные p и q пробегать значения 1, 2, 3, …, n, …, получим бесконечные последовательности $S(p,\ q)$ действительных чисел, и задача состоит в том, чтобы выделить из них золотые подмножества.

Поскольку в этой главе речь, главным образом, об основных положениях методологического характера, а отдельные фрагменты теории либо просто перечисляются, либо даны в самом общем виде, все технические подробности поставленной задачи изложены в последующих главах. Здесь всё же представим готовые формулы для двух возможных случаев: p – чётное и p – нечётное. Обозначив через $x_{1,2}$ корни квадратных уравнений, символом $Q_\phi(p)$ – золотую подпоследовательность значений q, n_Q – положительный, отрицательный или нулевой номер q в этой последовательности, имеем:

a) p – чётное:

$$Q_\phi(p) = 5n^2 - \frac{p^2}{4} \qquad x_{1,2}(p,\ n_Q) = p/2 \pm (2\phi - 1)n_Q \tag{1.63}$$

b) p – нечётное:

$$Q_\phi(p) = 5n(n+1) - \frac{p^2 - 5}{4} \qquad x_{1,2}(p,\ n_Q) = p/2 \pm (2\phi - 1)(n_Q + 1/2) \tag{1.64}$$

В более общем, не связанном лишь с константой ϕ виде аналогичные формулы будут впоследствии получены в рамках возможных обобщений ТЗС.

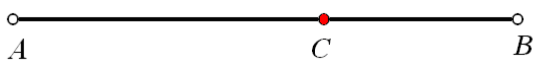
Глава 2.
Геометрия ТЗС

Вторая и третья главы фактически являются продолжением, дополнением и конкретизацией содержания первой главы. Если там была изложена общая основа, основные положения и определения, конструктивные принципы и важнейшие структурные особенности теории, её причастность к идее математической гармонии, здесь подробно представлены геометрия и теоретико-числовой формализм, вся основная часть той математики, которая может быть отнесена к теории золотого сечения. Помимо материала первой главы, использованы данные из наших работ [A[7, 15, 16]] *и других источников. Комментарии и пояснения во многих случаях сведены к минимуму или вовсе отсутствуют, если в них нет надобности. Многие из рисунков и графиков сделаны нами. Среди множества формул и соотношений третьей главы есть и полученные автором, в том числе ранее неизвестные и нигде не опубликованные. Рисунки нигде не пронумерованы, заголовки даны под рисунками, а в некоторых случаях и над ними, или только над ними – тёмно-красным, в виде подзаголовков.*

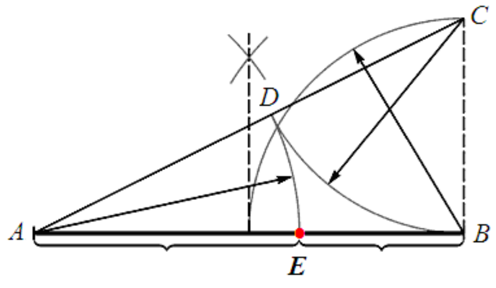
1. Отрезки и фигуры

Деление отрезка в крайнем и среднем отношении – ἄκρος καὶ μέσος λόγος

В принципе под *целым* можно понимать не только геометрический отрезок, а вообще всё, что допускает деление хотя бы на две части, но вначале речь пойдёт только об отрезках. Существует немало способов, простых и сложных, золотого построения, и если стоит задача получения разделённого в золотой пропорции отрезка a, то с учётом начальных условий можно говорить о задачах трёх типов. В первом случае задаётся подлежащий соответствующему делению весь отрезок a, во втором – большая его часть с требованием найти меньшую, в третьем случае, наоборот, – по меньшему отрезку следует найти больший отрезок, который в совокупности с первоначально заданным образует делённое в золотой пропорции a. В числовом выражении, которое в геометрических построениях можно иногда игнорировать, но в некоторых случаях, при доказательстве правильности построения приходится всё же учитывать, это нетрудно выразить посредством константы ϕ. В задаче первого типа отрезок a, который для удобства нередко берут равным 1, требуется разделить на части $a\phi^{-1}$ и $a\phi^{-2}$; во второй задаче заданное $a\phi^{-1}$ прибавлением $a\phi^{-2}$ дополняется до a; в *обратной задаче* изначально заданное $a\phi^{-2}$ достраивается до a добавлением $a\phi^{-1}$. Ниже, без очевидных в большинстве случае доказательств, приведены все наиболее известные построения трёх типов, с краткими пояснениями там, где в этом есть необходимость.

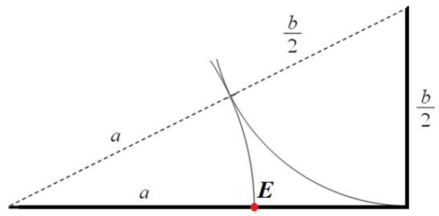


Целое относится к большей части, как большая часть к меньшей: $AB/AC = AC/CB$



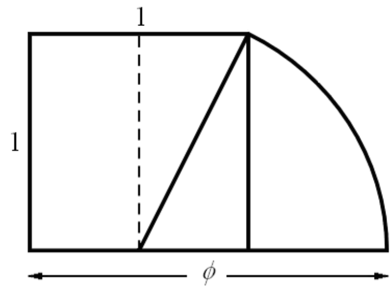
Построение золотой точки E на отрезке AB. $AB : AE = AE : EB = \phi$

Вначале откладывается отрезок BC, перпендикулярный заданному AB и равный его половине. Далее дуга радиусом BC пересекает диагональ AC в точке D, после чего проводится дуга радиусом AD, делящая точкой E отрезок AB в золотой пропорции.



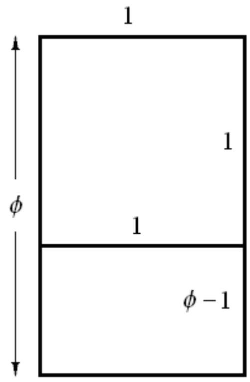
Построение золотого сечения с помощью циркуля, карандаша и линейки

Тот же чертёж в упрощённом виде и с указанием значений отдельных его частей по отношению к горизонтальному отрезку, длина которого равна b.



Построение отрезка длиной ϕ с помощью квадрата единичной длины

Простейшим является способ построения отрезка длиной ϕ посредством делённого пополам единичного квадрата и дуги, радиус которой равен диагонали половины квадрата.

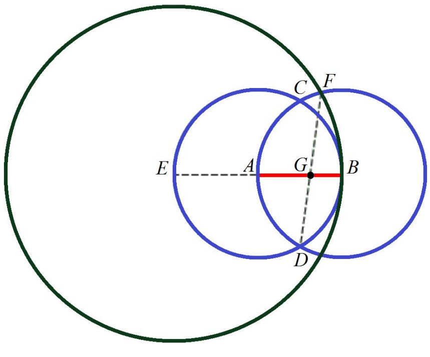


Золотой прямоугольник и единичный квадрат

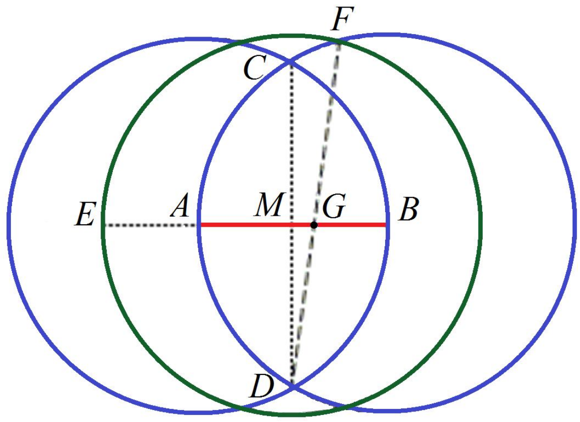
Прямоугольник золотого сечения, который может быть построен на квадрате способом, показанным на предыдущем рисунке.

Золотое деление, обратная задача

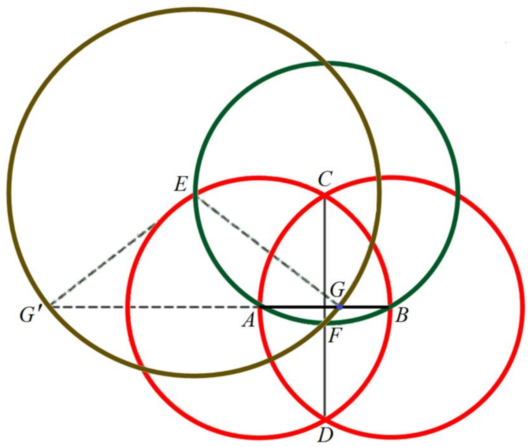
В следующих трёх примерах построения осуществляются с помощью нескольких окружностей одинаковых или различных радиусов. В первых двух случаях заданный отрезок делится в золотой пропорции, в последнем же случае по данному отрезку получаем не одну, а две золотые, внутреннюю и внешнюю, точки.



Две равные окружности радиусом AB с центрами в точках A и B пересекаются в точках C и D. Далее с центром в точке E радиусом $EB = 2AB$ проводим окружность, пересекающую одну из малых окружностей в точке F. Отрезок FD пересекает AB в золотой точке G, так что $AB : AG = AG : GB = \phi$ (доказательство в [Hofstetter], см. также [Bogomolny[1]]).

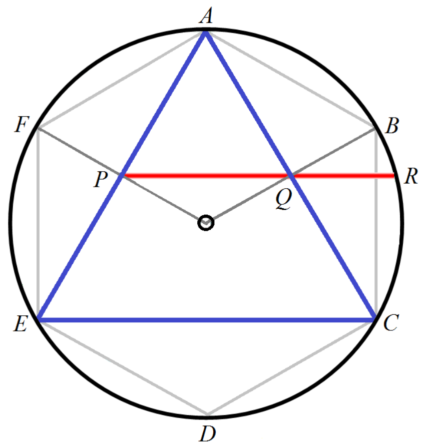


Как и в предыдущем примере, две равные окружности пересекаются в точках C и D. Отрезок CD делит AB пополам точкой M. Окружность радиусом AB и с центром в M приводит к отрезку FD, пересекающему AB в золотой точке G. Таким образом, и здесь $AB:AG = AG:GB = \phi$ [Там же].



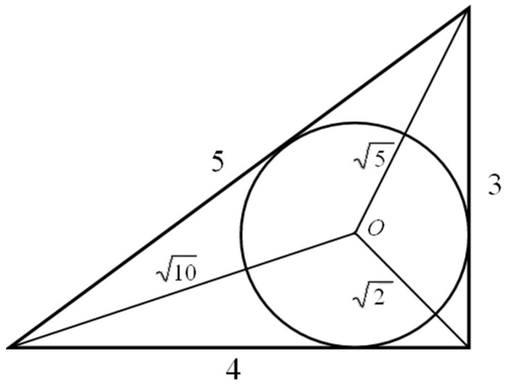
Задан отрезок AB. С центрами в A и B и с равными длине AB радиусами проводим окружности (красные), пересекающиеся в точках C и D. С центром в точке C проводим окружность (зелёная) того же радиуса AB, с точками пересечения E и F. Наконец, радиусом EF с центром в точке E проводим окружность, которая в точках G и G' пересекает отрезок AB и его продолжение. Фактически по начальному AB с помощью четырёх окружностей найдены две золотые точки, причем одна внутри, другая вне заданного отрезка, то есть имеем деления, соответствующие указанным выше первому и третьему случаям: $AB:AG = \phi$ и $G'A:AB = \phi$ [Там же].

Построение посредством геометрических фигур



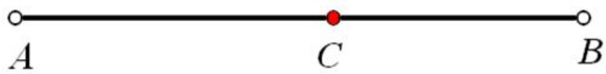
В этом примере золотой отрезок строится посредством трёх разных геометрических фигур. Соединяя через одну вершины вписанного в окружность правильного шестиугольника $ABCDEF$, придём к равностороннему треугольнику ACE. Проведённые из центра окружности к вершинам шестиугольника F и B прямые пересекают треугольник в P и Q. Соединяющая эти две точки прямая пересекает окружность в точке R, образуя отрезок PR, для которого $PR:PQ = PQ:QR = \phi$.

Биссектрисы египетского треугольника

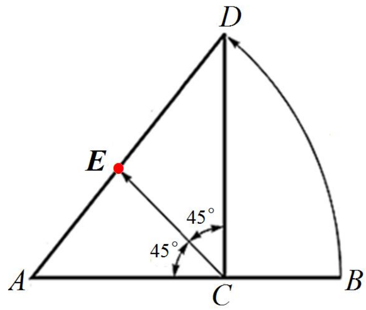


Биссектрисы египетского треугольника, сходящиеся в центре *O* вписанной в треугольник окружности, делятся в показанных на рисунке пропорциях.

Второе золотое сечение



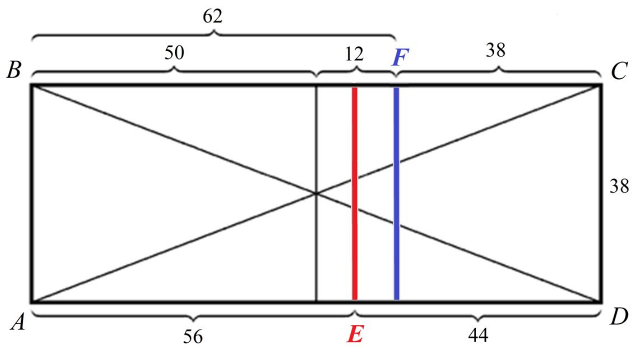
$AC/CB = \sqrt{\phi} = 1{,}27201\ 96495\ldots$



Построение точки ***E*** второго золотого сечения. $ED:AE = \sqrt{\phi} \approx 1{,}272$

Дуга *BD* окружности радиусом *AB* пересекает в точке *D* перпендикуляр, проведённый из точки *C*, делящей заданный отрезок *AB* в золотом сечении. Биссектриса, делящая прямой угол пополам, пересекается с диагональю *AD*, соединяющей точки *A* и *D*, в искомой точке второго золотого сечения ***E***.

Отрезки и площади первого и второго золотого сечения



В прямоугольном четырёхугольнике со сторонами, равными 100 и 38 единиц, для длин отрезков и площадей прямоугольников с точностью до сотых долей выполняются следующие соотношения:

$AD:BF = 100:62 \approx \phi \qquad BF:FC = 62:38 = \phi \qquad S_{ABF}:S_{FCD} = (62\cdot 38)/(38\cdot 38) \approx \phi$

$AE:ED = 56:44 \approx \sqrt{\phi} \qquad S_{ABE}:S_{EDC} = (56\cdot 38)/(44\cdot 38) \approx \sqrt{\phi}$

$AD:DC = 100:38 \approx \phi^2 \qquad S_{ABCD}:S_{FCD} = (100\cdot 38)/(38\cdot 38) \approx \phi^2$

Можно, конечно, рассматривать рисунок как приближённую геометрическую иллюстрацию точных числовых отношений, приняв меньшую сторону четырёхугольника равной 1, а большую ϕ^2. Тогда имеем

для длин отрезков: $BF = \phi,\ AD = BC = \phi^2$

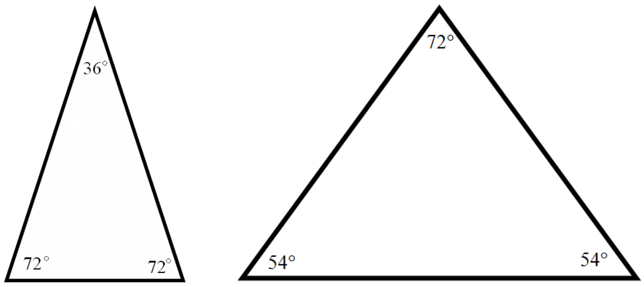
для площадей: $FD = 1,\ AF = \phi,\ AC = \phi^2$

Равнобедренные и прямоугольные треугольники

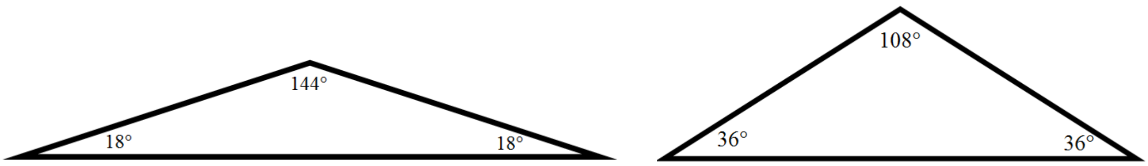
Сумма углов треугольника равна 180°, а минимальный золотой угол равен 18°, причем $\sin 18° = 1/(2\phi)$. Все углы, кратные 18°, являются золотыми. Отсюда и формула для золотых равнобедренных треугольников:

$$2n \cdot 18° + \alpha = 180°$$

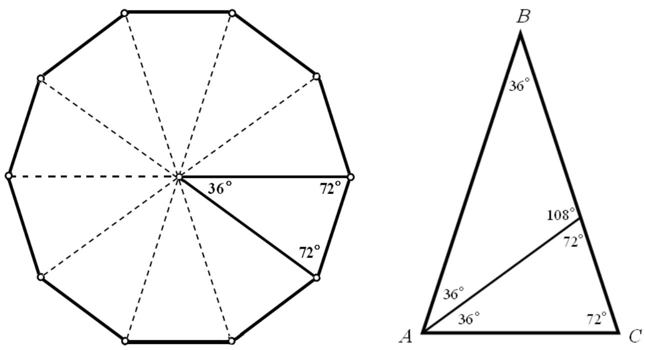
Переменная n может принимать значения 1, 2, 3, 4, что приводит к двум остроугольным и двум тупоугольным золотым треугольникам.



Остроугольные золотые треугольники

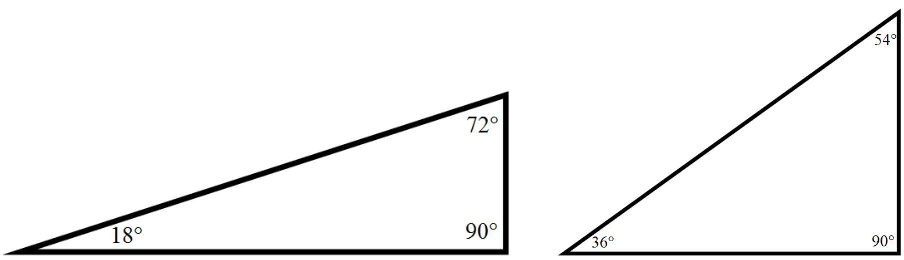


Тупоугольные золотые треугольники



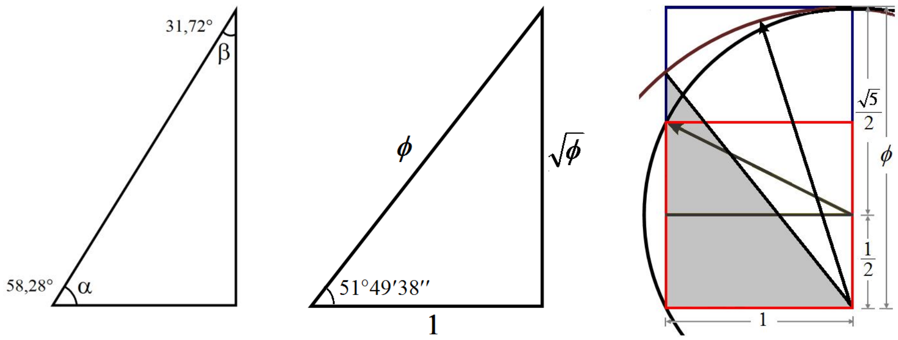
Десятиугольник и деление основного золотого треугольники на два новых

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90° = 5 \cdot 18°$. Ясно, что в золотом прямоугольном треугольнике все углы – золотые и потому кратны 18°. Следовательно, для острых углов выполняется целочисленное соотношение $n_1 + n_2 = 5$, имеющее два решения {1, 4} и {2, 3}, то есть треугольники с углами {18°, 72°, 90°} и {36°, 54°, 90°}.



Прямоугольные треугольники, получаемые из равнобедренных

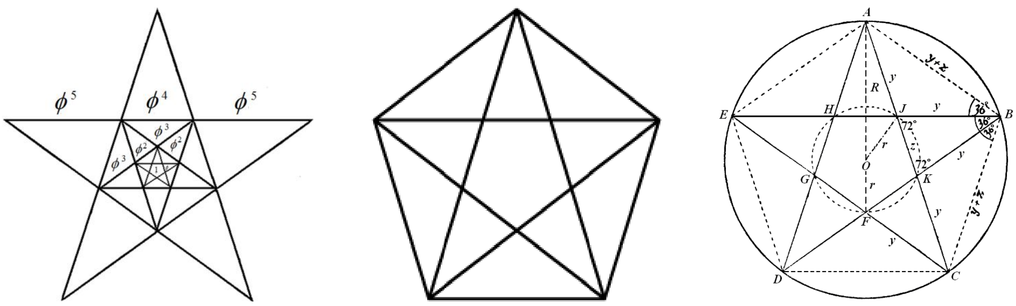
Два других золотых прямоугольных треугольника уже не связаны с кратностью углов восемнадцати градусам. В одном случае константой ϕ выражается отношение катетов, а в треугольнике, носящем имя Кеплера, катеты и гипотенуза образуют геометрическую прогрессию $1:\sqrt{\phi}:\phi$ со знаменателем $\sqrt{\phi}$. Построение треугольника Кеплера несложно. Как и выше, на квадрате строится прямоугольник золотого сечения, после чего из одного конца радиусом, равным большей стороне прямоугольника, проводится дуга окружности до пересечения с другой стороной. Соединяя точку пересечения с противоположным концом квадрата, получим искомый треугольник, закрашенный на рисунке в серый цвет. Простота и доступность такого геометрического построения, не требующая знания золотой константы, могла быть, в принципе, использована в искусстве и архитектуре ещё античного периода, в том числе при строительстве египетских пирамид. Однако, поскольку достоверных данных на этот счёт нет, такое предположение может существовать лишь в статусе не лишённой оригинальности и изящества, но документальными свидетельствами не подтверждаемой гипотезы. В наиболее же часто упоминаемом и обсуждаемом случае “золотых пропорций” Большой пирамиды Хеопса допустимы другие, ничуть не менее правдоподобные объяснения результатов измерения её линейных и угловых параметров, см. [A^c, Гл. 6, *п*. 6.2].



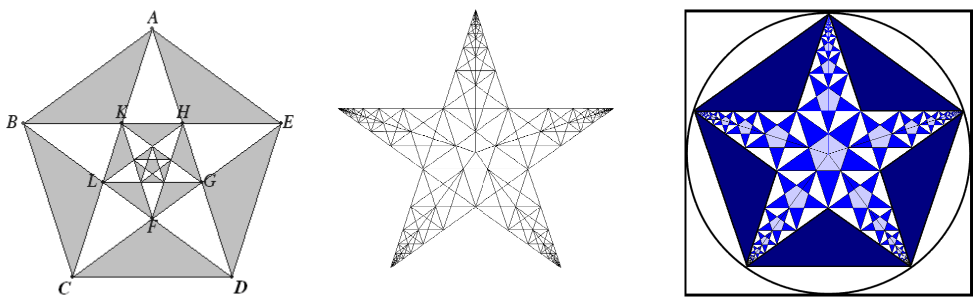
Треугольник, для которого tg $\alpha = \phi$ (слева); треугольник Кеплера и его построение

Пентаграмма и правильный пятиугольник

Пентаграмма (пентальфа, пентагерон), обычно понимаемая как вписанная в правильный пятиугольник пятиугольная звезда, может считаться геометрическим двумерным символом золотого сечения, исключительно богатым золотыми пропорциями. К тому же это излюбленная фигура сакральной геометрии, магии, оккультизма. Построенные на сторонах пятиугольника равнобедренные треугольников являются золотыми с углами 36°, 72° и 72°. Если же вписать звезду в пятиугольник, получим пять новых золотых треугольников типа {36°, 36°, 108°}. При этом линейные размеры звезды при каждом таком вписывании уменьшаются в ϕ^2 раз. В обратном действии, если начальный размер звезды принять равным минимальному размеру атома ($\sim 10^{-8}$ см), то уже на 90-м шаге будет превышен максимальный линейный размер в природе – радиус Вселенной $\sim 10^{29}$ см. Заметим также, что в историческом ракурсе пентаграмма рассмотрена в главе 6 настоящей работы.

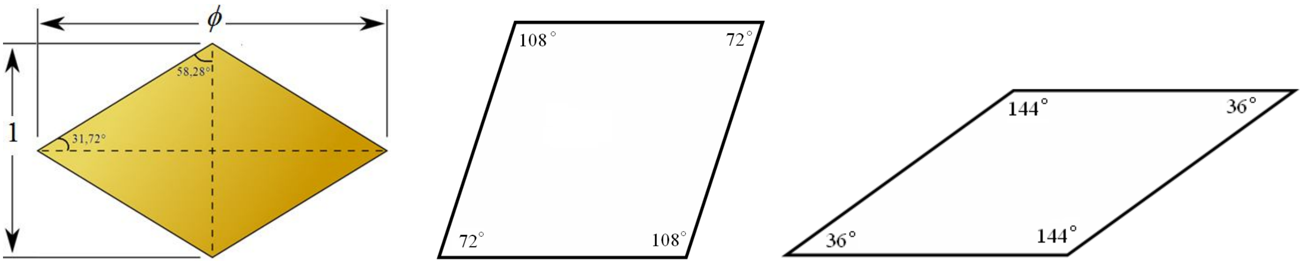


Пентаграмма и золотые треугольники в пентаграмме, вписанной в пятиугольник и круг



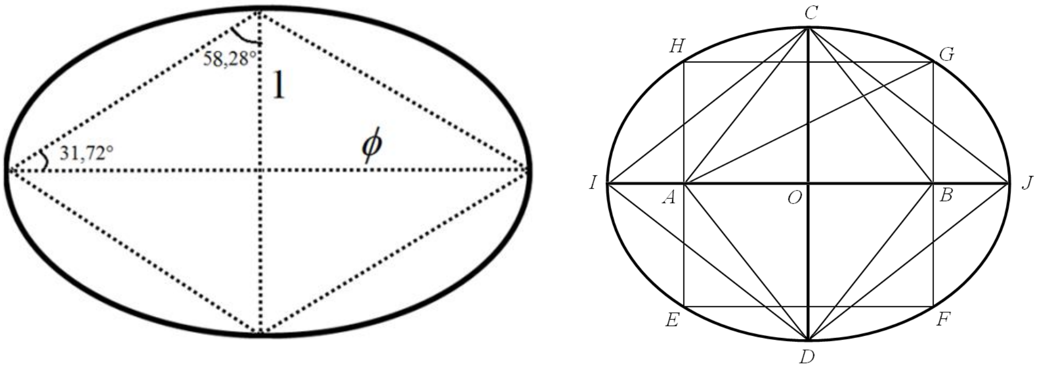
Симметричное разбиение звезды и звезда, вписанная последовательно в пятиугольник, окружность и квадрат

Золотые ромбы



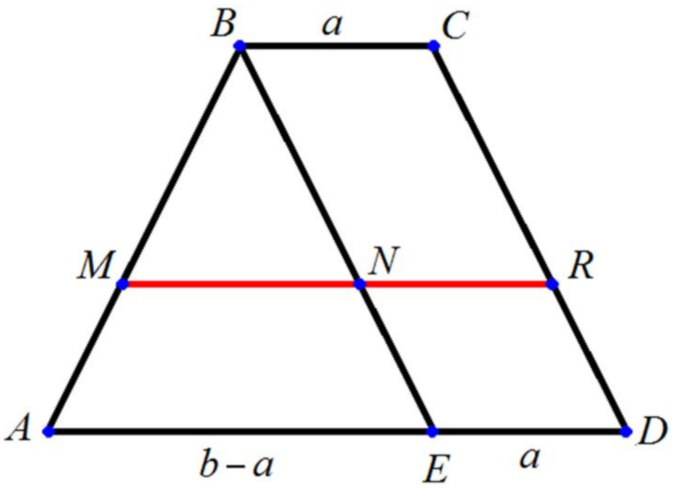
Углы в ромбе с отношением длин диагоналей равном ϕ определяются из равенств $2\operatorname{arctg}\phi^{-1} = \operatorname{arctg} 2$ и $2\operatorname{arctg}\phi = \pi - \operatorname{arctg} 2$

Золотой и пирамидально-золотой эллипсы



$$CB:CJ = OB:OC = OC:OJ = 1:\sqrt{\phi}$$

Равнобедренная трапеция



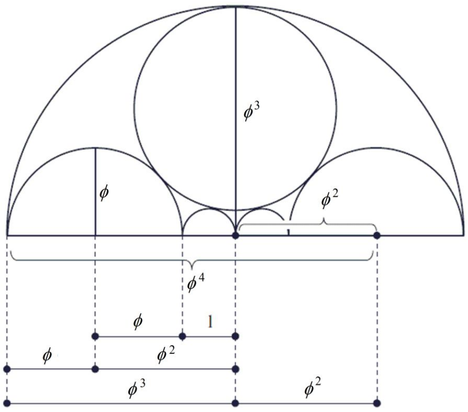
В равнобедренной трапеции $ABCD$, нижнее основание которой равно b, а верхнее a, квадратичное среднее MR определяется как $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. Из подобия треугольников ABE и MBN имеем:

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AE}{MN} = \frac{b-a}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} - a} \tag{2.1}$$

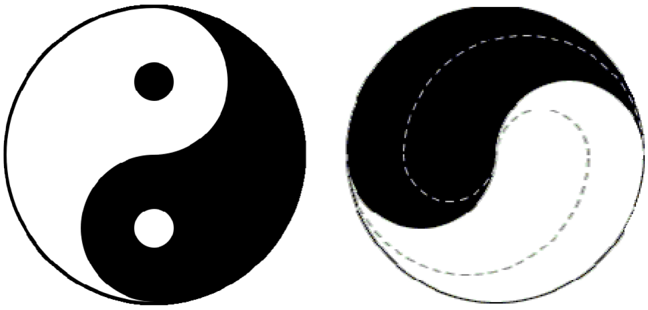
Если $b = 3a$, эти отношения равны золотой константе:

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AE}{MN} = \frac{2a}{\sqrt{5a^2} - a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \phi \tag{2.2}$$

Полуокружности и окружность



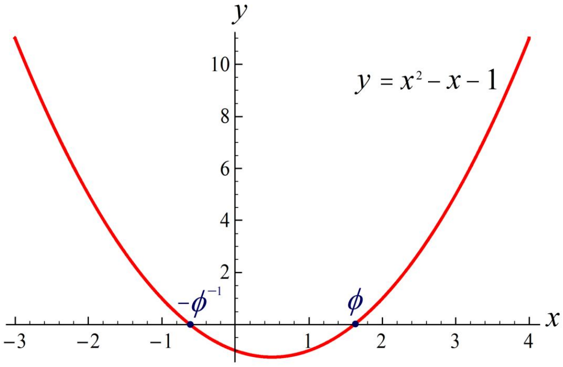
Золотое рассечение монады Инь и Ян



Существует несколько способов рассечения даоистской монады *Инь* и *Ян*, символизирующей концепцию китайской философии, используемой для описания взаимосвязанных и взаимодействующих противоположных начал в природе. На правом рисунке показано рассечение пунктирной линией монады радиусом R на две равные половины с помощью двух полуокружностей радиусом $R\phi/2$ и двух полуокружностей радиусом $R\phi^{-1}/2$ [Bogomolny[2]].

2. Парабола

Квадратичная функция, геометрически представляющая собой кривую второго рода, называется коническим сечением, если может быть получена пересечением плоскости с круговым конусом. Если секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса, имеем *параболу*, частным случаем которой является соответствующая функции $f(x) = x^2 - x - 1$ золотая кривая. Она пересекает ось абсцисс в точках $x = \phi$ и $x = -\phi^{-1}$ (корни квадратного уравнения), пересекает ось ординат в точке $y = -1$, имеет минимум в точке (1/2, –5/4), который может быть также записан в виде $(1/2, -(\phi - 1/2)^2)$. Такая парабола является, по сути, непосредственным геометрическим образом золотого квадратного уравнения, своими особыми точками связанного с константой ϕ. Она и удобный случай поговорить об особенностях заложенного в геометрию ПЗС закона сохранения и других универсальных принципов математической гармонии.



Золотая парабола, её уравнение и точки пересечения с осями декартовой системы

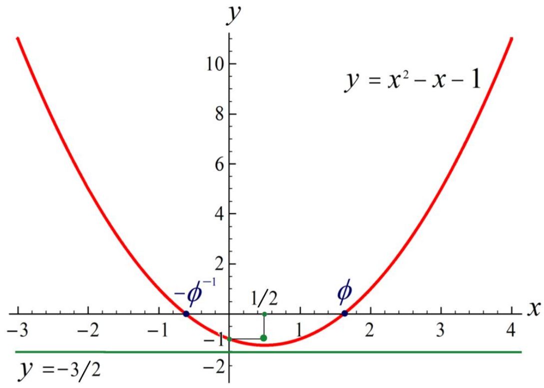
Для некоторых плоских фигур закон сохранения может быть сформулирован с использованием двух точек. Кривые таких двумерных фигур являются геометрическим местом тех точек плоскости, для которых одинакова сумма, или разность, произведение, отношение расстояний до двух фиксированных точек. Фактически все четыре основных арифметических действия используются при формулировке равенства расстояний. Для двух точек кривая постоянной суммы – эллипс, разности – гипербола, произведения – овал Кассини [C[14]], отношения – окружность Аполлония. Параболы, как видим, здесь нет, как нет и других известных двумерных фигур, в том числе логарифмической спирали, для которой сохраняющейся величиной является угол между полярным радиусом и касательной к точке, что означает сохранение формы кривой и её неизменность в целом ряде математических преобразований.

Что касается параболы, как основной в указанном смысле золотой фигуры, она может определяться как геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы). Поскольку координаты фокуса и положение директрисы зависят от конкретного уравнения параболы, посмотрим, как обстоит дело в случае золотой параболы, пересекающей ось абсцисс в точках $x = \phi$ и $x = -\phi^{-1}$. Даже без знакомства с теорией параболы, см. [Parabola], из соображений симметрии ясно, что абсцисса фокуса равноудалена от этих точек, то есть является их средним арифметическим, равным 1/2. С учётом уравнения параболы, известной формулы для расстояния между двумя точками на плоскости и параллельности директрисы оси OX, нетрудно определить и остальные параметры. Задача сводится к решению системы двух достаточно простых квадратных уравнений с двумя неизвестными, хотя, конечно, легче подставлять значения в уже готовые формулы. Имеем:

координаты фокуса $x = 1/2,\ y = -1$

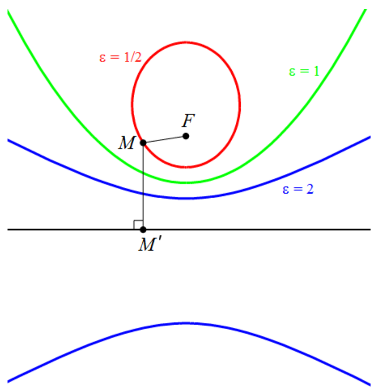
уравнение директрисы $y = -3/2$

и, например, расстояние от точки минимума до фокуса и до директрисы в обоих случаях равно 1/4.



Золотая парабола, её фокус и директриса, выделенные зелёным

Это, по сути, закон сохранения, который станет понятнее, если сравнить параболу с другими коническими сечениями, используя понятие эксцентриситета, определяемое как отношение расстояния от точки кривой до фокуса к расстоянию от той же точки до директрисы. Директриса ε является способом различения всех трёх (не считая вырожденных случаев) конических сечений, причём для эллипса ε < 1, для гиперболы ε > 1, а ε = 1 для параболы. Следовательно, для эллипса допустимо бесконечное множество значений в ограниченном интервале от единицы до нуля (окружность), для гиперболы – бесконечное множество значений от единицы до бесконечности (две прямые) и только для параболы значение эксцентриситета одно и то же для всего множества кривых. Такое свойство можно назвать *законом сохранения эксцентриситета*; оно достаточно значимо, а “преимущества” параболы уже и с точки зрения принципов минимума и простоты можно показать, используя запись конических сечений в декартовых и полярных координатах, а также в канонической форме [Conic section].



Эллипс (ε = 1/2), гипербола (ε = 2) и парабола (ε = 1) с фокусом F и директрисой

В декартовых координатах конические сечения описываются квадратным многочленом

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.3}$$

и здесь всё определяется множителями A, B и C, точнее дискриминантом $D = B^2 - 4AC$. Исключая из рассмотрения вырожденные случаи (точка, комплексные значения, параллельные и пересекающиеся значения) и окружность, как частный случай эллипса, имеем такое разделение:

$D < 0$ эллипс (окружность, если $A = C$ и $B = 0$)

$D > 0$ гипербола

$D = 0$ парабола

Как видим, дискриминант параболы, как и для эксцентриситета, постоянен для всего множества кривых и к тому же минимален по абсолютной величине.

В полярных координатах (r, θ) уравнение конических сечений

$$r = \frac{a}{1 - \varepsilon\cos\theta} \tag{2.4}$$

с постоянным для конкретной кривой параметром a содержит эксцентриситет ε, который именно для параболы равен единице. Отсутствие величины ε в формуле для полярного радиуса обеспечивает более простой, по сравнению с двумя другими коническими сечениями, вид уравнения для параболы. Придавая в золотых углах $\theta = n\cdot\pi/10$ переменной n значения 1, 2, 3, … , можно получить множество семейств золотых полярных радиусов типа $\phi^{\pm n}$, для значений параметра

$$a = \phi^{\pm n}[1 - \cos(n\cdot\pi/10)] \tag{2.5}$$

Вследствие периодичности косинуса каждое такое семейство содержит лишь десять различных значений для радиуса r. В частном случае, если угол $\theta = \pi/5$, а радиус $r = 2\phi^2$, параметр a равен единице:

$$a = 2\phi^2(1 - \cos\pi/5) = 1 \tag{2.6}$$

и не исключено, что движение по кривой с таким параметром реализуется в природе, допустим, для движущихся по параболической траектории космических тел.

Конические сечения могут быть приведены к канонической форме, уравнения и основные параметры которых взяты из [Conic section].

Таблица

Канонические уравнения и основные параметры невырожденных конических сечений

Коническое сечение	**Уравнение**	**Эксцентриситет ε**	**Линейный эксцентриситет *c***	**Semi-latus rectum *l***	**Фокальный параметр *p***
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{b^2}{a}$	$\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
Парабола	$y^2 = 4ax$	1	a	$2a$	$2a$

Поясним, что *линейный эксцентриситет* $c = a/\varepsilon$ – это расстояние от начала декартовой системы до фокуса (или одного из двух фокусов), *фокальный параметр* p – расстояние от фокуса (одного из двух фокусов) до директрисы, а обозначаемый латинским термином *semi-latus rectum* параметр $l = p\varepsilon$ – половина хорды, параллельной директрисе и проходящей через фокус (один из двух фокусов). Каноническое уравнение параболы и все связанные с ней параметры настолько проще, чем у двух других сечений, что комментарии здесь попросту излишни.

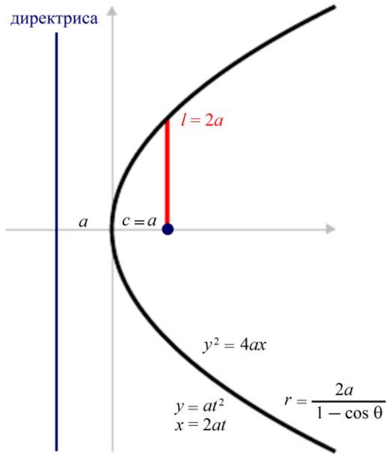
Из сравнения трёх уравнений:

эллипс $y = a\cos\theta$ $x = b\sin\theta$

гипербола $y = a\sec\theta$ $x = b\,\mathrm{tg}\,\theta$ или $y = \pm a\,\mathrm{ch}\,\theta$, $x = b\,\mathrm{sh}\,\theta$

парабола $y = at^2$ $x = 2at$

также следует более простой, притом не требующий применения тригонометрических или гиперболических функций вид параметрического уравнения для параболы.

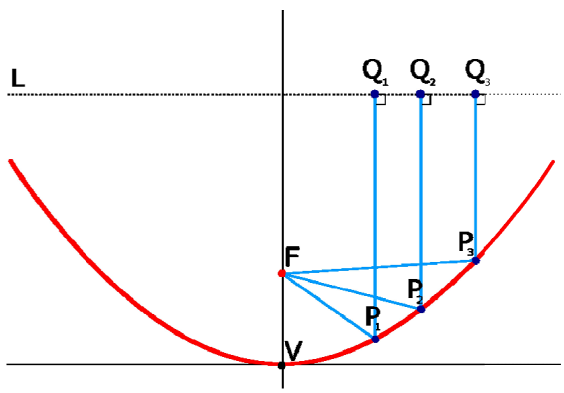


Парабола, её уравнения и основные характеристики

Краткого ознакомления с тремя типами уравнений для канонических сечений достаточно для вполне обоснованного вывода о преимуществах параболы с точки зрения фундаментальных принципов сохранения, минимума и простоты. Парабола, в отличие от пентаграммы, не может считаться золотой фигурой, поскольку это не математическая абстракция в одном экземпляре, а бесконечное множество различаемых своими параметрами кривых, объединяемых уравнением определённого типа с характерными для данной формальной структуры особенностями. Тем не менее, парабола связана с золотой константой не только некоторыми частными значениями золотых параметров, но также своим аналитическим представлением, квадратным уравнением, а это уже более высокий уровень причастности к ЗС.

Парабола реализуется в физическом мире, например в форме траектории, по которой движутся тела в постоянном гравитационном поле или заряженные частицы в однородном электрическом поле. По параболе, без учёта сопротивления воздуха, движется брошенное под углом тело, выпущенный из артиллерийского орудия снаряд, форму параболы принимает жидкость во вращающемся сосуде; парабола широко используется в оптике, в различных технических приборах, как и в архитектуре, при строительстве куполов и крыш. *Параболический закон стабильности* был установлен нами при рассмотрении выражающегося через золотую константу пика “острова стабильности” ядер химических элементов [А[7, f], *п.* 5.6; А[14]]. Во всех этих и других случаях природных явлений и технических средств явно или неявно присутствуют указанные выше универсальные принципы, играющие незаменимую роль в понимании и описании окружающего нас мира. Парабола – превосходный продукт формальной селекции по ряду важнейших признаков, и в этом можно видеть общую основу между этим геометрическим объектом и золотым сечением, связанным с параболой узами не самого близкого, но и не слишком далёкого математического родства.

Следует также добавить, что равенство расстояний до фокуса и директрисы для любой точки кривой параболы приводит к очень важному и практически полезному, особенно для изготовления зеркал, антенн, автомобильных фар, телескопов, других оптических приборов и изделий, свойству отражать параллельно падающий пучок лучей в точку, совпадающую с фокусом. Справедливо и обратное: свет от помещённого в фокус источника отражается в параллельный оси параболы пучок лучей. Фокус является, конечно, своеобразным аттрактором для любой параболы, в том числе описываемой уравнением золотого сечения, которая в семействе парабол выглядит как рядовой её член.

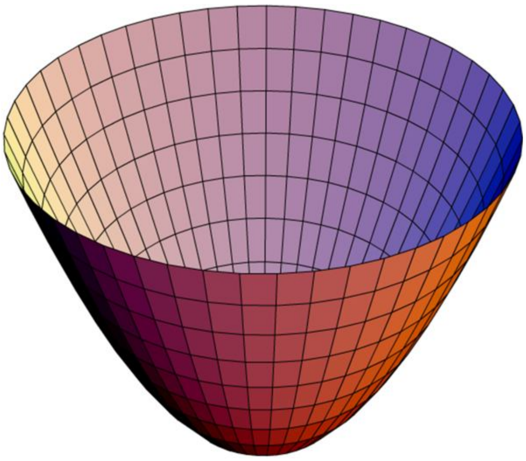


Фокусирующее свойство параболы

3. Параболоид вращения

Подобная заурядность плохо сообразуется с пониманием ЗС как формальной конструкции, выделяемой в каких-то отношениях среди множества однотипных конструкций, и с пониманием золотой константы как математической величины, непосредственно связанной с проявлением фундаментальных принципов минимума, оптимума и простоты. В конце концов речь, напомним, не о конкретных золотых значениях параметров модели, а о принадлежности *самой модели* к вполне определённой категории математических структур. А это уже качественно другой уровень "позолоченности". К тому же золотая структура является минимально возможной в указанной категории, другими словами, квадратное уравнение ЗС является простейшим среди всех квадратных уравнений. В переводе на язык конических сечений можно, хотя и не совсем строго, говорить о золотой параболе как о простейшем, с формальной точки зрения, члене всего семейства парабол. Между тем, какая-либо особая выделенность здесь не просматривается.

Спешить с выводами, однако, не следует, лучше посмотреть, как обстоит дело в случае *параболоида вращения*, образуемого вращением параболы вокруг проходящей через её вершину вертикальной оси. Сохраняя основные свойства параболы, параболоид, как трёхмерное тело, определяется и такими характеристиками, которые отсутствуют у двумерных фигур. Это, прежде всего, площадь поверхности S и ограниченный данной поверхностью объём V. Добавив сюда гауссову кривизну K и среднюю кривизну тела H, рассмотрим эти функциональные характеристики с позиций принципа минимума.



Параболоид вращения

Обозначив радиус параболоида вращения символом r, высоту через h и полагая, что переменная $u > 0$, имеем готовые формулы [W[11]]:

$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h \qquad S = \frac{\pi r}{6h^2}\left[(r^2 + 4h^2)^{3/2} - r^3\right] \qquad K = \frac{4h^2}{(r^2 + 4hu)^2} \qquad H = \frac{2h(r^2 + 2hu)}{(r^2 + 4hu)\sqrt{r^4 + 4r^2hu}} \tag{2.7}$$

Минимизируя эти формулы, "уберём" все переменные величины, точнее, приравняем r, h и u единице. Получим:

$$V_1 = \frac{\pi}{2} \qquad S_1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \qquad K_1 = \frac{4}{25} \qquad H_1 = \frac{6}{5\sqrt{5}} \tag{2.8}$$

С помощью золотой константы выражения для гауссовой кривизны можно записать в виде $K = 4/(2\phi - 1)^4$, но это явно "притянуто за уши", а очень простое и красивое выражение для объёма параболоида к ЗС отношения вообще не имеет. Правда, если в формулу для V подставить значения $r = \phi^{-2}$ и $h = F_5/F_3 = 5/3$, придём к выражению

$$V = \frac{\pi F_5}{2F_3}\phi^{-2} = \frac{5\pi}{6\phi^2} = 0{,}999984\ ..., \tag{2.9}$$

которое способно слегка потешить любителей нумерологии, поскольку не сильно отличается от 1. Отсюда, уже вне всякой связи с параболоидом, имеет место простое приближённое равенство $\phi = (5\pi/6)^{1/2}$, с относительной погрешностью $\delta = 8 \cdot 10^{-6}$. Конечно, это отнюдь не формула связи между двумя великими константами, а всего лишь случайно возникшая по ходу действия небольшая диковинка для кунсткамеры приближённых числовых соотношений, где есть немало экспонатов и получше, см. [Almost integer; W[12]]. Да и сами последовательности ϕ^n и $\phi^n/5^{1/2}$ – из категории наилучших примеров приближения иррационального к целому, с высокой притом скоростью $\delta_n = 10^{-n/5}$. Но это уже не по обсуждаемой теме, поэтому оставим непричастные к ЗС V и K, обратившись к двум другим функциям, где нас ждут приятные сюрпризы.

Выражения

$$S_1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) = \frac{\pi}{6}\left(10\phi - 6\right) = \pi\left(\frac{5}{3}\phi - 1\right) = \pi\left(\frac{F_5}{F_4}\phi - 1\right) \tag{2.10}$$

$$H_1 = \frac{6}{5\sqrt{5}} = \frac{6}{5(2\phi - 1)} = \frac{F_3 F_4}{F_5(2\phi - 1)} \tag{2.11}$$

не оставляют сомнений в золотом содержании параболоида с минимизированными значениями переменных. Но это только начало. Придавая всем трём переменным r, h и u в основных формулах для переменных S и H равные произвольные действительные значения $a > 0$, после несложных преобразований получим:

$$S_a = \pi a^2\left(\frac{5}{3}\phi - 1\right) \tag{2.12}$$

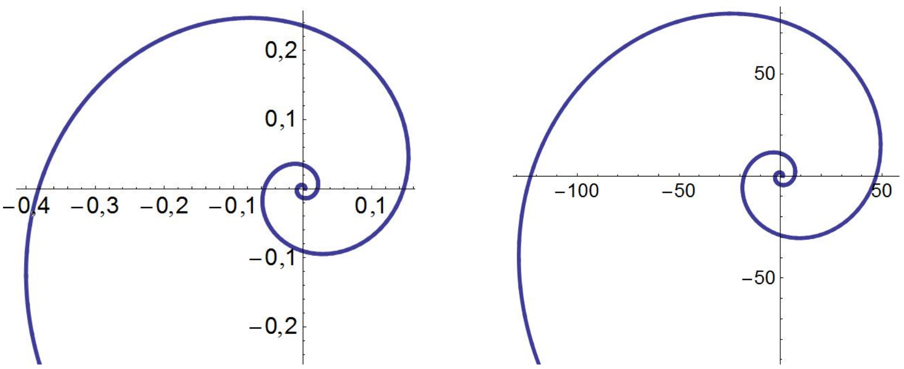
$$H_a = \frac{6}{5a(2\phi - 1)} \tag{2.13}$$

Таковы формулы золотого параболоида вращения, идею которого очень просто выразить словесно: *радиус параболоида равен его высоте*. Для данной трёхмерной структуры это фактически закон сохранения в форме равенства отношений функциональных величин, определяющих конфигурацию тела независимо от его общих размеров. Принцип минимума в применении к имеющимся формулам привёл к закону сохранения, который мог быть получен и непосредственно. Интуиция нам подсказывает, что золотой параболоид, если он нигде и не использовался, может иметь какое-то практическое применение, однако, за неимением конкретных данных на сей счёт (за исключением разве что чертежа из *Атлантического кодекса* Леонардо да Винчи, см. раздел 6 главы 5), оставим это в качестве ни к чему не обязывающего предположения.

4. Логарифмическая спираль

Семейство спиралей, в отличие от множества других двумерных плоских фигур с достаточно очевидными и легко различаемыми на рисунках характеристиками, требует к себе особого внимания. В полярных координатах и в общем случае спираль выражается через радиус-вектор r, чаще называемый полярным радиусом, и переменный угол θ формулой $r = aF(\theta)$, где функцией $F(\theta)$ определяется тип спирали, а параметром a – её конкретная форма. Аналитически спираль можно определить как непрерывную монотонно изменяющуюся функцию r от переменной θ, то есть с увеличением (или уменьшением) θ увеличивается (уменьшается) по определённому закону и r; вырожденному случаю спирали, когда с изменением угла функция не меняется, соответствует окружность. Геометрически спираль представляет собой непрерывную кривую, огибающую центральную точку или ось и удаляющуюся от неё или приближающуюся к ней в зависимости от увеличения или уменьшения значения независимой переменной. Среди двумерных спиралей наиболее известны логарифмическая и Архимедовы спирали. Нас, понятно, они интересуют не сами по себе, а лишь в соотнесённости с золотой константой, которая предполагает знакомство с некоторыми особенностями спиралей.

Логарифмическая спираль



Золотая спираль для интервалов $-6\pi \le \theta \le 0$ и $0 \le \theta \le 6\pi$

Уравнение логарифмической спирали в полярных координатах

$$r = ae^{k\theta} \tag{2.14}$$

или в логарифмическом варианте

$$\ln(r/a) = k\theta \tag{2.15}$$

означает, что такая спираль составлена из следующих элементов:

- e фундаментальная константа
- a, k параметры, характеризующие конкретную спираль
- θ независимая переменная
- r функциональная переменная

Изменение функции по закону $r \sim (e^k)^n$, при изменении аргумента по закону $\theta = n\cdot\pi/2$, даёт возможность представить логарифмическую спираль в виде

$$r = a(e^k)^n = a(e^k)^{2/\pi\cdot\theta} = a(e^{2k/\pi})^\theta \tag{2.16}$$

Обозначая постоянную для данной спирали величину $a\,e^{\frac{2k}{\pi}}$ символом s, получим очень простую формулу

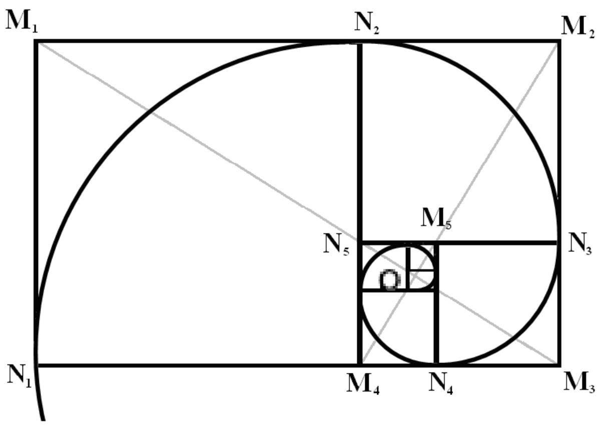
$$r = \pm s^\theta, \quad (s > 0, \quad -\infty < \theta < \infty), \tag{2.17}$$

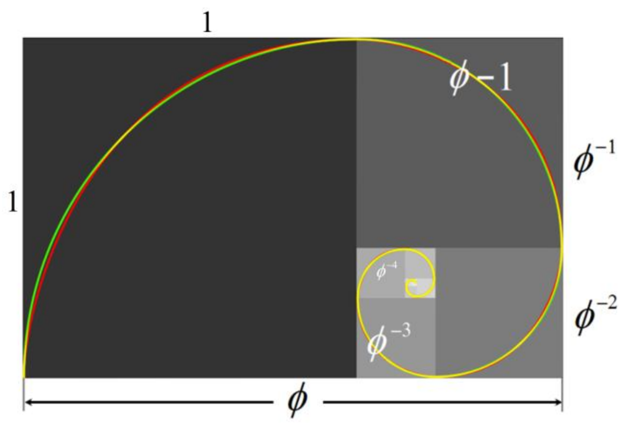
из которой следует, что показательная функция в полярных координатах всегда представляет логарифмическую спираль. При этом её закрученность в одну или другую сторону зависит от знака перед s, а степень закрученности – от конкретного значения самой s.

К золотой спирали приводит частный случай $a = 1$, $e^k = \phi$:

$$r = e^{\frac{2\ln\phi}{\pi}\theta} = \phi^{\frac{2}{\pi}\theta} \tag{2.18}$$

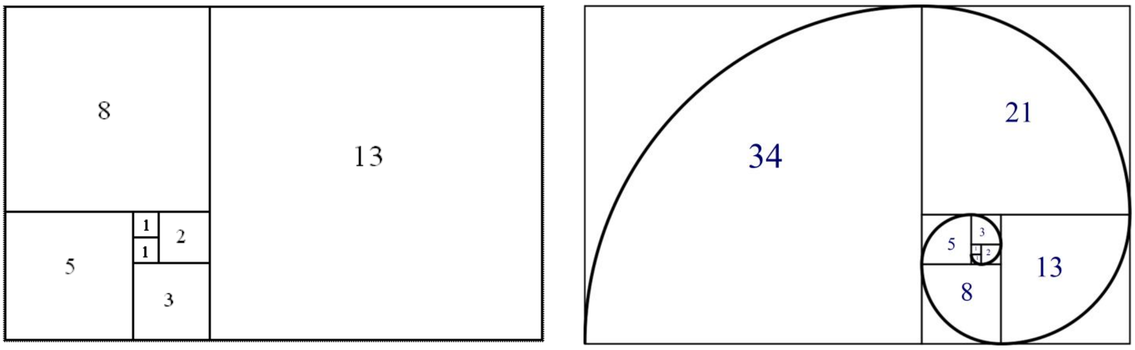
Постоянный золотой угол φ между радиусом-вектором и касательной определяется из равенства $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{\ln\phi}{\pi/2}$, отсюда $\varphi = \operatorname{arcctg}[(2\ln\phi)/\pi] = 1{,}27352\,50220\,89591\ldots$, или в градусах $\varphi \approx 72{,}96760\,88700\,38523^\circ$. В разделе 13 предыдущей главы золотая спираль сравнивалась с двумя заметно отличными от неё спиралями, у которых e^k = ɯ и $e^k = \phi_{11}$, теперь же покажем визуально неотличимую и иногда ошибочно отождествляемую с золотой спираль, построение которой можно осуществить методом, предложенным Альбрехтом Дюрером (Albrecht Dürer, 1471–1528) и, видимо, известным ещё Витрувию (Marcus Vitruvius Pollio, I век до н. э.). Возьмём прямоугольник золотого сечения $N_1M_1M_2M_3$ с отношением длин сторон N_1M_3 и N_1M_1 равным ϕ и впишем в него квадрат $N_1M_1N_2M_4$. Полученный при этом прямоугольник $N_2M_2M_3M_4$ тоже фигура золотого сечения, поскольку $M_2M_3/M_3M_4 = \phi$, что вытекает из соотношения $1/(\phi - 1) = \phi$. Точно таким же способом из $N_2M_2M_3M_4$ получим $N_3M_3M_4N_5$ и так далее. Неограниченно продолжая это деление, образуем последовательность прямоугольников золотого сечения, убывающую в отношении ϕ и асимптотически приближающуюся к называемой полюсом точке пересечения диагоналей M_1M_3 и M_2M_4. Соединяя точки N_1 и N_2, N_2 и N_3, N_3 и N_4 и т. д. четвертями дуг окружностей соответствующих радиусов, получим искомую кривую.





Спираль, построенная по методу Дюрера; она же (зелёная)
в сравнении с золотой (красная) спиралью; жёлтым обозначены участки их совпадения

Почти неотличима от золотой и спираль Фибоначчи, построение которой начинается с двух имеющих общую сторону единичных квадратов в двух возможных вариантах их взаимного расположения. Далее, четырьмя возможными способами строится квадрат с длиной стороны равной 2, отсюда, кстати, все четыре возможных типа закрученности спирали на плоскости – два по часовой и два против часовой стрелки. Затем строится квадрат с длиной стороны равной 3, затем 5, 8, 13 и так далее. Проводя соответствующие дуги окружностей, получим спираль, для которой отношение большей стороны прямоугольника к меньшей, то есть отношение F_{n+1}/F_n, приближается к константе ϕ по мере увеличения номера n.



Построение закрученной по часовой стрелке спирали Фибоначчи и спираль, закрученная против часовой стрелки

Очевидно, что как бы ни были близки к золотой логарифмической спирали две другие спирали, логарифмической функцией их кривые не описываются, хотя квазизолотыми спиралями они считаться могут (подробнее об этом и особенностях логарифмической спирали см. [A[7,e], *п*. 13]).

5. Архимедовы спирали

К семейству *Архимедовых спиралей* причисляются те кривые, которые в полярных координатах выражаются уравнением типа

$$r = a\theta^{1/n} \tag{2.19}$$

где параметр a относится к конкретной спирали, а принимающий целые значения знаменатель показателя степени n характеризует определённое подсемейство спиралей. Ниже будут рассмотрены три основных частных случая: $n = 1$ (спираль Архимеда), $n = -1$ (гиперболическая спираль) и $n = 2$ (спираль Ферма, называемая также параболической спиралью).

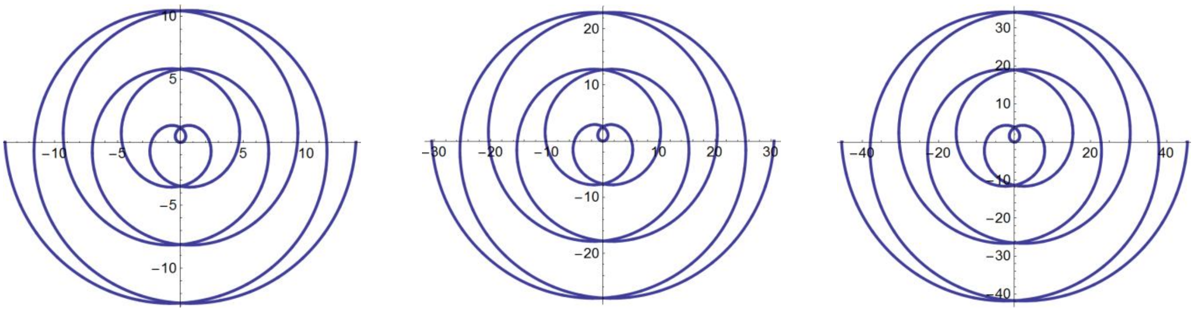
Уравнение спирали Архимеда в полярных координатах

$$r = a\theta \tag{2.20}$$

и все спирали Архимеда имеют одинаковую форму, но для каждого значения переменной θ значение радиуса-вектора r зависит от параметра a. Полный оборот кривой спирали вокруг оси соответствует повороту угла на 2π, поэтому уравнение спирали записывают также в виде

$$r = \frac{k}{2\pi}\theta \tag{2.21}$$

уже с параметром $k = 2\pi a$. Для сравнения взяты спирали с параметрами $a = ɯ$, $a = \phi$ и $a = \phi_{11}$.



Спирали Архимеда (слева направо) для параметров $ɯ \approx 0{,}739$, $\phi \approx 1{,}618$ и $\phi_{11} \approx 2{,}414$, в интервале $-6\pi < \theta < 6\pi$

Золотая константа здесь ничем не выделена, но возьмём формулу для длины дуги L спирали в пределах от 0 до θ, которая выражается интегралом

$$L = \int_0^\theta a\sqrt{1 + x^2}\, d\theta = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1 + \theta^2} + \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2})\right] \tag{2.22}$$

Взяв переменную θ равной 1/2 и приравняв для удобства параметр a двум, придём к очень простому и довольно любопытному соотношению

$$L = \frac{\sqrt{5}}{4} + \ln\phi = \frac{2\phi - 1}{4} + \ln\phi \tag{2.23}$$

содержащему выражение $\ln\phi = \mathrm{arsh}(1/2)$, положенное в разделе 6 первой главы в основу экспоненциального определения золотой константы как следствия теории ЛМФ. Длина дуги здесь положительна, если же $\theta = -1/2$,

$$L = -\frac{\sqrt{5}}{4} + \ln\phi = -\frac{2\phi - 1}{4} + \ln\phi < 0 \tag{2.24}$$

Угол $\pm 1/2$ в радианах это $\pm 90/\pi \approx \pm 28{,}678°$, следовательно, такой угол, хотя и с некоторой натяжкой, можно считать золотым для спирали Архимеда.

Гиперболическая спираль

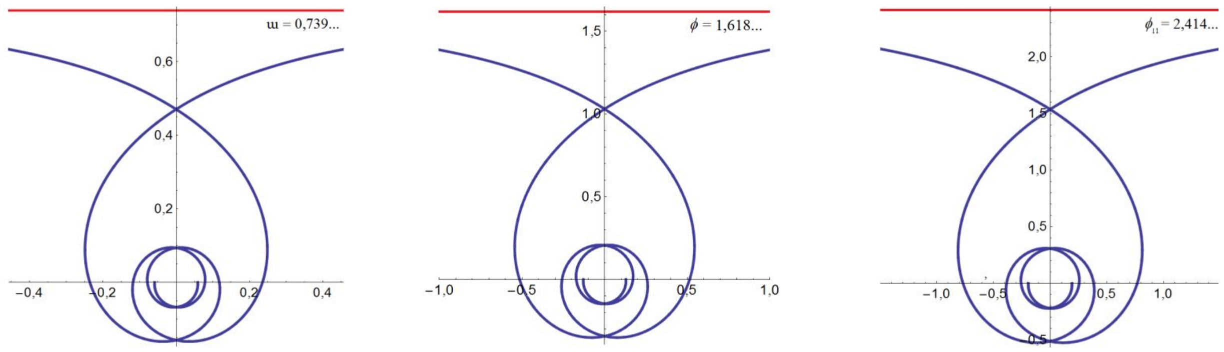
Уравнение гиперболической спирали в полярных координатах:

$$r = a/\theta \tag{2.25}$$

Следовательно, значение полярного радиуса r обратно пропорционально значению переменной θ и потому такая спираль фактически обратна спирали Архимеда. В декартовых координатах, в параметрической записи

$$x = a\frac{\cos t}{t}, \quad y = a\frac{\sin t}{t} \tag{2.26}$$

и ясно, что при t стремящемся к нулю абсцисса стремится к $\pm\infty$, а ордината асимптотически приближается к параметру a, обозначенному на рисунках красной линией. Как и в других случаях, сравнение проводится для параметров $a = ш$, $a = \phi$ и $a = \phi_{11}$.



Гиперболические спирали (слева направо) для параметров $ш \approx 0{,}739$, $\phi \approx 1{,}618$ и $\phi_{11} \approx 2{,}414$, в интервале $-4\pi < \theta < 4\pi$

Длина дуги плоской кривой $y = f(x)$ в пределах от α до β, вычисляемая по общей формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \tag{2.27}$$

в случае гиперболической спирали в пределах от от 0 до θ приводит к выражению

$$L = a\left[-\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta} + \ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\right] \tag{2.28}$$

В частном случае, когда $\theta = \pm 1/2$, $a = 1$, имеем выражение

$$L = \mp\sqrt{5} \pm \ln\phi = \mp(2\phi - 1) \pm \ln\phi \tag{2.29}$$

не менее простое, чем ранее полученное для спирали Архимеда. В зависимости от знака перед 1/2 длина дуги положительна или отрицательна, а угол $\pm 90/\pi \approx \pm 28{,}678°$ по-прежнему может считаться золотым.

Спираль Ферма (параболическая спираль)

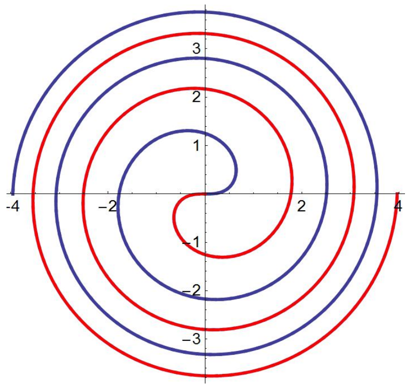
Уравнение спирали Ферма

$$r = a\theta^{1/2} \tag{2.30}$$

обычно записывается в виде

$$r^2 = a^2\theta \tag{2.31}$$

Здесь два значения для r: на рисунке положительному $r = a\theta^{1/2}$ соответствует синяя кривая, а красная кривая соответствует отрицательному значению $r = -a\theta^{1/2}$.



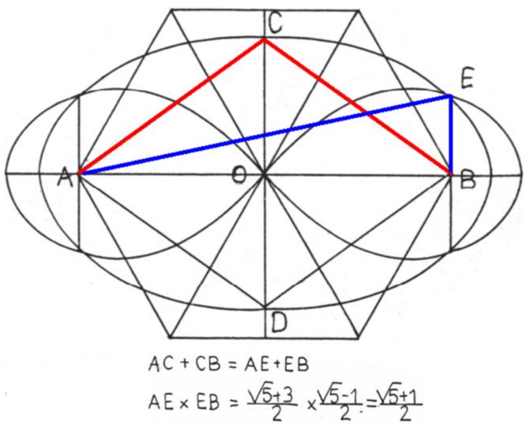
Спираль Ферма

Ничего золотого здесь, казалось бы, нет, но тем не менее именно спираль Ферма является одной из немногих плоских кривых, причастность которых ЗС вызывает мало сомнений. Исследование филлотаксиса (подробно обсуждаемое в историческом контексте в разделе 3 седьмой главы), в частности расположения семян в головке подсолнуха, привело [Vogel] к математической модели, в которой семянки одинаковой длины упорядочены не логарифмической спиралью, а спиралью Ферма, с золотым углом $\theta_{фил} = 2\pi/\phi^2$ радиан, или $\approx 137{,}508°$. В качестве маленьких нумерологических диковинок укажем вначале на близость золотого угла филлотаксиса рациональной дроби: $\theta_{фил} = 2{,}399963\ldots \approx 12/5$, (отклонение $\delta = 1{,}5\cdot 10^{-5}$). Близок $\theta_{фил}$ и значению константы да Винчи, а этому соответствует угол $\approx 138{,}324°$, который в свою очередь не сильно отличается ($\delta = 7\cdot 10^{-4}$) от базового выражения 44π для нескольких безразмерных физических постоянных [A[7,e]; Ar[4]]. Разумеется, никакая математическая конструкция не может быть идеальной моделью природного феномена и всё же полученный применением каких-то общих принципов и обеспечивающий определённый уровень соответствия формализм обычно достаточен для его признания в качестве отвечающего существу дела теоретического образа своего природного прототипа. И здесь уже нет места нумерологическим фантазиям, хотя зачастую именно необъяснимые и на первый взгляд случайные числовые совпадения могут стать стимулом для начала серьёзного математического исследования.

6. Овалы Кассини, лемниската Бернулли

Золотые крупицы можно, при желании, обнаружить во многих геометрических объектах. Изредка встречаются и золотые самородки, такие как пентаграмма и додекаэдр. Необходимо указать на разницу между единичными геометрическими фигурами и телами и семействами однородных объектов. Пентаграмма, к примеру, только одна. В сущности это вполне определённая математическая абстракция, которая в античной философии могла пониматься как эйдос в мире платоновских идей, а с точки зрения современного исследователя представляет собой систему чисел, математическую структуру, которая приближённо изображается в виде знакомой всем геометрической фигуры. И каким бы ни был размер правильной, не деформированной пентаграммы, как бы она ни была повёрнута, это всегда один и тот же объект, математическая модель, существующая в единственном экземпляре.

Другое дело фигура, не только размер, но и форма которой зависит от конкретных значений её параметров. Здесь уже имеем дело с семейством геометрических структур, как правило бесконечных, с переменными параметрами, которые могут меняться в допустимом интервале значений. Возможны и варианты, в том числе необычные, например, в случае *лемнискаты Бернулли* как частного случая *овалов Кассини*, причастной согласно работе [Гржедзельский] к ЗС, как видно из рисунка, взятого из [C[14]].



Золотое сечение в лемнискате Бернулли

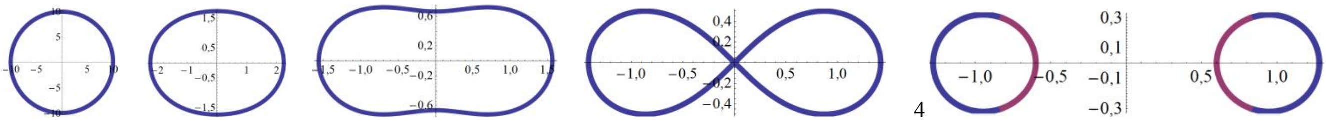
Овал Кассини, по определению, представляет собой геометрическое место точек, для которых произведение расстояний $l_i \cdot l_j$ до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, постоянно и равно квадрату некоторого действительного числа: $l_i \cdot l_j = b^2$. Уравнение овала в декартовой системе

$$[(x-a)^2 + y^2]\,[(x+a)^2 + y^2] = b^4 \qquad (2.32)$$

а тем более уравнение в полярных координатах

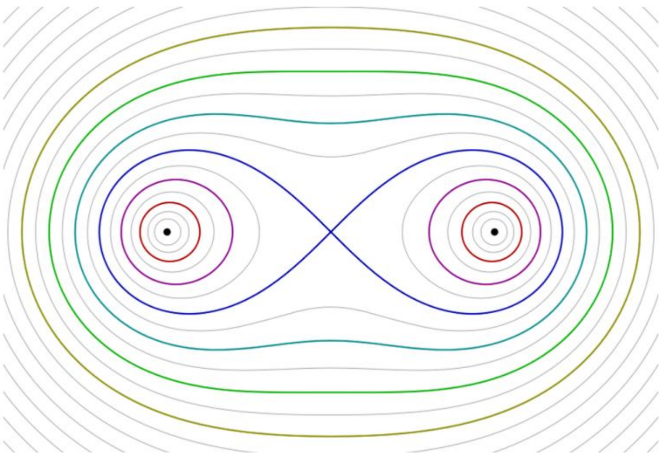
$$r^2 = a^2\left[\cos\,2\theta \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \sin^2 2\theta}\,\right] \qquad (2.33)$$

ясно показывают, что вид кривых определяется отношением параметров a и b. Когда $b/a \to 0$, кривая вырождается в две точки, совпадающие с фокусами, если же $b/a \to \infty$, она принимает форму окружности. С приближением отношения b/a к 1 вначале получается похожий на эллипс овал, затем *собачья кость* (*dog bone*), а в случае равенства $b = a$ приходим к интересной кривой – лемнискате Бернулли, похожей на повёрнутую на прямой угол восьмёрку, или символ бесконечности. Далее, если $b < a$ кривая распадается на два отдельных, вначале вытянутых в направлении друг друга яйцевидных, затем всё более круглых и стремящихся к совпадению с фокусами овала. Все эти случаи (с параметром a, взятым равным 1), кроме вырожденных, показаны в отдельности, а также на одном рисунке из [Cassini oval].



$b/a = 10$ $\quad$ $b/a = 2$ $\quad$ $b/a = 1{,}2$ $\quad$ $a = b$ $\quad$ $b/a = 4/5$

Овалы Кассини для различных значений отношения b/a



Овалы Кассини для значений b/a = 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6

Лемниската выделена уже тем, что служит границей между одиночными и парными замкнутыми фигурами, предельным значением для тех и других. А ведь именно исследованием предельных значений, особых точек, экстремумов функций чистой математики и её приложений, в частности в области физической теории, нередко выявляется истинная значимость теоретической конструкции, её скрытые возможности. Достаточно сослаться на минимумы и максимумы, точки перегиба, граничные точки математических функций, или на ФФП, как на экстремальные значения соответствующих физических величин. Лемниската фактически также проводит демаркацию между двумя различными типами геометрических фигур. Из равенства $b = a$, приравняв, как и раньше, параметр a единице, придём к очень простой тригонометрической формуле для лемнискаты

$$r = (2\cos 2\theta)^{1/2}, \qquad (2.34)$$

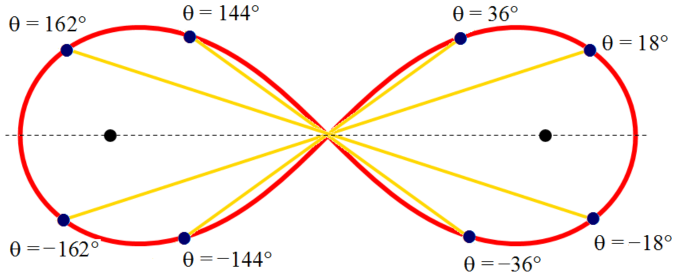
которая как бы прозрачно намекает на золотые значения угла θ, начиная с минимального $\theta = \pi/10 = 18°$.

Таблица

Золотые углы и полярные радиусы лемнискаты Бернулли

$\theta = n\cdot\pi/10$	$\pi/10$	$2\cdot\pi/10$	$3\cdot\pi/10$	$4\cdot\pi/10$	$5\cdot\pi/10$	$6\cdot\pi/10$	$7\cdot\pi/10$	$8\cdot\pi/10$	$9\cdot\pi/10$	$10\cdot\pi/10$
$r = \sqrt{2\cos 2\theta}$	$\sqrt{\phi}$	$\sqrt{\phi^{-1}}$	$i\sqrt{\phi^{-1}}$	$i\sqrt{\phi}$	$i\sqrt{2}$	$i\sqrt{\phi}$	$i\sqrt{\phi^{-1}}$	$\sqrt{\phi^{-1}}$	$\sqrt{\phi}$	$\sqrt{2}$

Полагаем, что $r > 0$, а вследствие чётности и периодичности косинуса других значений, кроме приведённых в таблице, для отрицательных углов и значений $n > 10$ нет. В наличии десять значений, из них половина – мнимые числа, половина – действительные, включая постоянную Пифагора. Золотая константа и её обратная величина содержатся под корнем в восьми случаях из десяти; исключая мнимые значения, имеем золотые значения полярного угла для золотых углов ±18°, ±36°, ±144°, ±162°.



Лемниската Бернулли, её фокусы, золотые углы и полярные радиусы

Понятно, что геометрические объекты интересуют нас не сами по себе, а в их соотнесённости с ЗС, которую не всегда просто выявить. Все приводимые данные о кривых, естественно, выборочны, носят вспомогательный характер, вносят в рассмотрение вопросов ту конкретику, без которой глубокое понимание существующих тонких связей попросту недостижимо. В случае лемнискаты косинус в её полярном уравнении означает, как и во всех подобных структурах, наличие золотых крупинок, поскольку экспонента, её тригонометрические и гиперболические производные всегда содержат золотые “примеси”, связанные с определёнными значениями этих функций. Можно, конечно, резко увеличить золотое содержание практически любого уравнения путём приравнивания его параметров золотой константе или её гомологам. Так, в уравнении лемнискаты

$$r = a^2(2\cos 2\theta)^{1/2} \qquad (2.35)$$

если множитель a приравнять не единице, а допустим $\sqrt{\phi}$, получим *золотое уравнение лемнискаты Бернулли*

$$r = \phi(2\cos 2\theta)^{1/2} \qquad (2.36)$$

то есть фактически золотой фантом, способный породить ложные ожидания. По-настоящему золотая геометрия с теми или иными значениями произвольно выбираемых параметров, за редкими исключениями, не связана, а является внутренним свойством самого объекта, как это имеет место в случае пентаграммы и додекаэдра, а в меньшей мере – параболы.

Но есть и другая сторона вопроса. В указанной выше работе [Гржедзельский] лемниската наделяется золотым содержанием не значениями параметров, а связью с другими геометрическими фигурами, такими как эллипс, ромб, шестиугольник. Кривая вообще лучше смотрится, приобретает новые теоретические измерения в семействе родственных кривых, объединяемых на общей формальной основе. Записав уравнение лемнискаты в виде

$$r^2 = a^2(2\cos 2\theta), \qquad (2.37)$$

обратим внимание на равенство показателя степени полярного радиуса и множителя перед переменным углом θ под знаком косинуса, который в обоих случаях равен двум. Путь к конкретному обобщению тем самым реально обозначен.

7. Синусоидальные спирали

Если в полярных координатах логарифмической спирали переменный угол является аргументом экспоненциальной, или логарифмической функции, а в Архимедовых спиралях полярный радиус выражается через степени угла, в лемнискате мы видим зависимость *квадрата* радиуса от косинуса *двойного* угла. Математика не терпит формальных лакун, и в последней формуле, если внимательно приглядеться, содержится указание относительно включения лемнискаты, в качестве частного случая, в более широкий класс кривых. Здесь можно рассуждать следующим образом: полярные радиусы в степенях, выражаемых рациональными числами, определяются функцией косинуса от углов, умножаемых на эти же числа. Есть ещё и постоянный параметр перед косинусом и в той же степени, но он относится к масштабу, а не форме фигуры. Это, конечно, не исторический путь развития идеи, а лишь логически вытекающая из предыдущего возможность перейти от лемнискаты к широкому классу кривых. Впервые они исследованы в 1718 г. шотландским математиком Колином Маклореном (Colin Maclaurin, 1698–1746) и названы *синусоидальными спиралями* в середине XIX века [Ferreol], хотя в действительности термин *спираль* здесь мало подходит.

В полярных координатах семейство таких кривых выражается формулой

$$r^n = a^n \cos n\theta \qquad (2.38)$$

которая поворотом кривой относительно начала координат может быть приведена к синусоидальному, в буквальном смысле слова, виду

$$r^n = a^n \sin n\theta \qquad (2.39)$$

Придавая переменной n целые и дробные значения, получаем множество частных случаев синусоидальной спирали, среди которых немало хорошо известных и в других отношениях кривых:

$n = 1$ окружность

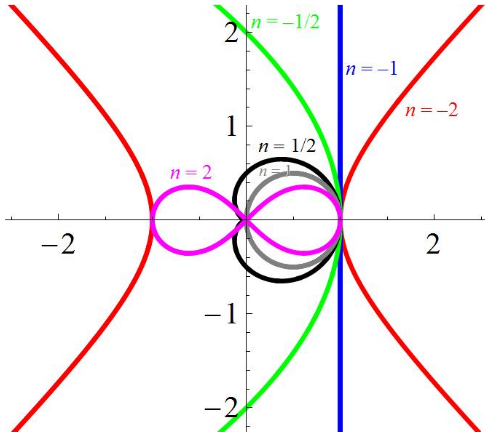
$n = 2$ лемниската Бернулли

$n = 1/2$ кардиоида

$n = -1$ прямая

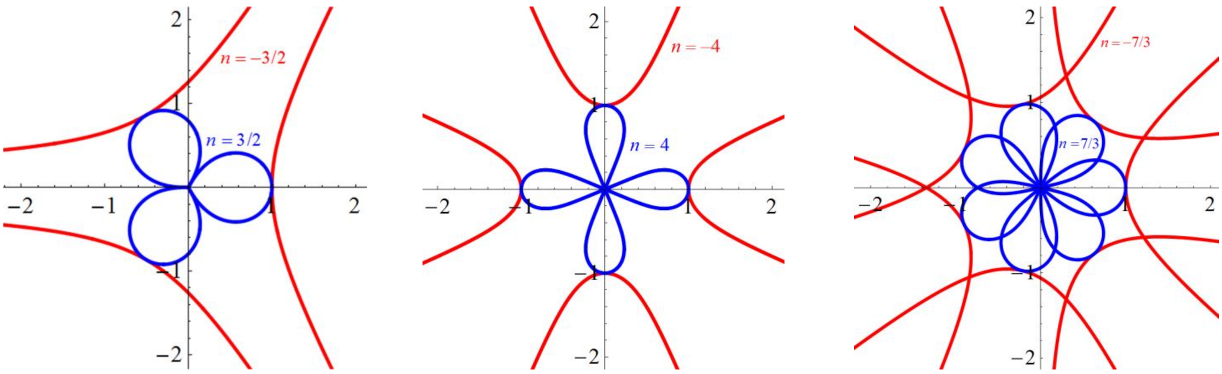
$n = -2$ гипербола

$n = -1/2$ парабола



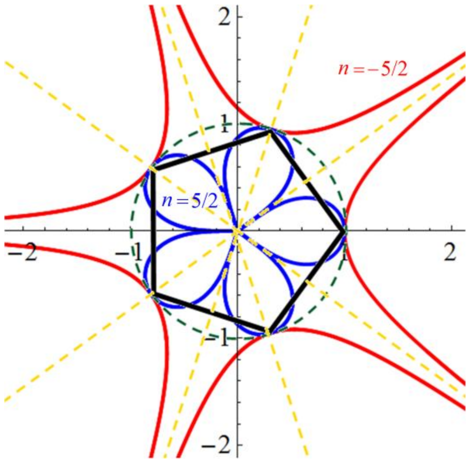
Синусоидальные спирали (a = 1) для значений $n = 1$, $n = 2$, $n = 1/2$, $n = -1$, $n = -2$, $n = -1/2$

Нелишне отметить несколько характерных особенностей кривых данного класса уравнений. Нетрудно заметить, что это очень разные, мало похожие друг на друга кривые, причём замкнутые фигуры получаются для положительных степеней, а незамкнутые – для отрицательных. Название *спираль* мало подходит членам данного семейства; для положительных степеней больше подошло бы название цветок, количество лепестков которого определяется числителем степени $n = k/m$. Для большей ясности из необозримого множества всевозможных кривых синусоидальных спиралей приведём три простых, репрезентативных примера, из которых видно и наложение лепестков при значениях $m > k$.



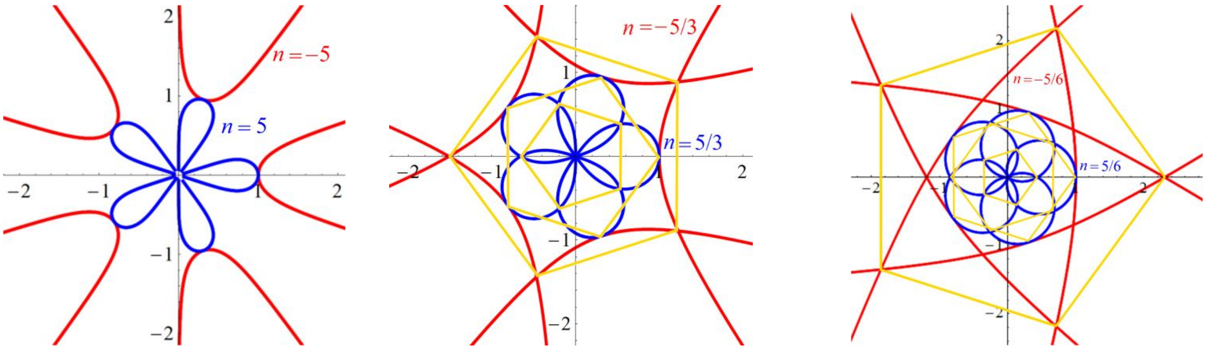
Синусоидальные спирали (a = 1) для трёх различных значений показателя степени

Совершенно очевидно, что придавая, как и в частном случае лемнискаты, соответствующие значения углам θ и параметру a, можно получить несметное множество позолоченных, но малозначительных кривых. Но есть и исключения, и нетрудно догадаться, что они связаны с характерными для ЗС числами 5 и 10 (параметр a, определяющий лишь размер кривой в данном масштабе, всюду берётся равным 1). Если $k/m = 5/2$, пятилепестковая кривая, как видно из рисунка, идеально вписывается в правильный пятиугольник, повёрнутый вокруг вертикальной оси по часовой стрелке на золотой угол 18°. А родственная кривая, для которой $k/m = -5/2$, касается своими пятью особыми точками вершин пятиугольника, являющихся особыми точками и первой кривой.



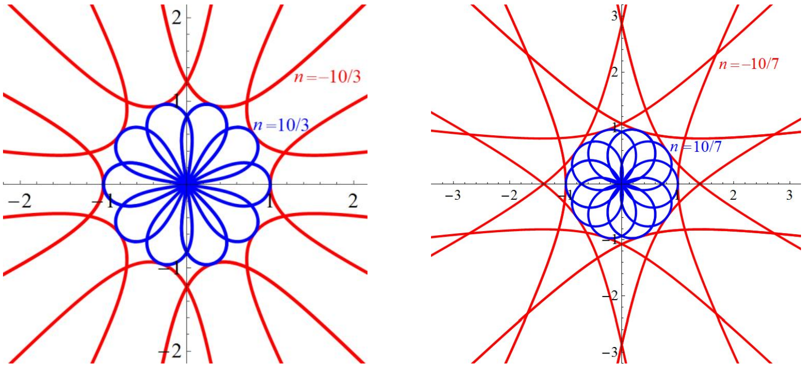
Золотые кривые $r^{5/2} = \cos(5\theta/2)$ и $r^{-5/2} = \cos(-5\theta/2)$

Золота здесь много, причастность таких спиралей ЗС бесспорна. Сохраняя пятёрку в числителе и заставляя знаменатель пробегать натуральный ряд, можно получить бесконечное множество пятилепестковых “цветков” в окружении незамкнутых кривых, касающихся их своими особыми точками. Количество лепестков определяется числителем, а их ширина и наложение друг на друга – значением знаменателя. Так, если $k/m = \pm 5$, лепестки тоньше, а незамкнутые кривые круче, чем в предыдущем примере; если $k/m = \pm 5/3$, имеет место наложение широких лепестков. Соединяя вершины кривых, можно получить целых три идеальных пятиугольника, повёрнутых направо и налево на те же золотые 18°, а незамкнутые кривые образуют деформированный пятиугольник с вогнутостью вовнутрь. Ещё более сложна картина в случае, когда знаменатель больше числителя. Например, если $k/m = \pm 5/6$, мы видим три вложенных друг в друга разных пятилепестковых цветка, четыре получаемых соединением вершин правильных пятиугольника, два (красных) деформированных пятиугольника вогнутостью наружу.



Синусоидальные спирали для $n = \pm 5$, $n = \pm 5/3$ и $n = \pm 5/6$

Семейство золотых синусоидальных спиралей типа $5/m$, (m = 1, 2, 3, …) естественным образом расширяется до семейства типа $10/m$, полностью содержащего в себе предыдущее. Число 5 заменяется десяткой, образуемые соединением вершин повёрнутые пятиугольники – не повёрнутыми десятиугольниками, те же золотые углы, кратные $\pi/10 = 18°$, более сложный, вообще говоря, геометрической рисунок, с большим числом лепестков, правильных и деформированных десятиугольников. Других, принципиально важных или достойных упоминания в связи с ЗС изменений, похоже, нет, поэтому покажем без комментариев две спирали для значений $k/m = \pm 10/3$ и $k/m = \pm 10/7$

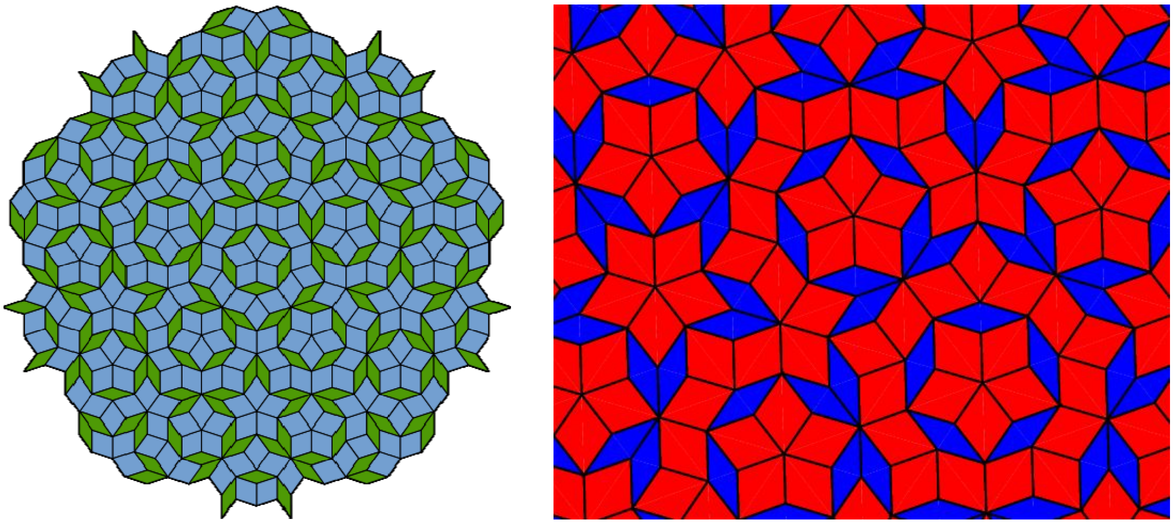


Синусоидальные спирали для $n = \pm 10/3$ и $n = \pm 10/7$

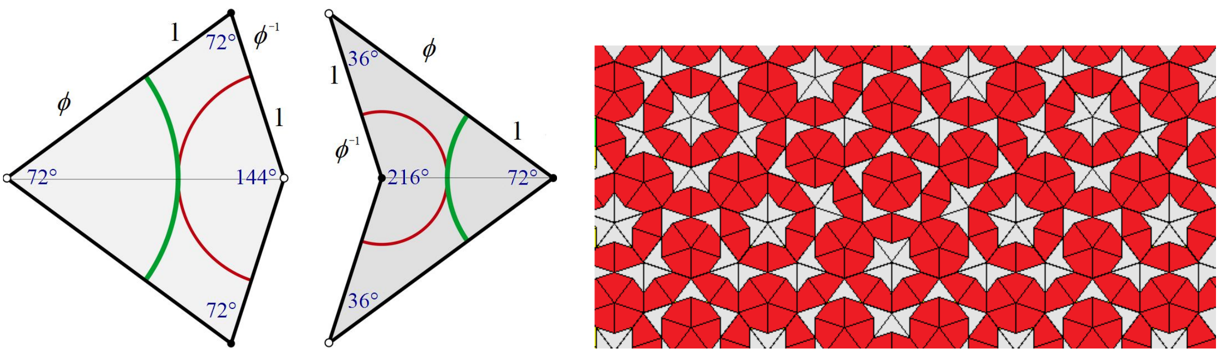
К семейству синусоидальных спиралей относится множество всевозможных кривых, причём между многими из них очень мало, на первый взгляд, общего. Однако известная ещё в античной греческой математике идея системы координат типа *радиус–угол* весьма плодотворна, а косинус, как производная экспоненты, как угловая функция, обладает большим теоретическим потенциалом и не случайно широко используется в теории и на практике. Объединение различных функций с соответствующими кривыми на основе целых и рациональных значений переменной n в выражении для аргумента косинуса имеет, как видим, и золотую составляющую. Это, заметим, не только кривые со значениями $n = \pm 5/m$ и $n = \pm 10/m$, (m = 1, 2, 3,…), но также выражаемая квадратным уравнением парабола и гипербола, которая посредством играющих большую роль в ТЗС гиперболических функций косинуса и синуса непосредственно связана с формулой Бине для золотой константы и чисел Фибоначчи.

8. Заполнение плоскости и фракталы

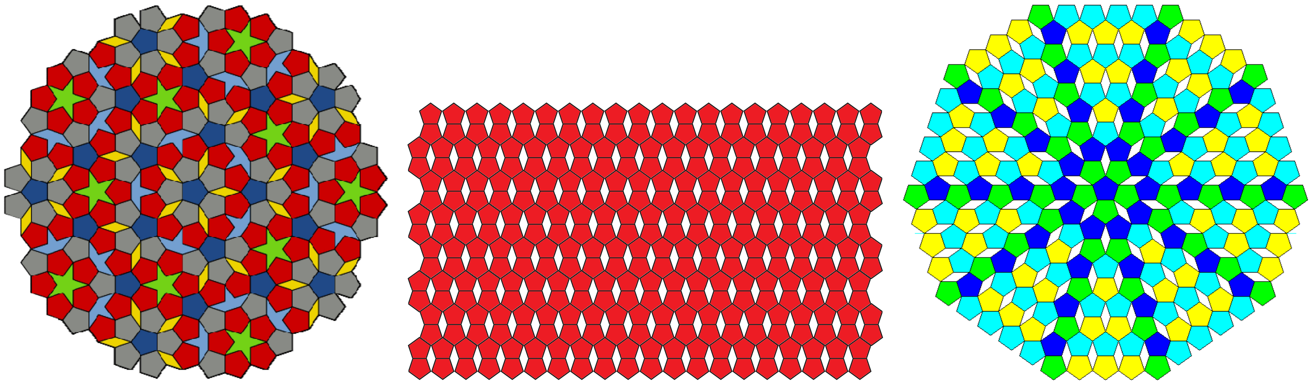
Плотное заполнения пространства, как и золотые фракталы, рассмотрены, с указанием основных источников, в работе [A[15,g], *п*. 11], а здесь ограничимся лишь кратким представлением. Отметим, что проблема паркета, то есть без пробелов и наложений заполнения пространства геометрическими телами, относится к разряду сложных и практически важных вопросов математической теории. В простейшем случае заполнения двумерной плоскости одинаковыми правильными многоугольниками задача имеет решение только для квадратов, равносторонних треугольников и шестиугольников, а для остальных правильных n-угольников, включая золотой пятиугольник, она неразрешима. При более общей постановке вопроса, допуская возможность заполнения плоскости *различными* многоугольниками, фигуры золотой пропорции оказываются востребованными. Выяснено (Роджер Пенроуз, Roger Penrose, 1931), что любую часть плоскости можно целиком заполнить известными нам из предыдущего изложения ромбами двух типов: $2\pi/5 = 72°$, $3\pi/5 = 108°$ и “алмазом” с углами $\pi/5 = 36°$, $4\pi/5 = 144°$ [Penrose[1,2]; Grünbaum and Shephard]. Есть и другие, показанные ниже способы заполнения плоскости золотыми фигурами, причём во всех случаях имеет место пентагональная симметрия. Обнаружение осевой симметрии пятого порядка в квазикристаллах, рассматриваемых обычно как промежуточное состояние между аморфными телами и периодическими кристаллами, можно считать реализацией ПЗС в прежде, казалось бы, недоступной для него области физики твёрдого тела.



Заполнение плоскости двумя ромбами с углами 36°, 144° и 72°, 108°



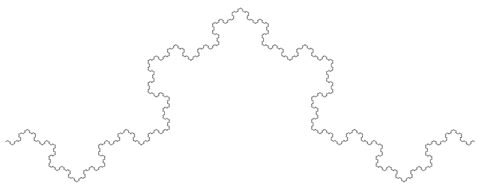
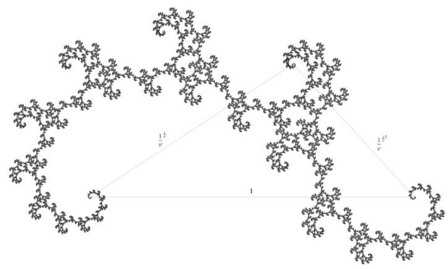
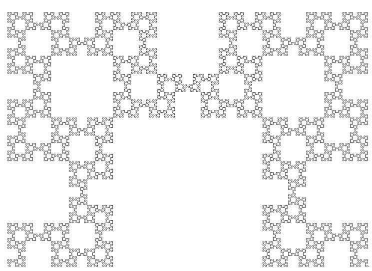
Плитки Пенроуза, “воздушный змей” (kite), получаемые из ромба с углами 72° и 108°; заполнение ими плоскости

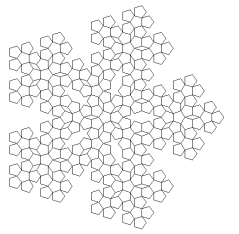
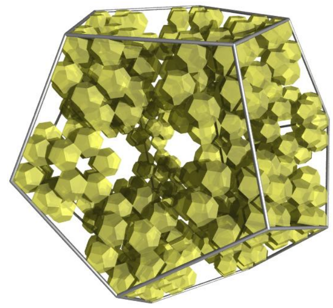
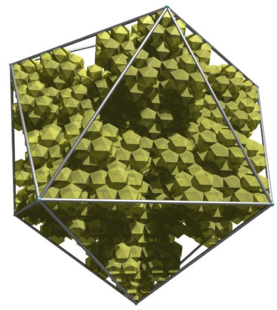


Заполнение плоскости пятиугольниками и другими золотыми фигурами

Золотые фракталы

В математике фрактал определяется как множество точек в евклидовом пространстве с размерностью Хаусдорфа, которая, вообще говоря, выражается иррациональным числом и является обобщением обычного понятия размерности. Геометрически это самоподобная фигура, каждый фрагмент которой с уменьшением масштаба повторяет предыдущий фрагмент. Среди несметного разнообразия фракталов есть и связанные с константой ϕ. Список известных золотых фракталов [List of fractals by Hausdorff dimension] приведём без комментариев, отметив лишь, что размерность Хаусдорфа каждого из них иррациональна и выражается посредством логарифмической функции.

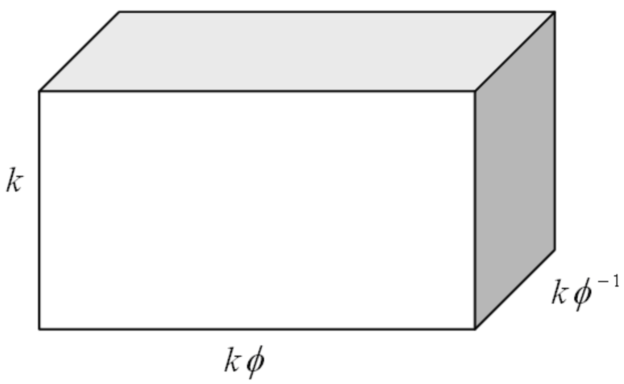
Название фрактала и размерность Хаусдорфа	**Десятичное значение**	**Иллюстрация**
Асимметричное канторово множество $\frac{\ln\phi}{\ln 2} = \frac{\ln(1+\sqrt{5})}{\ln 2}$	0,694 241…	
Фрактал Фибоначчиева слова 60° $3\frac{\ln\phi}{\ln\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)}$	1,208 302…	
Золотой дракон $\frac{\ln\phi}{\ln\sqrt[\phi]{\phi}} = \phi$	1,618 033…	
Фрактал Фибоначчиева слова $3\frac{\ln\phi}{\ln(1+\sqrt{2})}$	1,637 938…	

Пятиугольные хлопья $\dfrac{\ln 6}{\ln(1+\phi)}$	1,861 715…	
Фрактал додекаэдра $\dfrac{\ln 20}{\ln(2+\phi)}$	2,329 621…	
Фрактал икосаэдра $\dfrac{\ln 12}{\ln(1+\phi)}$	2,581 926…	

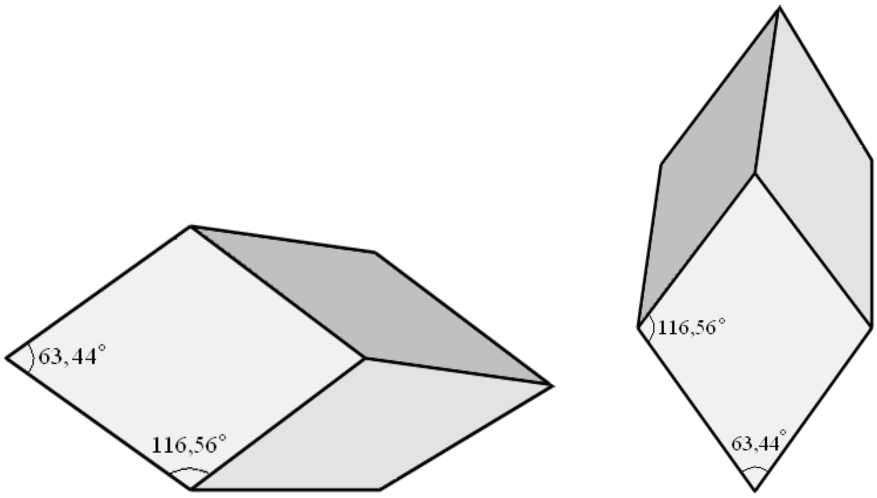
9. Трёхмерные тела

Трёхмерное многообразие точек евклидова пространства, называемое геометрическим телом, естественно, имеет и свою золотую составляющую, которую можно условно разделить на два типа. В одном случае трёхмерный носитель золотых характеристик является как бы очевидным продолжением и расширением своего двумерного аналога. Классическим примером подобного перехода от геометрической фигуры к телу может служить прямоугольная призма, придающая золотому прямоугольнику глубину путём добавления к ней третьего измерения. Во втором случае имеем дело с принципиально новым геометрическим объектом, важнейшие особенности которого определяются не столько его двумерными компонентами, сколько принципом, заложенным в основу построения тела. При всей условности подобного разбиения, оно всё же позволяет отделить группу тел, специфика которых в основном предопределена предыдущим рассмотрением, от группы тел, нуждающихся не только в наглядном представлении, но также в представлении их основных числовых характеристик, включая координаты вершин в декартовой системе. Добавим, что в обоих случаях речь идёт о геометрических телах, ограниченных замкнутой поверхностью. Золотые характеристики объектов первой группы обозначены на рисунках, и какие-либо комментарии здесь излишни; впрочем, к золотой пирамиде мы ещё вернёмся в Части II, но уже в контексте истории.

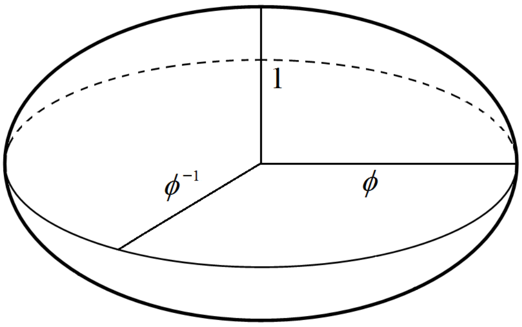
Прямоугольная призма



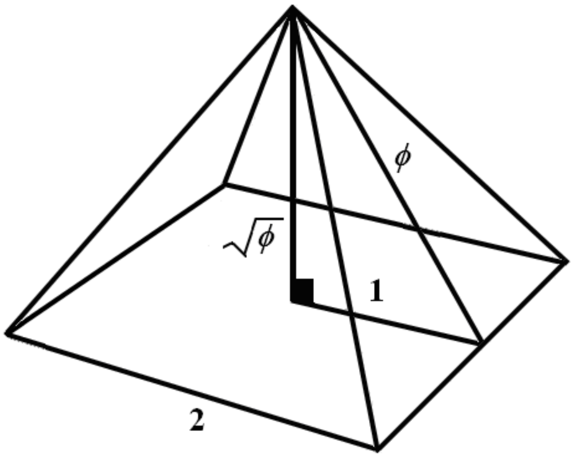
Вытянутый и сплющенный золотые ромбоэдры



Эллипсоид



Пирамида

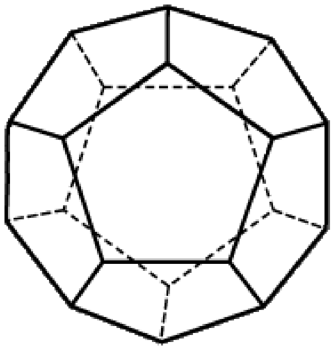


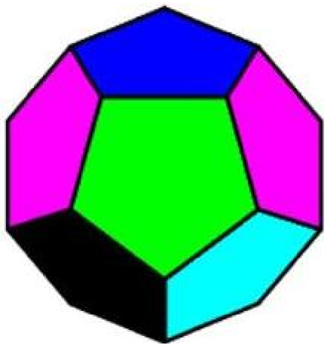
10. Платоновы, архимедовы и каталановы тела

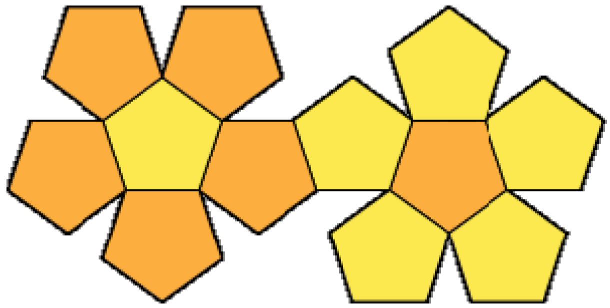
Намного интереснее вторая группа золотых тел. Здесь две математические "жемчужины", притом не только золотой геометрии. Это икосаэдр и додекаэдр, платоновы тела с исключительно важными, по мнению Платона, Прокла, Феликса Клейна, Анри Пуанкаре и многих других исследователей, формальными свойствами (см. Главу 7, *п.* 4 и 5). У них богатая история с продолжением и многочисленными выходами, достоверными или не очень, за рамки математики в область природных явлений. Менее значительны, но не лишены интереса шесть пар золотых архимедовых и дуальных им каталановых тел, а также четыре тела Кеплера–Пуансо. Кроме того есть множество модификаций правильных и полуправильных многогранников, которые также могут быть причислены к золотой геометрии. Но даже простое их перечисление, не говоря уже об указании формальных характеристик каждого, заняло бы слишком много места, и ввиду не очень высокой теоретической значимости и практической ценности этих скорее экзотических тел в наш обзор они не включены.

Додекаэдр

Многогранник, составленный из пятиугольников, платоново тело, основной, наряду с икосаэдром, трёхмерный символ ЗС. Эйлерова характеристика {12, 30, 20}: 12 граней, 30 рёбер, 20 вершин. Если совместить центр додекаэдра с началом декартовой системы и принять длину его ребра равной 2, получится следующий набор чисел для координат его вершин: (±1, ±1, ±1), (0, ±1/ϕ, ±ϕ), (±1/ϕ, ±ϕ, 0), (±ϕ, 0, ±1/ϕ). Показана также развёртка тела на плоскости.





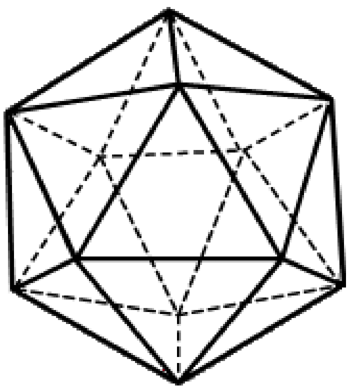


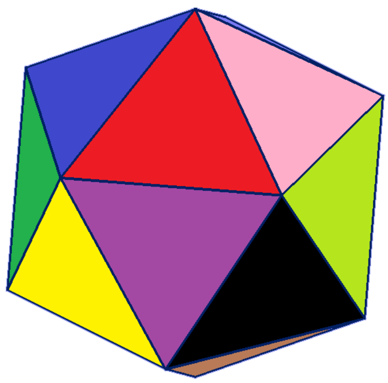
$$R = a\sin\frac{\pi}{3}\cdot\phi \qquad r = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{7+11\phi}}{2\phi-1} \qquad S = 6a^2\sqrt{5(\phi+3/4)} \qquad V = a^3(2+7\phi/2) \qquad \theta = 2\operatorname{arctg}\phi \approx 116{,}57°$$

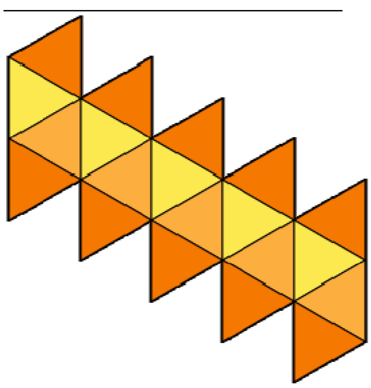
R радиус описанной и *r* радиус вписанной сферы, *S* площадь поверхности, *V* объём, θ двугранный угол.

Икосаэдр

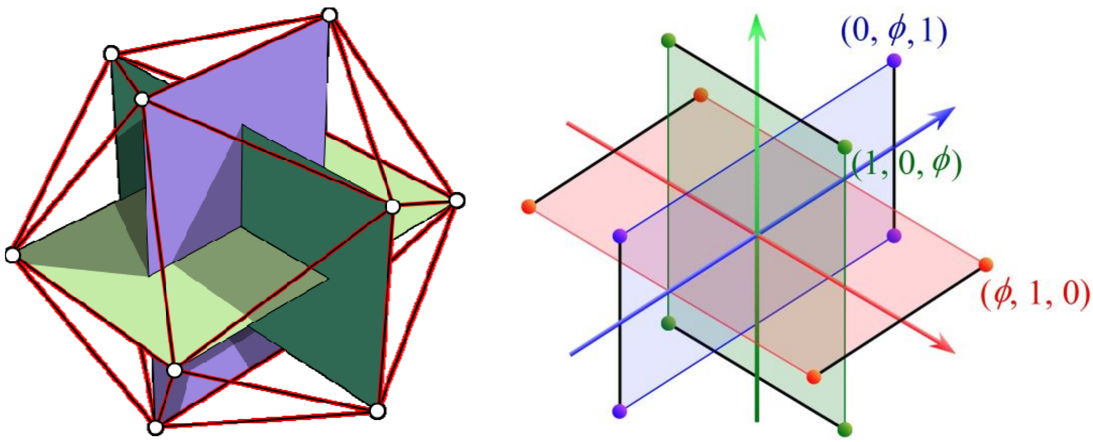
Платоново тело, дуальное додекаэдру. Грань – равносторонний треугольник. Эйлерова характеристика {20, 30, 12}. Декартовы координаты: (0, ±1, ±ϕ), (±1, ±ϕ, 0), (±ϕ, 0, ±1).







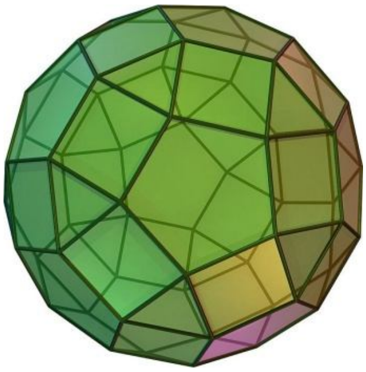
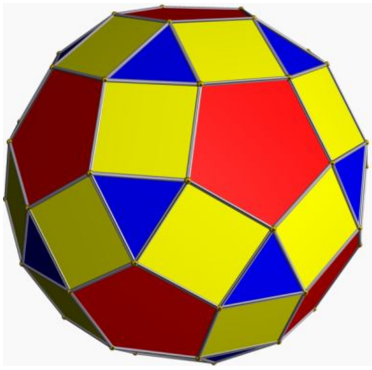
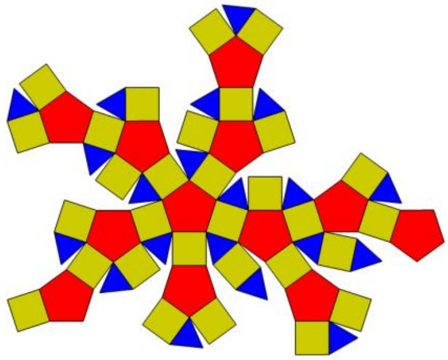
$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2+\phi} \qquad r = \frac{a}{4\sin\frac{\pi}{3}}\phi^2 \qquad S = 10a^2\sin\frac{\pi}{3} \qquad V = \frac{5}{6}a^3\phi^2 \qquad \theta = 2\operatorname{arctg}(\phi+1) \approx 138{,}19°$$



Координаты вершин икосаэдра, помещённого в начало декартовой системы

Ромбоикосододекаэдр

Архимедово тело, составленное из треугольников (20), квадратов (30) и пятиугольников (12), 62 грани, 120 рёбер, 60 вершин. Декартовы координаты: $(\pm 1, \pm 1, \pm \phi^3)$, $(\pm \phi^3, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm \phi^3, \pm 1)$, $(\pm \phi^2, \pm \phi, \pm 2\phi)$, $(\pm 2\phi, \pm \phi^2, \pm \phi)$, $(\pm \phi, \pm 2\phi, \pm \phi^2)$, $(\pm(2+\phi), 0, \pm \phi^2)$, $(\pm \phi^2, \pm(2+\phi), 0)$, $(0, \pm \phi^2, \pm(2+\phi))$.

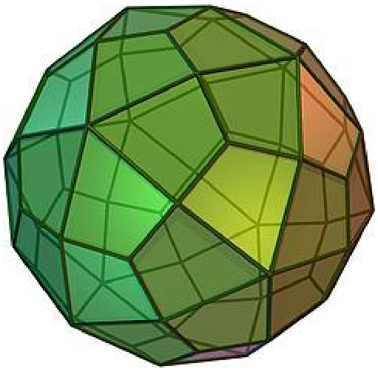
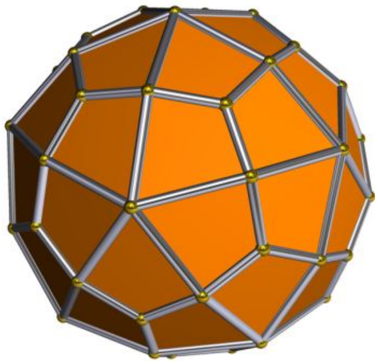
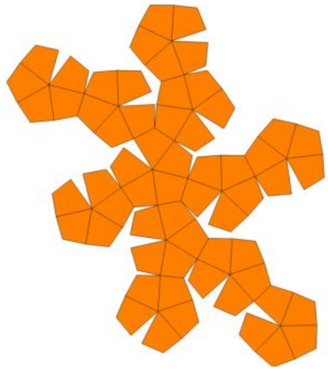




$R = \frac{1}{2}\sqrt{7+8\phi}$ $\quad r = \frac{1}{41}(13+4\phi)\sqrt{7+8\phi}$ $\quad S = 30 + \sqrt{30[7+6\phi+\sqrt{15(3+4\phi)}]}$ $\quad V = \frac{1}{3}(31+58\phi)$

Дельтоидальный гексеконтаэдр

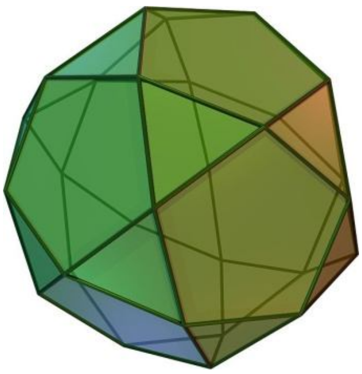
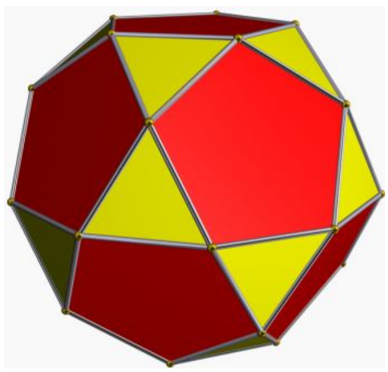
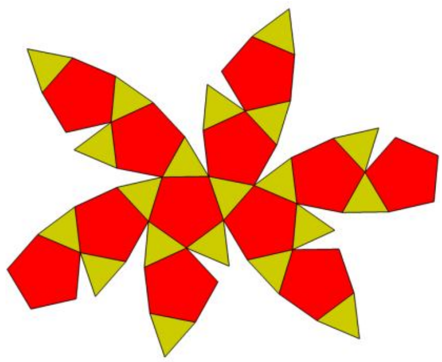
Каталаново тело, дуальное предыдущему, составлено из плиток Пенроуза (kites), 60 граней, 120 рёбер, 62 вершины.

$l_1 = \frac{1}{11}\sqrt{5(116-62\phi)}$ $\quad l_2 = \frac{1}{3}\sqrt{30-10\phi}$ $\quad S = \frac{100}{11}\sqrt{95-32\phi}$ $\quad V = \frac{100}{33}(1+8\phi)$ $\quad$ (l_1 и l_2 – длины рёбер)

Икосододекаэдр

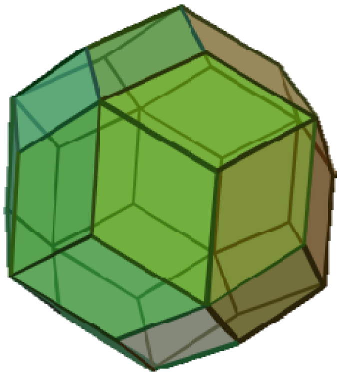
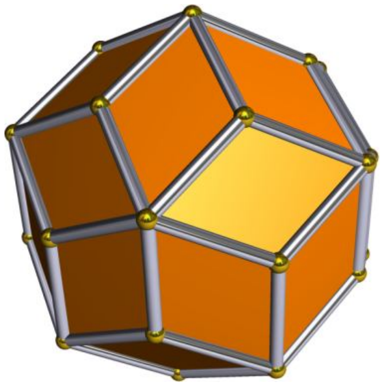
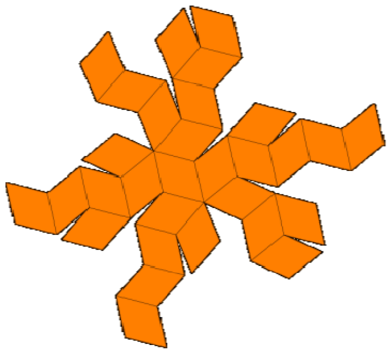
Архимедово тело, 12 правильных пятиугольников и 20 треугольников, 32 грани, 60 рёбер, 30 вершин. Декартовы координаты: $(0, 0, \pm\phi)$, $(0, \pm\phi, 0)$, $(\pm\phi, 0, 0)$, $(\pm 1/2, \pm\phi/2, \pm(1+\phi)/2)$, $(\pm\phi/2, \pm(1+\phi)/2, \pm 1/2)$, $(\pm(1+\phi)/2, \pm 1/2, \pm\phi/2)$.

$R = \phi$ $\quad r = \frac{1}{8}(2+6\phi)$ $\quad S = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{15+20\phi}$ $\quad V = \frac{1}{6}(28+34\phi)$ $\quad \alpha = 180° - \arccos\left(-\sqrt{\frac{1}{15}(3+6\phi)}\right)$

Ромботриаконтаэдр

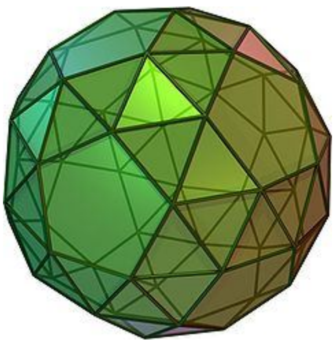
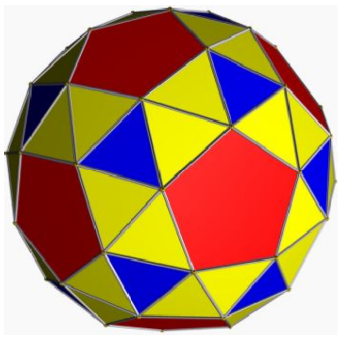
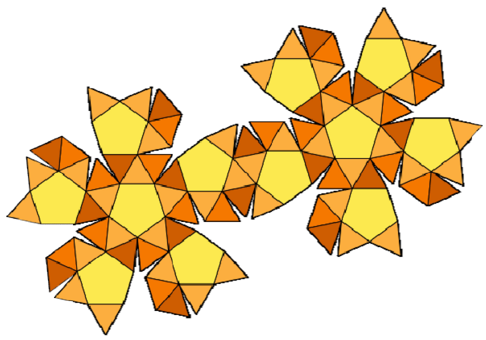
Каталаново тело, дуальное икосододекаэдру, грани – золотые ромбы с отношением диагоналей равным ϕ и с углами $\approx 63{,}56°$ и $\approx 116{,}56°$. Эйлерова формула: 30 граней, 60 рёбер, 32 вершины.

$r = \sqrt{\dfrac{3+4\phi}{5}}$ $\quad r_m = \dfrac{1}{5}(4+2\phi)$ $\quad S = 12(2\phi - 1)$ $\quad V = 4\sqrt{3+4\phi}$ $\quad \alpha = 4\pi/5$ $\quad$ (r_m – средний угол).

Курносый додекаэдр

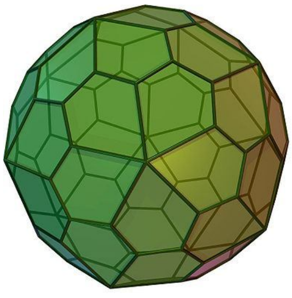
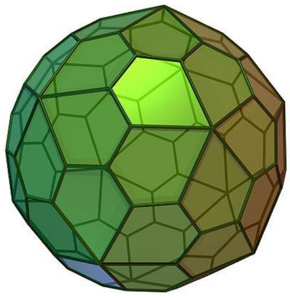
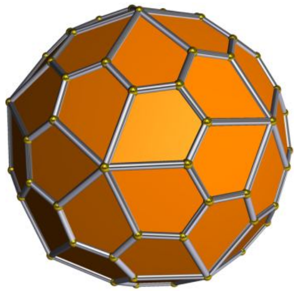
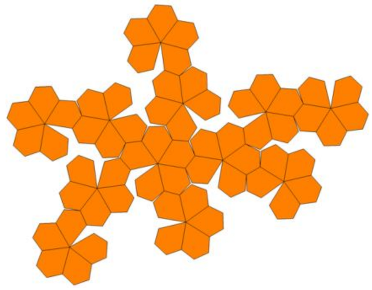
Архимедово тело, 80 треугольников, 12 пятиугольников, 92 грани, 150 рёбер, 60 вершин. Декартовы координаты: $(\pm 2\alpha, \pm 2, \pm 2\beta)$, $(\pm(\alpha + \beta/\phi + \phi)$, $\pm(-\alpha\phi + \beta + 1/\phi)$, $\pm(\alpha/\phi + \beta\phi - 1))$, $(\pm(-\alpha/\phi + \beta\phi + 1)$, $\pm(-\alpha + \beta/\phi - \phi)$, $\pm(\alpha\phi + \beta - 1/\phi))$, $(\pm(-\alpha/\phi + \beta\phi - 1)$, $\pm(\alpha - \beta/\phi - \phi)$, $\pm(\alpha\phi + \beta + 1/\phi))$, $(\pm(\alpha + \beta/\phi - \phi)$, $\pm(\alpha\phi - \beta + 1/\phi)$, $\pm(\alpha/\phi + \beta\phi + 1))$, где α и β – непростые функции от ϕ.

$S = 20\sqrt{3} + 3\sqrt{15 + 20\phi}$ (остальные параметры – полиномиальные функции, зависящие от ϕ).

Пентагональный гексеконтаэдр

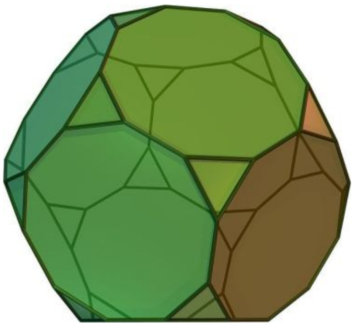
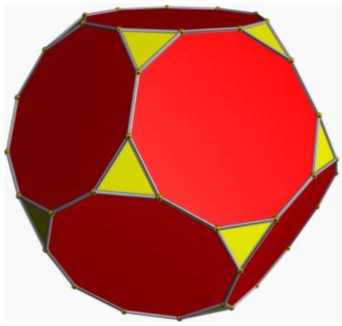
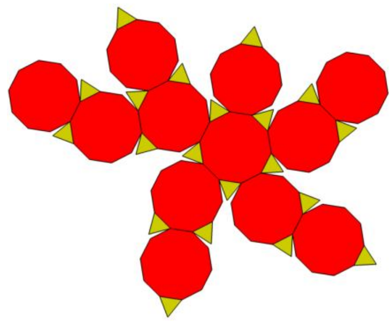
Дуальное курносому додекаэдру каталаново тело, составленное из неправильных пятиугольников. Существует в двух энантиоморфных вариантах, то есть обладает хиральностью – не может быть совмещено со своим зеркальным отображением только вращениями и параллельными переносами. Наибольшее (92) число вершин среди каталановых тел, 60 граней, 150 рёбер.

Все основные параметры – полиномиальные функции, зависящие от ϕ.

Усечённый додекаэдр

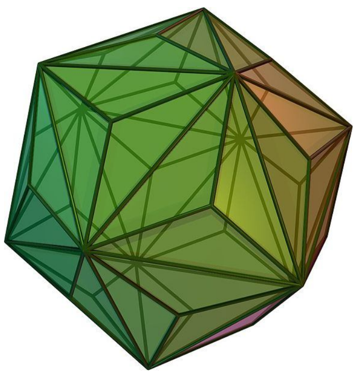
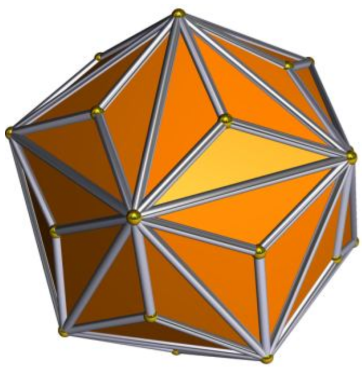
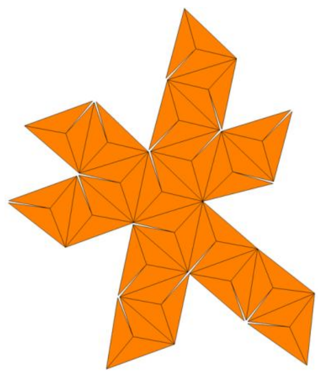
Архимедово тело, составленное из 12 десятиугольников и 20 треугольников; 32 грани, 90 рёбер, 60 вершин. Декартовы координаты: $(0, \pm1/\phi, \pm(2+\phi))$, $(\pm(2+\phi), 0, \pm1/\phi)$, $(\pm1/\phi, \pm(2+\phi), 0)$, $(\pm1/\phi, \pm\phi, \pm2\phi)$, $(\pm2\phi, \pm1/\phi, \pm\phi)$, $(\pm\phi, \pm2\phi, \pm1/\phi)$, $(\pm\phi, \pm2, \pm\phi^2)$, $(\pm\phi^2, \pm\phi, \pm2)$, $(\pm2, \pm\phi^2, \pm\phi)$.

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{44+60\phi} \qquad \rho = \frac{1}{4}\sqrt{2+6\phi} \qquad r = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{61}(23+36\phi)} \qquad S = 5(\sqrt{3}+6\sqrt{3+4\phi}) \qquad V = \frac{5}{12}(52+94\phi)$$

Триакисикосаэдр

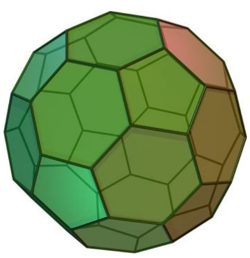
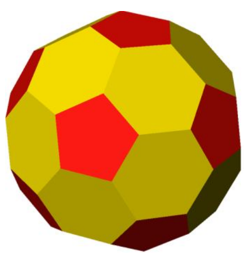
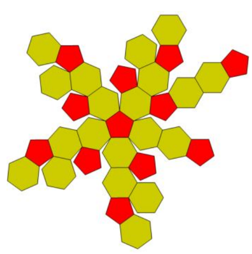
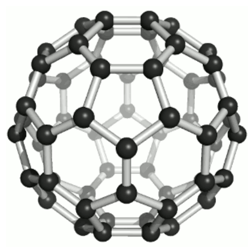
Дуальное усечённому додекаэдру каталаново тело, составленное из равнобедренных треугольников, 60 граней, 90 рёбер, 32 вершины.

$$l_1 = \frac{5}{22}(6+2\phi) \qquad l_2 = \frac{1}{2}(4+2\phi) \qquad S = \frac{75}{11}\sqrt{\frac{1}{2}(196+234\phi)} \qquad V = \frac{125}{44}(10+18\phi) \qquad \theta = \arccos\left(-\frac{9+30\phi}{61}\right)$$

Усечённый икосаэдр

Архимедово тело, 12 пятиугольников и 20 шестиугольников, 32 грани, 90 рёбер, 60 вершин. Декартовы координаты: $(0, \pm1, \pm3\phi)$, $(\pm2, \pm(1+2\phi), \pm\phi)$, $(\pm1, \pm(2+\phi), \pm2\phi)$. Это структура составленной из атомов углерода молекулы фуллерена C_{60}.

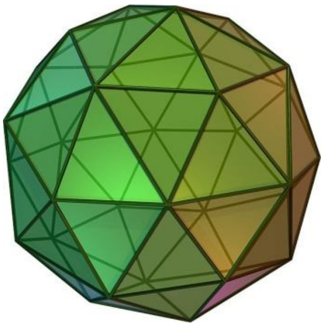
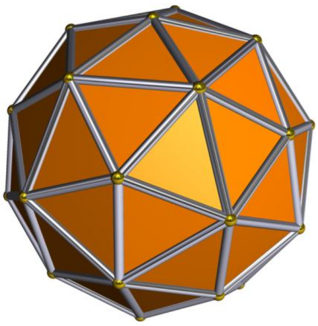
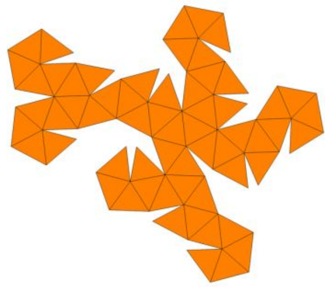






$$R = \frac{1}{4}\sqrt{40+36\phi} \qquad \rho = \frac{3\phi}{2} \qquad r = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{1}{109}(11+12\phi)} \qquad S = 3(10\sqrt{3}+\sqrt{15+20\phi}) \qquad V = \frac{1}{4}(82+86\phi)$$

Для сравнения показаны модель молекулы фуллерена C_{60} и футбольный мяч.

Пентакисдодекаэдр

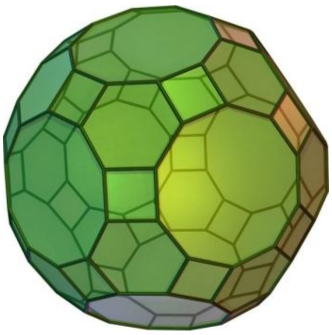
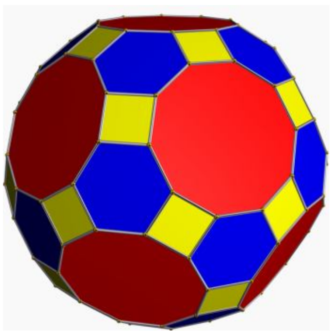
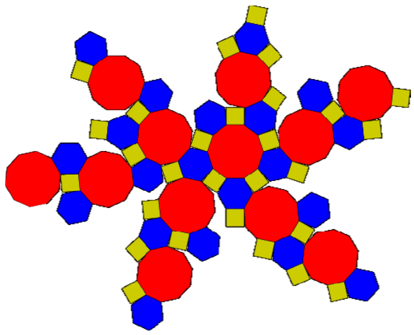
Каталаново тело, дуальное усечённому икосаэдру, составлено из равнобедренных треугольников, 60 граней, 90 рёбер, 32 вершины.

$$l_1 = \frac{1}{19}(36\phi - 27) \qquad l_2 = 3(\phi - 1) \qquad S = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(358 + 126\phi)} \qquad V = \frac{5}{36}\sqrt{16 + 50\phi}$$

Ромбоусечённый икосододекаэдр

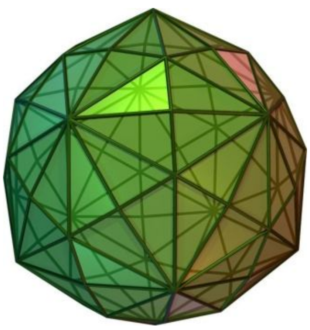
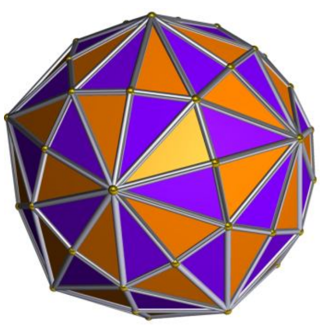
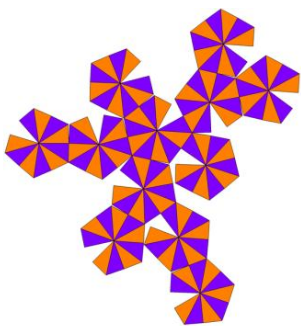
Архимедово тело, 12 десятиугольников, 20 шестиугольников, 30 квадратов, 62 грани, 180 рёбер, 120 вершин. Декартовы координаты: $(\pm 1/\phi, \pm 1/\phi, \pm(3+\phi))$, $(\pm 2/\phi, \pm\phi, \pm(1+2\phi))$, $(\pm 1/\phi, \pm\phi^2, \pm(-1+3\phi))$, $(\pm(-1+2\phi), \pm 2, \pm(2+\phi))$, $(\pm\phi, \pm 3, \pm 2\phi)$. При равенстве рёбер имеет наибольший среди архимедовых тел объём.

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{19 + 24\phi} \qquad \rho = \sqrt{\frac{9}{2} + 6\phi} \qquad r = 3\sqrt{\frac{5}{241}(23 + 32\phi)} \qquad S = 30\left(1 + \sqrt{2\left(3 + 2\phi + \sqrt{15 + 6\sqrt{6}}\right)}\right) \qquad V = 45 + 100\phi$$

Гекзакисикосаэдр

Каталаново тело, дуальное ромбоусечённому икосододекаэдру, составлено из неправильных треугольников, 120 граней, 180 рёбер, 62 вершины.

$$\rho = \frac{3}{22}\sqrt{\frac{826 + 1240\phi}{2 + \phi}} \qquad S = \frac{180}{11}\sqrt{203 - 48\phi} \qquad V = \frac{180}{11}(1 + 8\phi)$$

Стороны треугольников выражаются формулами

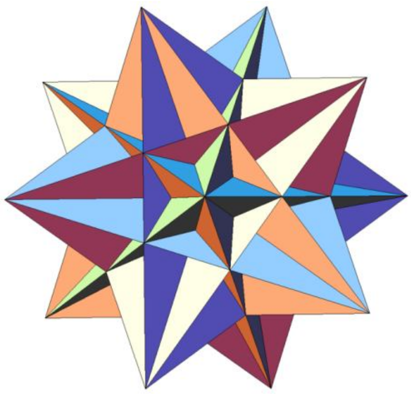
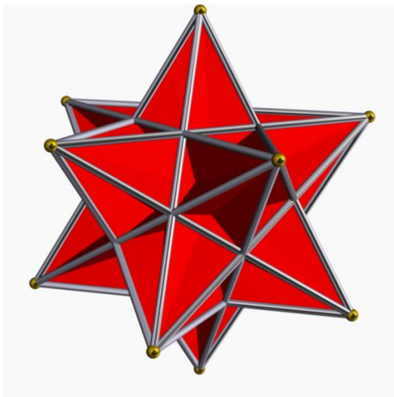
$$s_1 = \frac{1}{11}\sqrt{1740 - 930\phi} \approx 1{,}394\ 429 \qquad s_2 = \frac{3}{11}\sqrt{\frac{78 + 96\phi}{2 + \phi}} \approx 1{,}190\ 174 \qquad s_3 = \sqrt{\frac{24}{2 + \phi}} \approx 2{,}575\ 546$$

10. Правильные звёздчатые многогранники

Наряду с двумя золотыми платоновыми телами, группой из двенадцати полуправильных архимедовых и каталановых многогранников, существует множество других, менее известных, но широко используемых в декоративном искусстве, архитектуре трёхмерных тел, связанных с додекаэдром и икосаэдром, а значит и с золотым сечением. Это, в частности, звёздчатые тела, то есть невыпуклые многогранники, получаемые из исходных путём продления их граней через рёбра до пересечения с другими гранями по новым рёбрам. Из пяти платоновых тел звёздчатые формы могут иметь только октаэдр, додекаэдр и икосаэдр, поскольку продление граней тетраэдра и куба через рёбра не приводит к их пересечению. Установлено, что звёздчатая форма у октаэдра только одна, три такие формы у додекаэдра и 59 у икосаэдра [Coxeter *et al.*]. Среди всех этих тел только три звёздчатых додекаэдра и один икосаэдр не являются соединениями платоновых тел, а образуют новые правильные невыпуклые многогранники, называемые *телами Кеплера–Пуансо*.

Большой икосаэдр

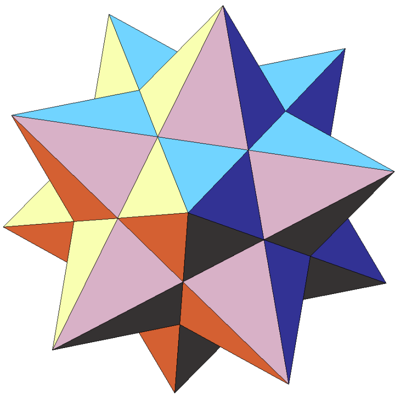
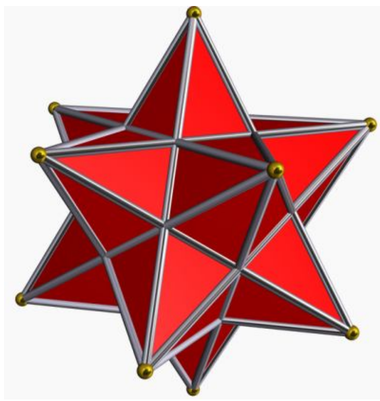
Тело Кеплера–Пуансо, 60 равносторонних и 120 других треугольников, образующих 12 пятиугольников и 12 пентаграмм. Множество золотых параметров, из которых укажем некоторые, используя знакомые обозначения; длина ребра принята равной 1, s_2 – длина одной из сторон треугольника, α_3 – один из углов [Großes Ikosaeder].

$$V = 4 + 9\phi/2 \qquad S = 3\sqrt{3}(1 + 8\phi) \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{7+11\phi} \qquad s_2 = \phi \qquad \cos\alpha_3 = \frac{2\phi - 1}{3}$$

Малый звёздчатый додекаэдр

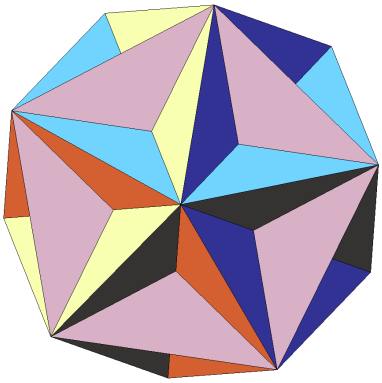
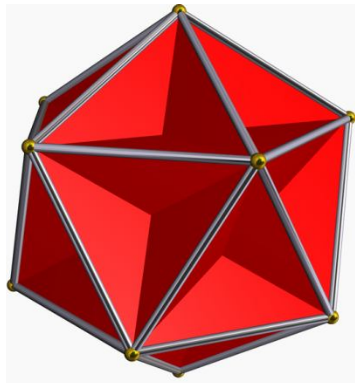
Тело Кеплера–Пуансо, 60 равнобедренных треугольников [Dodekaederstern]. Обращает на себя внимание золотой угол $\approx 116{,}57°$ между треугольными гранями, как и равенство параметров R и s с предыдущим многогранником.

$$V = 5(1 + 3\phi/2) \qquad S = 15\sqrt{3 + 4\phi} \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{7+11\phi} \qquad s = \phi \qquad \theta = 2\,\mathrm{arctg}\,\phi \approx 116{,}57°$$

Большой додекаэдр

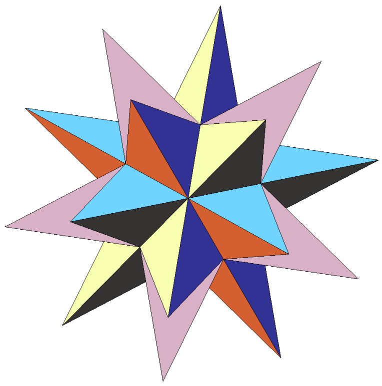
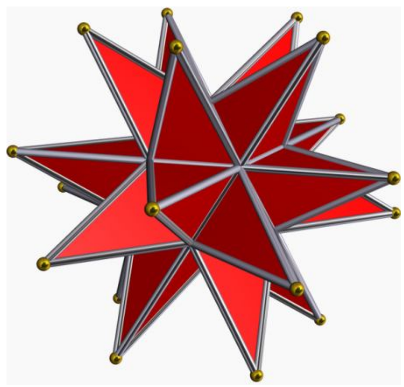
Тело Кеплера–Пуансо, 60 равносторонних треугольников, образующих шесть пар параллельных пятиугольников, которые сходятся по пять в каждой из вершин [Große Dodekaeder]. Обозначив символами α_1 и α_2 внешний и внутренний углы между гранями, имеем два золотых значения для углов.

$V = 5/2\phi$ $\quad S = 15\sqrt{7-4\phi}$ $\quad R = \frac{1}{2}\sqrt{2+\phi}$ $\quad s = \phi^{-1}$ $\quad \alpha_1 \approx 116{,}57°$ $\quad \alpha_2 \approx 63{,}28°$

Большой звёздчатый додекаэдр

Тело Кеплера–Пуансо, 60 равносторонних треугольников, образующих 12 пятиугольников, которые сходятся по три в каждой из вершин [Große Dodekaeder].

$V = 5\phi^2/2$ $\quad S = 15\sqrt{3+4\phi}$ $\quad R = \frac{\sqrt{3}\phi^2}{2}$ $\quad s = \phi$ $\quad \alpha \approx 63{,}28°$

Все четыре тела, впервые изученные Кеплером, а затем и французским математиком Луи Пуансо (Louis Poinsot, 1777–1859), исключительно богаты золотыми значениями, относящимися к объёмам, площадям, линейным размерам и углам. В этих правильных невыпуклых многогранниках заметно сочетание некоторых характерных особенностей додекаэдра и икосаэдра, о чём свидетельствуют и сами названия, хотя они и не являются соединением других тел. Есть, разумеется, великое множество других интересных и достаточно экзотичных многогранников, так или иначе связанных своими параметрами с золотой константой, см. [Wenninger], но все наиболее важные золотые трёхмерные тела, думается, представлены, и здесь уже можно ставить точку.

Глава 3.
Теоретико-числовой формализм ТЗС

Настоящая глава, посвящённая основной – теоретико-числовой составляющей ТЗС, является естественным продолжением предыдущей главы и реализацией, дополнением, конкретизацией положений, в общем виде высказанных в Предисловии и Главе 1. Некоторые из представленных там числовых конструкций даны для полноты и здесь, но в несколько ином ракурсе и обычно в более подробном изложении, хотя в двух-трёх случаях кое-какие детали, во избежание повторов, наоборот, опущены. К числовым структурам следует отнести называемую треугольником Паскаля систему расположенных в форме равностороннего треугольника биномиальных коэффициентов. Необходимо отметить, что даже сотни формул и соотношений этой главы – лишь малая часть той математики, которая может быть отнесена к теории ЗС. А критерием, как и раньше, служит ***причастность к константе ϕ или её производным****, которая может принимать самые разнообразные, в том числе достаточно неординарные формы, притом разной степени формальной сложности. Среди них особенно интересны соотношения Рамануджана, в которых устанавливается необычная связь золотой константы с ФМК и другими математическими конструктами. Любопытен закон Бенфорда, затрагивающий связанные с позиционной записью последовательностей Фибоначчи и Люка такие числовые “тайны”, которые высоко ценятся истинными любителями числовой математики.*

Именно свойства этих последовательностей являются основным объектом исследования со стороны многочисленной армии любителей и профессиональных математиков. Некоторые, ранее неизвестные формулы и соотношения для золотой константы, чисел Фибоначчи и Люка, предложены и нами. Значителен интерес к экспоненциальным, в частности гиперболическим и тригонометрическим формам константы ϕ, в немалой степени обусловленный конструкцией формулы Бине, в общем случае выражающей любой член комплексного ряда Фибоначчи через степени константы ϕ и с помощью функции косинуса. Заметим также, что, не желая загромождать текст излишними деталями, а также в стремлении свести к минимуму неизбежные в работе, в какой-то степени построенной по “принципу капусты”, мы стараемся ограничиться минимумом комментариев и пояснений в большинстве случаев, давая порой развёрнутые пояснения лишь там, где без этого не обойтись.

Различные обозначения золотой константы

ϕ Φ φ τ Phi phi

Математические константы не принято обозначать заглавными буквами. Phi (или phi) – всего лишь латинская транслитерация греческой буквы. Символы φ и τ широко применяются в различных областях науки и техники, особенно в физике. Золотая константа сегодня всё чаще обозначается удобным во многих отношениях символом ϕ, и только этим символом мы пользуемся во всех случаях.

Тысяча десятичных и тысяча двоичных знаков константы ϕ

1,61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576 28621 35448 62270 52604 62818 90244 97072 07204 1
8939 11374 84754 08807 53868 91752 12663 38622 23536 93179 31800 60766 72635 44333 89086 59593 95829 05638 322
66 13199 28290 26788 06752 08766 89250 17116 96207 03222 10432 16269 54862 62963 13614 43814 97587 01220 34080
58879 54454 74924 61856 95364 86444 92410 44320 77134 49470 49565 84678 85098 74339 44221 25448 77066 47809 15
884 60749 98871 24007 65217 05751 79788 34166 25624 94075 89069 70400 02812 10427 62177 11177 78053 15317 1410
1 17046 66599 14669 79873 17613 56006 70874 80710 13179 52368 94275 21948 43530 56783 00228 78569 97829 77834 7
8458 78228 91109 76250 03026 96156 17002 50464 33824 37764 86102 83831 26833 03724 29267 52631 16533 92473 167
11 12115 88186 38513 31620 38400 52221 65791 28667 52946 54906 81131 71599 34323 59734 94985 09040 94762 13222

98101 72610 70596 11645 62990 98162 90555 20852 47903 52406 02017 27997 47175 34277 75927 78625 61943 20827 50513 12181 56285 51222 48093 94712 34145 17022 37358 05772 78616 00868 83829 52304 59264 78780 17889 92199 02707 76903 89532 19681 98615 14378 03149 97411 06926 08867 42962 26757 56052 31727 77520 35361 3936…

1,10011110001101110111100110111001011111110100101001111100000101011111001110011100110000000110000001
01110011101101110010000011010000010000100000100010011101101011111100111010001001110010010100011111
00001101100011010100001000111010000110000011000111010010101001001110110011111100001011000101010011
11010010011110110111111100000011010001110000010001011011010110111111000110000010011111110000001100
01000011011110000100100101000010000000011000000000010110000001110101100100101110100100000011110011 00
11010111100011011011110000011010101101011110101110100101110001011110000111011111101000010110000011 1
00111010110111011111111101111010111110111000110011001001101001100100101110100011100010100110111000 1
01101000001011001010110111010000110011001100111111011111111110111011111000010110001001101110001100 1
11011100011010000001001011010000110011000110111011111101110011110001111001000011011001010011110111 10
01110101000111000111000100101010110011111011010011110110000010101001011111111011000101000001110111 0
00001011110…

1. Определения константы ϕ и некоторые её свойства

Алгебраическая форма и вычисление константы ϕ с произвольной точностью

Иррациональное число

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1/2 + \sqrt{(1/2)^2+1}\,, \tag{3.1}$$

являющееся положительным корнем квадратного уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{3.2}$$

может быть представлено в позиционных системах счисления различными способами, с неограниченной степенью точности. Понятно, что на практике достаточно вычислить радикал $\sqrt{5} = 2\phi - 1$.

a) *Итерационная формула Герона* (вавилонский метод). Рекуррентная формула для $\sqrt{5}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) \tag{3.3}$$

b) *Метод касательных Ньютона*, уравнение (3.2). Рекуррентная формула:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1} \tag{3.4}$$

b′) *Метод касательных Ньютона*, уравнение (3.2). Рекуррентная формула:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n}{x_n^2 + 1} \tag{3.5}$$

Во всех трёх случаях скорость сходимости к пределу одинакова. При переходе от n-го к $n+1$-му шагу итерации погрешность аппроксимации убывает по квадратичному закону $\Delta(x_{n+1}) \approx \Delta^2(x_n)$.

Позиционная запись

$\phi(10)$ = 1,61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576 28621 35448 62270 52604 62818…

$\phi(2)$ = 1,10011 11000 11011 10111 10011 01110 01011 11111 01001 01001 11110 00001 01011 11100 11100…

$\phi(5)$ = 1,30211 13423 04120 24223 14431 14020 40212 11103 31330 40040 24102 23011 04342 22144 21211…

$\phi(12)$ = 1,74bb 67728 02a46 a6a18 65307 14908 a0912 7885a… (a означает число 10, b – число 11)

$\phi(F_n)$ = 10,00100 01010 10000 00100 01001 01001 00001 00000 00100…

$\phi(\phi)$ = 10

Основание позиционной системы счисления указано в скобках. В общей форме

$$M = \pm \sum_n l_n r^n \tag{3.6}$$

представления действительного числа M через r переменная n пробегает конечный или бесконечный ряд значений 0, ±1, ±2, …, а l_n для каждого из слагаемых принимает одно из значений 0, 1, 2, …, k, причём k не должно превышать r. В минимально-битовых системах счисления, основанных на константах 2, ϕ, либо в использующем числа Фибоначчи (иногда Люка) представлении Цекендорфа, l_n может принимать лишь значении 0 или 1.

Квадратные уравнение

Запись на языке математики классической формулировки *целое* (x) *относится к большей части* (взятой равной 1) *как большая часть к меньшей* ($x-1$):

$$a)\ x^2 - x - 1 = 0,\ \text{корни: } x_1 = \phi,\ x_2 = -\phi^{-1} \tag{3.2′}$$

Замена знаков перед переменной x и свободным членом приводит к трём другим возможным вариантам квадратного уравнения с единичными множителями:

$$b)\ x^2 + x - 1 = 0,\qquad \text{корни: } x_1 = \phi^{-1},\ x_2 = -\phi \tag{3.2″}$$

$$c)\ x^2 \pm x + 1 = 0\qquad \text{корни: } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\ \text{ и }\ x'_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\ \mathrm{i}}{2}; \tag{3.2‴}$$

$x_1 = e^{8\pi \mathrm{i}/3}, x_2 = e^{4\pi \mathrm{i}/3};\ x'_1 = e^{\pi \mathrm{i}/3}, x'_2 = e^{-\pi \mathrm{i}/3}$ – запись в экспоненциальной форме

Цепная дробь и бесконечная последовательность радикалов

Единственная в своём роде, содержащая только единицы цепная дробь

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{3.7}$$

может быть получена записью квадратного уравнения (3.1) в виде $x = 1 + \frac{1}{x}$, с последующей заменой x в правой части её значением $1 + 1/x$:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}},\qquad x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}},\ \ldots \tag{3.7′}$$

Независимый способ получения константы ϕ связан с решением задачи о нахождении иррационального числа, наиболее медленно сходящегося к своему пределу, записываемому посредством бесконечной цепной дроби. Это также означает запись ϕ унитарным кодом.

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} \tag{3.8}$$

Возведение обеих частей этого равенства в квадрат приводит, при соответствующих обозначениях, к квадратному уравнению.

Непрерывная дробь и цепные дроби для степеней константы ϕ

Непрерывная дробь в самом общем случае имеет форму

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}} \tag{3.9}$$

где $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, $\{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$ – конечные или бесконечные последовательности комплексных или действительных чисел. Обычно рассматривается частный случай, когда все знаменатели отличны от нуля, все числа $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ – целые, положительные, а члены второй последовательности – единицы: $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \ldots = 1$. Непрерывную дробь типа

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}} \qquad (3.9')$$

называют обыкновенной непрерывной дробью, или цепной дробью и часто записывают в виде $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, где многоточие означает бесконечность цепной дроби, которая имеет место в случае иррациональных чисел. Для представления степеней константы ϕ посредством цепных дробей удобно пользоваться именно такой формой краткой записи иррациональных чисел. Кроме того, используют функцию $E(x)$ (от французского *Entier* – целый), ставящую в соответствие действительному числу x его *целую часть*. С учётом знаков для целых степеней $2k$ и $2k-1$ ($k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$) константы ϕ возможны восемь вариантов. Обозначая $E(\phi^n)$ через a, имеем:

$$\phi^{2k} = [a; 1, a-1, 1, a-1, 1, a-1, \ldots\,] \qquad -\phi^{2k} = [-a; -1, -(a-1), 1, -(a-1), 1, -(a-1), \ldots\,] \qquad (3.10)$$

$$\phi^{-2k} = [0; a, 1, a-1, 1, a-1, 1, \ldots] \qquad -\phi^{2k} = [0; -a, -1, -(a-1), -1, -(a-1), -1, -(a-1), \ldots] \qquad (3.11)$$

$$\phi^{2k-1} = [a; a, a, \ldots] \qquad -\phi^{2k-1} = [-a; -a, -a, \ldots] \qquad (3.12)$$

$$\phi^{-2k-1} = [0; a, a, \ldots] \qquad -\phi^{-2k-1} = [0; -a, -a, \ldots] \qquad (3.13)$$

Цепные дроби целых степеней золотой константы периодичны, с периодами $\pm a$, либо $\pm(1,\ a-1)$ в двух случаях, начиная со второго места. Все эти выражения могут быть, конечно, записаны и с помощью функции округления $R(x)$, (от английского *round*), то есть нахождения целого числа, *ближайшего* к действительному числу x. Это незначительно усложнит некоторые соотношения, но оно, с учётом равенства $L_n = R(\phi^n)$ для $n \geq 2$, удобно для представления данных дробей посредством чисел Люка. Ограничимся только положительными выражениями, которые отличаются от отрицательных выражений лишь знаком перед числами $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

$$\phi^{2k} = (L_{2k}-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{L_{2k}-2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{L_{2k}-2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = [L_{2k}-1; 1, L_{2k}-2, 1, L_{2k}-2, 1, L_{2k}-2, \ldots] \qquad (3.10')$$

$$\phi^{-2k} = 0 + \cfrac{1}{L_{2k}-1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{L_{2k}-2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{L_{2k}-2 + \cfrac{1}{1\ddots}}}}}} = [0; L_{2k}-1, 1, L_{2k}-2, 1, L_{2k}-2, 1, L_{2k}-2, \ldots] \qquad (3.11')$$

$$\phi^{2k-1} = L_{2k-1} + \cfrac{1}{L_{2k-1} + \cfrac{1}{L_{2k-1} + \cfrac{1}{\ddots}}} = [L_{2k-1}; L_{2k-1}, L_{2k-1}, L_{2k-1}, \ldots] \qquad (3.12')$$

$$\phi^{-(2k-1)} = 0 + \cfrac{1}{L_{2k-1} + \cfrac{1}{L_{2k-1} + \cfrac{1}{L_{2k-1} + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [0; L_{2k-1}, L_{2k-1}, L_{2k-1}, \ldots] \qquad (3.13')$$

В частности

$$\phi^{-2} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \qquad \phi^3 = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \qquad (3.14)$$

Линейная рекуррентная последовательность с произвольными членами

Правило третьего члена

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{3.15}$$

определяет константу ϕ посредством чисел Фибоначчи и операции предельного перехода [A[3], 245–246]. Начальными членами такого ряда могут быть любые комплексные числа

$$z_0 = a + b\mathrm{i}, \; z_1 = c + d\mathrm{i},$$

где хотя бы одно из чисел a, b, c, d не ноль. Обозначая n-ый член ряда через u_n, получим последовательность чисел

$$\begin{array}{ll}
u_0 & a \quad + b\mathrm{i} \\
u_1 & c \quad + d\mathrm{i} \\
u_2 & 1a + 1c + (1b + 1d)\mathrm{i} \\
u_3 & 1a + 2c + (1b + 2d)\mathrm{i} \\
u_4 & 2a + 3c + (2b + 3d)\mathrm{i} \\
u_5 & 3a + 5c + (3b + 5d)\mathrm{i} \\
u_6 & 5a + 8c + (5b + 8d)\mathrm{i} \\
u_7 & 8a + 13c + (8b + 13d)\mathrm{i} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_k & aF_{k-2} + cF_{k-1} + (bF_{k-2} + dF_{k-1})\mathrm{i} \\
u_{k+1} & aF_{k-1} + cF_k + (bF_{k-1} + dF_k)\mathrm{i} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{3.16}$$

с общей формулой

$$u_{n+2} = aF_n + cF_{n+1} + (bF_n + dF_{n+1})\mathrm{i} \tag{3.17}$$

Коэффициенты при a, b, c, d, каждый в отдельности, образуют хорошо известный классический ряд Фибоначчи. В частном случае, когда за исключением c все коэффициенты нули, другими словами, в случае начинающегося с нуля действительного ряда, получим ряд Фибоначчи

$$u_n = cF_{n-1} \tag{3.18}$$

все члены которого кратны произвольному ненулевому действительному числу c. Случаю $c = n$, ($n = 1, 2, 3, \ldots$) соответствует целочисленный положительный ряд. Если же и коэффициент $a = m$, ($m = 1, 2, 3, \ldots$), целочисленная последовательность

$$u_n = mF_{n-2} + nF_{n-1} \tag{3.19}$$

представляет собой сумму увеличенных в m и n раз классических рядов Фибоначчи. В частности если $m = 1$, а $n = 3$, получим ряд Люка, для которого

$$L_{n+2} = F_n + 3F_{n+1} \tag{3.20}$$

Для отношения соседних членов

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(aF_{n-1} + cF_n) + (bF_{n-1} + dF_n)\mathrm{i}}{(aF_{n-2} + cF_{n-1}) + (bF_{n-2} + dF_{n-1})\mathrm{i}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} \left[\frac{\left(a + c\dfrac{F_n}{F_{n-1}}\right) + \left(b + d\dfrac{F_n}{F_{n-1}}\right)\mathrm{i}}{\left(a + c\dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}\right) + \left(b + d\dfrac{F_{n-1}}{F_{n-2}}\right)\mathrm{i}} \right] \tag{3.21}$$

Поскольку предельные отношения F_n/F_{n-1} и F_{n-1}/F_{n-2} с увеличением n сходятся к ϕ, выражение в квадратных скобках при $n \to \infty$ равно 1, а перед скобками – тому же ϕ, а значит равно ϕ и всё выражение. Таким образом, обобщённый ряд Фибоначчи представляет собой сумму двух обычных и двух мнимых рядов Фибоначчи, и число ϕ по-прежнему его константа.

Следовательно, константа рекурсии от выбора начальных u_0 и u_1 членов последовательности не зависит:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi \tag{3.22}$$

В простейшем варианте $a = b = d = 0$, $c = 1$, то есть $u_0 = F_0 = 0$, $u_1 = F_1 = 1$, что приводит к классическому ряду Фибоначчи 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, … как очень частному, но в то же время фундаментальному случаю, поскольку начиная с третьего члена любая последовательность за исключением тождественно равной нулю составлена из $\{F_n\}$.

Определённый интеграл

Интеграл

$$\phi = \int_0^1 \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} + \frac{3}{2} \right) dx \tag{3.23}$$

является наиболее известной формой интегрального представления константы ϕ. Благодаря “фирменному” для ЗС и его обобщений квадратному корню это поистине золотой и позолоченный интеграл, который понадобится нам и в дальнейшем. Оставаясь в рамках ТЗС, то есть не трогая пределы интегрирования, можно менять другие величины в подынтегральном выражении, получая при этом числа, непосредственно связанные с золотой константой. Если, например, убрать двойку в знаменателе первой дроби, получим число $(4\phi - 3)/2$, а заменив 3/2 единицей, придём к достаточно простому $\phi - 1/2$. В общем случае, заменяя в подынтегральном выражении переменную и числа произвольным действительным числом r, имеем:

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} + r \right) dx = \phi - 3/2 + r \tag{3.23′}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{r\sqrt{x^2+4}} + r \right) dx = (2\phi - 3)/r + r \tag{3.23″}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{r\,x}{2\sqrt{x^2+4}} + r \right) dx = (\phi - 1/2)\, r \tag{3.23‴}$$

Придавая определённые значения r, можно получать равный константе ϕ интеграл во всех случаях, но простейшим всё же является первое равенство, соответствующее значению $r = 3/2$ в (3.23′).

Бесконечные ряды

Весьма своеобразна и заслуживает особого внимания одна из форм записи константы ϕ с помощью двух чисел Фибоначчи и бесконечной суммы натуральных чисел [Roselle]:

$$\phi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{n!\,(n+2)!\,2^{4n+6}} \tag{3.24}$$

Впрочем, золотая “изюминка” здесь не столько в числах Фибоначчи, сколько в скромно примостившемся в знаменателе факториальной дроби выражении 2^{4n+6}. Оно, во-первых, приводит к сходимости бесконечного знакопеременного ряда, во-вторых, обеспечивает его золотое содержание, в-третьих, прозрачно намекает на возможность получения константы да Винчи. С последней подождём, а пока, без выхода за границы *золотого домена*, займёмся этим выражением, точнее показателем степени $4n + 6$, который запишем в виде $an + r$. Вначале, опуская по принятому технические детали, заметим, что бесконечный ряд сходится только если $a \geq 2$. А золотым или позолоченным оно будет только тогда, когда $a = 4$. Придавая теперь слагаемому r значения 1 и 2, обозначая правую часть равенства без слагаемого 13/8 соответственно символами A_1 и A_2, имеем:

$$A_1 = 4(8\phi - 13),\ \ A_2 = 2(8\phi - 13)$$

Числа Фибоначчи $F_6 = 8$ и $F_7 = 13$ присутствуют в обоих случае, а общую закономерность для произвольного r уловить уже не так сложно:

$$A_r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{n!\,(n+2)!\,2^{4n+r}} = 2^{6-r}\left(\phi - \frac{13}{8} \right) \tag{3.24′}$$

Формула для A_r справедлива для любого действительного числа r, а её особенности уже вполне очевидны. Чтобы получить отсюда золотую константу, надо, приняв $r = 6$, избавиться от множителя 2^{6-r} и прибавить к A_r "магическое" 13/8.

Равенство (3.24) хорошо известно, оно интересно и часто встречается в литературе по ЗС, но при внимательном взгляде способно вызвать чувство неудовлетворённости и растущего дискомфорта. Действительно, посредством содержащей факториалы бесконечной суммы устанавливается точное соотношение между золотой константой и двумя конкретными $F_6 = 8$ и $F_7 = 13$. Прекрасно, но почему, спрашивается, именно этими двумя, а не другими? Разве они хоть как-то выделены среди остальных чисел бесконечной фибоначчиевой последовательности? В поисках ответа обратим внимание на пределы суммирования в формуле для A_r. Совершенно не обязательно производить бесконечное суммирование с нуля. Начав с единицы, после несложных преобразований, получим:

$$A_r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{n!(n+2)!2^{4n+r}} = 2^{6-r}\left(\phi - \frac{207}{128}\right) \tag{3.24''}$$

Вместо чудесного, но непонятного 13/8 появилось ничем не примечательное и совсем уж непонятное, по крайней мере своим числителем, 207/128. Фибоначчиевы миражи рассеялись, зато обнаружилась скрытая золотая "жила", повысился внутренний ϕ-фактор формулы, поскольку 207/128 на порядок ближе ($\delta \approx 5{,}2\cdot 10^{-4}$) к константе ϕ, чем F_7/F_6, ($\delta \approx 4{,}3\cdot 10^{-3}$).

Но пойдём дальше и начнём суммирование с двух. Полученный результат запишем в виде

$$A_r = (-1)^{n+1}2^{6-r}\left(\phi - \frac{1657}{2^{10}}\right)$$

откуда следует приближение $\delta \approx 8{,}0\cdot 10^{-5}$. Возрастающая степень близости к ϕ очевидна, общие контуры общей формулы, которая, кстати, не может быть получена лишь методом математической индукции, также просматриваются, но прежде чем её представить, обратим внимание на некоторые особенности функции A_r. С увеличением нижнего предела суммирования k и при любом фиксированном r значение A_r по абсолютной величине уменьшается и стремится к нулю. Дробное отношение в скобках связано не с числами Фибоначчи, а с показательной функцией с основанием 2 в знаменателе дроби и числителем, *приблизительно* равным округлённому $R(\phi\cdot 2^{m+1})$. С изменением k дробное отношение в скобках стремится к ϕ, следовательно, выражение в скобках стремится в пределе к нулю, как и знакопеременная последовательность A_r в целом. А конечную формулу для произвольного целого k и любого действительного r можно записать в виде

$$A_r(k) = \sum_{k}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k+1)!}{k!\,(k+2)!\,2^{4k+r}} = (-1)^{k+1}2^{6-r}\left(\phi - \frac{a + 2^m}{2^{m+1}}\right) \tag{3.24'''}$$

Здесь числитель дроби $a + 2^m$ приблизительно равен $R(\phi\cdot 2^{m+1})$, а для точного определения слагаемого a и степени m требуется обращение к гипергеометрической функции с четырьмя параметрами, которые для $A_r(k)$ составляют систему двух переменных и двух постоянных чисел: $(1,\ k + 3/2,\ k + 3,\ -1/4)$. Заходить так далеко не станем, с нас достаточно и последней формулы, приводящей к константе ϕ в частном и простейшем случае, которому соответствуют значения $k = 0$, $r = 6$, $a = 9$, $m = 2$.

В другом популярном выражении [Andrews *et al*., 58]

$$\phi = \exp\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14}\right) + \ldots\right)\right] \tag{3.25}$$

константа ϕ фактически присутствует в обеих частях равенства, если учесть, что $5^{1/2}/2 = \phi - 1/2$.

Интересно, хотя и не уникально, восхваляемое некоторыми любителями ЗС равенство константы ϕ бесконечной сумме своих обратных величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = 1 + \phi = \phi^2 \tag{3.26}$$

Разобраться в особенностях этих нехитрых соотношений не сложно: варьированием параметров надо прийти к формулам общего типа, обеспечивающим более полное и глубокое понимание частных случаев. Заменив в формулах (3.26) константу ϕ произвольным действительным числом $a > 1$, получим геометрические прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^n}=\frac{a}{a-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a-1} \tag{3.27}$$

с начальными членами 1 и $1/a$ и со знаменателями, равными $1/a$. Равенство

$$\frac{1}{a-1}=a \tag{3.28}$$

приводит к золотому квадратному уравнению и константе ϕ, в случае же равенства

$$\frac{a}{a-1}=a \tag{3.29}$$

получим более простое линейное уравнение и значение $a = 2$. Других простых вариантов фактически нет, хотя принцип минимума здесь всё же "работает" в пользу ФМК 2, а не МК ϕ, которая безальтернативно оказывается на втором месте. Мало что изменится, если начинать бесконечное суммирование с натурального $k > 1$ и с усложнённым показателем степени $n + m$, где m – любое натуральное число. Соотношения для произвольного a не содержат знаменателей лишь для констант 2 и ϕ, которые вне конкуренции и в данном общем случае:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{a^{n+m}}=\frac{a^{1-k-m}}{a-1},\quad \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^{n+m}}=2^{1-k-m},\quad \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{\phi^{n+m}}=\phi^{2-k-m} \tag{3.30}$$

При равенстве $m = -k$ нижнего предела суммирования и постоянного слагаемого степени правые части формул представляют собой числа $a/(a-1)$, 2 и ϕ^2, среди которых простейшим по-прежнему является двойка.

Тригонометрические представления

Исходные соотношения для четырёх функций типа e-i-2-x:

$$\phi=2\cos(\pi/5),\quad \phi=2\sin(3\pi/10),\quad \phi=\sec(2\pi/5)/2,\quad \phi=\csc(\pi/10)/2 \tag{3.31}$$

Таблица

Функции $2\sin(n\cdot\pi/10)$, $2\cos(n\cdot\pi/10)$ и число ϕ

n	$n\frac{\pi}{10}$	$\frac{e^{\frac{\pi}{10}ni}-e^{-\frac{\pi}{10}ni}}{i}$	$e^{\frac{\pi}{10}ni}+e^{-\frac{\pi}{10}ni}$
1	$\frac{\pi}{10}$	ϕ^{-1}	$\sqrt{2+\phi}$
2	$2\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$	$\phi^{-1}\sqrt{2+\phi}=\sqrt{3-\phi}$	ϕ
3	$3\frac{\pi}{10}$	ϕ	$\phi^{-1}\sqrt{2+\phi}=\sqrt{3-\phi}$
4	$4\frac{\pi}{10}=\frac{2\pi}{5}$	$\sqrt{2+\phi}$	ϕ^{-1}
5	$5\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$	2	0
6	$6\frac{\pi}{10}=\frac{3\pi}{5}$	$\sqrt{2+\phi}$	$-\phi^{-1}$
7	$7\frac{\pi}{10}$	ϕ	$-\phi^{-1}\sqrt{2+\phi}=-\sqrt{3-\phi}$
8	$8\frac{\pi}{10}=\frac{4\pi}{5}$	$\phi^{-1}\sqrt{2+\phi}=\sqrt{3-\phi}$	$-\phi$
9	$9\frac{\pi}{10}$	ϕ^{-1}	$-\sqrt{2+\phi}$
10	π	0	–2

Вследствие периодичности синуса и косинуса достаточно ограничиться десятью значениями аргумента: $\pi/10$, $2\pi/10$, …, $10\pi/10$. Продолжение последовательностей для $n > 10$ новых значений для синуса и косинуса не даст – с точностью до знака снова всё повторяется.

Таблица

Функции $1/2\sec(n\cdot\pi/5)$, $1/2\csc(n\cdot\pi/10)$ и число ϕ

n	$\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{5}\mathrm{i}n}+e^{\frac{\pi}{5}\mathrm{i}n}}$	$\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}n}-e^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}n}}$
1	ϕ^{-1}	ϕ
2	ϕ	$\sqrt{\dfrac{\phi+2}{5}}$
3	$-\phi$	ϕ^{-1}
4	$-\phi^{-1}$	$\phi^{-1}\sqrt{\dfrac{\phi+2}{5}}$
5	$-1/2$	$1/2$
6	$-\phi^{-1}$	$\phi^{-1}\sqrt{\dfrac{\phi+2}{5}}$
7	$-\phi^{-1}$	ϕ^{-1}
8	ϕ	$\sqrt{\dfrac{\phi+2}{5}}$
9	ϕ^{-1}	ϕ
10	$1/2$	∞

Сразу видно, что соотношения для секанса проще остальных, и при всех $n\cdot\pi/10$, (n = 1, 2, 3, …) имеем лишь значения $\pm\phi$, $\pm\phi^{-1}$, $\pm 1/2$.

Таблица

Значения тригонометрических функций $f(\mathrm{i}\ln\phi)$ и $f(\mathrm{i}\ln\phi/\mathrm{i})$

Функция $f(x)$	$x = \mathrm{i}\ln\phi$	$x = \mathrm{i}\ln\phi/\mathrm{i}$
sin *x*	$\mathrm{i}/2$	$\phi - 1/2$
cos *x*	$\phi - 1/2$	$-\mathrm{i}/2$
tg *x*	$1/(2\phi-1)\mathrm{i} = 1/\sqrt{5}\mathrm{i}$	$\sqrt{5}\mathrm{i}$
ctg *x*	$-\sqrt{5}\mathrm{i}$	$-\mathrm{i}/(2\phi-1) = -\mathrm{i}/\sqrt{5}$
sec *x*	$2/(2\phi-1) = 2/\sqrt{5}$	$2\mathrm{i}$
csc *x*	$-2\mathrm{i}$	$2/(2\phi-1) = 2/\sqrt{5}$

Шесть тригонометрических функций с аргументами $\mathrm{i}\ln\phi$ и $\mathrm{i}\ln\phi/\mathrm{i}$ имеют по одному золотому значению в области действительных чисел для функций $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, и $\csc x$; остальные восемь значений являются мнимыми.

Наряду с золотыми $n\cdot\pi/5$ и $n\cdot\pi/10$ могут быть углы и позолоченные, в частности кратные $\pi/15$, то есть 12°, углы $\alpha = n\cdot\pi/15$. Покажем косинусы таких углов, которых в интервале от 0 до π всего 14, а вследствие выражаемой формулой $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$ периодичности косинуса, достаточно ограничиться значениями в интервале $(0, \pi/2)$, поскольку далее всё будет повторяться с точностью до знака. Исключая углы $3\cdot\pi/15 = \pi/5$, $6\cdot\pi/15 = 2\pi/5$ и $5\cdot\pi/15 = \pi/3$, имеем четыре золотоносных числа:

$$\cos\frac{\pi}{15} = \frac{\phi^{-1} + \sqrt{3\phi\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos\frac{2\pi}{15} = \frac{\phi + \sqrt{3\phi^{-1}\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos\frac{4\pi}{15} = \frac{-\phi^{-1} + \sqrt{3\phi\sqrt{5}}}{4}, \quad \cos\frac{7\pi}{15} = \frac{-\phi + \sqrt{3\phi^{-1}\sqrt{5}}}{4} \tag{3.32}$$

которые в угловых единицах соответствуют значениям косинуса для 12°, 24°, 48° и 84°.

Экспоненциальные представления типа $\phi = e^{\pm g}$ и $\phi = \pm \mathrm{i}\, e^{\pm g}$

$$\phi = e^{-\mathrm{i}\arcsin(\mathrm{i}/2)} \qquad \phi = -\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\arcsin(\sqrt{5}/2)} \tag{3.33}$$

$$\phi = e^{-\mathrm{i}\arccos(\sqrt{5}/2)} \qquad \phi = \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}\arccos(-\mathrm{i}/2)} \tag{3.34}$$

$$\phi = e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arcsec}(2/\sqrt{5})} \qquad \phi = \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arcsec}(2\mathrm{i})} \tag{3.35}$$

$$\phi = e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arccsc}(-2\mathrm{i})} \qquad \phi = -\mathrm{i}\, e^{\mathrm{i}\,\mathrm{arccsc}(2/\sqrt{5})} \tag{3.36}$$

$$\phi = e^{\mathrm{i}\,\mathrm{arctg}(-\mathrm{i}/\sqrt{5})} \qquad \phi = \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{5}\mathrm{i})} \tag{3.37}$$

$$\phi = e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arcctg}(-\sqrt{5}\mathrm{i})} \qquad \phi = \mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{arcctg}(-\mathrm{i}/\sqrt{5})} \tag{3.38}$$

Наиболее простое соотношение $\phi = e^{-\mathrm{i}\arcsin(\mathrm{i}/2)} \equiv e^{\mathrm{arsh}(1/2)}$, полученное в [A[7, g]] в рамках теории ЛМФ, сегодня фактически является основной, наряду с радикалом (3.1) и цепной дробью (3.7), формой явного аналитического представления золотой константы, о чём подробно, со ссылками на источники сказано в *п*. 6 первой главы.

Последовательности Люка

Последовательности $\{U_n(P, Q)\}$ и $\{V_n(P, Q)\}$, определяемые заданием начальных членов и рекуррентных отношений, играют выдающуюся роль в ТЗС и её возможных обобщениях. Комментарии к основным формулам этих двух линейных рекурсий второго порядка, думается, излишни, напомним только, что посредством $U_n(1, -1)$ задаётся классический ряд Фибоначчи, а посредством рекурсии $V_n(1, -1)$ определяется ряд Люка.

$$U_0(P, Q) = 0 \qquad U_1(P, Q) = 1 \qquad U_n(P, Q) = P\cdot U_{n-1}(P, Q) - Q\cdot U_{n-2}(P, Q) \qquad \text{для } n > 1 \tag{3.39}$$

$$V_0(P, Q) = 2 \qquad V_1(P, Q) = P \qquad V_n(P, Q) = P\cdot V_{n-1}(P, Q) - Q\cdot V_{n-2}(P, Q) \qquad \text{для } n > 1 \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
U_0(P, Q) &= 0\\
U_1(P, Q) &= 1\\
U_2(P, Q) &= P\\
U_3(P, Q) &= P^2 - Q\\
U_4(P, Q) &= P^3 - 2PQ\\
U_5(P, Q) &= P^4 - 3P^2Q + Q^2\\
U_6(P, Q) &= P^5 - 4P^3Q + 3PQ^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0(P, Q) &= 2\\
V_1(P, Q) &= P\\
V_2(P, Q) &= P^2 - 2Q\\
V_3(P, Q) &= P^3 - 3PQ\\
V_4(P, Q) &= P^4 - 4P^2Q + 2Q^2\\
V_5(P, Q) &= P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2\\
V_6(P, Q) &= P^6 - 6P^4Q + 9P^2Q^2 - 2Q^3
\end{aligned}$$

Соотношения между членами последовательностей для $n > 0$:

$$U_n(P, Q) = \frac{P\cdot U_{n-1}(P, Q) + V_{n-1}(P, Q)}{2} \tag{3.41}$$

$$V_n(P, Q) = \frac{(P^2 - 4Q) \cdot U_{n-1}(P, Q) + P \cdot V_{n-1}(P, Q)}{2} \tag{3.42}$$

Характеристическое уравнение для обеих последовательностей:

$$x^2 - Px + Q = 0 \tag{3.43}$$

Дискриминант D и корни a и b квадратного уравнения, их суммы, разности и произведения:

$$D = P^2 - 4Q \tag{3.44}$$

$$a = \frac{P + \sqrt{D}}{2}, \quad b = \frac{P - \sqrt{D}}{2}, \quad a + b = P, \quad a - b = \sqrt{D}, \quad ab = \frac{P^2 - D}{4} = Q \tag{3.45}$$

Если дискриминант $D \neq 0$, а корни a и b различны, их целые степени выражаются формулами

$$a^n = \frac{V_n + U_n\sqrt{D}}{2} \tag{3.46}$$

$$b^n = \frac{V_n - U_n\sqrt{D}}{2} \tag{3.47}$$

Отсюда

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{D}} \tag{3.48}$$

$$V_n = a^n + b^n \tag{3.49}$$

Если $P = 2S$ и $Q = S^2$, тогда $D = 0$, $a = b = S$ и

$$U_n(P, Q) = U_n(2S, S^2) = nS^{n-1} \tag{3.50}$$

$$V_n(P, Q) = V_n(2S, S^2) = 2S^n \tag{3.51}$$

Последовательности Люка, мы знаем из первой главы, являются одним из основных методов неявного определения константы ϕ и рядов Фибоначчи и Люка, как и других констант и бесконечных рядов, а также полиномов. К тому же это достаточно общий метод допустимого обобщения модели ЗС посредством линейной рекуррентной последовательности второго порядка, о чём будет сказано уже в следующей главе.

2. Числа Фибоначчи и Люка: характеристики и свойства

Первые пятьдесят чисел Фибоначчи F_n

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765, 10 946, 17 711, 28 657, 46 368, 75 025, 121 393, 196 418, 317 811, 514 229, 832 040, 1 346 269, 2 178 309, 3 524 578, 5 702 887, 9 227 465, 14 930 352, 24 157 817, 39 088 169, 63 245 986, 102 334 155, 165 580 141, 267 914 296, 433 494 437, 701 408 733, 1 134 903 170, 1 836 311 903, 2 971 215 073, 4 807 526 976, 7 778 742 049.

Номера простых чисел Фибоначчи

n = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449, 509, 569, 5 71, 2 971, 4 723, 5 387, 9 311, 9 677, 14 431, 25 561, 30 757, 35 999, 37 511, 50 833, 81 839.

Недоказанные случаи: n = 104 911, 130 021, 148 091, 201 107, 397 379, 433 781, 590 041, 593 689, 604 711, 931 517, 1 049 897, 1 285 607, 1 636 007, 1 803 059, 1 968 721.

Первые пятьдесят чисел Люка L_n

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1 364, 2 207, 3 571, 5 778, 9 349, 15 127, 24 476, 39 603, 64 079, 103 682, 167 761, 271 443, 439 204, 710 647, 1 149 851, 1 860 498, 3 010 349, 4 870 847, 7 881 196, 12 752 043, 20 633 239, 33 385 282, 54 018 521, 87 403 803, 141 422 324, 228 826 127, 370 248 451, 599 074 578, 969 323 029, 1 568 397 607, 2 537 720 636, 4 106 118 243, 6 643 838 879, 10 749 957 122, 17 393 796 001, 28 143 753 123.

Номера простых чисел Люка

n = 0, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 71, 79, 113, 313, 353, 503, 613, 617, 863, 1 097, 1 361, 4 787, 4 793, 5 851, 7 741, 8 467, 10 691, 12 251, 13 963, 14 449, 19 469, 35 449, 36 779, 44 507, 51 169, 56 003.

Недоказанные случаи: n = 81 671, 89 849, 94 823, 140 057, 148 091, 159 521, 183 089, 193 201, 202 667, 344 293, 387 433, 443 609, 532 277, 574 219, 616 787, 631 181, 637 751, 651 821, 692 147, 901 657, 1 051 849.

Простыми, за исключением $F_4 = 3$, могут быть только числа F_n и L_n с простыми номерами n. Всего 33 выявленных и 15 предполагаемых простых числа Фибоначчи; 43 и 21 – для чисел Люка. Используя формулу Бине, нетрудно установить, что наибольшие среди предполагаемых простых чисел F_n и L_n содержат соответственно 411 439 и 219 824 десятичных знаков [Dubner and Keller; Lifchitz H. and Lifchitz R.]. Вопрос о конечности или бесконечности множеств простых чисел F_n и L_n остаётся открытым, и непохоже на то, что он может быть решён в обозримом будущем. Во всяком случае, за минувшие два с половиной тысячелетия здесь не было ни малейшего прогресса и очевидно, что это одна из наиболее сложных (если вообще разрешимых) задач, стоящих перед научным мышлением.

Кроличья последовательность

В классической задаче Фибоначчи динамика роста численности кроликов по месяцам (с указанием в скобках количества пар родившихся, достигших зрелости и общего количества тех и других соответственно) выглядит следующим образом:

нулевой	месяц	0	(1, 0, 1)
первый	месяц	1	(0, 1, 1)
второй	месяц	10	(1, 1, 2)
третий	месяц	101	(1, 2, 3)
четвёртый	месяц	10110	(2, 3, 5)
пятый	месяц	10110101	(3, 5, 8)
шестой	месяц	1011010110110	(5, 8, 13)

…………………………………………………………

Общее формальное правило, выражающее закон размножения, очевидно: каждая цифра 1 n-го месяца в $n+1$-ом месяце заменяется на 10, а 0 заменяется на 1, причём относящееся к данному месяцу чередование знаков 0 и 1 с переходом к следующему месяцу в результате этих замен не меняется, а только растёт по правилу построения последовательности Фибоначчи. Числа в скобках для месяца n это числа F_{n-1}, F_n, F_{n+1} и ясно, что с увеличением n отношение общего количества символов к количеству символов 1, как и отношение последних к количеству символов 0, стремится в пределе к ϕ.

Есть и другие способы получения последовательности, называемой *кроличьей последовательностью*, *золотой последовательностью* или *золотой струной*, первые шестьдесят знаков которой даны ниже по [Knott[2]]:

1011010110110101101011011010110110101101011011010101011011… (3.52)

Оригинален способ получения золотой последовательности с помощью золотого числа [Fraenkel, Levitt, Shimshoni]. Выписываются в ряд и выделяются подчёркиванием все целые числа $E(n\phi)$, (n = 1, 2, 3, …):

$\underline{1}$, 2, $\underline{3}$, $\underline{4}$, 5, $\underline{6}$, 7, $\underline{8}$, $\underline{9}$, 10, $\underline{11}$, $\underline{12}$, 13, $\underline{14}$, 15, $\underline{16}$, $\underline{17}$, 18, $\underline{19}$, 20, $\underline{21}$, $\underline{22}$, … (3.53)

Последовательность 1011010110110101101011…, составленная заменой каждого выделенного подчёркиванием числа цифрой 1, а каждого невыделенного цифрой 0, совпадает со знаками золотой последовательности. Такое совпадение имеет место для натурального ряда любой длины, так что речь фактически идёт об универсальном методе построения золотой струны, позволяющем к тому же достаточно легко находить цифру, стоящую на заданном месте в этой, не имеющей определённого периода, последовательности.

Чётные и нечётные числа Фибоначчи

Поскольку ряд для F_n, (n = 0, 1, 2, …) строится по правилу третьего члена, а сумма любого нечётного числа с чётным есть число нечётное, ясно, что нечётных чисел Фибоначчи вдвое больше чем чётных и что чётным является каждое третье число. Естественное продолжение приводит к легко доказуемой [Bicknell and Hoggatt] последовательности утверждений:

каждое 3-е	число кратно 2	то есть	кратно F_3
каждое 4-е	число кратно 3	то есть	кратно F_4

каждое 5-е	число кратно 5	то есть	кратно F_5
каждое 6-е	число кратно 8	то есть	кратно F_6
………………………………………………………………			
каждое k-ое	число кратно F_k		

Обобщённо: если $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$, то F_n кратно каждому $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots, F_{n_k}$ в отдельности.

Делимость чисел Фибоначчи

- F_n делится без остатка на F_m тогда и только тогда когда n делится на m
- F_n делится без остатка на 2 тогда и только тогда когда n делится на 3
- F_n делится без остатка на 3 тогда и только тогда когда n делится на 4
- F_n делится без остатка на 4 тогда и только тогда когда n делится на 6
- F_n делится без остатка на 5 тогда и только тогда когда n делится на 5
- F_n делится без остатка на 7 тогда и только тогда когда n делится на 8
- F_n делится без остатка на 16 тогда и только тогда когда n делится на 12
- Если n простое число вида $5t \pm 1$, то F_{n-1} делится на n. Например $F_{30} = 832\,040$ делится на 31, поскольку 31 простое число вида $5{\cdot}6 \pm 1$. Действительно, $832\,040/31 = 26840$
- Если n простое число вида $5t \pm 2$, то F_{n+1} делится на n

Последние знаки десятичного представления чисел Фибоначчи

Последние знаки чисел F_n повторяются с периодом 60 (например, $F_{66} = 27\,777\,890\,035\,288$ как и $F_6 = 8$ оканчивается цифрой 8, поскольку 66 = 6 + 60).

Последние	*два* знака чисел F_n	повторяются с периодом 300
Последние	*три* знака чисел F_n	повторяются с периодом 1500
Последние	*четыре* знака чисел F_n	повторяются с периодом 15 000
Последние	*пять* знаков чисел F_n	повторяются с периодом 150 000

………………………………………………………………………………..

Трёхчленные уравнения с числами Фибоначчи и с золотыми корнями

$$x^3 - F_3 x - F_2 = 0 \quad \text{корни} \quad \{-1, \phi, -\phi^{-1}\} \tag{3.54}$$

$$x^3 - F_3 x + F_2 = 0 \quad \text{корни} \quad \{1, -\phi, \phi^{-1}\} \tag{3.55}$$

$$x^3 - F_3 x^2 + F_1 = 0 \quad \text{корни} \quad \{1, \phi, -\phi^{-1}\} \tag{3.56}$$

В общем случае:

$$x^n - F_n x - F_{n-1} = 0 \quad n \text{ корней, среди них } -\phi, \phi^{-1} \tag{3.57}$$

$$x^n - F_n x + F_{n-1} = 0 \quad n = 2k+1, (k = 1, 2, 3, \ldots), n \text{ корней, среди них } -\phi, \phi^{-1} \tag{3.58}$$

$$x^n - F_n x^2 + F_{n-2} = 0 \quad n \text{ корней, среди них } \phi, -\phi^{-1} \tag{3.59}$$

Теорема Гурвица

Для любого действительного числа ρ существует бесконечное множество рациональных чисел p/q таких, что

$$\left|\rho - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \tag{3.60}$$

Если написать это неравенство в более общем виде

$$\left|\rho - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2} \tag{3.61}$$

то возникает вопрос: значение $C = 1$ единственно возможное, или же есть и другие, меньшие числа, для которых выполняется это неравенство? Выясняется (теорема Гурвица), что существует бесконечное множество чисел меньших единицы, для которых неравенство выполняется, и главное, что оно содержит наименьшее число, равное

$1/(2\phi - 1) = 1/\sqrt{5}$. Точнее, если $C = 1/\sqrt{5}$, то множество рациональных дробей p/q, удовлетворяющих неравенству, бесконечно, если же $C < 1/\sqrt{5}$, то существуют значения ρ, при которых только конечное число рациональных дробей удовлетворяет этому неравенству. Константа $1/(2\phi - 1)$ здесь выступает как граница между *бесконечным счётным* и *конечным* множествами рациональных значений.

Три способа определения принадлежности целого числа к множеству $\{F_n\}$

Есть по крайней мере три независимых способа тестирования целых чисел k на предмет их принадлежности к множеству чисел Фибоначчи. Один из способов подобной идентификации связан с квадратными корнями, другой – с формулой Бине, третий – с цепной дробью золотой константы.

Способ 1. Числами Фибоначчи являются только те числа k, для которых одно из выражений $5k^2 \pm 4$ является полным квадратом [Gessel], причём для чётных k следует брать знак плюс, а для нечётных – знак минус. В геометрической интерпретации при чётных номерах $n = 2m$, ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) имеем прямоугольный треугольник со сторонами 2, $\sqrt{5}F_{2m}$ и целочисленной гипотенузой L_{2m}, а при нечётных номерах $n = 2m + 1$ прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами 2, L_{2m+1} и гипотенузой $\sqrt{5}F_{2m+1}$. Для нахождения значений L_{2m} и L_{2m+1} заставим переменную m в формулах

$$L_{2m} = \sqrt{5k^2 + 4} \quad \text{и} \quad L_{2m+1} = \sqrt{5k^2 - 4} \tag{3.62}$$

пробегать значения $F_0, \pm F_1, \dots$. Получается последовательность

$$\begin{array}{lllll} L_0(F_0) = 2 & L_1(\pm F_1) = 1 & L_2(\pm F_2) = 3 & L_3(\pm F_3) = 4 & L_4(\pm F_4) = 7 \\ L_5(\pm F_5) = 11 & L_6(\pm F_6) = 18 & L_7(\pm F_7) = 29 & L_8(\pm F_8) = 47 & L_9(\pm F_9) = 76\dots \end{array}$$

то есть ряд Люка. Следовательно, это не только тест по выявлению чисел F_n, но и формулы связи между числами Фибоначчи и Люка:

$$L_{2m}^2 = 5F_{2m}^2 + 4, \quad L_{2m+1}^2 = 5F_{2m+1}^2 - 4, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3.63}$$

Способ 2. По формуле Бине разница между числами F_n и $\phi^n/\sqrt{5}$ стремится с увеличением n к нулю, и формула $F_n = R\left(\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right)$ с функцией округления $R(x)$ справедлива для любого целого положительного z. Отсюда, обозначая через $\log_\phi$ логарифм по основанию ϕ, следует, что формула

$$F(R(\log_\phi(z\sqrt{5} + 1/2))) = z \tag{3.64}$$

верна лишь в том случае, когда $n > 0$ одно из чисел Фибоначчи. Если, например, $n = 610 = F_{15}$, то $R(\log_\phi(610\sqrt{5} + 1/2)) = 15$, а $F_{15} = 610$. С другой стороны, если заранее известно, что z – одно из чисел Фибоначчи, то формулой

$$R(\log_\phi(z\sqrt{5} + 1/2)) = n \tag{3.65}$$

определяется его порядковый номер n.

Способ 3. Поскольку числителями и знаменателями подходящих дробей золотой константы, представленной в виде цепной дроби, являются числа F_n, неравенство

$$\left|\phi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \tag{3.60′}$$

справедливо лишь для взаимно простых чисел Фибоначчи p и q. Отсюда следует [Möbius], что число z относится к множеству $\{F_n\}$ в том и только в том случае, если в интервале $(\phi z - 1/z;\ \phi z + 1/z)$ содержится целое число. Например, для $F_{12} = 144$ интервал (232,989…; 233,003..) содержит целое число 233, а, скажем, для 143 в соответствующем интервале (231,371…; 231,385…) целого числа уже нет.

Приведённые числа Фибоначчи и число 24

Любое многозначное число можно привести к однозначному виду, складывая цифры, из которых оно составлено, затем складывая цифры полученной суммы, если таковые имеются, и т.д. до получения однозначного числа (например 4181 = 4 + 1 + 8 + 1 = 14, 1 + 4 = 5). Поступая так с начальными членами ряда Фибоначчи, получим такую последовательность чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
a_n	1	1	2	3	5	8	4	3	7	1	8	9	8	8	7	6	4	1	5	6	2	8	1	9	…

Здесь каждый член ряда a_n, начиная с третьего, равен приведённой к однозначному числу сумме двух предыдущих членов. Особенность данной последовательности чисел, суммарно равной 117, в её повторяемости с периодом в 24 члена: приведённые числа Фибоначчи с номерами n и $n + k\cdot 24$, (k = 1, 2, 3, ...) – одинаковы.

А приведённые к однозначному виду члены ряда L_n образуют такую последовательность чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
a_n	1	3	4	7	2	9	2	2	4	6	1	7	8	6	5	2	7	9	7	7	5	3	8	2	…

Нетрудно убедиться, что правило третьего члена (назовём его свойством S_1) выполняется и в этом случае, следовательно, не может считаться уникальной особенностью ряда Фибоначчи. Остаётся убедиться в существовании периода, равного магическому числу 24 (свойство S_2). Имеем 8 + 2 = 10, 1 + 0 = 1 для a_{25}, 1 + 2 = 3 для a_{26}, 1 + 3 = 4 для a_{27}, словом, всё как и в первом периоде, даже сумма всех членов равна как прежде 117. Следовательно, оба указанных свойства, первоначально установленные [Михайлов] лишь для последовательности F_n, в равной мере относятся к последовательности чисел L_n. Это наводит на мысль, что указанные свойства намного более широкого охвата, чем могло показаться вначале. Ряд Люка, который может строиться по схеме

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1},\ \text{либо}\ L_n = F_{n-2} + 3F_{n-1},\ \text{либо}\ L_n = 2F_{n-1} + F_n,$$

либо как-то иначе, в любом варианте представляет собой частный случай числового ряда типа

$$R_n = aF_{n-k} + bF_{n+m} \tag{3.66}$$

где a, b, k, m целые неотрицательные числа и по крайней мере один из множителей a, b не нуль. Назовём последовательности такого типа *квазифибоначчиевыми* и исследуем их на предмет соответствия свойствам S_1 и S_2. При $a = 1$, $b = k = m = 0$ ряд R_n тождествен F_n, а если $a = b = k = m = 1$, имеем ряд Люка, но нас интересует общий случай.

Необходимо выяснить, выполняются ли свойства S_1 и S_2 для любой последовательности типа R_n или же есть какие-то ограничения. За неимением общего доказательства, рассмотрим две последовательности с достаточно произвольно взятыми наборами параметров: $a = 3$, $b = 7$, $k = 2$, $m = 5$ и $a = 4$, $b = 1$, $k = 3$, $m = 19$. Берём следовательно для испытания два квазифибоначчиевых ряда

$$R'_n = 3F_{n-2} + 7F_{n+5}$$

$$R''_n = 4F_{n-3} + F_{n+19}$$

которые приводятся к последовательностям $\{a'_n\}$ и $\{a''_n\}$. Соответственно имеем:

$R'_n =$ 9, 91, 150, 241, 391, 632, 1023, 1655, 2678, 4333, 7011, 11 344, 18 355, 29 699, 48 054, 77 753, 125 807, 203 560, 329 367, 532 927, 862 294, 1 395 221, 2 257 515, 3 652 736, …

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
a'_n	5	1	6	7	4	2	6	8	5	4	9	4	4	8	3	2	5	7	3	1	4	5	9	5	…

$R''_n =$ 6 761, 10 950, 17 711, 28 661, 46 372, 75 033, 121 405, 196 438, 317 843, 514 281, 832 124, 1 346 405, 2178 529, 3 524 934, 5 703 463, 9 228 397, 14 931 860, 24 160 257, 39 092 117, 63 252 374, 102 344 491, 165 596 865, 267 941 356, 433 538 221, …

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	…
a''_n	2	6	8	5	4	9	4	4	8	3	2	5	7	3	1	4	5	9	5	5	1	6	7	4	…

Таким образом, начиная с третьего члена свойство S_1 выполняется для всех 24 начальных членов обеих последовательностей $\{a'_n\}$ и $\{a''_n\}$. Продолжая испытание для номеров $n > 24$, придём к однозначному выводу о справедливости в обоих случаях и свойства S_2. К этому мы ещё вернёмся уже на уровне обобщённой теории, а о числе 24 уже как о физической константе см. [A[9]].

Исходные и простейшие соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n}=\phi,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{F_n}=\sqrt{5} \tag{3.67}$$

В общем случае

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+m}}{F_n}=\phi^{\alpha},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+m}}{L_n}=\phi^{\alpha},\ \alpha \text{ – произвольное действительное или комплексное число} \tag{3.68}$$

$$F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n,\quad L_{-n}=(-1)^nL_n \tag{3.69}$$

$$L_n=F_{n-2}+3F_{n-1}=F_n+2F_{n-1} \tag{3.70}$$

$$F_n=\frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{5} \tag{3.71}$$

$$\frac{L_n-F_n}{2}=F_{n-1},\quad \frac{F_n+L_n}{2}=F_{n+1} \tag{3.72}$$

$$L_n^2=L_{2n}+2(-1)^n \tag{3.73}$$

$$L_n^2=5F_n^2+4(-1)^n=L_{n-1}L_{n+1}+5(-1)^n \tag{3.74}$$

$$F_n=R\left(\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right),\ R(x) \text{ – функция округления} \tag{3.75}$$

$F_{n+1}=E(\phi F_n+1/2)$, $n\neq 1$ Формула верна вследствие близости $1/\sqrt{5}=0{,}447\ldots$ к 1/2; $E(x)$ – функция, ставящая в соответствие числу x его *целую часть*. (3.76)

$\phi^n=F_{n-1}+\phi F_n$ положительная степень константы ϕ переводится в линейный двучлен (3.77)

$\phi^{-n}=(-1)^n(F_{n+1}-\phi F_n)$ отрицательная степень константы ϕ в виде линейного двучлена (3.78)

$\phi^{-2k}=F_{2k+1}-\phi F_{2k}$ для чётных степеней (3.79)

$\phi^{-(2k-1)}=\phi F_{2k-1}-F_{2k}$ для нечётных степеней (3.80)

$\phi^n+\phi^{-n}=F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ для чётных степеней (3.81)

$\phi^n-\phi^{-n}=F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ для нечётных степеней (3.82)

$$\operatorname{arctg}(1/F_{2k})=\operatorname{arctg}(1/F_{2k+1})+\operatorname{arctg}(1/F_{2k+2}) \tag{3.83}$$

Формула Бине

Формула Бине для произвольной комплексной переменной ρ:

$$F_\rho=\frac{\phi^\rho-(\phi^{-1})^\rho\cos(\rho\pi)}{2\phi-1} \tag{3.84}$$

В частности, для любого действительного числа r справедлива формула

$$F_r=\frac{\phi^r-(\phi^{-1})^r\cos(r\pi)}{2\phi-1} \tag{3.85}$$

которая при целых значениях $r=0,\pm1,\pm2,\ldots$, обращающих косинус в ±1, переходит в обычную формулу Бине.

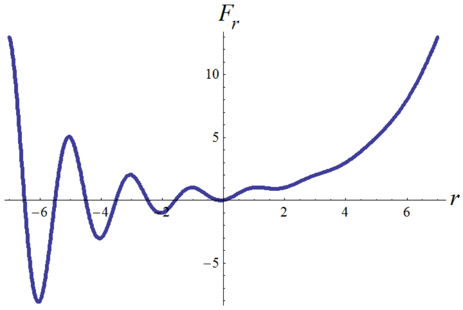


График функции F_r в интервале $-7\le r\le 7$

Непрерывная функция F_r стремится к $+\infty$ при $r \to +\infty$ и не имеет предела при $r \to -\infty$, совершая постоянно увеличивающиеся по амплитуде и уменьшающиеся по частоте колебания между отрицательными и положительными значениями. Она имеет по одному минимуму и максимуму для положительных и неограниченное количество экстремумов для отрицательных значений переменной r, причём ни одно из экстремальных значений $F_{r_1}, F_{r_2}, \ldots, F_{r_n}, \ldots$ целым числом Фибоначчи не является. Выделенность классического дискретного ряда Фибоначчи $\{F_n\}$ из непрерывного множества $\{F_r\}$ фактически связана с периодичностью функции косинуса с её полупериодами: $F_n = f(\cos n\pi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Аналогично, для чисел Люка L_ρ и L_r справедливы более компактные формулы

$$L_\rho = \phi^\rho + (\phi^{-1})^\rho \cos(\rho\pi) \tag{3.86}$$

$$L_r = \phi^r + (\phi^{-1})^r \cos(r\pi) \tag{3.87}$$

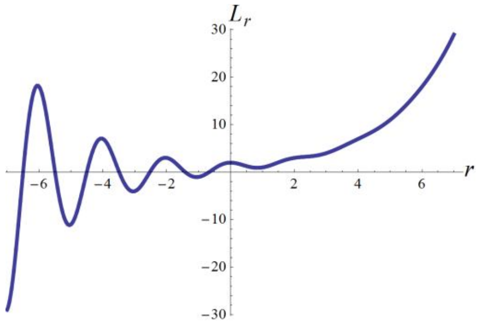


График функции L_r в интервале $-7 \le r \le 7$

Классические формулы Бине для целых значений показателя степени:

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi^{-1})^n}{\sqrt{5}} \tag{3.88}$$

$$L_n = \phi^n + (-\phi^{-1})^n \tag{3.89}$$

Формула Бине может быть представлена и с помощью функций $\cos\frac{\pi}{5}n$ и $\sin\frac{\pi}{10}n$ в тригонометрической форме, не содержащей константы ϕ [Stern]:

$$F_n = \frac{2^{n+2}}{5}\left(\cos^n\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5} + \cos^n\frac{3\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{9\pi}{5}\right) \tag{3.90}$$

С использованием логарифма и гиперболических функций, ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$F_{2n} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{sh}[2n\ln\phi] \tag{3.91}$$

$$F_{2n+1} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{ch}[(2n+1)\ln(\phi)] = \frac{\mathrm{ch}[(2n+1)\ln(\phi)]}{\mathrm{ch}(\ln(\phi)} \tag{3.92}$$

Простые линейные соотношения

Все приведённые здесь соотношения могут быть получены из исходных формул или же как частные случаи представленных в следующем разделе формул общего типа. Некоторые из равенств даны в разных, дополняющих друг друга формах.

$$F_{n+2} + F_n + F_{n-2} = 4F_n \tag{3.93}$$

$$F_{n+2} + F_n = L_{n+1} \tag{3.94}$$

$$F_{n+3} + F_n = 2F_{n+2} \tag{3.95}$$

$$F_{n+4} + F_n = 3F_{n+2} \tag{3.96}$$

$$F_{n+2} + F_{n-2} = 3F_n \tag{3.97}$$

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n \tag{3.98}$$

$$F_{n+4} - F_n = L_{n+2} \tag{3.99}$$

$$F_{n+5} + F_n = F_{n+2} + L_{n+3} \tag{3.100}$$

$$F_{n+5} - F_n = L_{n+2} + F_{n+3} \tag{3.101}$$

$$F_{n+6} + F_n = 2L_{n+3} \tag{3.102}$$

$$F_{n+6} - F_n = 4F_{n+3} \tag{3.103}$$

$$F_n + 2F_{n-1} = L_n \tag{3.104}$$

$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n \tag{3.105}$$

$$F_{n+3} - 2F_n = L_n \tag{3.106}$$

$$F_{n+2} - F_n + F_{n-1} = L_n \tag{3.107}$$

$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + F_{n+3} = L_{n+3} \tag{3.108}$$

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n \tag{3.109}$$

$$L_n + L_{n+3} = 2L_{n+2} \tag{3.110}$$

$$L_n + L_{n+4} = 3L_{n+2} \tag{3.111}$$

$$2L_n + L_{n+1} = 5F_{n+1} \tag{3.112}$$

$$L_{n+2} - L_{n-2} = 5F_n \tag{3.113}$$

$$L_{n+3} - 2L_n = 5F_n \tag{3.114}$$

$$L_{5n} = L_n(L_{2n} + 5F_n + 3)(L_{2n} - 5F_n + 3), \ \textit{n нечётное} \tag{3.115}$$

Необычные свойства

Бесконечное суммирование под знаком радикалов:

$$h_F = \sqrt{F_0 + \sqrt{F_1 + \sqrt{F_2 + \sqrt{F_3 + \dots}}}} = 1{,}28917\ 89877\ 00238\ 44892\dots \tag{3.116}$$

$$\sqrt{h_F} = 1{,}13542\ 0181\dots \tag{3.117}$$

Если в соответствии с правилом третьего члена составить *случайную* последовательность Фибоначчи

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm x_{n-2}, \quad n \ge 2, \ x_0 = 0, \ x_1 = 1, \tag{3.118}$$

в которой все знаки сложения и вычитания независимы и равновероятны, выполняется [Vishwanath], см. также [Hayes; Peterson], предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1{,}13198\ 824\dots \tag{3.119}$$

с вероятностью равной 1.

Установлено [Embree and Trefethen], что случайная последовательность типа

$$x_n = x_{n-1} \pm \beta x_{n-2} \tag{3.120}$$

сходится по показательному закону, если параметр $0 < \beta < 0{,}70258$, и расходится при $\beta > 0{,}70258$.

3. Соотношения между константой ϕ, числами F_n и L_n

Простые соотношения предыдущего раздела дополнены здесь более сложными примерами. Количество всевозможных конструкций из чисел Фибоначчи и Люка, их связей между собой, с золотой константой и другими математическими константами, с различными величинами и числовыми множествами практически необозримо. Большинство формул и соотношений может быть выведено путём несложных преобразований из исходных определений, либо получено в качестве частных случаев из относительно небольшого числа формул общего типа. Но есть и достаточно сложные конструкции, составленные с применением комплексных чисел, выражаемых посредством экспоненциальной и логарифмической функций и их тригонометрических и гиперболических комбинаций, с использованием вспомогательных функций, бесконечных сумм, произведений, матриц и определителей, дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков, биномиальных и фибономиальных коэффициентов и так далее. Из всего этого постоянно пополняемого новыми примерами многообразия нами отобраны, а в некоторых случаях и дополнены, наиболее важные и характерные примеры, а также неординарные, непростые и любопытные с точки зрения математической эстетики соотношения. Подобный выбор, помимо прочего, призван показать многогранность и неисчерпаемость важнейшего фрагмента ТЗС, в создание которого вложен труд сотен исследователей – в основном профессиональных математиков, но есть интересные работы и любителей числовой математики.

Трудно указать на область математики с таким количеством исследователей и полученных ими числовых соотношений, как в теории рядов Фибоначчи и Люка. Множество результатов представлено на страницах отмечающего в 2013 г. свой полувековой юбилей специализированного журнала [The Fibonacci Quarterly]. Многое сделано А.П. Стаховым и в рамках возглавляемой им научной организации [Международный клуб золотого сечения]. Следует выделить работы [Benjamin, Quinn; Dunlap; Hoggatt[1,2]; Koshy; Melham; Vajda], содержащие не одну сотню формул и соотношений, разного притом типа и степени сложности, и особо отметить книгу [Herz-Fischler[1]] по истории математики с античного периода до XIX века. Здесь нет нужды ссылаться каждый раз на многочисленные и не всегда однозначно определяемые первоисточники; их, при желании, можно найти в содержащей почти 200 формул обзорной работе [Knott[3]], откуда взята значительная часть формул настоящего раздела. Много данных, с соответствующими ссылками и довольно обширными списками литературы, на страницах математической интернет-энциклопедии MathWorld, в частности в [W[2−5]], в меньшей мере это относится к статьям в Википедии. Разные и так или иначе относящиеся к числам Фибоначчи и Люка последовательности даны в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences – OEIS) [Sloane[1]]. Использованы, помимо указанных, и другие работы исследовательского и справочного характера, включая нашу книгу [A[15]]. Добавим, что во избежание ошибок, почти неизбежных при таком обилии числовых величин и формальных построений, все данные перепроверены, а в некоторых случаях дополнены и исправлены.

Квадраты чисел Фибоначчи и Люка, их суммы и разности для разных индексов

$$F_n^2 + 2F_nF_{n-1} = F_{2n} \tag{3.121}$$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \tag{3.122}$$

$$L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} = 5(-1)^n \tag{3.123}$$

$$L_{2n}^2 = L_{4n} + 2 \tag{3.124}$$

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2}F_{n-1} \tag{3.125}$$

$$L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n+2}L_{n-1} \tag{3.126}$$

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n} = F_nL_n \tag{3.127}$$

$$F_{n+1}^2 - F_{n-2}^2 = 4F_nF_{n-1} \tag{3.128}$$

$$F_{n+2}^2 = 3F_{n+1}^2 - F_n^2 - 2(-1)^n \tag{3.129}$$

$$L_{n+2}^2 = 3L_{n+1}^2 - L_n^2 + 10(-1)^n \tag{3.130}$$

$$F_{n+3}^2 + F_n^2 = 2(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) \tag{3.131}$$

$$F_{n+k+1}^2 + F_{n-k}^2 = F_{2k+1}F_{2n+1} \tag{3.132}$$

$$F_{n+k}^2 - F_{n-k}^2 = F_{2n}F_{2k} \tag{3.133}$$

Третьи степени чисел Фибоначчи

$$F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n} \tag{3.134}$$

$$F_{n+1}F_{n+2}F_{n+6} - F_{n+3}^3 = (-1)^nF_n \tag{3.135}$$

$$F_nF_{n+4}F_{n+5} - F_{n+3}^3 = (-1)^{n+1}F_{n+6} \tag{3.136}$$

$$F_{n-1}F_{n-2}F_{n+3} - F_n^3 = (-1)^{n-1}F_{n-3} \tag{3.137}$$

$$F_{n+1}F_{n+2}F_{n-3} - F_n^3 = (-1)^nF_{n+3} \tag{3.138}$$

$$F_{n-2}F_{n+1}^2 - F_n^3 = (-1)^{n-1}F_{n-1} \tag{3.139}$$

$$F_{n+2}F_{n-1}^2 - F_n^3 = (-1)^nF_{n+1} \tag{3.140}$$

В общем случае (первые две формулы взяты из [Melham]):

$$F_{n+a+b}F_{n-a}F_{n-b} - F_{n-a-b}F_{n+a}F_{n+b} = (-1)^{n+a+b}F_aF_bF_{a+b}L_n \tag{3.141}$$

$$F_{n+a+b+c}F_{n-a}F_{n-b}F_{n-c} - F_{n-a-b-c}F_{n+a}F_{n+b}F_{n+c} = (-1)^{n+a+b+c}F_{a+b}F_{a+c}F_{b+c}F_{2n} \tag{3.142}$$

$$F_{i+j+k} = F_{i+1}F_{j+1}F_{k+1} + F_iF_jF_k - F_{i-1}F_{j-1}F_{k-1} \text{ для целых } i, j, k \tag{3.143}$$

Степени выше третьей

$$F_{n-1}^2 F_{n+1}^2 - F_{n-2}^2 F_{n+2}^2 = 4(-1)^n F_n^2 \tag{3.144}$$

$$F_{n-3} F_{n-1} F_{n+1} F_{n+3} - F_n^4 = (-1)^n L_n^2 \tag{3.145}$$

$$F_n^2 F_{m+1} F_{m-1} - F_m^2 F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n-1} F_{m+n} F_{m-n} \tag{3.146}$$

$$F_{n-2} F_{n-1} F_{n+1} F_{n+2} + 1 = F_n^4 \tag{3.147}$$

$$L_{n-2} L_{n-1} L_{n+1} L_{n+2} + 25 = L_n^4 \tag{3.148}$$

$$F_{n+a+b+c-d} F_{n-a+d} F_{n-b+d} F_{n-c+d} - F_{n-a-b-c+2d} F_{n+a} F_{n+b} F_{n+c} = (-1)^{n+a+b+c} F_{a+b-d} F_{a+c-d} F_{b+c-d} F_{2n+d} \tag{3.149}$$

$$(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 = 2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4) \tag{3.150}$$

$$(L_{n-1} L_{n+2})^2 + (2L_n L_{n+1})^2 = (5F_{2n+1})^2 \tag{3.151}$$

$$F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+4} F_{n+5} F_{n+6} + L_{n+3}^2 = [F_{n+3}(2F_{n+2} F_{n+4} - F_{n+3}^2)]^2 \tag{3.152}$$

$$\left(\frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}\right)^k = \frac{L_{kn} + \sqrt{5}F_{kn}}{2} \tag{3.153}$$

Индексы в виде суммы и разности

$$L_{n+m} + (-1)^m L_{n-m} = L_n L_m \tag{3.154}$$

$$L_{n+m} = L_{n+1} F_m + L_n F_{m-1} \tag{3.155}$$

$$L_{n+m} = \frac{(-1)^n (L_n L_m - 5F_n F_m)}{2} \tag{3.156}$$

$$F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m} = L_n F_m \tag{3.157}$$

$$F_{n+m} = F_{n+1} F_m + F_n F_{m-1} = F_{n+1} F_{m+1} - F_{n-1} F_{m-1} \tag{3.158}$$

если $n = m$

$$F_{2n} = F_n (F_{n-1} + F_{n+1}) \tag{3.158$'$}$$

если $m = nk$

$$F_{n(k+1)} = F_{n+1} F_{nk} + F_n F_{nk-1} \tag{3.158$''$}$$

$$\sqrt{(F_n F_{n+3})^2 + (2F_{n+1} F_{n+2})^2} = F_{2n+3}, \quad n > 0 \tag{3.159}$$

$$\sqrt{(L_n L_{n+3})^2 + (2L_{n+1} L_{n+2})^2} = L_{2(n+1)} + L_{2(n+2)} \tag{3.160}$$

Многие соотношения между числами Фибоначчи являются частными случаями общей формулы [Johnson]

$$F_n F_m - F_k F_l = (-1)^r (F_{n-r} F_{m-r} - F_{k-r} F_{l-r}), \tag{3.161}$$

которая справедлива для всех целых значений r, n, m, k, l, если только $n + m = k + l$. Подставляя, например, значения $k = l = 0$, $m = -n$, после очевидных преобразований получим формулу

$$F_n^2 - F_{n+m} F_{n-m} = (-1)^{n+m} F_m^2 \tag{3.161$'$}$$

носящую имя Каталана. Если к тому же $i = 1$, имеем известную формулу

$$F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1} \tag{3.161$''$}$$

для трёх соседних чисел Фибоначчи. А в случае подстановок $n \to n + 1$, $m \to n + 2$, $k \to n$, $l \to n + 3$, $r \to n$ придём к формуле

$$F_{n+1} F_{n+2} - F_n F_{n+3} = (-1)^n, \quad n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{3.161$'''$}$$

означающей, что в четвёрке соседних чисел Фибоначчи разница между произведением средних и произведением крайних членов равна по модулю единице.

С использованием чисел Люка при том же условии $n + m = k + l$:

$$5F_n F_m - L_k L_l = (-1)^r (5F_{n-r} F_{m-r} - L_{k-r} L_{l-r}) \tag{3.162}$$

$$F_n L_m - F_k L_l = (-1)^r (F_{n-r} L_{m-r} - F_{k-r} L_{l-r}) \tag{3.163}$$

Используя общие формулы либо простейшие исходные соотношения между числами Фибоначчи, можно путём несложных преобразований получить великое множество всевозможных формул; здесь представлена лишь небольшая и, возможно, наиболее любопытная их часть.

$$F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} = (-1)^n F_{m-n} \tag{3.164}$$

$$F_n^4 - F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = 1 \tag{3.165}$$

$$F_{3n} = 2F_n^3 + 3F_nF_{n+1}F_{n-1} = 5F_n^3 + 3(-1)^n F_n = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 \tag{3.166}$$

$$F_{4n} = 4F_nF_{n+1}(F_{n+1}^2 + 2F_n^2) - 3F_n^2(F_n^2 + 2F_{n+1}^2) \tag{3.167}$$

$$F_{4n}^2 + 8F_{2n}(F_{2n} + F_{6n}) = (3F_{4n})^2 \tag{3.168}$$

$$F_{5n} = 25\,F_n^5 + 25(-1)^n F_n^3 + 5F_n \tag{3.169}$$

$$F_{kn} = L_k F_{k(n-1)} - (-1)^k F_{k(n-2)} \tag{3.170}$$

$$F_{3n+1} = F_{n+1}^3 + 3F_{n+1}F_n^2 - F_n^3 \tag{3.171}$$

$$F_{3n+2} = F_{n+1}^3 + 3F_{n+1}^2 F_n + F_n^3 \tag{3.172}$$

Для любых n и $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ имеет место формула

$$F_n = F_k F_{n-k-1} + F_{k+1} F_{n-k} \tag{3.173}$$

Если $k = 9$,

$$F_n = 34F_{n-10} + 55F_{n-9} \tag{3.174}$$

Отсюда получается формула

$$F_n - F_{n-5} = 10F_{n-5} + F_{n-10} \tag{3.175}$$

характерная наличием в ней чисел 5 и 10.

Произведения с индексами в виде сумм и разностей

$$L_{n+i}F_{n+k} - L_nF_{n+i+k} = (-1)^{n+1} F_i L_k \tag{3.176}$$

$$F_{n+i}L_{n+k} - F_nL_{n+i+k} = (-1)^n F_i L_k \tag{3.177}$$

$$L_{n+i}L_{n+k} - L_nL_{n+i+k} = (-1)^{n+1} 5F_iF_k \tag{3.178}$$

$$(-1)^k F_nF_{m-k} + (-1)^m F_kF_{n-m} + (-1)^n F_mF_{k-n} = 0 \tag{3.179}$$

$$(-1)^k L_nF_{m-k} + (-1)^m L_kF_{n-m} + (-1)^n L_mF_{k-n} = 0 \tag{3.180}$$

$$5F_{jk+r}F_{ju+v} = L_{j(k+u)+(r+v)} - (-1)^{ju+v} L^{j(k-u)+(r-v)} \tag{3.181}$$

$$F_{jk+r}L_{ju+v} = F_{j(k+u)+(r+v)} + (-1)^{ju+v} F^{j(k-u)+(r-v)} \tag{3.182}$$

$$L_{jk+r}L_{ju+v} = L_{j(k+u)+(r+v)} + (-1)^{ju+v} L^{j(k-u)+(r-v)} \tag{3.183}$$

Обобщённая теорема Пифагора для чисел Фибоначчи [Horadam]:

$$(F_{n-1}F_{n+2})^2 + (2F_nF_{n+1})^2 = (F_{n+1}F_{n+2} - (F_{n-1}F_n)^2 = F_{2n+1}^2 \tag{3.184}$$

Формула д’Осанье (Philbert Maurice d’Ocagne, 1862 –1938)

$$F_nF_{m+1} - F_mF_{n+1} = (-1)^m F_{n-m} \tag{3.185}$$

Выражение

$$C = F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+4}F_{n+5}F_{n+6} + L_{n+3}^2 \tag{3.186}$$

вопреки утверждениям в [Morgado[1], 251], является полным квадратом для всех $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, а не только положительных. Квадратный корень $\sqrt{C}$ равен 0, если $n = -3$, во всех остальных случаях он представляет собой целочисленное выражение типа k^2, $k > 0$. Если, допустим, взять интервал в пределах от -6 до 6, получим следующую последовательность значений для k:

4, 3, 1, 0, 1, 3, 4, 33, 115, 528, 2171, 9303, 39236 (3.187)

Кстати, приравнивание C в [Knott[3]] выражению $(F_{n+3}2F_{n+2}F_{n+4}-F^2_{n+3})^2$ неверно. Сравнение в том же интервале (–6, 6) значений $\sqrt{C}$ с положительными корнями

8, 5, 1, 0, 1, 3, 8, 51, 215, 976, 4199, 18123, 77384

этого выражения показывает совпадение значений лишь в случаях: $n = -4, -3, -2, -1$; это, возможно, и стало источником заблуждения.

Тождество Кассини

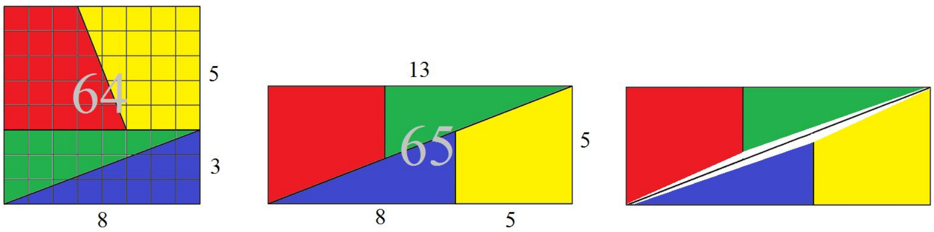
Если в формуле Каталана (3.161′) индекс $m = 1$, имеем часто обсуждаемое и представляющее самостоятельный интерес соотношение для трёх соседних чисел Фибоначчи, известное как *тождество Кассини* [Cassini]:

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n \tag{3.188}$$

Оно может быть получено различными способами, а наиболее простой – решение детерминанта матрицы 2×2:

$$\det\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}=F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n=(-1)^n \tag{3.189}$$

С тождеством Кассини связана предложенная английским писателем, математиком и логиком Льюисом Кэрроллом головоломка “64 = 65?” [Carroll, 316]. Если квадрат с клетками 8×8 = 64, как у шахматной доски, разделить на четыре части указанным на рисунке слева способом, а затем соединить отдельные части способом, указанным на рисунке в центре, визуально получится прямоугольник размером 13×5 = 65. Откуда, спрашивается, появилась лишняя единица? Заметим, что в этой головоломке все линейные параметры – числа Фибоначчи: 5, 8, 13. Тождество Кассини подсказывает, что математически здесь имеет место равенство $13\cdot5-8\cdot8=F_7F_5-F_6^2=1$. А лишняя единица появляется вследствие того, что заполнение прямоугольника не является плотным. Между геометрическими фигурами разной конфигурации образовался показанный в увеличенном виде на рисунке справа, малозаметный на глаз зазор, площадь которого как раз равна 1. Добавим, что плотное, то есть без пробелов и наложений заполнение пространства геометрическими телами (“мозаика” или “паркет”, см. [A[15,g], *п.* 7]) относится вообще к разряду занимательных, сложных, не всегда разрешимых и практически важных вопросов математической теории.



Головоломка Льюиса Кэрролла

Матрицы и детерминанты

Число Фибоначчи F_{n+1} может определяться посредством определителя матриц размера $n\times n$, составленных из положительной, отрицательной и мнимой единиц:

$$D_n\equiv F_{n+1}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & i & 0 & \dots & 0\\ i & 1 & i & \ddots & \vdots\\ 0 & i & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i\\ 0 & \dots & 0 & i & 1\end{pmatrix} \tag{3.190}$$

Определитель порядка k для соотношений общего типа между числами Фибоначчи с номерами от $n+1$ до $n+k^2$, из которого может быть получено множество других соотношений, см. [W[2]]:

$$\begin{vmatrix}F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} & \dots & F_{n+k}\\ F_{n+k+1} & F_{n+k+2} & F_{n+k+3} & \dots & F_{n+2k}\\ F_{n+2k+1} & F_{n+2k+2} & F_{n+2k+3} & \dots & F_{n+3k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ F_{n+k(k-1)+1} & F_{n+k(k-1)+2} & F_{n+k(k-1)+3} & \dots & F_{n+k^2}\end{vmatrix}=0 \tag{3.191}$$

Числа Люка в форме определителя:

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} 3 & \mathrm{i} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} = L_{n+1} \qquad (3.192)$$

Следовательно, рекуррентное правило для чисел Фибоначчи и Люка можно записать через сумму определителей:

$$D_n = D_{n-1} + D_{n-2} \qquad (3.193)$$

Константы суммирования обратных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{\phi^n - (-\phi)^{-n}} = 3{,}35988\ 56662\ 43177\ldots \qquad (3.194)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}} = \sqrt{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{2n+1}}{\phi^{4n+2}+1} = 1{,}82451\ 5157\ 40692\ \ldots \qquad (3.195)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^n + (-\phi)^{-n}} = 1{,}96285\ 81732\ 09645\ldots \qquad (3.196)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi^{2n} + \phi^{-2n}} = 0{,}56617\ 76758\ 11384\ldots \qquad (3.197)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{2n+1}}{\phi^{4n+2}-1} = 1{,}39668\ 04973\ 98261\ \ldots \qquad (3.198)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{7-\sqrt{5}}{2} = 3 - \phi^{-1} \qquad (3.199)$$

Суммы и бесконечные ряды

$$\sum_{m=0}^{k-1} F_{z+m} = F_z + F_{z+1} + \ldots + F_{z+k-1} = F_{z+k+1} - F_{z+1}, \qquad (3.200)$$

z – произвольное комплексное число

$$F_m + F_{m+1} + \ldots + F_{m+k-1} = F_{m+k+1} - F_{m+1} \qquad (3.200')$$

z –целое положительное число m

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1 \qquad (3.200'')$$

частный случай, когда $m = 1$, $k = n$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k F_k = (-1)^n F_{n-1} - 1 \qquad (3.201)$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_k = L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L_{n+2} - 1 \qquad (3.202)$$

аналогичная формула для чисел Люка

$$\sum_{k=a}^{n} F_k = F_{n+2} - F_{a+1} \qquad (3.203)$$

$$\sum_{k=a}^{n} L_k = L_{n+2} - L_{a+1} \qquad (3.204)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \qquad (3.205)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n} \qquad (3.205')$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_{2k-1} = L_{2n} - 2 \qquad (3.206)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} - 1 \qquad (3.207)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} F_{i-1} = 2^{n} - F_{n+2} \qquad (3.208)$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{i} L_{i} = 2^{n+1} F_{n+1} \qquad (3.209)$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{3i} = \frac{F_{3n+2} - 1}{2} \qquad (3.210)$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{3i+1} = \frac{F_{3n+3}}{2} \qquad (3.211)$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{4i} = F_{2n+1}^{2} - 1 \qquad (3.212)$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{4i+1} = F_{2n+1} F_{2n+2} \qquad (3.213)$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{4i+2} = F_{2n+1} F_{2n+3} - 1 \qquad (3.214)$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{4i+3} = F_{2n+2} F_{2n+3} \qquad (3.215)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} L_{n-2i} = 2F_{n+1} \qquad (3.216)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} L_{2n-2i+1} = F_{2n+2} \qquad (3.217)$$

Суммирование с биномиальными коэффициентами, см. [Honsberger]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i-1}{i} = F_{n} \qquad (3.218)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} F_{k} = F_{n} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k} L_{k} = L_{n} \qquad (3.219)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+i}{2i}=F_{2n+1} \qquad \sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}F_i=F_{2n+1}-1 \tag{3.220}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+i}{2i+1}=F_{2n} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k=F_{2n} \tag{3.221}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}L_k=L_{2n} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{p-k}=F_{p+n},\; p-\text{любое число} \tag{3.222}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^kF_k=F_{3n} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^kL_k=L_{3n} \tag{3.223}$$

$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}F_{2i+p}=5^nF_{2n+p} \qquad \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}L_{2i+p}=5^nL_{2n+p} \tag{3.224}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}F_{2i+p}=5^nL_{2n+1+p} \qquad \sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}L_{2i}=5^{n+1}F_{2n+1} \tag{3.225}$$

$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}F_i^2=5^{n-1}L_{2n} \qquad \sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}L_i^2=5^nL_{2n} \tag{3.226}$$

$$\sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}F_i^2=5^nF_{2n+1} \qquad \sum_{i=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{i}L_i^2=5^{n+1}F_{2n+1} \tag{3.227}$$

$$\sum_{i=0}^{n}5^i\binom{n}{2i}=2^{n-1}L_n \qquad \sum_{i=0}^{n}5^i\binom{n}{2i+1}=2^{n-1}F_n \tag{3.228}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}F_n^iF_{n-1}^{k-i}F_i=F_{kn} \qquad \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}F_n^iF_{n-1}^{k-i}L_i=L_{kn} \tag{3.229}$$

$$\sum_{i\ge 0}\sum_{j\ge 0}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}=F_{2n+3} \tag{3.230}$$

Индекс в виде произведения kn

$$F_{kn}=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{i=0}^{(k-1)/2}\binom{k}{2i+1}5^iF_n^{2i+1}L_n^{k-1-2i}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}F_iF_n^iF_{n-1}^{k-i} \tag{3.231}$$

$$L_{kn}=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{i=0}^{k/2}\binom{k}{2i}5^iF_n^{2i}L_n^{k-2i}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}L_iF_n^iF_{n-1}^{k-i} \tag{3.232}$$

Степень

$$F_n^k=\frac{1}{2\cdot 5^{\frac{k-1}{2}}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i(n+1)}F_{(k-2i)n},\quad k-\text{нечётное} \tag{3.233}$$

$$F_n^k=\frac{1}{2\cdot 5^{\frac{k}{2}}}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{i(n+1)}L_{(k-2i)n},\quad k-\text{чётное} \tag{3.234}$$

$$L_n^k=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{in}L_{(k-2i)n} \tag{3.235}$$

Квадраты и произведения

$$\sum_{n=1}^{k} F_n^2 = F_k F_{k+1}, \qquad \sum_{n=1}^{k} L_n^2 = L_k L_{k+1} - 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.236}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1}^2 = \frac{F_{4n} + 2n}{5} \qquad \sum_{i=0}^{n} F_{2i}^2 = \frac{F_{4n+2} - 2n - 1}{5} \tag{3.237}$$

$$\sum_{i=1}^{n} L_{2i}^2 = F_{4n+2} + 2n - 1 \qquad \sum_{i=0}^{n-1} L_{2i+1}^2 = F_{4n} - 2n \tag{3.238}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+a}} = \frac{F_n}{F_a} \sum_{k=1}^{a} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+n}}, \quad a = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.239}$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \frac{1}{5}(nL_n - F_n) \tag{3.240}$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_k L_{n-k} = (n+1)F_n \tag{3.241}$$

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (2n-k)F_k^2 = F_{2n}^2 \tag{3.242}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+a}} = \frac{F_n}{F_a} \sum_{k=1}^{a} \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+n}} \tag{3.243}$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_k L_{n-k} = (n+2)L_n + F_n \tag{3.244}$$

$$5\sum_{k=0}^{n} (-1)^{r(1+k)} F_{r(1+k)}^2 = (-1)^{r(n+1)} \frac{F_{(2n+3)r}}{F_r} - 2n - 3, \quad r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{3.245}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{r(1+k)} L_{r(1+k)}^2 = (-1)^{r(n+1)} \frac{F_{(2n+3)r}}{F_r} + 2n + 1 \tag{3.246}$$

Выше второй степени

$$10\sum_{i=1}^{n} F_i^3 = F_{3n+2} + 6(-1)^{n+1} F_{n-1} + 5 \tag{3.247}$$

$$25\sum_{i=1}^{n} F_i^4 = F_{4n+2} + 4(-1)^{n+1} F_{2n+1} + 6n + 3 \tag{3.248}$$

$$4\sum_{k=1}^{n} F_k^6 = F_n^5 F_{n+3} + F_{2n} \tag{3.249}$$

$$4\sum_{k=1}^{n} L_k^6 = L_n^5 L_{n+3} + 125F_{2n} - 128 \tag{3.250}$$

Индекс в виде двучлена $kn + c$:

$$F_{kn+c} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} F_{c-i} F_n^i F_{n+1}^{k-i}, \quad c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.251}$$

в частном случае

$$F_{2n+k} = F_k F_{n+1}^2 + 2F_{k-1} F_{n+1} F_n + F_{k-2} F_n^2, \quad n \text{ и } k \text{ – целые числа, одновременно не равные нулю.} \tag{3.252}$$

Если индекс даётся в форме $m \times n$, справедливы формулы умножения

$$F_{m\times n} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} F_k F_n^k F_{n-1}^{m-k}, \quad L_{m\times n} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} L_k F_n^k F_{n-1}^{m-k}, \quad n \neq 0, 1 \tag{3.253}$$

Формулы с бесконечным суммированием, первое из которых получено в [Clark], два последующих в [Wells], следующие четыре взяты из содержащей около двух сотен различных формул для золотого числа, чисел Фибоначчи и Люка работы [Knott[3]], а последующие пять нашего изобретения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+2}} = 3 - 2\phi \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_{n+1} F_{n+2}} = \phi^{-2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n} F_{2n+2}} = \phi^{-2} \tag{3.254}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_i}{2^i} = 2 \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L_i}{2^i} = 6 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{iF_i}{2^i} = 10 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{iL_i}{2^i} = 22 \tag{3.255}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_i}{4^i} = \frac{4}{11} \qquad 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{\phi^{2i}} = \phi \qquad 3\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{\phi^{3i}} = 1 \qquad 10\sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{\phi^{5i}} = 1 \tag{3.256}$$

В более общем случае отношения чисел F_i к степеням ki константы ϕ для любого действительного или комплексного числа k получим формулу

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F_i}{\phi^{ki}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i}{\phi^{ki}} = \frac{1}{\phi^k - \phi^{-k} - 1} = \frac{\phi^k}{\phi^{2k} - \phi^k - 1} \tag{3.257}$$

Обозначая ϕ^k символом r, имеем в знаменателе функцию $r^2 - r - 1$, то есть золотую функцию для произвольных степеней золотой константы.

Суммирование с разложением индекса на множители

$$F_{mq} = F_m \sum_{j=1}^{q} F_{m-1}^{j-1} F_{m(q-j)+1}, \quad m \neq 0, 1 \tag{3.258}$$

$$\frac{F_{kt}}{F_t} = \sum_{i=0}^{(k-3)/2} (-1)^{it} L_{(k-2i-1)t} + (-1)^{(k-1)/2} \quad \text{для нечётных } k \geq 3,\ t \text{ – нечётное,} \tag{3.259}$$

$$\frac{F_{kt}}{F_t} = \sum_{i=0}^{k/2-1} (-1)^{it} L_{(k-2i-1)t} \quad \text{для чётных } k \geq 2,\ t \neq 0 \tag{3.260}$$

$$\frac{L_{kt}}{L_t} = \sum_{i=0}^{(k-3)/2} (-1)^{i(t+1)} L_{(k-2i-1)t} + (-1)^{(k-1)(t+1)/2} \quad \text{для нечётных } k \geq 3 \tag{3.261}$$

$$\frac{F_{kt}}{L_t} = \sum_{i=0}^{k/2-1} (-1)^{i(t+1)} F_{(k-2i-1)t} \quad \text{для чётных } k \geq 2,\ t \neq 0 \tag{3.262}$$

Отношения между числами Фибоначчи и Люка

В общем случае

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k}}\right) = \sum_{n=k}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) \tag{3.263}$$

Для нечётных значений $n = 2k + 1$

$$\operatorname{arctg}(1/F_{2k+1}) = \operatorname{arctg}(1/L_{2k}) + \operatorname{arctg}(1/L_{2k+2}) \tag{3.264}$$

$$F_n L_n = \frac{\phi^{2n} - (-\phi)^{-2n}}{\sqrt{5}} = F_{2n}, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.265}$$

произведение формул Бине для чисел F_n и L_n есть число Фибоначчи с номером $2n$.

$$F_{2n}(L_{2n}^2 - 1) = F_{6n}, \ \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.266}$$

$$F_{m+p} + (-1)^{p+1} F_{m-p} = F_p L_m, \ \ p = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.267}$$

$$\sum_{k=a+1}^{a+4n} F_k = F_{a+4n+2} - F_{a+2} = F_{2n} L_{a+2n+2}, \quad n > 0 \tag{3.268}$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \frac{n L_n - F_n}{5}, \ \ n > 1 \tag{3.269}$$

Отношения, получаемые посредством формулы Бине, см. [Freitag]:

$$\frac{L_n^2 - (-1)^a L_{n+a}^2}{F_n^2 - (-1)^a F_{n+a}^2} = 5 \qquad \text{для нечётных } a \tag{3.270}$$

$$\frac{L_n^2 + L_{n+a}^2 - 8(-1)^a}{F_n^2 + F_{n+a}^2} = 5 \qquad \text{для чётных } a \tag{3.271}$$

4. Числа Фибоначчи и Люка, золотая константа и ФМК

Связь между бесконечными рядами

$$F_1 + F_2 x + F_3 x^2 + \ldots \ \text{ и } \ L_1 x + \frac{1}{2} L_2 x^2 + \frac{1}{3} L_3 x^3 + \ldots \tag{3.272}$$

посредством экспоненты [Honsberger]:

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} L_i x^i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i x^{i-1} \tag{3.273}$$

В обобщённом варианте [Johnson] для произвольных F_k и L_k

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} L_{ki} x^i \right) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} F_{ik} x^{i-1}}{F_k} \tag{3.274}$$

Связь через обратные тригонометрические функции, в частности из формулы (3.263):

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k+1}} \right) \tag{3.275}$$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k-1}} \right) \tag{3.276}$$

$$\frac{3\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k-1}} \right) \tag{3.277}$$

$$\operatorname{arctg} \phi^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k-1} + F_{2k+1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{L_{2k}} \right) \tag{3.278}$$

$$\operatorname{arctg}\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{F_{2k-1} + F_{2k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{L_{2k}}\right) \tag{3.279}$$

Положительное число F_k, $k \geq 1$ может быть получено по формуле [Ram[1]]

$$F_k = \sum_{m=1}^{k} \mathrm{i}^{m-1}(1-2\mathrm{i})^{k-m}\binom{2k-m}{m-1} \tag{3.280}$$

дважды содержащей ФМК i в выражении под знаком суммирования.

Определение произведением

$$F_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2\mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{n}\right) \tag{3.281}$$

Логарифм и тригонометрические функции

$$F_n = \frac{2\mathrm{i}^{-n+1}}{\sqrt{5}}\sin(-\mathrm{i}\,n\ln(\mathrm{i}\phi)),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.282}$$

$$F_n = \frac{2\mathrm{i}^{-n}}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}(n\ln(\mathrm{i}\phi)) \tag{3.283}$$

$$L_n = 2\mathrm{i}^{-n}\cos(-\mathrm{i}\,n\ln(\mathrm{i}\phi)) \tag{3.284}$$

$$L_n = 2\mathrm{i}^{-n}\operatorname{ch}(n\ln(\mathrm{i}\phi)) \tag{3.285}$$

Соотношения Рамануджана [*Questions by Srinivasa Ramanujan*]

a)
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cfrac{e^{-8\pi}}{1+\ddots}}}}} = \left(\sqrt{2+\phi} - \phi\right)e^{2\pi/5} = 0{,}99813\,60445\ldots \tag{3.286}$$

b)
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-8\pi\sqrt{5}}}{1+\ddots}}}}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{(\phi-1)^{5/2}5^{3/4}-1}} - \phi\right)e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} = 0{,}99999\,92087\ldots \tag{3.287}$$

c)
$$4\int_0^{\infty}\frac{x e^{-x\sqrt{5}}}{\operatorname{ch} x}\,dx = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3^2}{1+\ddots}}}}}}} = \frac{1}{2}\left[\zeta(2,\ \phi/2) - \zeta(2,\ \phi/2+1/2)\right] = 0{,}56830\,00031\ldots \tag{3.288}$$

d)
$$(1+e^{-\pi\sqrt{55}})(1+e^{-3\pi\sqrt{55}})(1+e^{-5\pi\sqrt{55}})\ldots = \frac{1+\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}(e^{-\pi\sqrt{55}})^{\frac{1}{24}} = \frac{1+\sqrt{3+2(2\phi-1)}}{\phi_{11}-1}(e^{-\pi\sqrt{55}})^{\frac{1}{24}} = 1{,}00000\,00000\,7612\ldots \tag{3.289}$$

$$e)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\phi-3)^{2n+1}}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^2-2\ln^2(2\phi+1)}{24}=0{,}23755\,99012\ldots \tag{3.290}$$

$$f)\quad \frac{\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2}}{\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-5\pi n^2}}=\sqrt{\phi-1/2}=1{,}05737\,12634\ldots \tag{3.291}$$

$g)$ Если $\sin(x+y)=2\sin\dfrac{x-y}{2}$, $\sin(y+z)=2\sin\dfrac{y-z}{2}$

то $$\sin 2x=(2\phi-3)^3\left(4+(2\phi-1)\sqrt{3}\right)^2,\ \sin 2y=2\phi-3,\ \sin 2z=(2\phi-3)^3\left(4-(2\phi-1)\sqrt{3}\right)^2 \tag{3.292}$$

5. Производящие функции для $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$

Характеристическое уравнение для обоих рядов одинаково:

$x^2-x-1=0$, корни ϕ и $-\phi^{-1}$

Производящая функция последовательности $\{a_n\}$ представляет собой степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{3.293}$$

Для $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+21x^7+34x^8\ldots=\frac{x}{1-x-x^2} \tag{3.294}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n x^n=2+x+3x^2+4x^3+7x^4+11x^5+18x^6+29x^7+47x^8\ldots=\frac{2-x}{1-x-x^2} \tag{3.295}$$

Обозначив производящую функцию последовательности $\{F_n\}$ символом $s(x)$, можно цепочкой достаточно очевидных преобразований записать её в виде квадратичного трёхчлена [Glaister]:

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n=F_0+F_1x+\sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n=x+x\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}F_n x^n=$$
$$x+xs(x)+x^2s(x) \tag{3.296}$$

Понятно, что к такому же виду точно так же приводится и производящая функция ряда $\{L_n\}$. В частном случае, если $x=1/10$, получается любопытное соотношение [Köhler], см. также [Livio, 106–107]

$$s(1/10)=\frac{10}{89}=\frac{10}{F_{10}} \tag{3.297}$$

или, в развёрнутом виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^n}=\frac{10}{89},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{10^{n+1}}=\frac{1}{89} \tag{3.297$'$}$$

В более общем случае

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_n}{10^{(k+1)(n+1)}}=\frac{1}{10^{2k+2}-10^{k+1}-1},\quad k\geq 0 \tag{3.298}$$

Наконец, в ещё более общем случае имеют место изящные формулы [Knott[3]]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{a^n}=\frac{a}{a^2-a-1} \tag{3.299}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{a^n}=2+\frac{a+2}{a^2-a-1} \tag{3.300}$$

Бесконечные ряды, числа Фибоначчи, Люка и показательная функция

Последние формулы побуждают провести небольшое исследование – для внесения определенной ясности в вопрос о бесконечном суммировании отношений типа F_{n+k}/a^{n+k} и L_{n+k}/a^{n+k}, $a > 1$. В соответствии с формулой Бине, последовательности $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$ с изменением переменной n растут по закону показательной функции с основанием ϕ. Отсюда и возможность получения конечных значений при суммировании с участием этих последовательностей, степеней золотой константы и показательных функций общего типа. Варьируя индексы суммируемых величин, можно получать много любопытных, хотя и не имеющих, как и большая часть чистой математики, прикладного значения, соотношений.

Начнём с простейших значений переменной k в выражениях

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{n+k}}{a^{n+k}},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+k}}{a^{n+k}} \tag{3.301}$$

обозначая их, в зависимости от значения k, символами S_{1F}, S_{1L}, S_{2F}, S_{2F}, … .

$$S_{1F}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{n+1}}{a^{n+1}}=\frac{a}{a^2-a-1}\qquad S_{1L}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+1}}{a^{n+1}}=\frac{2+a}{a^2-a-1} \tag{3.302}$$

$$S_{2F}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{n+2}}{a^{n+2}}=\frac{1+a}{a(a^2-a-1)}\qquad S_{2L}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+2}}{a^{n+2}}=\frac{1+3a}{a(a^2-a-1)} \tag{3.303}$$

$$S_{3F}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{n+3}}{a^{n+3}}=\frac{1+2a}{a^2(a^2-a-1)}\qquad S_{3L}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+3}}{a^{n+3}}=\frac{3+4a}{a^2(a^2-a-1)} \tag{3.304}$$

Общая тенденция очевидна. Для любого целого положительного m метод математической индукции приводит к следующим рекуррентным формулам:

$$S_{mF}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_{n+m}}{a^{n+m}}=\frac{F_{m-1}+aF_m}{a^{m-1}(a^2-a-1)}\qquad S_{mL}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n+m}}{a^{n+m}}=\frac{L_{m-1}+aL_m}{a^{m-1}(a^2-a-1)} \tag{3.305}$$

Эти формулы симметричны относительно замены $F\leftrightarrow L$ чисел Фибоначчи числами Люка, или наоборот. Отношения $S_{(m+1)F}/S_{mF}$ и $S_{(m+1)L}/S_{mL}$ двух соседних членов последовательностей приводятся к виду

$$\frac{S_{(m+1)F}}{S_{mF}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1+F_{m+1}/F_m}{1+F_{m-1}/F_m}\qquad \frac{S_{(m+1)F}}{S_{mF}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1+L_{m+1}/L_m}{1+L_{m-1}/L_m} \tag{3.306}$$

и нетрудно найти, что оба отношения с увеличением m стремятся к значению ϕ/a. Особое внимание следует обратить на квадратичную форму $a^2 - a - 1$, обращающую при значении $a = \phi$ знаменатель в 0, а дробь в бесконечность. Другими словами, бесконечные суммы S_{mF} и S_{mL} сходятся при любых значениях $a > 1$, кроме золотого.

Ничего в этом плане не изменится, если суммировать не с нуля, а с некоторого натурального k; только переменные индексы в формулах изменятся:

$$S_{mF}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{F_{n+m}}{a^{n+m}}=\frac{F_{m+k-1}+aF_{m+k}}{a^{m+k-1}(a^2-a-1)}\qquad S_{mL}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{L_{n+m}}{a^{n+m}}=\frac{L_{m+k-1}+aL_{m+k}}{a^{m+k-1}(a^2-a-1)} \tag{3.307}$$

Формулы (3.306) справедливы и в этом случае. Если, наконец, натуральное m заменить произвольным комплексным числом, получим, вообще говоря, достаточно сложное, содержащее константу ϕ, но без чисел F_n и L_n комплексное выражение в числителе и неизменную золотую квадратичную форму в знаменателе.

Производящие функции для различных последовательностей

Приведены в общей сложности шестнадцать достаточно значимых и интересных примеров функций

F_{kn}, ($k = 1, \ldots, 5$ и общий случай); L_n; F_{n+k}, (общий случай); F_n^k, ($k = 2, 3, 4, 5$); F_{n+m}^k, ($k = 2, 3, 4, 5, m = 7$)

с соответствующими характеристическими уравнениями и корнями уравнений, числовыми последовательностями и формулами для общих членов.

a) F_n: $$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + 34x^8 \ldots = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad (3.308)$$

Ряд: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 1587, 2584,…

Общий член последовательности: $a_n = F_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{-\phi, \phi^{-1}\}$

b) L_n: $$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = 2 + 1 + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 11x^5 + 18x^6 + 29x^7 + 47x^8 \ldots = \frac{2 - x}{1 - x - x^2} \quad (3.309)$$

Ряд: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, …

Общий член последовательности: $a_n = L_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{-\phi, \phi^{-1}\}$

c) F_{2n}: $$\frac{x}{1 - 3x + x^2} = x + 3x^2 + 8x^3 + 21x^4 + 55x^5 + 144x^6 + 377x^7 + 987x^8 + 2584x^9 + 6765x^{10} + 17711x^{11} \ldots \quad (3.310)$$

Последовательность: 0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, 987, 2584, 6765, 17711 …

Общий член последовательности: $a_n = F_{2n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{\phi^2, \phi^{-2}\}$

d) F_{3n}: $$\frac{2x}{1 - 4x - x^2} = 2x + 8x^2 + 34x^3 + 144x^4 + 610x^5 + 2584x^6 + 1094x^7 + 46368x^8 + 196418x^9 + \ldots \quad (3.311)$$

Последовательность: 0, 2, 8, 34, 144, 610, 2584, 1094, 46368, 196418, 832040, …

Общий член последовательности: $a_n = F_{3n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{-\phi^3, \phi^{-3}\}$

e) F_{4n}: $$\frac{3x}{1 - 7x + x^2} = 3x + 21x^2 + 144x^3 + 987x^4 + 6765x^5 + 46368x^6 + 317811x^7 + 2178309x^8 + \ldots \quad (3.312)$$

Последовательность: 0, 3, 21, 144, 987, 6765, 46368, 317811, 2178309, 14930352, …

Общий член последовательности: $a_n = F_{4n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{\phi^4, \phi^{-4}\}$

f) F_{5n}: $$\frac{5x}{1 - 11x - x^2} = 5x + 55x^2 + 610x^3 + 6765x^4 + 75025x^5 + 832040x^6 + 9227465x^7 + 102334155x^8 + \ldots \quad (3.313)$$

Последовательность: 0, 5, 55, 610, 6765, 75025, 832040, 9227465, 102334155, 1134903170, …

Общий член последовательности: $a_n = F_{5n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{-\phi^5, \phi^{-5}\}$

g) F_{kn} – обобщение предыдущих последовательностей.

Производящая функция: $$\frac{F_k x}{1 - L_k x + (-1)^k x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{kn} x^n \quad (3.314)$$

Последовательность: $\{F_{kn}\}$

Общий член последовательности: $a_n = F_{kn}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{(-1)^k \phi^k, \phi^{-k}\}$

$h)$ F_{n+k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Производящая функция: $\dfrac{F_k + F_{k-1}x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=k}^{\infty} F_{kn}x^n$ (3.315)

Последовательность: $\{F_{n+k}\}$

Общий член последовательности: $a_n = F_{n+k}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{-\phi, \phi^{-1}\}$

Последовательности типа F_n^k, $k = 2, 3, 4, \ldots$

$i)$ F_n^2: $\dfrac{x - x^2}{1 - 2x - 2x^2 + x^3} = x + x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 25x^5 + 64x^6 + 169x^7 + 441x^8 + 1156x^9 + 3025x^{10} + \ldots$ (3.316)

Последовательность: 0, 1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, 1156, 3025, 7921, …

Общий член последовательности: $a_n = F_n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{-1, \phi^2, \phi^{-2}\}$

$j)$ F_n^3: $\dfrac{x - 2x^2 - x^3}{1 - 3x - 6x^2 + 3x^3 + x^4} = x + x^2 + 8x^3 + 27x^4 + 125x^5 + 512x^6 + 2197x^7 + 9261x^8 + 39304x^9 + \ldots$ (3.317)

Последовательность: 0, 1, 1, 8, 27, 125, 512, 2197, 9261, 39304, 166375, …

Общий член последовательности: $a_n = F_n^3$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{\phi, -\phi^{-1}, -\phi^3, \phi^{-3}\}$

$k)$ F_n^4: $\dfrac{x - 4x^2 - 4x^3 + x^4}{1 - 5x - 15x^2 + 15x^3 + 5x^4 - x^5} = x + x^2 + 16x^3 + 81x^4 + 625x^5 + 4096x^6 + 28561x^7 + 194481x^8 + \ldots$ (3.318)

Последовательность: 0, 1, 1, 16, 81, 625, 4096, 28561, 194481, 1336336, …

Общий член последовательности: $a_n = F_n^4$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{1, -\phi^2, -\phi^{-2}, \phi^4, -\phi^{-4}\}$

$l)$ F_n^5: $\dfrac{x - 7x^2 - 16x^3 + 7x^4 + x^5}{1 - 8x - 40x^2 + 60x^3 + 40x^4 + 8x^5 - x^6} = x + x^2 + 32x^3 + 243x^4 + 3125x^5 + 32768x^6 + 371293x^7 + \ldots$ (3.319)

Последовательность: 0, 1, 1, 32, 243, 3125, 32768, 371293, 4084101, …

Общий член последовательности: $a_n = F_n^5$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{-\phi, \phi^{-1}, \phi^3, -\phi^{-3}, -\phi^{-4}, \phi^{-4}\}$

$m)$ F_{n+7}^2: $\dfrac{169 - 191x + 4x^2}{1 - 48x + 48x^2 - x^3} = 169 + 7\,921x + 372\,100x^2 + 17\,480\,761x^3 + 821\,223\,649x^4 + \ldots$ (3.320)

Последовательность: $F_7^2, F_{11}^2, F_{19}^2, \ldots, F_{7+4n}^2, \ldots$

Общий член последовательности: $a_n = F_{7+4n}^2$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{1, \phi^8, \phi^{-8}\}$

$n)$ F_{n+7}^3: $\dfrac{2197 - 17\,844x + 2\,631x^2 - 8x^3}{1 - 329x + 2\,256x^2 - 329x^3 + x^4} = 2197 + 704\,969x + 226\,981\,000x^2 + 7\,3087\,061\,741x^3 +$

$+ 23\,533\,806\,109\,393x^4 + 7\,577\,812\,474\,746\,632x^5 + 2\,440\,032\,083\,025\,183\,109x^6 + \ldots$ (3.321)

Последовательность: $F_7^3, F_{11}^3, F_{19}^3, \ldots, F_{7+4n}^3, \ldots$

Общий член последовательности: $a_n = F_{7+4n}^3$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

Корни: $\{1, \phi^4, \phi^{-4}, \phi^{12}, \phi^{-12}\}$

$o)$ F_{n+7}^4: $\dfrac{28\,561 - 1\,662\,814x + 1\,694\,130x^2 - 36\,079x^3 + 16x^4}{1 - 2\,255x + 105985x^2 - 105985x^3 + 2\,255x^4 - x^5} = 28\,561 + 6\,274\,2241x + 138\,458\,410\,000x^2 +$

$+ 30\,557\,700\,5139\,121x^3 + 674\,408\,281\,676\,875\,201x^4 + 1\,488\,418\,770\,664\,783\,964\,176x^5 + \ldots$ (3.322)

Последовательность: $F_7^4, F_{11}^4, F_{19}^4, \dots, F_{7+4n}^4, \dots$

Общий член последовательности: $a_n = F_{7+4n}^4 \;\; n = 0, 1, 2, \dots$

Корни: $\{1, \phi^8, \phi^{-8}, \phi^{16}, \phi^{-16}\}$

р) F_{n+7}^5: $$\frac{371293 - 154645159x + 108995497x^2 - 159316949x^3 + 494591x^4 - 32x^5}{1 - 15\,456x + 4\,979040x^2 - 34127170x^3 + 4\,979040x^4 - 15\,456x^5 + x^6} = 371\,293 + 5584059449x +$$

$$+ 84\,459\,630\,100\,000x^2 + 127\,7617\,458\,486\,664\,901x^3 + \dots \qquad (3.323)$$

Последовательность: $F_7^5, F_{11}^5, F_{19}^5, \dots, F_{7+4n}^5, \dots$

Общий член последовательности: $a_n = F_{7+4n}^5 \;\; n = 0, 1, 2, \dots$

Корни: $\{\phi^4, \phi^{-4}, \phi^{12}, \phi^{-12}, \phi^{20}, \phi^{-20}\}$

6. Полиномы Фибоначчи, Люка и Чебышева

Это группа тесно связанных между собой и их общим предком – последовательностями Люка многочленов, составляющих отдельную и сравнительно сложную главу ТЗС. Золотое содержание полиномов интуитивно вполне очевидно, но на поверхности не лежит. Поэтому, для понимания тонких и весьма нетривиальных отношений полиномов с золотой константой, числами Фибоначчи и Люка необходимо предварительно ознакомиться с некоторыми их важнейшими характеристиками. Фактически здесь мы имеем один из тех неординарных случаев, когда приходится внимательнее, чем обычно, присмотреться к особенностям инструментария, необходимого для того, чтобы добраться до золотых россыпей глубокого залегания. К тому же данные полиномы могут и сами, безотносительно даже к конкретным золотым соотношениям, считаться фрагментами ТЗС и её обобщений, что особенно заметно в их экспоненциальных и логарифмических представлениях, квадратичных формах и выражениях для корней уравнений.

Полином Фибоначчи

Частный случай последовательности Люка $U_n(x)$, содержащий переменную x в задающей полиномиальную последовательность рекуррентной формуле [Fibonacci polynomials]

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; n = 0 \\ 1, & \text{если} \;\; n = 1 \\ x F_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), & \text{если} \;\; n \ge 2 \end{cases} \qquad (3.324)$$

Отсюда первые семь, включая нулевое, значений функции $F_n(x)$:

$F_0(x) = 0$

$F_1(x) = 1$

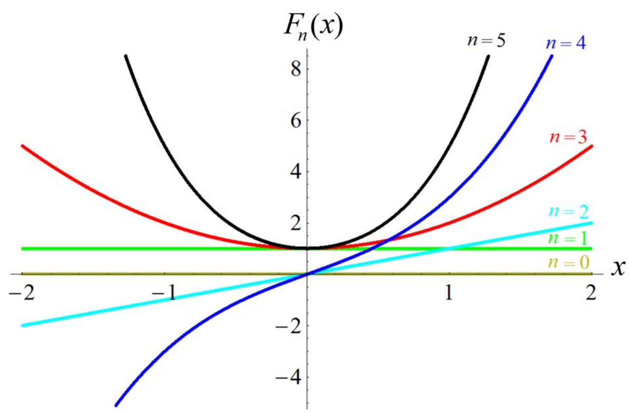
$F_2(x) = x$

$F_3(x) = x^2 + 1$

$F_4(x) = x^3 + 2x$

$F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

$F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$



Графики функции $F_n(x)$ для первых шести значений n

Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2} = t + xt^2 + (1 + x^2)t^3 + (2x + x^3)t^4 + (1 + 3x^2 + x^4)t^5 + (3x + 4x^3 +$

$$+ x^5)t^6 + (1 + 6x^2 + 5x^4 + x^6)t^7 + (4x + 10x^3 + 6x^5 + x^7)t^8 + (1 + 10x^2 + 15x^4 + 7x^6 + x^8)t^9 + \ldots \quad (3.325)$$

Обозначив числовые множители производящей функции через $F(n, k)$, можно определять $F_n(x)$ суммой

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F(n, k)x^k \quad (3.326)$$

Сами же множители $F(n, k)$, для разной чётности n и k, вычисляются посредством биномиальных коэффициентов по формуле

$$F(n, k) = \begin{pmatrix} \frac{n + k - 1}{2} \\ k \end{pmatrix} \quad (3.327)$$

Следовательно, и здесь они связаны с числами Фибоначчи треугольником Паскаля. С учётом последней формулы

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n - k - 1}{k} x^{n - 2k - 1} \quad (3.328)$$

Основные свойства полинома Фибоначчи

$$F_{-n}(x) = (-1)^{n-1}F_n(x) \quad (3.329)$$

$$F_{m+n}(x) = F_{m+1}(x)F_n(x) + F_m(x)F_{n-1}(x) \quad (3.330)$$

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - F_n^2(x) = (-1)^n \quad (3.331)$$

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \quad (3.332)$$

где $\alpha(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$, $\beta(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$ (3.333)

являются решениями относительно t уравнения

$$t^2 - xt - 1 = 0 \quad (3.334)$$

Полином Люка

Частный случай последовательности Люка: $L_n(x) = V_n(x, -1)$.

Рекуррентная формула:

$$L_n(x) = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad n = 0 \\ x, & \text{если} \quad n = 1 \\ x L_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), & \text{если} \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (3.335)$$

$$L_0(x) = 2$$

$$L_1(x) = x$$

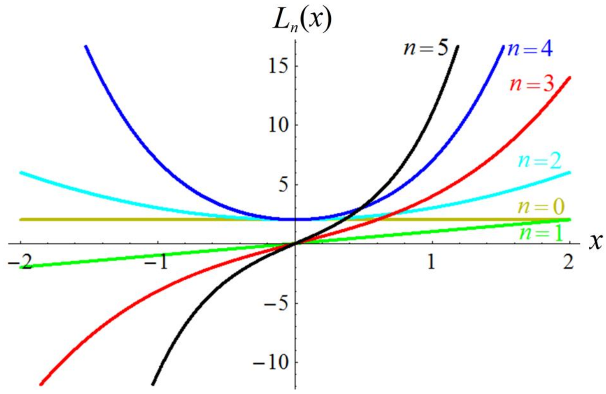
$$L_2(x) = x^2 + 2$$

$$L_3(x) = x^3 + 3x$$

$$L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2$$

$$L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x$$

$$L_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$$



Графики функции $L_n(x)$ для первых шести значений n

Производящая функция: $\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = \dfrac{2-xt}{1-xt-t^2} = 2 + xt + (2+x^2)t^2 + (3x+x^3)t^3 + (2+4x^2+x^4)t^4 + (5x+5x^3 +$

$+ x^5)t^5 + (2+9x^2+6x^4+x^6)t^6 + (7x+14x^3+7x^5+x^7)t^7 + (2+16x^2+20x^4+8x^6+x^8)t^8 + \ldots$ (3.336)

Основные свойства полинома Люка

$$L_{-n}(x) = (-1)^n L_n(x) \tag{3.337}$$

$$L_{m+n}(x) = L_m(x)L_n(x) - (-1)^n L_{m-n}(x) \tag{3.338}$$

$$F_{2n}(x) = F_n(x)L_n(x) \tag{3.339}$$

$$L_n(x) = 2^{-n}\left[\left(x - \sqrt{x^2+4}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2+4}\right)^n\right] \text{ – эксплицитная форма} \tag{340}$$

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x), \tag{3.341}$$

где $$\alpha(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}, \quad \beta(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \tag{3.342}$$

являются решениями относительно t уравнения

$$t^2 - tx - 1 = 0 \tag{3.343}$$

Определение полиномов Чебышева

Три основных способа определения полиномов, или многочленов, Чебышева (Пафнутий Львович Чебышев, 1821 – 1894) первого рода $T_n(x)$ и второго рода $U_n(x)$ [Chebyshev polynomials]:

a) Как решения *дифференциальных уравнений Чебышева* соответственно для полиномов первого и второго порядка:

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \tag{3.344}$$

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0 \tag{3.345}$$

b) Посредством тригонометрических или гиперболических функций:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{arcch} x);\ \text{отсюда}\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \tag{3.346}$$

$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} \tag{3.347}$$

c) Рекуррентными формулами

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ – для полинома первого рода} \tag{3.348}$$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x,$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

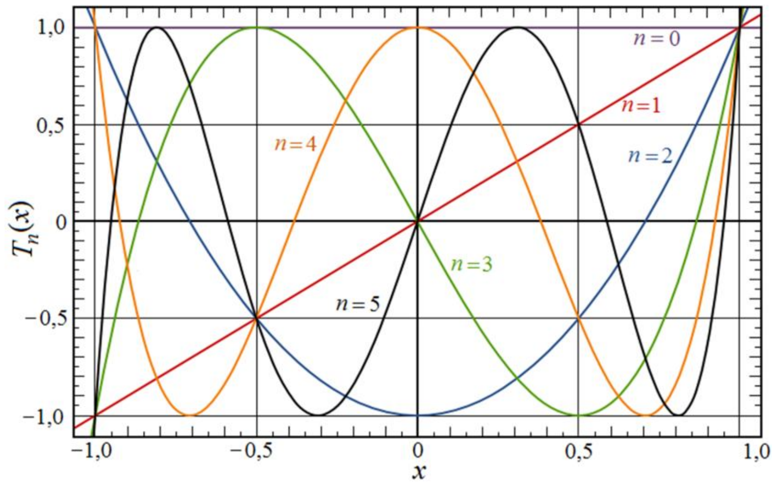
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$



Графики функции $T_n(x)$ для первых шести значений n

$U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x)$ – для полинома второго рода (3.349)

$U_0(x) = 1$

$U_1(x) = 2x$

$U_2(x) = 4x^2 - 1$

$U_3(x) = 8x^3 - 4x$

$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

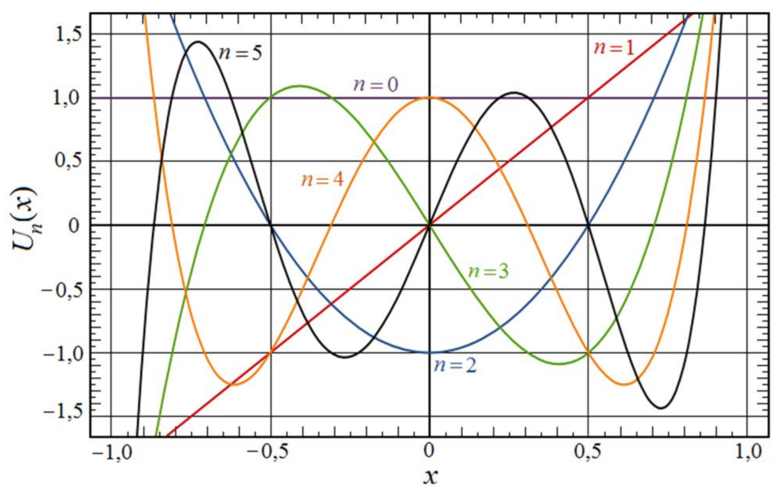
$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$

$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$

$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$



Графики функции $U_n(x)$ для первых шести значений n

Как и во всех подобных случаях, есть, помимо основных, и множество других, менее известных определений, которые просто перечислим, см. [W[6,7]]. Это определения полиномов Чебышева с использованием различных математических методов и конструкций:

- сумма с биномиальными коэффициентами
- детерминант
- операторы
- контурный интеграл
- комплексный интеграл
- уравнение Пелля
- произведение, содержащее тригонометрические функции

Кроме того, $T_n(x)$ и $U_n(x)$ являются частными случаями математических структур более общего типа, в частности полинома Якоби.

Основные свойства полиномов Чебышева

В эксплицитной форме $T_n(x)$ и $U_n(x)$, $(n > 0)$ обычно выражают посредством квадратных корней, константы 2, биномиальных коэффициентов и факториалов и с использованием функции округления при суммировании.

$$T_n(x) = \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{2} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k} = n\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-k)!\,(2k)!}(1-x)^k \tag{3.350}$$

$$U_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n+1}{2k+1} (x^2-1)^k x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \frac{(n+k+1)!}{(n-k)!\,(2k+1)!}(1-x)^k \tag{3.351}$$

Производящая функция для $T_n(x)$:

$$g(t,\ x) = \frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n \tag{3.352}$$

или же

$$g(t,\ x) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n = 1 + xt + (-1+2x^2)t^2 + (-3x+4x^3)t^3 + (1-8x^2+8x^4)t^4 + (5x-20x^3 + 16x^5)t^5 + (-1+18x^2-48x^4+32x^6)t^6 + (-7x+56x^3-112x^5+64x^7)t^7 + \ldots \tag{3.353}$$

Числовая последовательность коэффициентов перед степенями x [Sloane[3]]:

1, 1, –1, 2, –3, 4, 1, –8, 8, 5, –20, 16, –1, 18, –48, 32, –7, 56, –112, 64, 1, –32, 160, –256, 128, 9, –120, 432, –576, 256, –1, 50, –400, 1120, –1280, 512, –11, 220, –1232, 2816, –2816, 1024, 1, –72, 840, –3584, 6912, –6144, 2048, 13, –364, 2912, –9984, 16640, –13312, 4096, … (3.353′)

Для $n!$ и n в знаменателе производящая функция выражается через экспоненту и логарифм:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{(x-\sqrt{x^2-1})t} + e^{(x+\sqrt{x^2-1})t}}{2} \tag{3.354}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\frac{t^n}{n} = \ln\frac{e}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \tag{3.355}$$

Производящая функция для $U_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\, t^n = \frac{1}{1-2tx+t^2} = 1 + 2xt + (-1+4x^2)t^2 + (-4x+8x^3)t^3 + (1-12x^2+16x^4)t^4 + (6x-32x^3+32x^5)t^5 + (-1+24x^2-80x^4+64x^6)t^6 + (-8x+80x^3-192x^5+128x^7)t^7 + (1-40x^2+240x^4-448x^6+256x^8)t^8 + \ldots \tag{3.356}$$

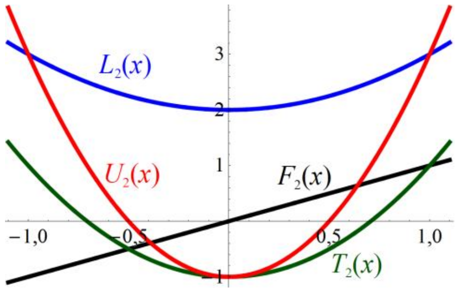
Числовая последовательность коэффициентов перед степенями x [Sloane[4]]:

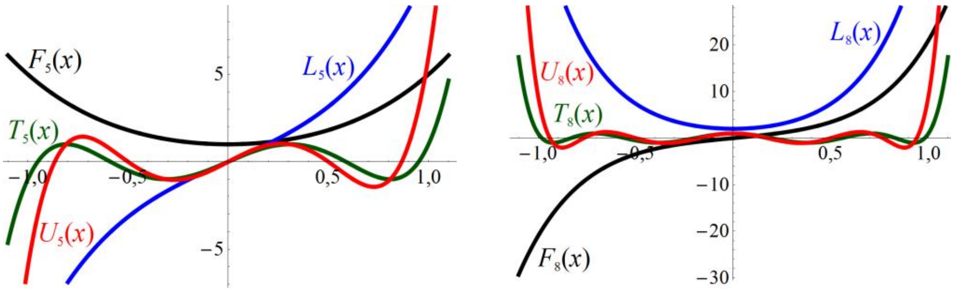
1, 0, 2, –1, 0, 4, 0, –4, 0, 8, 1, 0, –12, 0, 16, 0, 6, 0, –32, 0, 32, –1, 0, 24, 0, –80, 0, 64, 0, –8, 0, 80, 0, –192, 0, 128, 1, 0, –40, 0, 240, 0, –448, 0, 256, 0, 10, 0, –160, 0, 672, 0, –1024, 0, 512, –1, 0, 60, 0, –560, 0, 1792, 0, –2304, 0, 1024, 0, –12, 0, 280, 0, –1792, 0, 4608, 0, –5120, 0, 2048, 1, 0, –84, 0, 1120, 0, –5376, 0, 11520, … (3.357)

Корни полиномов $T_n(x)$ и $U_n(x)$ для всех значений n – действительные числа в интервале $-1 \le x \le 1$. Их легче всего вычислять использованием тригонометрических определений полиномов.

Корни $T_n(x)$: $$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{2k-1}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \qquad (3.358)$$

Корни $U_n(x)$: $$x_k = \cos\left(\pi\frac{k}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \qquad (3.359)$$





Графики полиномов $F_n(x)$, $L_n(x)$, $T_n(x)$ и $U_n(x)$ для $n = 2$, $n = 5$ и $n = 8$

Соотношения для полиномов $T_n(x)$ и $U_n(x)$

Для полиномов Чебышева, как и полиномов Фибоначчи и Люка, существует множество самых разнообразных отношений – от простейших до весьма сложных и замысловатых, см. [W[6,7]; Benjamin, Walton; Morgado[2]; Nakamura].

$$T_n(x) = \frac{U_n(x) - U_{n-2}(x)}{2} \qquad (3.360)$$

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)\,U_{n-1}(x) \qquad (3.361)$$

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x) \qquad (3.362)$$

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x) \qquad (3.363)$$

$$U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_n(x) \qquad (3.364)$$

$$T_n^2(x) + T_m^2(x) = 1 + T_{n+m}(x)\,T_{n+m}(x) \qquad (3.365)$$

$$U_n(x) = 2\sum_{j}^{n} T_j(x), \qquad j \text{ и } n \text{ – нечётные} \qquad (3.366)$$

$$U_n(x) = 2\sum_{j}^{n} T_j(x) - 1, \qquad j \text{ и } n \text{ –чётные} \qquad (3.367)$$

$$U_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j T_{n-j}(x) \qquad (3.368)$$

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (3.369)$$

Более сложные соотношения для $T_n(x)$, используемые для получения множества нестандартных формул для чисел Фибоначчи [Morgado[2], 367]:

$$T_n(x)T_{n+r+s}(x)+\frac{1}{2}[T_{r-s}(x)-T_{r+s}(x)]=T_{n+r}(x)T_{n+s}(x) \tag{3.370}$$

$$4T_n(x)T_{n+r}(x)T_{n+s}(x)T_{n+r+s}(x)+\frac{1}{4}[T_{r-s}(x)-T_{r+s}(x)]^2=[T_n(x)T_{n+r+s}(x)+T_{n+r}(x)T_{n+s}(x)]^2 \tag{3.371}$$

Отношения между полиномами $F_n(x)$ и числами Фибоначчи и Люка

Очевидная формальная схожесть и аналитическая взаимосвязь между $F_n(x)$, $L_n(x)$, $T_n(x)$ и $U_n(x)$, а прежде всего их причастность к числам Фибоначчи и Люка, а значит и золотой константе, означает неотделимость этих полиномов от ТЗС.

Соотношение между полиномом $F_n(x)$ и числами F_n *и* L_n:

$$F_n(L_k)=\frac{F_{kn}}{F_k}, \text{ для любого } n \text{ и если } k - \text{нечётное} \tag{3.372}$$

В частности, для разных значений k имеем следующие равенства:

$k=1 \qquad F_n(L_1)=F_n(1)=\dfrac{F_n}{F_1}$

$k=3 \qquad F_n(L_3)=F_n(4)=\dfrac{F_{3n}}{F_3}$

$k=5 \qquad F_n(L_5)=F_n(11)=\dfrac{F_{5n}}{F_5}$

$k=7 \qquad F_n(L_7)=F_n(29)=\dfrac{F_{7n}}{F_7}$

……………………………………..

$k=15 \qquad F_n(L_{15})=F_n(1364)=\dfrac{F_{15n}}{F_{15}}$

……………………………………..

Отсюда, для любого $n \geq 2$, после несложных преобразований мы получили любопытную формулу предельного перехода для золотой константы с участием полиномов и чисел Фибоначчи и Люка:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{F_n(L_{2m+1})}{F_n(L_{2m-1})}\right)^{\frac{1}{2n-1}}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{F_{(2m+1)n}}{F_{2m+1}}\cdot\frac{F_{2m-1}}{F_{(2m-1)n}}\right)^{\frac{1}{2n-1}}=\phi \tag{3.373}$$

Отношения между полиномами Чебышева и числами Фибоначчи и Люка

$$2\mathrm{i}^{-n}T_n(\mathrm{i}/2)=F_{2n}/F_n=2F_{n+1}-F_n=F_n+2F_{n-1}=L_n, \quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \tag{3.374}$$

$$\mathrm{i}^{-n}U_n(\mathrm{i}/2)=F_{n+1}, \quad n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \tag{3.375}$$

Следовательно,

$$\frac{2T_n(\mathrm{i}/2)}{U_n(\mathrm{i}/2)}=\frac{L_n}{F_{n+1}} \tag{3.376}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2T_n(\mathrm{i}/2)}{U_n(\mathrm{i}/2)}-1\right)^{-1/2}=\phi, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{T_n(\mathrm{i}/2)}{U_n(\mathrm{i}/2)}=1-\frac{2}{\phi} \tag{3.377}$$

Используя “модифицированные” полиномы Чебышева

$$t_n(x)=2T_n(x/2) \text{ и } u_n(x)=U_n(x/2), \tag{3.378}$$

можно получить ряд соотношений с константами i и $\sqrt{5}=2\phi-1$, числами Фибоначчи и Люка [Nakamura, 53, 56].

$$t_{2n-1}(\sqrt{5}F_{2m-1}) = \sqrt{5}F_{(2m-1)(2n-1)} \quad (3.379)$$

$$t_{2n-1}(\mathrm{i}\sqrt{5}F_{2m}) = \mathrm{i}\sqrt{5}(-1)^{n-1}F_{2m(2n-1)} \quad (3.380)$$

$$t_{2n}(\sqrt{5}F_{2m-1}) = L_{(2m-1)2n} \quad (3.381)$$

$$t_{2n}(\mathrm{i}\sqrt{5}F_{2m}) = (-1)^n L_{4mn} \quad (3.382)$$

$$t_n(L_{2m}) = L_{2mn} \quad (3.383)$$

$$t_n(\mathrm{i}L_{2m-1}) = \mathrm{i}^n L_{(2m-1)n} \quad (3.384)$$

$$u_{2n-1}(\sqrt{5}F_{2m-1}) = \sqrt{5}F_{(2m-1)2n}/L_{2m-1} \quad (3.385)$$

$$u_{2n-1}(\mathrm{i}\sqrt{5}F_{2m}) = \mathrm{i}\sqrt{5}(-1)^{n+1}F_{4mn}/L_{2m} \quad (3.386)$$

$$u_{2n}(\sqrt{5}F_{2m-1}) = L_{(2m-1)(2n+1)}/L_{2m-1} \quad (3.387)$$

$$u_{2n}(\mathrm{i}\sqrt{5}F_{2m}) = (-1)^n L_{2m(2n+1)}/L_{2m} \quad (3.388)$$

$$u_{n-1}(L_{2m}) = F_{2mn}/F_{2m} \quad (3.389)$$

$$u_{n-1}(\mathrm{i}L_{2m-1}) = \mathrm{i}^{n-1}F_{(2m-1)n}/F_{2m-1} \quad (3.390)$$

Тригонометрическое определение полиномов Чебышева

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}n\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad (3.391)$$

$$\sin(n+1)\theta = U_n(\cos\theta)\sin\theta, \quad \text{где} \quad \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}n\theta} - e^{-in\theta}}{2\mathrm{i}} \quad (3.392)$$

легко обобщается к формулам **[**Benjamin, Walton, 9**]**

$$T_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n + z^{-n}}{2} \quad (3.393)$$

$$\left(\frac{z-z^{-1}}{2}\right)U_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n - z^{-n}}{2} \quad (3.394)$$

Подстановка $z = e^x$ приводит к гиперболическому определению полиномов Чебышева:

$$T_n(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(nx) \quad (3.395)$$

$$U_n(\mathrm{sh}(x)) = \frac{\mathrm{sh}(nx)}{\mathrm{sh}\ x} \quad (3.396)$$

Здесь особый интерес представляет случай, когда основание показательной функции a^x равно не ФМК e, как обычно, а золотой константе ϕ. Вводя обозначения

$$\mathrm{ch}_\phi(x) = \frac{\phi^x + \phi^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}_\phi(x) = \frac{\phi^x - \phi^{-x}}{2} \quad (3.397)$$

можем записать полиномы Чебышева в виде

$$T_n(\mathrm{ch}_\phi(x)) = \mathrm{ch}_\phi(nx), \ U_n(\mathrm{sh}_\phi(x)) = \frac{\mathrm{sh}_\phi(nx)}{\mathrm{sh}_\phi x} \quad (3.398)$$

7. Гиперболические формы золотой константы

Сравнение обычных гиперболических функций с золотыми

Отметим, что названные *золотым косинусом*, *золотым синусом* и *золотым тангенсом* функции

$$Gchn = \frac{\phi^n + \phi^{-n}}{2}, \quad Gshn = \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{2}, \quad Gth\,n = \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{\phi^n + \phi^{-n}} \tag{3.399}$$

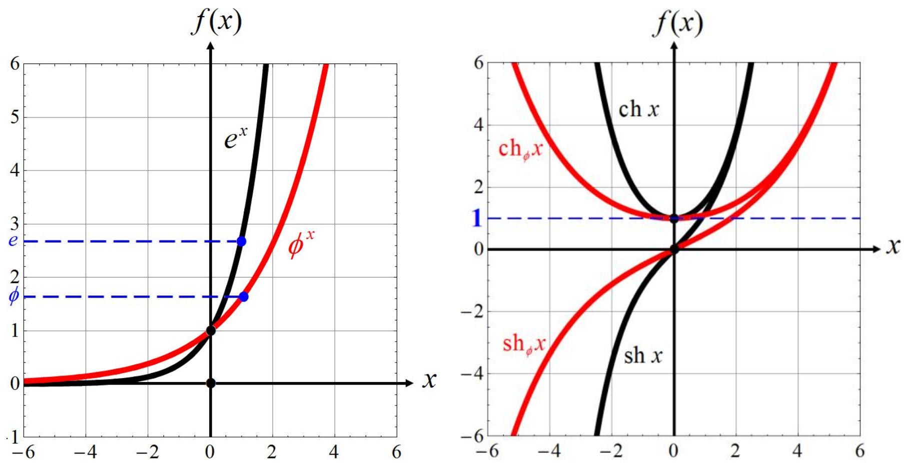
появились при математическом исследовании явления филлотаксиса. По словам автора [Боднар[3]]:

Золотые функции сохраняют основные свойства “классических” гиперболических функций и согласовываются с ними учётом зависимости между числами ϕ и e … Например:

$$\frac{\phi^n + \phi^{-n}}{2} = \frac{e^{n\ln\phi} + e^{-n\ln\phi}}{2}, \quad Gch\,n = \mathrm{ch}(n\cdot\ln\phi)$$

$$\frac{e^n - e^{-n}}{2} = \frac{\phi^{\frac{n}{\ln\phi}} - \phi^{\frac{-n}{\ln\phi}}}{2}, \quad \mathrm{sh}\,n = Gsh(n/\ln\phi).$$

Гиперболические функции золотой константы, как бы они ни обозначались, их производные, модификации и обобщения составляют фрагмент ТЗС и привлекают сегодня внимание исследователей (А.П. Стахов, И.С. Ткаченко, О.Я. Боднар, Б. Розин, С.Х. Аронсон, см. [С[7]] и указанные там источники). Геометрические отличия между показательными функциями с основаниями e и ϕ, между обычными гиперболическими функциями и простейшими золотыми $\mathrm{ch}_\phi x$ и $\mathrm{sh}_\phi x$ наглядно видны из сравнения соответствующих кривых.



Сравнение экспоненты и гиперболических функций с их золотыми аналогами

Знаменатель в выражениях для золотых гиперболических синуса и косинуса не обязательно должен быть равен двум. В обобщённой форме гиперболические косинус и синус, обозначенные здесь как $c(a, r, x)$ и $s(a, r, x)$, а далее просто символами c и s, представляют собой комбинацию действительных чисел в виде суммы или разности двух показательных функций, делённых на некое число r:

$$c(a, r, x) = \frac{a^x + a^{-x}}{r}, \quad s(a, r, x) = \frac{a^x - a^{-x}}{r}, \quad a > 1, \quad r > 0$$

Выбор действительных a и r достаточно произволен, но желательно, конечно, чтобы это были не случайные числа, а математические константы. В случае ТЗС выбор фактически предопределён показательной структурой чисел F_n и L_n, очевидной из формулы Бине. Варианты, связанные со структурой чисел Фибоначчи и Люка, о чём свидетельствуют обозначения и присвоенные функциям названия, рассмотрены в работах [Stakhov, Rozin[1,2]].

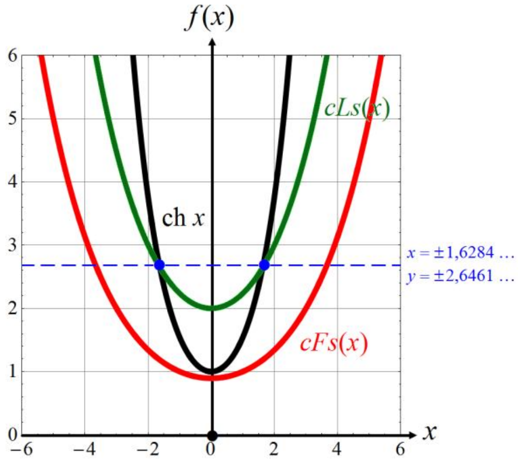
$$cFs(x) = \frac{\phi^x + \phi^x}{\sqrt{5}} \quad \text{симметричный гиперболический косинус Фибоначчи} \tag{3.400}$$

$$sFs(x) = \frac{\phi^x - \phi^x}{\sqrt{5}} \quad \text{симметричный гиперболический синус Фибоначчи} \tag{3.401}$$

$$cLs(x) = \phi^x + \phi^x \quad \text{симметричный гиперболический косинус Люка} \tag{3.402}$$

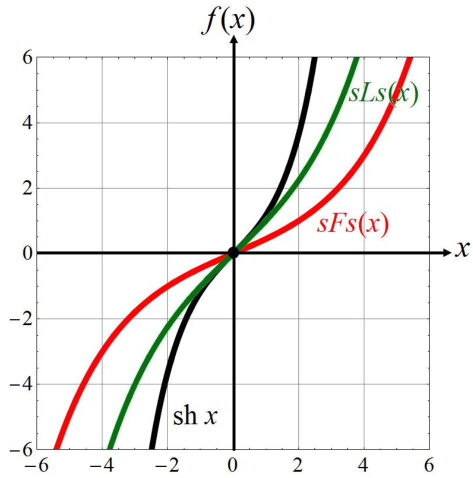
$$sLs(x) = \phi^x - \phi^x \quad \text{симметричный гиперболический синус Люка} \tag{3.403}$$

Для наглядности сравним, как и прежде, кривые этих функций с кривыми обычных гиперболических функций.



Кривые трёх гиперболических косинусов

Вследствие неравенств $e > \phi > \phi/\sqrt{5}$ графики трёх косинусов различаются кривизной и минимумами. Функция ch x имеет минимум в точке (0; 1), $cLs(x)$ – в (0; 2), а $cFs(x)$ – в 0; $2/\sqrt{5} \approx 0{,}894$. Кривые $cFs(x)$ и $cLs(x)$, не имеющие общих точек с ch x, пересекаются в точках (±1,6284…; 2,6462…).



Кривые трёх гиперболических синусов

Геометрия синусов значительно проще. Кривизна, понятно, разная, особых точек нет, пересечение в начале координат.

Как это нередко бывает в науке, пути, ведущие к одной цели, могут быть очень разными. Золотые гиперболические функции в различных, но неизменно привязанных к константе ϕ модификациях можно получить, просто меняя постоянные параметры в структуре, представляющей собой простейшую комбинация двух показательных функций с числом в знаменателе. Можно их также получить через полиномы Чебышева, Фибоначчи и Люка, а значит и последовательности Люка, или с учётом формулы Бине [Стахов, Ткаченко[1,2]], или через математическое исследование явления филлотаксиса [Боднар[1,2]]. Не исключены, конечно, и другие возможности.

Помимо филлотаксиса, золотые гиперболические функции использовались при решении четвёртой проблемы Гильберта [Stakhow, Aranson[1,2]], которая несколько расплывчато [Gray] поставлена следующим образом: “Перечислить метрики, в которых прямые являются геодезическими”. Похоже, что гиперболические функции, являющиеся производными от показательной и логарифмической функций и широко применяемые в различных разделах математики и её приложений, выходят на передний план и в ТЗС. Напомним, что одна из основных форм определения константы ϕ связана с обратным гиперболическим синусом: $\phi = \exp(\mathrm{arcsh}\ ½)$. Но значимы, как видим, и золотые гиперболические функции. Имеет поэтому смысл рассмотреть некоторые их формальные свойства в сравнении с общей и обычной экспоненциальной формами. Начнём с простейших комбинаций косинуса и синуса, их производных, неопределённого и определённого интегралов, после перейдём к другим математическим конструкциям. Наряду с традиционными, привычными ch x и sh x, используем для краткости следующие обозначения: в общем случае вместо $c(a, r, x)$ и $s(a, r, x)$ – более короткие $c(a, r)$ и $s(a, r)$, а порой и просто c и s. Переменная везде одна и та же, поэтому вместо $c(\phi, 2, x)$ используем $c(\phi, 2)$ и $s(\phi, \sqrt{5})$ вместо $s(a, \sqrt{5}, x)$; выражение arcsh ½ = ln ϕ обозначим символом τ.

Таблица
Различные выражения для гиперболических косинуса
и синуса в общем случае, обычной форме и в золотых модификациях

Выражение	**Модификации гиперболических косинуса и синуса**			
	a, r, x	$e, 2, x$	$\phi, 2, x$	$\phi, \sqrt{5}, x$
$c^2 - s^2$	$4/r^2$	1	1	$4/5$
$c^2 + s^2$	$\dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{r}$	$\dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$	$\dfrac{\phi^{2x} + \phi^{-2x}}{2}$	$\dfrac{2}{5}(\phi^{2x} + \phi^{-2x})$
$c \cdot s$	$\dfrac{a^{2x} + a^{-2x}}{r^2}$	$\dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$	$\dfrac{\phi^{2x} + \phi^{-2x}}{4}$	$\dfrac{\phi^{2x} + \phi^{-2x}}{5}$
$dc(x)/dx$	$\dfrac{a^x - a^{-x}}{r} = s(a, r)$	$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x$	$\dfrac{\phi^x - \phi^{-x}}{2} = s(\phi, 2)$	$\dfrac{\phi^x - \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = s(\phi, \sqrt{5})$
$ds(x)/dx$	$\dfrac{a^x + a^{-x}}{r} = c(a, r)$	$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x$	$\dfrac{\phi^x + \phi^{-x}}{2} = c(\phi, 2)$	$\dfrac{\phi^x + \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = c(\phi, \sqrt{5})$
$\int c(x)dx$	$\dfrac{a^x - a^{-x}}{r} = s(a, r)$	$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\, x$	$\dfrac{\phi^x - \phi^{-x}}{2} = s(\phi, 2)$	$\dfrac{\phi^x - \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = s(\phi, \sqrt{5})$
$s(x)dx$	$\dfrac{a^x + a^{-x}}{r} = c(a, r)$	$\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\, x$	$\dfrac{\phi^x + \phi^{-x}}{2} = c(\phi, 2)$	$\dfrac{\phi^x + \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = c(\phi, \sqrt{5})$
$\int_p^q c(x)dx$	$\dfrac{(a^q - a^p) - (a^{-q} - a^{-p})}{r \ln a}$	$\mathrm{sh}\, q - \mathrm{sh}\, p$	$\dfrac{(\phi^q - \phi^p) - (\phi^{-q} - \phi^{-p})}{2\tau}$	$\dfrac{(\phi^q - \phi^p) - (\phi^{-q} - \phi^{-p})}{\sqrt{5}\,\tau}$
$\int_p^q s(x)dx$	$\dfrac{(a^q - a^p) + (a^{-q} - a^{-p})}{r \ln a}$	$\mathrm{ch}\, q - \mathrm{ch}\, p$	$\dfrac{(\phi^q - \phi^p) + (\phi^{-q} - \phi^{-p})}{2\tau}$	$\dfrac{(\phi^q - \phi^p) + (\phi^{-q} - \phi^{-p})}{\sqrt{5}\,\tau}$

Обратные гиперболические функции

Таблица
Ареакосинус, ареасинус и ареасеканс в общем
случае, обычной форме и в золотых модификациях

Варианты	**Обратные гиперболические косинус, синус и секанс**		
	Ареакосинус	**Ареасинус**	**Ареасеканс**
$\boldsymbol{y = f(a, r, x)}$	$\dfrac{\ln\left(\dfrac{px + \sqrt{p^2x^2 - 4}}{2}\right)}{\ln a}$	$\dfrac{\ln\left(\dfrac{px + \sqrt{p^2x^2 + 4}}{2}\right)}{\ln a}$	$\dfrac{\pm\ln\left(\dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4x^2}}{2x}\right)}{\ln a}$
$\boldsymbol{y = f(e, 2, x)}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\pm\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$
$\boldsymbol{y = f(\phi, 2, x)}$	$\dfrac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\ln \phi}$	$\dfrac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln \phi}$	$\dfrac{\pm\ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)}{\ln \phi}$
$\boldsymbol{y = f(\phi, \sqrt{5}, x)}$	$\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}\,x + \sqrt{5x^2 - 4}}{2}\right)}{\ln \phi}$	$\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}\,x + \sqrt{5x^2 + 4}}{2}\right)}{\ln \phi}$	$\dfrac{\pm\ln\left(\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{5 - 4x^2}}{2x}\right)}{\ln \phi}$

В работе [A[7,g], *п.* 6.3] приводится ряд соотношений, связывающих посредством прямых и обратных гиперболических функций константу ϕ с числами Фибоначчи ($k = 1, 2, 3,\ldots; F_0 = 0$):

$$n = 2k \qquad \operatorname{sh}(2\operatorname{arth}\phi^{-2k}) = \frac{2}{F_{2k}(2\phi - 1)} \tag{3.404}$$

$$n = 2k-1 \qquad \operatorname{sh}(2\operatorname{arth}\phi^{-(2k-1)}) = \frac{2}{F_{2k-2} + F_{2k}} \tag{3.405}$$

$$n = 2k \qquad \operatorname{ch}(2\operatorname{arth}\phi^{-2k}) = \frac{F_{2k-1} + F_{2k+1}}{F_{2k}(2\phi - 1)} \tag{3.406}$$

$$n = 2k-1 \qquad \operatorname{ch}(2\operatorname{arth}\phi^{-2(k-1)}) = \frac{F_{2k-1}(2\phi - 1)}{F_{2k-2} + F_{2k}} \tag{3.407}$$

В справедливости этих соотношений можно убедиться непосредственно подстановкой численных значений, либо выражая $\operatorname{arth} x$ через $\ln x$, а $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ через e^x и применяя формулу Бине. Второе и четвёртое соотношения с учётом формулы связи

$$L_k = F_{k-1} + F_{k+1}, \; (k = 1, 2, 3, \ldots; F_0 = 0)$$

между числами Фибоначчи и Люка можно привести к несколько более простому виду:

$$n = 2k-1 \qquad \operatorname{sh}(2\operatorname{arth}\phi^{-2(k-1)}) = \frac{2}{L_{2k-1}} \tag{3.408}$$

$$n = 2k-1 \qquad \operatorname{ch}(2\operatorname{arth}\phi^{-2(k-1)}) = \frac{F_{2k-1}(2\phi-1)}{L_{2k-1}} \tag{3.409}$$

Соответствующие соотношениям последовательности несократимых числовых дробей таковы:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{4\sqrt{5}}, \frac{2}{21\sqrt{5}}, \frac{2}{55\sqrt{5}}, \frac{1}{72\sqrt{5}}, \frac{2}{377\sqrt{5}}, \ldots \tag{3.410}$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{2}{11}, \frac{2}{29}, \frac{1}{38}, \frac{2}{199}, \frac{2}{521}, \frac{1}{682}, \frac{2}{3571}, \frac{2}{9349}, \ldots \tag{3.411}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{7}{3\sqrt{5}}, \frac{9}{4\sqrt{5}}, \frac{47}{21\sqrt{5}}, \frac{123}{55\sqrt{5}}, \frac{161}{72\sqrt{5}}, \frac{843}{377\sqrt{5}}, \ldots \tag{3.412}$$

$$\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{5\sqrt{5}}{11}, \frac{13\sqrt{5}}{29}, \frac{17\sqrt{5}}{38}, \frac{89\sqrt{5}}{199}, \frac{233\sqrt{5}}{521}, \frac{305\sqrt{5}}{682}, \ldots \tag{3.413}$$

Сразу видно, что первые две последовательности (для гиперболического синуса) стремятся к 0, а две последние (для гиперболического косинуса) – к 1.

Используя связи между гиперболическими и тригонометрическими формулами и принимая во внимание, что в области действительных чисел функция $\operatorname{tg} x$ существует в отличие от $\operatorname{th} x$ и для значений $x > 1$, легко привести полученные выше соотношения к тригонометрической (e-i-2) форме:

$$n = \pm 2k \qquad \sin(2\operatorname{arctg}\phi^{\pm 2k}) = \frac{2}{L_{2k}} \tag{3.414}$$

$$n = \pm(2k-1) \qquad \sin(2\operatorname{arctg}\phi^{\pm(2k-1)}) = \frac{2}{(2\phi-1)F_{2k-1}} \tag{3.415}$$

$$n = \pm 2k \qquad \cos(2\operatorname{arctg}\phi^{\pm 2k}) = \mp\frac{F_{2k}(2\phi-1)}{L_{2k}} \tag{3.416}$$

$$n = \pm(2k-1) \qquad \cos(2\operatorname{arctg}\phi^{\pm(2k-1)}) = \mp\frac{L_{2k-1}}{(2\phi-1)F_{2k-1}} \tag{3.417}$$

Имеем следующие числовые последовательности:

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{9}, \frac{2}{47}, \frac{2}{123}, \frac{1}{161}, \frac{2}{843}, \frac{2}{2207}, \frac{1}{2889}, \ldots \tag{3.418}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{5\sqrt{5}},\ \frac{2}{13\sqrt{5}},\ \frac{1}{17\sqrt{5}},\ \frac{2}{89\sqrt{5}},\ \frac{2}{233\sqrt{5}},\ \frac{1}{305\sqrt{5}},\ \ldots \qquad (3.419)$$

$$\mp\frac{\sqrt{5}}{3},\ \mp\frac{3\sqrt{5}}{7},\ \mp\frac{4\sqrt{5}}{9},\ \mp\frac{21\sqrt{5}}{47},\ \mp\frac{55\sqrt{5}}{123},\ \mp\frac{72\sqrt{5}}{161},\ldots \qquad (3.420)$$

$$\mp\frac{1}{\sqrt{5}},\ \mp\frac{2}{\sqrt{5}},\ \mp\frac{11}{5\sqrt{5}},\ \mp\frac{29}{13\sqrt{5}},\ \mp\frac{38}{17\sqrt{5}},\ \mp\frac{199}{89\sqrt{5}},\ \ldots \qquad (3.421)$$

Как и в случае гиперболических функций, первые две последовательности стремятся к нулю, а последние две (четыре – с учётом знаков) стремятся к единице. Обозначив образованные посредством гиперболических функций последовательности (3.412) и (3.413) через $\{a_h\}$ и $\{b_h\}$, а образованные посредством тригонометрических функций последовательности (3.420) и (3.421) через $\{a_t\}$ и $\{b_t\}$, имеем простые соотношения

$$\{a_h\} = 1/|\{a_t\}|,\ \ \{b_h\} = 1/|\{b_t\}|, \qquad (3.422)$$

справедливые для любых индексов h, $t = 1, 2, 3, \ldots$.

Получено в общей сложности десять бесконечных рядов, сходящихся к нулю либо к единице. Два ряда не содержат числа ϕ и являются последовательностями рациональных чисел, выражаемых через числа Фибоначчи; остальные восемь представляют собой упорядоченные множества иррациональных чисел. Разумеется, применяя какие-то другие сочетания гиперболических и тригонометрических чисел, можно прийти к числовым рядам, в общем случае комплексным, отличным от рассмотренных.

Каждая из составленных посредством числа ϕ последовательностей может быть условно названа *золотой*, но теоретическая, а тем более практическая значимость того или иного ряда определяется отнюдь не только этим. Важно знать, соотносится ли хотя бы с одной из этих последовательностей нечто реальное, или за этим ничего не стоит и это лишь самодостаточная игра, не нуждающаяся во внешнем оправдании? У нас нет пока ответа, и потому обе версии представляются равновозможными. Однако в данном контексте большего внимания заслуживает всё же тот факт, что определённые e-2 и e-i-2 преобразования над целыми степенями $\pm n$ числа ϕ приводят к последовательностям, непосредственно составленным из самого числа ϕ, чисел Фибоначчи (или Люка), а также констант 2, i.

Интегральные формы связи константы ϕ с натуральным логарифмом

$$\int \phi^{-x}dx = \frac{\phi^{-x}}{\ln\phi} + C = \frac{\phi^{-x}}{\operatorname{arcsh}(1/2)} + C, \quad C \text{ – произвольная постоянная} \qquad (3.423)$$

$$\int_0^{\infty} \phi^{-x}dx = \frac{1}{\ln\phi} = \frac{1}{\operatorname{arcsh}(1/2)} \qquad (3.424)$$

$$\int_0^{-\frac{i\pi}{\ln\phi}} \phi^{-x}dx = \frac{2}{\ln\phi} = \frac{2}{\operatorname{arcsh}(1/2)} \qquad (3.425)$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \frac{3\ln\phi}{2} = \frac{3\operatorname{arcsh}(1/2)}{2} \qquad (3.426)$$

Значения обратных эллиптических функций Якоби:

$$sc^{-1}(z, m) = \int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\ \sqrt{(1-m)x^2+1}}dx = \ln\phi = \operatorname{arcsh}(1/2) \qquad (3.427)$$

$$sd^{-1}(z, m) = \int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{mx^2+1}\ \sqrt{1-(1-m)x^2}}dx = \ln\phi = \operatorname{arcsh}(1/2) \qquad (3.428)$$

Если $z = 1$ и $m = 1/2$, имеем:

$$sc^{-1}(1,\ 1/2) = \ln\phi = \operatorname{arcsh}(1/2) \qquad (3.427')$$

$$sd^{-1}(1,\ 1/2) = \ln\phi = \operatorname{arcsh}(1/2) \qquad (3.428')$$

Заметим, что все шесть интегральных выражений приводят к показателю степени τ в экспоненте $\phi = e^{\operatorname{arsh}(1/2}$ – одной из основных форм явного аналитического представления золотой константы.

8. Глобальные и гиперболические аттракторы

Н*езависимость конечного состояния от начальных условий* можно, хотя и не совсем корректно, соотнести с понятием *детерминизма*, словами естественного языка *предопределённость*, *неотвратимость*, античным *фатумом*, *судьбой*, философско-религиозной верой в *фатальную неизбежность бытия*, эзотерическим *роком* и тому подобное. В науке, особенно математике, независимость конечного результата от исходных данных высоко ценится и обычно ассоциируется с понятием *аттрактора*. Конкретно, в числовой математике аттрактор можно понимать как некое постоянное число континуума, являющееся неизменным, не зависящим от выбора начальных значений предельным результатом применения последовательности определённых математических операций.

Аналитически идея числового аттрактора выражается посредством функционального уравнения типа

$$\lim_{n\to\infty} f(f(\ldots f(x))) = x \qquad (3.429)$$

с неизвестным оператором f и некой константой, имплицитно заложенной в самой идее аттрактора в качестве её центрального элемента, причём результат может быть и многозначным. Общее решение этого уравнения в теории ЛМФ в рамках системы пяти функциональных уравнений можно найти в работах [$\mathrm{A}^{7,c}$; $\mathrm{A}^{8,a}$; A^{10}; Ar^{2-4}]. Решение в области элементарных функций для произвольно взятого, действительного или мнимого числа приводит к обратной экспоненте, функции косинуса и двум фундаментальным математическим константам, глобальным аттракторам, *постоянной суперпозиции косинуса* ɯ и *омега константе* W(1). Кстати, “эмпирически” константа ɯ = 0,73908 51332… может быть получена многократным нажатием, независимо от набранного вначале числа и конечно в режиме “radian”, кнопки COS калькулятора, а константа W(1) = 0,56714 32904… – последовательным нажатием кнопок e^x и $1/x$.

Омега постоянная является также минимальным значением функции W(z), названной именем швейцарского математика Иоганна Ламберта (кстати, впервые, как мы знаем из первой главы, доказавшего иррациональность числа π) и определяемой трансцендентным уравнением

$$\mathrm{W}(z)\cdot e^{\mathrm{W}(z)} = z \qquad (3.430)$$

Несмотря на явное, на первый взгляд, внешнее несходство, оно связано с квадратным уравнением золотой константы, корни $x_1 = \phi$ и $x_2 = -\phi^{-1} = f(\phi)$ которого могут быть записаны в форме

$$x_1 x_2 = \phi\cdot f(\phi) = -1, \qquad (3.431)$$

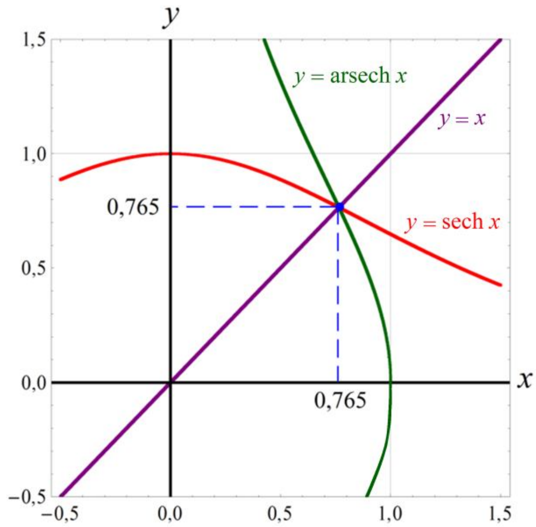
то есть в виде равного –1 произведения константы на функцию от константы. Но уравнение Ламберта для значения $z = 1$ имеет такую же форму, только вместо функции f здесь экспонента, вместо константы ϕ – константа W(1) и вместо знака минус при единице – плюс:

$$\mathrm{W}(1)\cdot e^{\mathrm{W}(1)} = 1 \qquad (3.432)$$

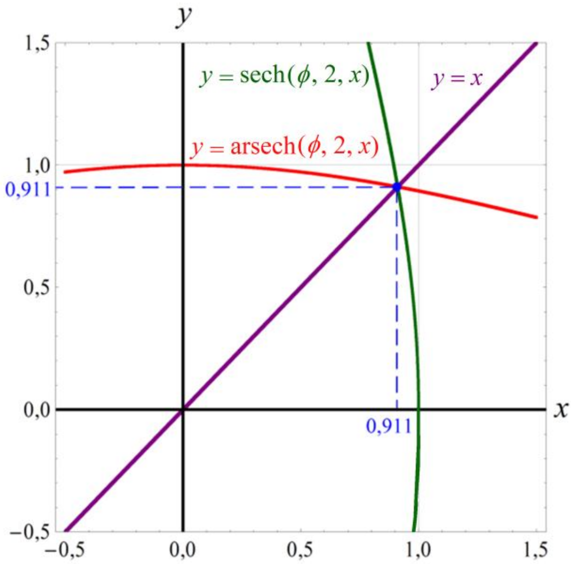
Поэтому не случайно константу W(1) относят к разряду чисел “типа золотого сечения” [Lambert W-function].

В содержательном понимании идея числового аттрактора означает перевод посредством бесконечной последовательности однотипных математических преобразований континуального множества, или какой-то его части, в некое фиксированное число. В геометрической интерпретации это фиксированная, неподвижная точка в системе декартовых координат, являющаяся тройной точкой пересечения определённой функции, её обратной функции и задаваемого линейным уравнением $y = x$ аргумента функции. Подобная особенность – большая редкость даже в области действительных чисел, где среди трёх десятков элементарных функций не равную 0 и 1 точку притяжения имеет, за исключением косинуса и обратной экспоненты, только гиперболический косинус. В конструкции типа $(a^x + a^{-x})/p$, $a > 1$, основание показательной функции и знаменатель могут быть, как мы знаем, разными, в том числе золотыми. Ниже приведены общие соотношения, графики, соответствующие фунциональные уравнения и константы для обычного гиперболического косинуса sec x, его золотых модификаций sech(ϕ, 2, x) и sech(a, $\sqrt{5}$, x).

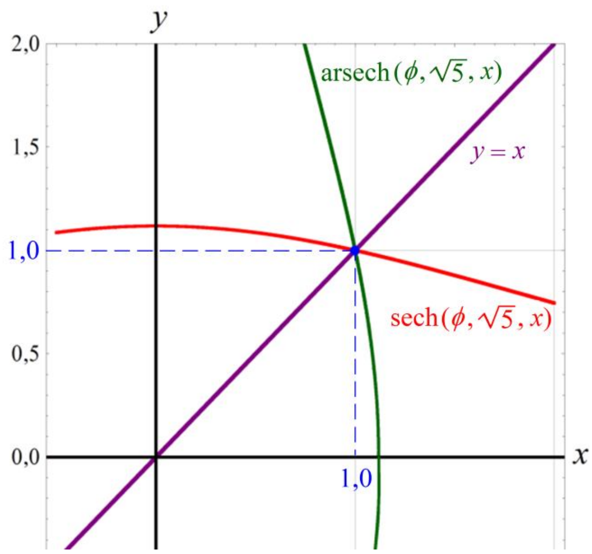
Тройные точки пересечения кривых



Тройная точка пересечения кривых $y = x$, $y = \operatorname{sech} x$ и $y = \operatorname{arsech} x$



Пересечение кривых $y = x$, $y = \operatorname{sech}(\phi, 2, x)$ и $y = \operatorname{arsech}(\phi, 2, x)$ в точке $y = x = 0{,}911\ldots$



Пересечение кривых $y = x$, $y = \operatorname{sech}(a, \sqrt{5}, x)$ и $y = \operatorname{arsech}(a, \sqrt{5}, x)$ в точке $y = x = 1{,}0$

Уравнения тройных точек. Гиперболические аттракторы

$$\lim_{n\to\infty} f(f(\dots f(x)\dots)=\text{const} \tag{3.433}$$

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n-1\to\infty} \tag{3.434}$$

$$f(x)=\operatorname{arc} f(x)=x \tag{3.435}$$

$$\operatorname{sech} x = \operatorname{arsech} = x \qquad x(e)=0{,}76500\ \dots \tag{3.436}$$

$$\operatorname{sech}(\phi,2,x)=\operatorname{arsech}(\phi,2,x)=x \qquad x(\phi,2)=0{,}91103\ \dots \tag{3.437}$$

$$\operatorname{sech}(a,\sqrt{5},\ x)=\operatorname{arsech}(a,\sqrt{5},\ x)=x \qquad x(a,\sqrt{5}\ )=1{,}0 \tag{3.438}$$

Обозначения: $\operatorname{sech} x = s$, $\operatorname{sech}(\phi, 2, x) = s_1$, $\operatorname{sech}(a, \sqrt{5}, x) = s_2$ (3.439)

$$\lim_{n\to\infty} s(s(\ \dots s(x)\ \dots)=c(e)=0{,}76500\ 99545\ 50732\ 12265\ \dots \tag{3.440}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_1(s_1(\ \dots s_1(x)\ \dots)=c_1(\phi,2)=0{,}91103\ 92260\ 87438\ 42328\ \dots \tag{3.441}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_2(s_2(\dots s_2(x)\dots)=c_2(\phi,\sqrt{5})=1{,}0 \tag{3.442}$$

Теоретический статус гиперболических аттракторов довольно высок, и нет серьёзных оснований сомневаться в их потенциальной востребованности. Вариант $\operatorname{sech}(a, \sqrt{5}, x)$ с константой 1,0 в принципе бесполезен, но следует, видимо, обратить внимание и ждать сюрпризов от констант $0{,}76500\dots$ и $0{,}91103\dots$, особенно в областях, связанных с теориями самоорганизации, планетных орбит и турбулентности, переходами от хаотического состояния к стабильному. Невозможно, однако, угадать, какой из имеющихся вариантов наиболее перспективен с точки зрения использования в решении вопросов чистой теории и в области приложений.

9. Закон Бенфорда

В продолжение темы о связи числа ϕ с функциями e^x и $\ln x$, являющимися исходными, “материнскими” в теории ЛМФ, рассмотрим математическую проблему, интерес к которой достаточно велик. Она носит название *закона Бенфорда*, или *феномена первого знака*, или *проблемы начальной цифры*, и касается равноправия знаков, посредством которых осуществляется представление чисел. Известно, что в n-ичных, в частности десятичных дробях, в отличие от цепных, обычно реализуется принцип числового равенства, то есть соблюдается закон случайного распределения чисел, обеспечивающий равное в пределах допустимой статистической погрешности представительство всех знаков. Это особенно наглядно на примере первых шестисот миллиардов и триллиона двухсот миллиардов десятичных знаков числа π [A^{7,f}, *п*. 5.1].

Посмотрим теперь, как обстоит дело в случае множества $\{F_n\}$. Для получения статистически надёжных данных нужны большие числа и желательно, чтобы они были удобными для обозрения. В формуле Бине

$$F_n=\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}-\frac{\phi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

с увеличением показателя степени n второе слагаемое стремится к нулю, числитель первого слагаемого всё меньше отличается от целого числа, а десятичный логарифм $\lg\sqrt{5}\approx 0{,}35$ меньше $1/2$. Отсюда следует формула

$$N(F_n)=R(n\lg\phi),\quad n\gg 1 \tag{3.443}$$

для общего количества *десятичных знаков* $N(F_n)$ числа F_n, где $R(x)$ функция округления. Для каждого из десяти знаков $j = 0, 1, \dots, 9$

$$N_j(F_n)=R\left(\frac{n\lg\phi}{10}\right),\ n\gg 1 \tag{3.444}$$

Это даёт нам возможность подобрать число $F_{4\,784\,972}$, количество десятичных знаков $N(F_n)$ для которого в точности равно миллиону. Кроме того, для большей полноты и определения динамики изменения возьмём три других числа поменьше: дважды выделенное $F_{10\,946}$ ($10\,946 = F_{21}$), $F_{100\,000}$ и $F_{1\,000\,000}$ и приведём конечные результаты по десяти знакам десятичного представления, взяв за критерий оценки среднее и максимальное отклонения (в процентах) от статистически среднего значения.

Таблица
Отклонения вхождений десятичных знаков
чисел F_n от статистически средних значений

Число	**Среднее отклонение в %**	**Максимальное отклонение в %**
$F_{10\,946}$	2,8	5,6
$F_{100\,000}$	1,9	3,2
$F_{1\,000\,000}$	0,27	0,85

Тенденция приближения к теоретическому идеалу (3.444) с увеличением номера n вполне очевидна. Остаётся подтвердить её на примере последнего, самого большого и “удобного” числа $F_{4\,784\,972}$.

Таблица
Отклонения вхождений десятичных знаков
$F_{4\,784\,972}$ от статистически среднего значения

Цифра	**Количество вхождений**	**Отклонение в процентах**
0	100 652	+ 0,652
1	99 772	– 0,228
2	99 714	– 0,286
3	100 165	+ 0,165
4	99 911	– 0,089
5	99 810	– 0,19
6	99 757	– 0,243
7	99 922	– 0,078
8	100 141	+ 0,141
9	100 156	+ 0,156

Максимальное отклонение равно 0,652, среднее равно 0,2228 и можно уже делать общий вывод, относящийся к числам F_n и, естественно, к их множеству $\sum\limits_n F_n$: с увеличением n частота вхождения знаков 0, 1, …, 9 стремится ко всё более точному соответствию с законом их равнораспределения. Этот интуитивно ожидаемый с самого начала вывод легко обобщить на случай системы счисления с любым основанием $a = 2, 3, 4, \ldots$. В формуле (3.444) надо только заменить основание позиционной системы счисления 10 на a, и тогда частота вхождения для каждого из a знаков определится по формуле

$$N_j(F_n) = R\left(\frac{n\log_a \phi}{a}\right), \qquad n \gg 1, \tag{3.444′}$$

которую можно записать через натуральный логарифм:

$$N_j(F_n) = R\left(\frac{n\ln \phi}{a\ln a}\right), \qquad n \gg 1 \tag{3.444″}$$

Изменив задачу, рассмотрим теперь статистику не *всех*, а лишь *начальных* знаков членов ряда Фибоначчи. Ограничимся вначале первыми ста числами F_n.

Таблица
Частота вхождений для начальных знаков первых ста F_n

Цифра	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Частота	30	18	13	9	8	6	5	7	4

Здесь картина разительно отличается от ранее рассмотренной. В тридцати (!) случаях из ста число Фибоначчи начинается с 1 и лишь в четырёх (?) – с 9. Очень большие отклонения от предписываемого законом случайного распределения чисел среднего значения $100/9 \approx 11$ бросаются в глаза. Обращает на себя внимание и почти неуклонное убывание частоты с увеличением цифр от 1 до 9. Поразительно, но подобная закономерность, впервые замеченная в конце XIX века [Newcomb], забытая, а потом заново открытая в конце тридцатых годов XX в. [Benford], имеет достаточно общий характер. Современная история этого закона началась… с подмеченной потёртости таблиц логарифмов. Перелистывая книгу, Бенфорд заметил, что страницы, на которых стоят логарифмы чисел, *начинающихся с единицы*, замусолены больше остальных. Тогда он подверг статистическому анализу более 20 000 чисел, относящихся к самым разным наборам величин, всего 20 наборов в среднем по 1011 величин в каждом. Результат представлен в таблице, взятой (с приведением к стандартам настоящей работы) из [Benford].

Таблица

Статистический анализ по 20 наборам и в среднем

col.	title	1	2	3	4	5	6	7	8	9	samples
A	**Rivers, Area**	31,0	16,4	10,7	11,3	7,2	8,6	5,5	4,2	5,1	**335**
B	**Population**	33,9	20,4	14,2	8,1	7,2	6,2	4,1	3,7	2,2	**3259**
C	**Constants**	41,3	14,4	4,8	8,6	10,6	5,8	1,0	2,9	10,6	**104**
D	**Newspapers**	30,0	18,0	12,0	10,0	8,0	6,0	6,0	5,0	5,0	**100**
E	**Specific Heat**	24,0	18,4	16,2	14,6	10,6	4,1	3,2	4,8	4,1	**1389**
F	**Pressure**	29,6	18,3	12,8	9,8	8,3	6,4	5,7	4,4	4,7	**703**
G	**H.P. Lost**	30,0	18,4	11,9	10,8	8,1	7,0	5,1	5,1	3,6	**690**
H	**Mol. Wgt.**	26,7	25,2	15,4	10,8	6,7	5,1	4,1	2,8	3,2	**1800**
I	**Drainage**	27,1	23,9	13,8	12,6	8,2	5,0	5,0	2,5	1,9	**159**
J	**Atomic Wgt.**	47,2	18,7	5,5	4,4	6,6	4,4	3,3	4,4	5,5	**91**
K	n^{-1}, $\sqrt{n}$	25,7	20,3	9,7	6,8	6,6	6,8	7,2	8,0	8,9	**5000**
L	**Design**	26,8	14,8	14,3	7,5	8,3	8,4	7,0	7,3	5,6	**560**
M	**Reader's Digest**	33,4	18,5	12,4	7,5	7,1	6,5	5,5	4,9	4,2	**308**
N	**Cost Data**	32,4	18,8	10,1	10,1	9,8	5,5	4,7	5,5	3,1	**741**
O	**X-Ray Volts**	27,9	17,5	14,4	9,0	8,1	7,4	5,1	5,8	4,8	**707**
P	**Am. League**	32,7	17,6	12,6	9,8	7,4	6,4	4,9	5,6	3,0	**1458**
Q	**Blackbody**	31,0	17,3	14,1	8,7	6,6	7,0	5,2	4,7	5,4	**1165**
R	**Addresses**	28,9	19,2	12,6	8,8	8,5	6,4	5,6	5,0	5,0	**342**
S	$n^1, n^2 \ldots n!$	25,3	16,0	12,0	10,0	8,5	8,8	6,8	7,1	5,5	**900**
T	**Death Rate**	27,0	18,6	15,7	9,4	6,7	6,5	7,2	4,8	4,1	**418**
	Average	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	**1011**
	Probable Error	**±0,8**	**±0,4**	**±0,4**	**±0,3**	**±0,2**	**±0,2**	**±0,2**	**±0,3**		

Усредненная по всем наборам таблица частот встречаемости (в процентах) девяти цифр имеет следующий вид:

Таблица

Распределение частот в среднем по 20 наборам (по Бенфорду)

Цифра	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Частота	30,6	18,5	12,4	9,4	8,0	6,4	5,1	4,9	4,7

Было высказано предположение, что вероятность (относительная частота) появления на первом месте десятичного знака q ($q = 1, 2, \ldots, 9$) определяется по формуле

$$P(q) = \log_{10}(1 + 1/q) \qquad (3.445)$$

Следовательно, идеальное распределение вероятностей (в процентах) должно подчиняться логарифмическому закону, представленному в таблице и наглядно показанному на диаграмме.

Таблица

Распределение частот по формуле (3.444)

Цифра	**Частота, %**
1	30,10299…
2	17,60912…
3	12,49387…
4	9,69100…
5	7,91812…
6	6,69467…
7	5,79919…
8	5,11525…
9	4,57574…

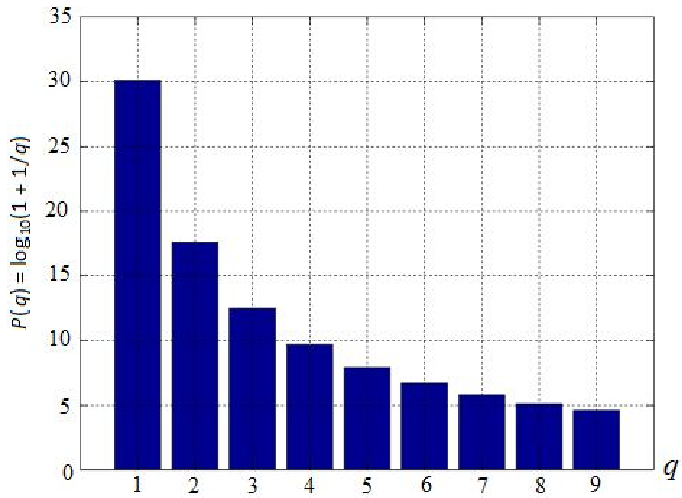


Диаграмма распределения частот по формуле (3.444)

Сравнение всех этих частот с данными Бенфорда показывает, что минимальное относительное отклонение $\sigma_{\min} \approx 0{,}75\%$ (для $q = 3$), максимальное $\sigma_{\max} \approx 12\%$ (для $q = 7$), а в среднем для девяти цифр $\bar{\sigma} \approx 3{,}9$ %. Такое соответствие нельзя признать случайным, но на этом этапе обсуждения неизбежно возникают вопросы.

а) Для получения статистически корректных выводов необходимы наборы, состоящие если не из бесконечного, то во всяком случае достаточно большого числа данных. Между тем, ни один из рассмотренных Бенфордом наборов величин, как и усредняемая определённым образом их совокупность, не говоря уж о множестве первых ста чисел F_n, не удовлетворяет этому требованию. Вывод о соответствии логарифмическому закону больше похож на гипотезу, полученную на основе неполной индукции, чем на солидный статистический закон. А неполная индукция при всей своей привлекательности и продуктивности – неиссякаемый источник всевозможных заблуждений и ошибок. Например, тезис “бóльшая часть нечётных чисел – простые” подтверждается для первых десяти, двадцати, даже девяноста чисел натурального ряда, но ошибочен в целом. Так можно ли ставить рядом со статистическим законом, подтверждаемым на примере более чем триллиона знаков великой константы π и миллиона знаков числа $F_{4\,784\,972}$, полуэмпирический закон, апеллирующий к разнородной и крайне ограниченной базе данных? Насколько универсален феномен первого знака, каковы пределы его применимости?

b) Многие наборы составлены из *размерных* величин, численные значения которых зависят от произвольного и исторически случайного выбора единиц измерения. Меняя единицы измерения, можно получить совсем другое число, начинающееся с другой цифры. Даже если допустить, что закон Бенфорда верен для какого-то множества размерных величин, не перестанет ли он быть таковым при изменении единиц измерения?

c) Все без исключения наборы величин записаны в десятичной системе счисления, которая теоретически не имеет преимуществ перед какой-либо другой системой счисления с основанием *a*, притом не обязательно целым. А запись любого числа за исключением 0 зависит, вообще говоря, от выбора системы счисления. Если принять, что закон первого знака действительно выполняется в определённых случаях, имеет ли, спрашивается, при этом место и *закон сохранения закона Бенфорда*? Точнее, является ли данный закон инвариантом относительно перехода от одной системы счисления к другой?

Исследования недавнего прошлого [Flehinger; Raimi[1,2]; Barlow and Bareiss; Schatte], относящиеся к числам и Фибоначчи и Люка [Washington], исследования последнего времени [Boyle; Ley; Nigrini], но особенно [Hill[1,2,3]], см. также [Benford's law], во многом проясняют ситуацию и позволяют ответить на некоторые вопросы. Но давать однозначные оценки по-прежнему не всегда возможно, и не случайно, что закон Бенфорда всё ещё нередко характеризуется эпитетом "таинственный". В любом случае феномен первого знака отмечен лишь для *естественных* числовых наборов. Это необходимое условие справедливости закона Бенфорда. Что касается размерности величины, то насколько можно судить, заметной роли она не играет. Неважно, будем ли мы измерять площадь страны в квадратных километрах или в квадратных милях: с изменением размерности меняются, конечно, все числа, но статистика распределения первого знака существенно не меняется. Одним из основополагающих принципов статистики и теории вероятностей является закон больших чисел, предполагающий большое число *испытаний*, приводящее к нивелировке *случайных факторов*. В свете этого можно ожидать, что с увеличением элементов испытуемого набора распределение всё точнее будет соответствовать формуле (3.445). Однако в большинстве случаев, если речь идёт, скажем, о населении или площади стран, возможностей для этого практически нет.

10. Числа Фибоначчи и феномен первого знака

Не совсем также ясно, что такое *естественный набор величин* и какими критериями здесь надо руководствоваться. Так, для казалось бы, бесспорно естественной числовой последовательности $\{1/n\}$ [Benford] хорошего соответствия логарифмическому распределению нет. Набор испытуемых величин (5000) здесь выше, чем в остальных случаях, однако среднее отклонение равно 35,9%, а максимальное 94,5%. Это намного хуже, чем в целом по набору всех рассмотренных Бенфордом величин (напомним, 3,9% и 12% соответственно) и хуже, чем даже для малой части бесконечного множества чисел Фибоначчи. **О**б этом говорят данные для первой сотни чисел Фибоначчи, приведённые выше в таблице: $\sigma_{max} \approx 36{,}9\%$ и $\bar{\sigma} \approx 9{,}8\%$. Не ограничиваясь столь мизерным для статистики количеством и последовательно увеличивая набор на сто новых членов, проследим за динамикой изменения этих показателей хотя бы для первых 500 чисел F_n.

Таблица

Отклонение от закона логарифмического распределения для первых пятисот чисел Фибоначчи

n	σ_{max}, %	$\bar{\sigma}$, %
100	36,9	9,8
200	17,3	5,8
300	10,8	4,3
400	4,6	1,6
500	5,6	1,8

Уже для четырёхсот чисел F_n отклонение от среднего значительно меньше, чем для двадцати тысяч взятых Бенфордом величин. Можно сказать, что для столь малого, статистически почти ничтожного набора величин закон Бенфорда подтверждается с очень хорошей точностью. Более того, соответствие последовательности чисел Фибоначчи логарифмическому закону (3.445) первого знака близко к идеальному, но в процентах, вычисляемых для относительно *небольших целых* чисел, это должным образом не отражается. Согласно указанному закону идеальной для набора из n величин должна считаться частота вхождений $k_j(n)$ знака j ($j = 1, 2, \ldots, 9$), определяемая по формуле

$$k_j(n) = R[n \cdot \lg(1 + 1/j)], \tag{3.446}$$

в которой десятичная дробь в квадратных скобках округляется функцией R до ближайшего целого значения. Например для $j = 1$ и $n = 500$

$$k_1(500) = R[500 \times \lg(1 + 1/1)] = R[150{,}5149\ldots] = 151, \tag{3.447}$$

а это как раз *в точности* совпадает с истинным значением; между тем этому соответствует $\sigma \approx 0{,}3\%$, отнюдь не равное нулю. Поэтому близость истинных значений частоты k к идеальному $k_j(n)$ естественно оценивать их разностью

$$r = k_j(n) - k, \tag{3.448}$$

которая даётся в таблице для значений k.

Таблица

Точность соответствия закону Бенфорда для первых 500 чисел F_n

n*, *r	**Значения k для $j = 1, \ldots, 9$ и их отклонение от $k_j(n)$**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**$\|r\|$**
100	30	18	13	9	8	6	5	7	4	
r_{100}	0	0	1	–1	0	–1	–1	2	–1	7
200	**60**	**36**	**25**	**18**	**17**	**12**	**11**	**12**	**9**	
r_{200}	0	1	0	–1	1	–1	–1	2	0	7
300	**91**	**53**	**38**	**27**	**25**	**19**	**17**	**17**	**13**	
r_{300}	1	0	1	–2	1	–1	0	2	–1	8
400	121	**70**	**51**	**37**	**32**	**27**	**23**	**21**	**18**	
r_{400}	1	0	1	–2	0	0	0	1	0	4
500	**151**	**88**	**63**	**47**	**40**	**33**	**29**	**27**	**22**	
r_{500}	0	0	1	–1	0	0	0	1	–1	4

Очень хорошее соответствие налицо уже для первой сотни чисел F_n, а для пяти сотен оно просто поразительно: всего четыре минимальных ($r = \pm 1$) отклонения от “идеального” логарифмического значения $k_j(n)$. Это намного лучше, чем для любого из известных наборов величин, и явно свидетельствует о том, что первые знаки последовательности чисел $\{F_n\}$ распределяются по логарифмическому закону (3.445). Через логарифмическую функцию он запишется в виде

$$P(q) = \frac{\ln(1 + 1/q)}{\ln 10} \qquad (q = 1, 2, \ldots, 9) \tag{3.449}$$

В общем случае системы счисления с целочисленным основанием a имеем:

$$P(q) = \frac{\ln(1 + 1/q)}{\ln a} \qquad (q = 1, 2, \ldots, a - 1) \tag{3.450}$$

Обсуждение закона Бенфорда, устанавливающего удивительную зависимость между функцией логарифма и частотой появления на первом месте одного из знаков произвольной n-ичной записи членов “естественных” числовых последовательностей, в частности ряда Фибоначчи, завершим рассмотрением более общего случая на одном репрезентативном примере. Проведём небольшое исследование на полуэмпирическом уровне, поскольку следует ещё раз признать, что глубокого понимания этого закона всё ещё нет, хотя его справедливость по крайней мере для $\{F_n\}$ очевидна и сомнений не вызывает. Можно только констатировать некое *логарифмическое неравноправие* знаков, используемых для записи членов указанных последовательностей в любой целочисленной системе счисления за исключением, разумеется, двоичной. Введём понятие обобщённой фибоначчиевой последовательности F_{namk}, определив её суммой

$$F_{namk} = a_1 F_{n-m_1} + a_2 F_{n-m_2} + \ldots + a_k F_{n-m_k} \tag{3.451}$$

Тогда n-ый член обобщённой последовательности есть по определению сумма k слагаемых типа $a_j F_{n-m_j}$, где a_j и m_j произвольные положительные или отрицательные целые числа и хотя бы одно из a_j отлично от нуля. Частными случаями обобщённой последовательности являются ряды Фибоначчи, Люка, квазифибоначчиевы ($k = 2$) последовательности и т. д; для тестирования нужно иметь какое-либо F_{namk} со случайным набором чисел a_j, m_j и k. Возьмём для определённости четырёхчленную последовательность

$$F_{namk} = 4F_{n-4} - 7F_{n+5} - 2F_{n-11} + 2F_{n+9} \qquad (3.452)$$

и посмотрим на статистику первых знаков ровно одной тысячи членов ряда

172, 15, 187, 202, 389, 591, 980, 1571, 2551, 4122, 6673, 10795, 17468, 28263, 45731, 73994, 119725, 193719, 313444, 507163, 820607, 1327770, 2148377, 3476147, 5624524, 9100671, 14725195, 23825866, …

Отметим вначале, что для этой последовательности, во-первых, выполняется правило третьего члена, во-вторых, частота вхождений знаков 0, 1, …, 9 подчиняется (в пределах допустимой статистической погрешности) закону равнораспределения, в-третьих, имеет место закон периодичности с магическим периодом 24 приведённого к однозначному виду ряда с суммой членов по-прежнему равной 117. Но главное здесь – данные по закону Бенфорда, показанные в таблице в процентах от общего количества $n = 1000$.

Таблица

Распределение частот для первой тысячи членов ряда (3.452)

Цифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота, %	30,2	17,6	12,6	9,6	7,8	6,8	5,8	5,1	4,5

Сравнение с теоретической формулой не оставляет никаких сомнений в том, что закон Бенфорда выполняется здесь почти с идеальной точностью. Хотя этот результат получен для относительно небольшой выборки частного случая обобщённой фибоначчиевой последовательности, можно предположить без особого риска ошибиться, что он справедлив и для любой другой последовательности данного типа. Есть поэтому достаточно серьёзные основания считать, что для ряда F_n и получаемых с его помощью бесконечных последовательностей закон Бенфорда работает очень хорошо, с удивительно точной и быстрой для статистической закономерности "подстройкой", а вот для упомянутых выше конечных наборов чисел нематематической природы степень соответствия намного хуже. В целом же на основе имеющихся данных, касающихся в частности бесконечных числовых последовательностей, трудно судить, насколько универсален феномен первого знака. Не совсем ясно, в каких случаях можно говорить лишь о существенном отклонении от закона равного распределения, а в каких – о более или менее точной подчинённости закону логарифмического распределения. Мы не знаем также, является ли прекрасное соответствие этому закону последовательностей $\{F_n\}$ и $\{F_{namk}\}$ одной из их особых характеристик или же этим свойством в равной или неравной мере обладают и какие-то другие числовые последовательности фибоначчиева и нефибоначчиева типа. Вопросов (как нередко бывает, когда имеешь дело с числовыми множествами) больше, чем ответов, которые могут быть получены из рассмотрения отдельных случаев и особенно в результате глубоких теоретических исследований, способных снять покровы таинственности с этого неординарного закона. В любом случае закон Бенфорда в весьма нетривиальной форме подтверждает фундаментальную роль материнской функции логарифма для ряда Фибоначчи как наиболее значительного, быть может, представителя класса *естественных* числовых последовательностей. А к вопросу соответствия закону логарифмического распределения других последовательностей мы обратимся позже с более общих позиций.

11. Треугольник Паскаля

Слово *треугольник* не должно вводить в заблуждение, поскольку речь идёт не об определённой геометрической фигуре, вроде египетского треугольника или треугольника Кеплера, а о бесконечной системе чисел, получаемых из формулы для бинома Ньютона

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \qquad (3.453)$$

Располагая биномиальные коэффициенты в виде пирамиды или равностороннего треугольника и рассматривая различные конфигурации упорядоченного подобным образом числового множества, можно прийти к достаточно интересным и неожиданным результатам. История треугольника Паскаля, известного и под другими именами, вкратце изложена в разделе 14 Главы 8, здесь же даны её теоретико-числовые характеристики, с выходом к числам Фибоначчи и специфическому уравнению для золотого сечения. Начнём с классической формулы, являющейся, к слову сказать, частным случаем формулы Тейлора для разложения функции (в данном случае двучлена в целой степени) в бесконечный степенной ряд.

По словам математика и популяризатора науки Мартина Гарднера (Martin Gardner, 1914–2010):

> Треугольник Паскаля так прост, что выписать его может даже десятилетний ребёнок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных численных схем во всей математике.

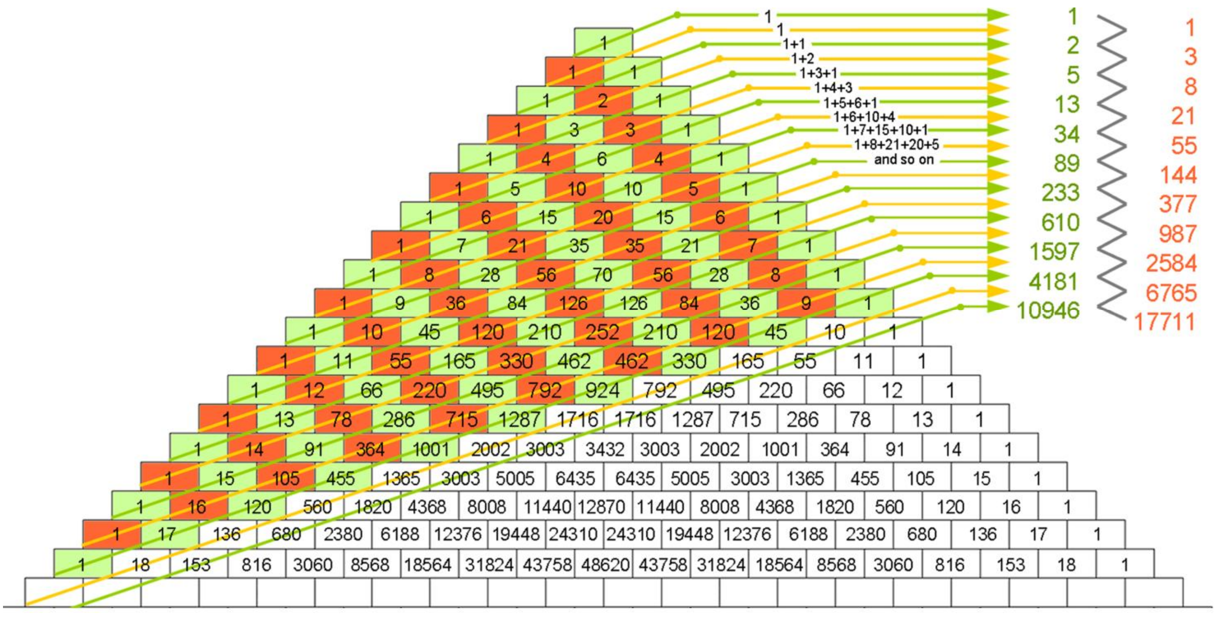
Одним из *сокровищ* чудо-треугольника является связь биномиальных коэффициентов с числами Фибоначчи:

> Суммы чисел, стоящих вдоль не столь круто падающих сплошных диагоналей, образуют хорошо известную последовательность чисел Фибоначчи, Паскаль, по-видимому, не знал, что числа Фибоначчи “скрыты” в его треугольнике. Это обстоятельство было обнаружено только в XIX в. [Гарднер, 204, 206].

Рисунок из [Triangle de Pascal], с расположенными в виде криволинейного треугольника биномиальными коэффициентами вплоть до $n = 23$, и слегка изменённый рисунок из [World-Mysteries], показывающий связь диагональных элементов треугольника с числами Фибоначчи от $F_1 = 1$ до $F_{22} = 17711$, в комментариях едва ли нуждаются.

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1
1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1
1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 8568 3060 816 153 18 1
1 19 171 969 3876 11628 27132 50388 75582 92378 92378 75582 50388 27132 11628 3876 969 171 19 1
1 20 190 1140 4845 15504 38760 77520 125970 167960 184756 167960 125970 77520 38760 15504 4845 1140 190 20 1
1 21 210 1330 5985 20349 54264 116280 203490 293930 352716 352716 293930 203490 116280 54264 20349 5985 1330 210 21 1
1 22 231 1540 7315 26334 74613 170544 319770 497420 646646 705432 646646 497420 319770 170544 74613 26334 7315 1540 231 22 1
1 23 253 1771 8855 33649 100947 245157 490314 817190 1144066 1352078 1352078 1144066 817190 490314 245157 100947 33649 8855 1771 253 23 1
```

Треугольник Паскаля



Треугольник Паскаля и числа Фибоначчи

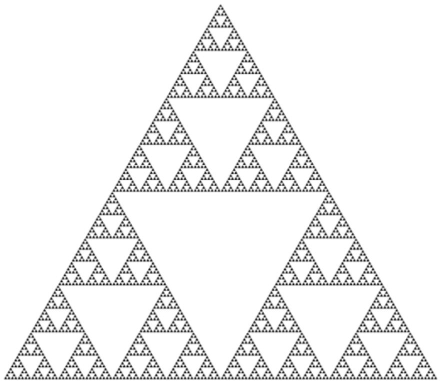
Формула для n-ой диагонали:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k-1)!} = F_n \tag{3.454}$$

Используя последнюю формулу, можно определить и константу ϕ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}}{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-k-1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi \tag{3.455}$$

Треугольник, составленный из биномиальных коэффициентов и известный ещё в древности, обладает многими интересными свойствами и представляет самостоятельный интерес. Если, например, закрасить в треугольнике все нечётные числа, получится любопытная фрактальная фигура под названием *треугольник Серпинского*.



Треугольник Серпинского

Не будет вообще преувеличением сказать, что треугольник Паскаля – настоящий кладезь всевозможных и весьма любопытных числовых свойств и отношений, в том числе и для чисел Фибоначчи. Например, с их помощью решается вопрос о тех числах треугольника, которые встречаются в нём шесть раз (в случае единицы бесконечное число раз) [W[8]]. Это числа r, определяемые по формуле

$$r=\binom{n}{m-1}=\binom{n-1}{m} \tag{3.456}$$

где $n=F_{2k}F_{k+1}$, $m=F_{2k-1}F_{2k}$. Подставляя значения $k=1, 2, 3, \ldots$, получим стремительно растущий ряд

$$r_1=1,\ r_2=3003,\ r_3=6121\,81827\,43304\,70189\,14314\,82520\approx 6{,}1\cdot 10^{28},$$

в котором уже четвёртый член выражается трудно обозримым числом $r_4\approx 3{,}53784\cdot 10^{204}$, а далее

$$r_5\approx 4{,}590\cdot 10^{1411},\quad r_6\approx 6{,}045\cdot 10^{9\,687},\quad r_7\approx 3{,}940\cdot 10^{66\,415},\quad r_8\approx 1{,}837\cdot 10^{455\,236},\quad r_9\approx 1{,}664\cdot 10^{3120255},\ \ldots \tag{3.457}$$

Золотое содержание в этой бесконечной последовательности чисел даже выше, чем кажется на первый взгляд. Чтобы убедиться в этом, выпишем подряд первые девять показателей степеней n_{ri} чисел r_i $(i=1, 2, \ldots, 9)$:

$$0,\ 3,\ 28,\ 204,\ 1411,\ 9687,\ 66415,\ 455236,\ 3120255$$

и, начиная с $i=2$, составим отношения типа $(n_{ri+1}/n_{ri})^{1/4}$. Получим ряд

$$1{,}747\,870\ldots,\quad 1{,}642\,926\ldots,\quad 1{,}621\,713\ldots,\quad 1{,}618\,697\ldots,\quad 1{,}618\,151\ldots,\quad 1{,}618\,052\ldots,\quad 1{,}618\,036\ldots,\ \ldots$$

сходящийся сверху к золотой константе. Скорость приближения к константе ϕ оценим разностью $(n_{ri+1}/n_{ri})^{1/4}-\phi$. Имеем сходящуюся к нулю последовательность

$$0{,}12983\ldots,\ 2{,}48921\ldots\cdot 10^{-2},\ 3{,}67980\ldots\cdot 10^{-3},\ 6{,}63047\ldots\cdot 10^{-4},\ 1{,}17657\ldots\cdot 10^{-4},\ 1{,}84986\ldots\cdot 10^{-5},\ 2{,}72727\ldots\cdot 10^{-6}$$

для которой, как нетрудно убедиться, отношение предыдущего члена к последующему стремится к ϕ^4, то есть близкому к 7 числу $\approx 6{,}85$. Таким образом, указанное свойство означает не только факториальную связь биномиальных коэффициентов с числами Фибоначчи, но непосредственно и с константой ϕ.

Вернёмся к диагональным элементам треугольника Паскаля. Помимо известного с XIX в. отношения между ними, числами Фибоначчи и ЗС, есть и другие, менее очевидные связи такого рода. Они получены значительно позже, на заре “золотого бума” прошлого века. В книге Джорджа Пойа (венг. Pólya György, англ. George Pólya, 1887–1985) *Mathematical Discovery*, впервые изданной в начале 1960-х и позже перевёденной на русский, есть фрагмент, в котором предлагается решить некую задачу [Пойа, 114]:

Последовательность чисел

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, \ldots$$

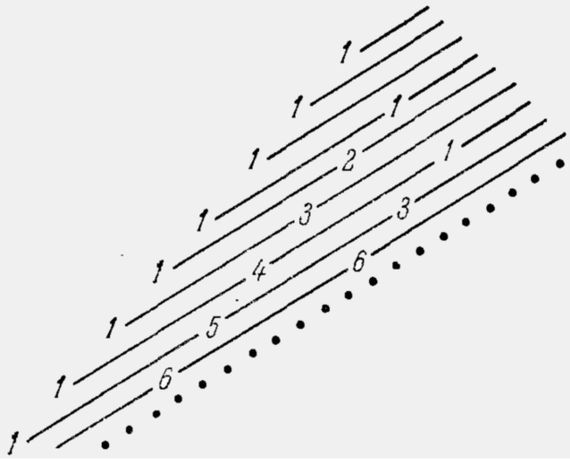
порождена аналогично числам Фибоначчи. Обозначим n-ый член этой последовательности через G_n.

1°. Выразите G_n через биномиальные коэффициенты.

2°. Докажите, что при $n = 4, 5, 6, \ldots$

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-3}.$$

3°. Обобщите полученный результат.



В разделе *Решение упражнений* приводится ответ к упражнению 1° и указания к решению упражнений 2° и 3° [Там же, 393].

1°. $G_n = C_{n-1}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-5}^2 + \ldots$

2°. Воспользуйтесь рекуррентной формулой.

3°. Изменение наклона приводит к последовательности y_1, y_2, y_3, …, зависящей от параметра (им может быть угловой коэффициент – целое положительное число q), удовлетворяющего рекуррентной формуле

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-q}.$$

В случае $q = 1$ угловой коэффициент равен 0 и

$$y_n = 2y_{n-1}.$$

Суммированием диагональных элементов треугольника, хотя и более сложным, чем для чисел Фибоначчи способом, могут быть получены и числа Люка. Посредством биномиальных коэффициентов это запишется в виде бесконечной суммы

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} = L_n \tag{3.458}$$

не требующей, как и в случае аналогичных формул для чисел F_n, обязательного обращения к треугольнику Паскаля, который является лишь конфигурацией числовых величин в форме равнобедренного треугольника.

Фибономиальные коэффициенты

Это последовательности целых чисел, определяемых формулой

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n F_{n-1} \ldots F_{n-k+1}}{F_k F_{k-1} \ldots F_1}, \quad 0 \le k \le n \tag{3.459}$$

для биномиальных коэффициентов, с той разницей, что в числителе и знаменателе дроби – факториальные произведения чисел Фибоначчи [Benjamin, Quinn]. Фибономиальные коэффициенты, как и биномиальные, могут быть, конечно, представлены в треугольной конфигурации [Sloane[5]].

Таблица
Фибономиальные коэффициенты

$n=0$								1							
$n=1$							1		1						
$n=2$						1		1		1					
$n=3$					1		2		2		1				
$n=4$				1		3		6		6		1			
$n=5$			1		5		15		15		5		1		
$n=6$		1		8		40		60		40		8		1	
$n=7$	1		13		104		260		260		104		13		1

Фибономиальные коэффициенты могут вычисляться и посредством чисел Люка:

$$\binom{n}{k}_F = \frac{1}{2}\left(L_k \binom{n-1}{k}_F + L_{n-k}\binom{n-1}{k-1}_F\right) \tag{3.460}$$

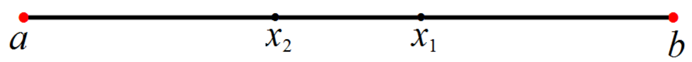
12. Метод ЗС и задача из физики

Статус математической константы, помимо прочего, определяется применимостью основанной на ней модели в качестве эффективного научного метода и неожиданным появлением при решении задач теоретического и прикладного характера. В дополнение к тому, что уже обсуждалось выше и ещё предстоит рассмотреть в дальнейшем, приведём два простых примера, первый из которых относится к использованию ПЗС в качестве математического метода, а второй – появлению золотой константы при решении задачи из теории упругости.

Метод золотого сечения

Существует несколько методов численного решения уравнений, или определения значения функции с заданной точностью, нахождения её особых точек и тому подобного. Каждый из них обладает своими достоинствами и ограничениями, а наиболее известным можно считать представленный в разделе 3 первой главы метод касательных Ньютона, широко используемый на практике, в том числе при вычислении нами 6,4 миллиона десятичных знаков фундаментальной константы ш [A[10]]. Метод касательных хорош и почти незаменим в тех случаях, когда требуется вычисление с высокой степенью точности, но в некоторых случаях, когда ставится более скромная задача поиска значений функции в заданном интервале, применяются другие методы, не требующие обращения к дифференциальному исчислению. Среди них не последнее место занимает *метод золотого сечения* (МЗС), особенно полезный при поиске минимума, или максимума непрерывно возрастающих или непрерывно убывающих функций.

Для определённости рассмотрим случай поиска минимума функции $f(x)$ действительной переменной x, заданной в интервале $[a, b]$. Суть МЗС в построении последовательности вложенных интервалов, неизменно содержащих искомую точку и сужающих область поиска в геометрической прогрессии со знаменателем ϕ^{-1}.



Метод золотого сечения

С этой целью отрезок ab делится в золотой пропорции точками справа от a и слева от b и вычисляются значения функции $f(x)$ в золотых точках x_1 и x_2. Если, допустим, $f(x_2) < f(x_1)$, то ясно, что искомый минимум находится в числовом интервале $[a, x_1]$, а интервал $[x_1, b]$ уже без надобности. Обозначив длину отрезка ab через l и поместив, для удобства, точку a в начало числовой оси, нетрудно определить, что точка x_1 имеет координаты $l\phi^{-1}$, а точка x_2 – координаты $l\phi^{-2}$. Отношение координат (длин отрезков) равно ϕ^{-1}, другими словами, содержащий минимум интервал $[a, x_1]$ точкой x_2 делится в золотой пропорции. Следовательно, благодаря особым свойствам ЗС задача уже после первого шага итерации упростилась, поскольку теперь уже достаточно только одного деления: в данном случае не показанной на рисунке золотой точкой x_3 слева от точки x_1. Продолжая этот процесс, будем иметь последовательность сужающихся в отношении ϕ^{-1} отрезков

$$l\phi^{-1},\ l\phi^{-2},\ l\phi^{-3},\ \ldots\ l\phi^{-n},\ \ldots \tag{3.461}$$

так что отрезок, получаемый на n-ом шаге итерации, меньше начального в ϕ^{-n} раз.

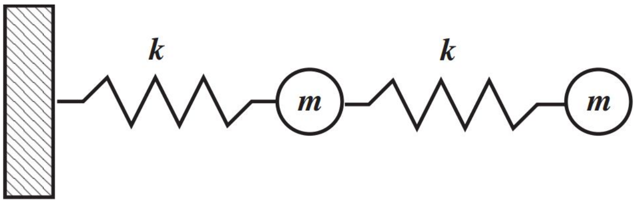
Если, допустим, $n = 10$, отрезок десятого шага итерации будет в $\phi^{10} \approx 123 = L_{10}$ раз меньше исходного, а если, скажем, $n = 200$, то это уже разница в $\phi^{200} \approx 6 \cdot 10^{41} = L_{200}$ раз. Даже такое, пугающее на первый взгляд число итераций не служит серьёзным препятствием для компьютерного вычисления по соответствующей программе. Ясно, однако, что речь идёт об очень медленной, по сравнению с методом касательных Ньютона, сходимостью к пределу, причём фактически по ряду Люка. Это означает, что МЗС можно в принципе заменить *методом чисел Люка*, с отношением L_n/L_{n-1} вместо константы ϕ, но уже с ограниченным числом итераций. На практике применяются всё же не числа Люка, а стремящееся в пределе к ϕ отношение чисел Фибоначчи F_n/F_{n-1}, так что реальной заменой МЗС является *метод чисел Фибоначчи*.

Задача из физической теории

Расмотрим теперь задачу на колебание двойного осциллятора, опираясь на работу [Moorman and Goff]. Колебание системы двух масс, соединённых пружинами и с одним закреплённым концом, происходит вдоль оси по линейному закону. Полагаем, что массы и коэффициенты упругости невесомых пружин равны: $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$, а колебания происходят по линейному закону $F_x = F_{упр} = -kx$. Обозначив координаты массы слева через x_1, а массы справа через x_2, вторую производную по времени через $\ddot{x}$, напишем уравнение движения вдоль оси OX для каждой из масс, применяя второй закон Ньютона и закон Гука.

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \qquad \text{для массы слева} \qquad (3.462)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \qquad \text{для массы справа} \qquad (3.463)$$



Осцилляция системы двух равных масс, соединённых пружиной и с закреплённым концом

Решение для собственных колебаний системы ω ищем, как обычно, в форме экспоненты:

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t} \qquad (3.464)$$

$$x_2(t) = A_2 e^{i\omega t} \qquad (3.465)$$

где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний. Поскольку отношение m/k двух постоянных для данной задачи параметров имеет размерность частоты T^{-1}, можно ввести обозначение $m/k = \omega_0$. Подставляя выражения для $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в уравнения (3.462) и (3.463), придём к матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.466)$$

Поскольку матрица амплитуд в нуль обращаться не может, из матрицы для частот имеем уравнение

$$(\omega^2)^2 - 3\omega_0^2(\omega^2) + (\omega_0^2)^2 = 0, \qquad (3.467)$$

откуда

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Отбрасывая не имеющие физического смысла отрицательные выражения, окончательно получим следующие два значения для собственных колебаний системы:

$$\omega_+ = \omega_0\phi, \quad \omega_- = \omega_0\phi^{-1} \qquad (3.468)$$

Можно было, конечно, предположить с самого начала, что собственные частоты колебаний осцилляторов должны выражаться через имеющее размерность частоты отношение постоянных параметров, умноженное на некие безразмерные множители k: $\omega_\pm = k_\pm\omega_0$, но ничто в начальных условиях задачи не указывало на то, что этими множителями окажутся золотая константа и её обратная величина. Рассмотренный пример, как, впрочем, и большинство задач физической теории, является идеализацией (невесомые пружины, линейный закон растяжения, колебания вдоль оси, отсутствие трения и т. п.) реальной экспериментальной ситуации. Однако влияние указанных факторов здесь не так уж велико и при желании может быть сведено к малой поправке к полученному результату. В любом случае, это простой и далеко не единичный пример того, как решение дифференциального уравнения второго порядка содержит золотую константу.

13. Золотые *p*-сечения

Независимое появление созревшей к представлению научной проблемы в трудах различных авторов – не такое уж редкое явление в науке. Бывает и так, что идея, высказанная одним, подхватывается, развивается и осмысляется другими. В алгоритме бинома Ньютона, приводящем к построению возрастающих по количеству элементов числовых множеств, наблюдается некая фрактальность, а сами биномиальные коэффициенты относятся к числу наиболее значительных и важных последовательностей целых чисел. По-разному располагая конечные множества таких чисел, можно получать результаты, раскрывающие их тонкие связи с другими математическими реалиями, в частности числами Фибоначчи, золотой константой, уравнениями высокой степени и линейной рекурсией.

Таблица

Прямоугольный треугольник Паскаля

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**…**
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**…**
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**…**
2			1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	**…**
3				1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	**…**
4					1	5	15	35	70	126	210	330	495	**…**
5						1	6	21	56	126	252	462	792	**…**
6							1	7	28	84	210	462	924	**…**
7								1	8	36	120	330	792	**…**
8									1	9	45	165	495	**…**
9										1	10	55	220	**…**
10											1	11	66	**…**
11												1	12	**…**
12													1	**…**
Σ	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**	**1024**	**2048**	**4096**	
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**

В работе [С[1]] для решения поставленных задач использован *прямоугольный треугольник Паскаля*, в котором диагональные элементы *равнобедренного* треугольника Паскаля записываются в виде строк *прямоугольного* треугольника. Достаточно ясное представление о полученных результатах даёт, например, одна из последних работ А.П. Стахова [С[13]], отрывок из который приводится с незначительными сокращениями, касающимися в основном ссылок и нумерации формул и таблиц.

Все задачи, поставленные Пойа, были решены в книге [С[1]] путём использования так называемого **прямоугольного треугольника Паскаля.**

Суммируя биномиальные коэффициенты по столбцам, получим последовательность двоичных чисел: 1, 2, 4, 8, 16, 32,.... Этот результат широко известен в комбинаторике. Используя прямоугольный треугольник Паскаля, в работе [Там же] были построены так называемые **прямоугольные *p*-треугольники Паскаля**, которые получаются из исходного прямоугольного треугольника Паскаля путём сдвига биномиальных коэффициентов каждой строки исходного треугольника Паскаля на p столбцов вправо относительно предыдущей строки, где p может принимать значения из множества {0, 1, 2, 3,...}. Получаемые таким путём “деформированные” треугольники Паскаля были названы ***p*-треугольниками Паскаля** [Там же].

Таблица
P-треугольник Паскаля для случая $p = 1$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1			1	2	3	4	5	6	7	8
2					1	3	6	10	15	21
3							1	4	10	20
4									1	5
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Суммируя в таблице биномиальные коэффициенты по столбцам, получим последовательность чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Таблица
P-треугольник Паскаля для случая $p = 2$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1				1	2	3	4	5	6	7
2							1	3	6	10
3										1
	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19

Суммируя биномиальные коэффициенты по столбцам *p*-треугольника Паскаля, мы получим бесконечное число рекуррентных числовых последовательностей, которые для заданных $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ задаются следующим общим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \quad \text{для} \quad n > p+1$$

при начальных условиях

$$F_p(1) = F_p(2) = \ldots F_p(p+1) = 1.$$

Числовые последовательности, порождаемые рекуррентной формулой при начальных условиях, были названы ***p*-числами Фибоначчи** [C1]. Заметим, что *p*-числа Фибоначчи ***в духе методологического принципа соответствия*** включают в себя в качестве частных случаев двоичные числа ($p = 0$) и классические числа Фибоначчи ($p = 1$).

Золотые *p*-сечения

Доказано [Там же], что при заданном $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ отношение соседних *p*-чисел Фибоначчи при $n \to \infty$ стремится к некоторой константе Φ_p:

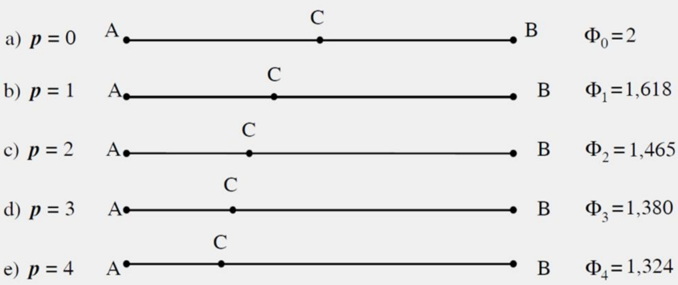
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p,$$

причём константа Φ_p является положительным корнем следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0$$

Заметим, что это уравнение может быть также получено в результате решения следующей геометрической задачи. Зададимся целым неотрицательным числом $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и разделим отрезок AB точкой C в следующей пропорции

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p.$$



Деление отрезка в пропорции Φ_p было названо [Там же] **золотым *p*-сечением**, а сама пропорция Φ_p – **золотой *p*-пропорцией**.

Таким образом, изменение показателя степени p от нуля до бесконечности приводит к бесконечному множеству чисел в интервале от 2 до 1. Уравнение для p-пропорции имеет при этом один вещественный корень, если p – нечётно, и два вещественных корня в случае чётного p; все остальные корни уравнения являются комплексными числами. Связанные с биномиальными коэффициентами золотые p-сечения, p-пропорции и p-числа выводят ТЗС из узких рамок строго определённого геометрического сечения, соответствующего ему уравнения, рекурсии, последовательности чисел, константы и тому подобное, и тем самым могут, наряду с прочим, считаться элементами обобщённой теории, о которой речь ещё впереди.

14. Золотые подмножества квадратных уравнений

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 - px - q = 0 \tag{3.469}$$

с целочисленными коэффициентами p и q и корнями в области действительных чисел, то есть с положительным дискриминантом D. Частному случаю классического уравнения для константы ϕ соответствуют значения $p = 1$, $q = 1$. Придавая p и q различные положительные и отрицательные целые значения в интервале $(-\infty, +\infty)$, ограниченные условием $p^2 - 4q > 0$, получим бесконечные множества решений для корней x_1 и x_2 квадратного уравнения. Поставим перед собой следующую, ранее не исследованную задачу: выделить из этих множеств подмножества чисел, непосредственно выражаемых через константу ϕ, точнее через $\sqrt{5} = 2\phi - 1$.

Вначале для большей наглядности представим результаты небольшого "эмпирического" исследования для двух, произвольно взятых значений коэффициента p. Пусть $p = 7$ в одном и $p = -12$ во втором случае. Исследование показывает, что в уравнении $x^2 - 7x - q = 0$ золотыми являются корни для значений $q = -1, 19, 49, \ldots$:

$$\{x_{1,2}(-1) = 7/2 \pm 3/2\cdot(2\phi - 1)\} \quad \{x_{1,2}(19) = 7/2 \pm 5/2\cdot(2\phi - 1)\} \quad \{x_{1,2}(49) = 7/2 \pm 7/2\cdot(2\phi - 1)\}, \ldots$$

а в уравнении $x^2 + 12x - q = 0$ золотой является последовательность корней для значений $q = -31, -16, 9, \ldots$:

$$\{x_{1,2}(-31) = -6 \pm (2\phi - 1)\} \quad \{x_{1,2}(-16) = -6 \pm 2(2\phi - 1)\} \quad \{x_{1,2}(9) = -6 \pm 3(2\phi - 1)\}, \ldots$$

Уже здесь просматривается некая закономерность для значений корней, в отличие от закона для последовательностей коэффициентов q, приводящих к золотым числам.

Уточним, что p может принимать бесконечное множество целых значений в интервале $(-\infty, +\infty)$ и каждому такому значению p соответствует своя, вполне определённая бесконечная последовательность $Q_\phi(p)$ золотых значений параметра q. Заметим также, что формулы для $Q_\phi(p)$ и соответствующих корней квадратного уравнения зависят от чётности или нечётности числа p. Не вдаваясь в технические детали, приведём полученные по индукции конечные формулы для обоих вариантов.

a) p – чётное:

$$Q_\phi(p) = 5n^2 - \frac{p^2}{4} \qquad x_1(q) = p/2 + (2\phi - 1)n_Q \qquad x_2(q) = p/2 - (2\phi - 1)n_Q \tag{3.470}$$

b) p – нечётное:

$$Q_\phi(p) = 5n(n+1) - \frac{p^2 - 5}{4} \qquad x_1(q) = p/2 + (2\phi - 1)(n_Q + 1/2) \qquad x_2(q) = p/2 - (2\phi - 1)(n_Q + 1/2) \tag{3.471}$$

Этими формулами и определяются бесконечные множества пар целых чисел $\{p, q\}$, дающих бесконечные множества корней квадратных уравнений, выражаемых посредством золотой константы. Для полной ясности возьмём по два значения – положительное и отрицательное – для чётных и нечётных значений p и, заставляя переменную q пробегать натуральный ряд 1, 2, 3, …, посмотрим на ряд первых двадцати золотых значений $Q_\phi(p)$.

$p = 8$	$Q_\phi(8)$	–11, 4, 29, 64, 109, 164, 229, 304, 389, 484, 589, 704, 829, 964, 1109, …
$p = -26$	$Q_\phi(-26)$	–164, –149, –124, –89, –44, 11, 76, 151, 236, 331, 436, 551, 676, 811, 956, …
$p = -19$	$Q_\phi(-19)$	–79, –59, –29, 11, 61, 121, 191, 271, 361, 461, 571, 691, 821, 961, 1111, …
$p = 63$	$Q_\phi(63)$	–981, –961, –931, –891, –841, –781, –711, –631, –541, –441, –331, –211, –81, 59, 209, …

Нетрудно заметить, что чем больше значение p, тем больше отрицательных чисел в начале ряда. Подстановка любого числа из этих последовательностей в уравнение с соответствующим p даёт золотой корень. Если, например, значение –891 в последнем ряду для $p = 63$ подставить вместо q в уравнение $x^2 - 63x - q = 0$, получим корни

$$\frac{63}{2} \pm \frac{9\sqrt{5}}{2}$$

в полном согласии с формулами $x_1(q) = p/2 \pm (2\phi - 1)(n_Q + 1/2)$, в которых надо лишь учесть, что -891 стоит в последовательности на четвёртом месте, то есть $n_Q = 4$. Заметим также, что в формулы для последовательностей $Q_\phi(p)$ переменная p входит в квадрате, а значит эти последовательности одинаковы для $\pm p$. Понятно, что все формулы справедливы в простейшем частном случае $p = 0$, как и для ряда отрицательных целых чисел $-n$, $-n + 1$, $-n + 2$, …; просто в каждом конкретном случае в формулы для корней надо подставлять соответствующее значение n_Q, которое может быть любым положительным или отрицательным числом, либо нулём.

Бесконечные последовательности золотых чисел можно, конечно, извлечь и из уравнений определённого типа произвольной степени n, но лишь с помощью более сложных методов алгебраического исследования, включая матрицы, а это уже уводящий в сторону предмет отдельного и достаточно большого исследования, которое в нашу задачу не входит.

Глава 4.
Обобщения и возможные расширения ТЗС

Существует множество определений математики, ни одно из которых не является общепринятым. Условно и, конечно, не совсем серьёзно, можно все имеющиеся определения разбить на четыре основные группы: тавтологичные, очень плохие, плохие и шутливые. Тавтологично, например, высказывание “Математика есть набор абстрактных форм – математических структур” (Бурбаки). Примером очень плохого определения может служить некогда довольно распространённое понимание математики как “науки о количественных отношениях и пространственных формах”, неоправданно сужающее реальную область исследования. Пытаясь избавиться от столь явных ограничений, можно определить математику “как науку о математических величинах”, но тогда возникает непростой вопрос о необходимости определения понятия математической величины. Преодолевая очевидную неопределённость этого плохого определения, придём к насмешливо-шутейному “математика – это то, чем занимаются математики”. Остановимся хотя бы на этом и постараемся выяснить, чем же они в действительности занимаются?

Вероятно, прежде всего решением различных задач, не имеющих, как правило, прикладного значения и совершенно непонятных простому смертному, а нередко и своим коллегам по научному цеху. И чем сложнее задача, тем, естественно, больше почёта и славы тому, кто её решил, а высшие достижения в этом деле отмечаются такими наградами, как филдсовская и абелевская премии, которые менее известны широкой публике, чем нобелевские премии по науке, но ничуть не менее престижны в глазах учёного мира. Если же когда-нибудь удастся решить одну из “непробиваемых” задач, вроде тех, что, допустим, относятся к дилемме конечности или бесконечности совершенных чисел, или простых чисел Фибоначчи и Люка, ничто в мире от этого не изменится, но все, кто хоть что-то смыслит в науке, снимут шляпу перед гением, совершившим, казалось бы, невозможное.

Другим излюбленным занятием математиков является составление формальных структур, теорий и моделей, которые спустя некоторое время напрашиваются на дальнейшие обобщения, то есть включение в контекст более общей математической системы. В отличие от естествоиспытателя, в частности физика-теоретика, научного стратега, занимающегося основаниями своей науки и стремящегося к созданию теории максимально широкого охвата с целью проникнуть в самые глубоко запрятанные тайны природы, специфика обобщений в математике существенно иная. Здесь это отход от изначальной чувственной основы, например, переход от теории трёхмерного пространства к пространству четырёх, затем n измерений, наконец, бесконечномерному пространству. В сущности, это последовательный переход к абстракциям всё более общего типа, восхождение к платоновским небесам существующих независимо от нашего сознания математических идей – эйдосов. А там поверивших в безграничные возможности математики, потерявших чувство меры смельчаков, решивших безнаказанно поиграть в бесконечность, поджидают малоприятные сюрпризы в виде парадоксов теории множеств.

В любом случае, процесс восхождения по абстракциям не может быть бесконечно долгим. Всегда наступает момент, когда надо остановиться и счесть свою миссию завершённой. Но познание не любит ограничений, полёт мысли трудно сдерживать даже очень разумными доводами. Тем более что строгих правил на этот счёт нет и вряд ли они вообще возможны. Решающим фактором, заставляющим исследователя не заходить слишком далеко и вовремя остановиться, является фактически его научная интуиция, трезвая, но всегда субъективная оценка положения вещей. А единственным более или менее чётким критерием можно считать необходимость сохранения осязаемой связи с изначальной структурой, когда сформулированные вначале и определяющие основные свойства исходных объектов постулаты сохраняют свою силу и в обобщённых моделях. Конкретно, в случае ТЗС, первичная структура, непосредственно связанная с золотой константой, не должна “трансмутировать” в нечто такое, где оставшиеся золотые “крупинки” уже настолько незаметны, что можно уже говорить о полном почти разрыве генетической, онтологической и формальной связи с золотой первоосновой. Этого, возможно, несколько туманно сформулированного методологического принципа мы и будем стараться придерживаться в настоящей главе.

1. Вводные замечания

Есть несколько способов изложения математической теории прикладного значения. С точки зрения высших стандартов научной строгости наилучшей формой является аксиоматический метод, представляющий теорию в виде логико-дедуктивной системы, с изначальным заданием всех необходимых для её развёртывания элементов, см. [A1]. Однако, аксиоматика – как последний удар кисти художника, знаменующий завершение работы над готовой картиной. Далеко не каждую теорию естественнонаучного характера удаётся довести до такого уровня теоретической готовности, когда можно уже окончательно “наводить марафет”. К тому же предельная строгость изложения чревата потерей каких-то смысловых нюансов, порой придающих теории особую прелесть в глазах её сторонников. Логическая безупречность, даже если удаётся её достичь, может оказаться слишком высокой ценой за потерю содержательной ясности и наглядности. Так, уравнением кривой, дающим точную аналитическую связь между математическими величинами, не заменить график этой кривой, каким бы приблизительным и пространственно ограниченным тот ни был. Нередко это две взаимодополняющие грани формальной конструкции, связь между которыми практически недостижима на высоком уровне математического абстрагирования, но весьма желательна во многих других случаях.

Теория золотого сечения в своей формальной основе слишком элементарна, чтобы обойтись без апелляции к наглядным образам. Кстати, бросающаяся в глаза незамысловатость математического аппарата ТЗС воспринимается некоторыми как показатель её теоретической ущербности, хотя всё не так просто. Труднопроходимый для простого смертного частокол математических построений в той или иной модели ещё не является доказательством её важности и полезности. В конце концов, математика ТЗС в её периферийных областях тоже может быть достаточно сложной. Нелишне также отметить, что основания таких естественнонаучных теорий, как, скажем, теория относительности или квантовая механика, их исходные понятия и постулаты чрезвычайно просты и доступны пониманию каждого образованного человека, а сложная математика начинается лишь тогда, когда вдали от своей корневой структуры теория начинает решать конкретные, нестандартные задачи. Но даже вполне устоявшиеся и вполне доступные аксиоматизации естественнонаучные теории излагаются, как правило, не в полном соответствии с суровыми требованиями логической дедукции. Построить научную теорию – значит прежде всего выявить минимальный базис определённых понятий и принципов, постулируемых в качестве первичных. Адекватная, необязательно аксиоматическая, запись исходных принципов на универсальном языке математики позволяет в принципе получать всё, на что способна теоретическая конструкция, основанная на выбранном начале.

Именно способ достаточно строгого, хотя и не аксиоматического, построения ТЗС на основе исходных принципов представляется наиболее приемлемым и в нашем случае. Золотое сечение (в широком, разумеется, смысле, а не только как пропорция, геометрическое построение и т. п.) как феномен науки и культуры интересно во многих отношениях. Подобные вопросы обсуждались в Главе 1, поэтому здесь ограничимся лишь кратким напоминанием. Вокруг ЗС уже не первый год кипят страсти. Налицо огромный интерес и не сдерживаемое разумными ограничениями культовое поклонение с одной стороны и насмешливо-скептическое – с другой. Для одних это как бы волшебные письмена на “визитной карточке” Природы, *наше гармоническое всё*, другие считают ЗС бесполезной забавой для чудаков и амбициозных маргиналов, излюбленной темой многочисленного и легковерного племени любителей псевдонаучной *клубнички*. Истина, как обычно, где-то посередине. Критика подкрепляется отмеченной выше простотой исходного начала, досадой на неистребимое желание восторженных энтузиастов обнаруживать “золото” за каждым углом, недоумением по поводу несметного множества непроверенных и сомнительных данных, выдаваемых за бесспорные факты. Апологетика ЗС может быть аргументирована ссылкой на её блестящую историю (изложенную в Части II), наличием пусть небольшого, но надёжно установленного числа случаев обнаружения принципа золотого сечения в природе и разнообразными математическими исследованиями, выводящими ЗС из узилища простейших геометрических и математических форм на широкие просторы чистой математики.

Сюда следует добавить главное, быть может, препятствие к более полному признанию теоретической ценности ТЗС, а именно, фрагментарный, разрозненный характер математических результатов по ЗС. Конгломерат данных, даже самых значительных, ещё не теория, а лишь база данных, информация к размышлению и предпосылка к её созданию. Теория, как высший продукт научного творчества, обязана аккуратно уложить все имеющиеся данные в одну, “запираемую” минимальным количеством общих принципов, логическую “шкатулку”. Самое любопытное в корректно составленной теории – незнание её конкретного содержимого, пока “шкатулка” ещё не открыта и не исследована. Это, разумеется, притворное незнание, по сути провозглашающее примат общего положения по отношению к конкретному результату, необходимый элемент логической иерархии и причинно-следственной связи. Сколько-нибудь развитая теория не является простым обобщением фактов. Заложенный в первичном базисе потенциал может при развёртывании теории привести к таким, порой совершенно неожиданным следствиям, о которых предварительно не было ничего известно. Можно сказать, что непредвиденное появление, например математической константы, в непредусмотренном месте является “знаком свыше”, свидетельством её универсальности и аргументом в пользу выявляющей константу модели.

2. Элементы теории в кратком перечислении

Необходимо признать, что громкое название *Теория золотого сечения* – скорее аванс, выданный группируемому вокруг константы ϕ и чисел Фибоначчи аморфному собранию математических конструкций и построений, в надежде, что они могут быть представлены в виде единой математической структуры, заслуживающей титула *теории*. Собственно говоря, это и есть цель, сверхзадача настоящей работы, и всё изложенное к настоящему моменту следует считать подготовкой к её решению. Но прежде чем пытаться унифицировать весь этот обширный материал в рамках формальной системы, посмотреть на неё со стороны, то есть с позиций более общей модели, имеет смысл произвести, в соответствии с содержанием предыдущих глав, “инвентаризацию” имеющегося “реквизита” по трём взаимодополняющим спискам. Другими словами, все те элементы теории, которые ранее рассматривались в общем контексте и подробном изложении, с формулами, рисунками, основными параметрами и характеристиками, ниже даны в кратком перечислении.

a) Определения золотой константы

1. *Геометрические построения*: издавна известное золотое сечение и второе золотое сечение, не требующее, как и первое, знания самой константы ϕ
2. *Алгебраическая форма* $(1+\sqrt{5})/2$: фиксирует иррациональность константы ϕ и удобна для её десятичного представления и вычисления в виде бесконечной n-ичной дроби
3. *Одинарный код*: составленная из единиц непрерывная дробь, либо составленная из единиц бесконечная последовательность вложенных друг в друга квадратных корней
4. *Определённый интеграл* в пределах от 0 до 1 и с квадратным корнем в знаменателе
5. *Бесконечные ряды*, то есть различные способы определения числа ϕ с помощью бесконечных сумм
6. *Тригонометрические определения* константы ϕ посредством функций $\cos x$, $\sin x$, $\sec x$, $\csc x$ с аргументами кратными $\pi/5$, или $\pi/10$, а также $\pi/15$
7. *Экспоненциальное определение* как приложение теории ЛМФ; формально – связь между экспонентой, логарифмом и обратными гиперболическими функциями, с использованием особенностей золотой константы
8. *Квадратные уравнение* простейших типов, корни которых равны константе ϕ и её производным
9. *Треугольник Паскаля*, выражающий связь расположенных определённым образом биномиальных коэффициентов с числами Фибоначчи
10. *Последовательность Люка* – достаточно общий случай линейной рекуррентной последовательности второго рода для множества числовых рядов и полиномов
11. *Ряды Фибоначчи и Люка* – связанные друг с другом частные случаи последовательности Люка, дающие в бесконечном пределе золотую константу
12. *Полиномы Фибоначчи и Люка* – частные случаи последовательности Люка для полиномов
13. “Экзотические” определения, включая *полиномы Чебышева*, *эллиптические функции Якоби*, *бесконечные произведения*, *алгебраические уравнения выше второго порядка*, *дифференциальные уравнения второго и высших порядков*, *матрицы*, *определители*, *соотношения между ФМК* и т. п.

b) Геометрия

Фигуры и фракталы

1. *Построение* с помощью циркуля, карандаша и линейки *золотого сечения* и *второго золотого сечения* делением отрезка в крайнем и среднем отношении
2. *Золотые треугольники*: равнобедренные остроугольные – {36°, 72°, 72°}, {54°, 54°, 72°}; равнобедренные тупоугольные – {36°, 36°, 108°}, {18°, 18°, 144°}; прямоугольные – {18°, 72°, 90°}, {36°, 54°, 90°}, {31,72°, 58,28°, 90°}, треугольник Кеплера (катеты и гипотенуза образуют геометрическую прогрессию $1:\sqrt{\phi}:\phi$) – {38°10′22″, 51°49′38″, 90°}. *Правильный десятиугольник*, состоящий из десяти треугольников {36°, 72°, 72°}
3. *Правильный пятиугольник и пентаграмма* – пятиконечная звезда, которую можно получить, соединяя через одну вершины пятиугольника
4. *Ромбы*, составленные из прямоугольных золотых треугольников: {36°, 36°, 144°, 144°}, {72°, 72°, 108°, 108°}, {63,44°, 63,44°, 116,56°, 116,56°}

5. *Золотой* и *пирамидально-золотой эллипсы:* образованы посредством прямоугольных треугольников {31,72°, 58,28°, 90°} и треугольника Кеплера
6. *Парабола*: кривая $y = x^2 - x - 1$, пересекающая ось абсцисс в точках $x = \phi$ и $x = -\phi^{-1}$
7. *Гипербола*, которая посредством гиперболических функций косинуса и синуса непосредственно связана с формулой Бине для золотой константы и чисел Фибоначчи
8. *Архимедовы спирали*, уравнение в полярных координатах $r = a\theta^{1/n}$. Основные кривые: спираль Архимеда ($n = 1$), гиперболическая спираль ($n = -1$) и спираль Ферма, называемая также параболической спиралью ($n = 2$). Последняя применяется в качестве математической модели для описания явления филлотаксиса
9. *Овалы Кассини*, в частности *лемниската Бернулли*. Связь лемнискаты с ЗС реализуется посредством других геометрических фигур или значениями радиуса для углов $\theta = n\cdot\pi/10$ в уравнении $r = a^2(2\cos 2\theta)^{1/2}$
10. *Синусоидальные спирали*, включая параболу, гиперболу, лемнискату Бернулли и множество других кривых, выражаемых формулой $r^n = a^n \cos n\theta$. Семейства замкнутых (“лепестковых”) и незамкнутых кривых получаются для значений $n = \pm 5/m$ и $n = \pm 10/m$, ($m = 1, 2, 3, \ldots$)
11. *Золотая логарифмическая спираль*: уравнение в полярных координатах $r = e^{\frac{2\ln\phi}{\pi}\theta} = \phi^{\frac{2}{\pi}\theta}$, постоянный угол между радиусом-вектором и касательной $\varphi = \mathrm{arcctg}[(2\ln\phi)/\pi] = 1{,}27352\ldots$, а в градусах $\varphi \approx 73^\circ$
12. *Золотые фракталы*: асимметричное канторово множество, фрактал Фибоначчиева слова 60°, ϕ – золотой дракон, фрактал Фибоначчиева слова, пятиугольные хлопья, фрактал додекаэдра, фрактал икосаэдра

Трёхмерные тела

13. *Прямоугольная призма*: отношение длин сторон $\phi^{-1}:1:\phi$
14. *Вытянутый и сплющенный ромбоэдры:* составлены на основании ромба {63,44°, 63,44°, 116,56°, 116,56°}
15. *Эллипсоид*: отношение длин осей $\phi^{-1}:1:\phi$
16. *Пирамида*: треугольник Кеплера в продольном сечении
17. *Параболоид вращения*, у которого радиус равен высоте
18. *Додекаэдр*: платоново тело, составленное из 12 правильных пятиугольников
19. *Икосаэдр*: платоново тело, дуальное додекаэдру, 20 равносторонних треугольников
20. *Ромбоикосододекаэдр*: архимедово тело, 20 треугольников, 30 квадратов и 12 пятиугольников
21. *Дельтоидальный гексеконтаэдр*: каталаново тело, дуальное предыдущему, 60 плиток Пенроуза (kites)
22. *Икосододекаэдр*: архимедово тело, 12 пятиугольников, 20 треугольников
23. *Ромботриаконтаэдр:* каталаново тело, дуальное предыдущему, ромбы с углами 63,44° и 116,56°
24. *Курносый додекаэдр*: архимедово тело, 80 треугольников, 12 пятиугольников
25. *Пентагональный гексеконтаэдр*: каталаново тело, дуальное предыдущему, 60 неправильных пятиугольников
26. *Усечённый додекаэдр*: архимедово тело, 12 десятиугольников и 20 треугольников
27. *Триакисикосаэдр*: каталаново тело, дуальное предыдущему, 60 равнобедренных треугольников
28. *Усечённый икосаэдр*: архимедово тело, 12 пятиугольников и 20 шестиугольников
29. *Пентакисдодекаэдр*: каталаново тело, дуальное предыдущему, 60 равнобедренных треугольников
30. *Ромбоусечённый икосододекаэдр*: архимедово тело, 12 десятиугольников, 20 шестиугольников, 30 квадратов
31. *Гекзакисикосаэдр*: каталаново тело, дуальное предыдущему, 120 неправильных треугольников
32. *Звёздчатые многогранники*, четыре *тела Кеплера–Пуансо*, не являющиеся соединениями платоновых тел
33. Множество *позолоченных трёхмерных тел*, которые могут быть получены усечением, комбинированием или иными способами из платоновых, архимедовых и каталановых тел

c) Теория чисел

1. *Квадратное уравнение золотого сечения*: корни, их вычисление посредством итерационной формулы Герона (вавилонский метод) и методом касательных Ньютона, представление в различных позиционных системах счисления (десятичной, двоичной, пятеричной, двенадцатеричной, системах Бергмана и Цекендорфа)
2. *Цепные дроби для целых степеней золотой константы*: $\pm\phi^{\pm 2k}$, $\pm\phi^{\pm(2k-1)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

3. *Линейная рекурсия с произвольными членами:* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Начальными членами могут быть любые комплексные числа $z_0 = a + b\mathrm{i}$, $z_1 = c + d\mathrm{i}$
4. *Определённый интеграл и бесконечные ряды*: используются также для определения константы ϕ
5. *Тригонометрические представления*: $2\sin(n\cdot\pi/10)$, $2\cos(n\cdot\pi/10)$, $\sec(n\cdot\pi/5)/2$, $2\csc(n\cdot\pi/10)/2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, а также $f(\mathrm{i}\ln\,\phi)$ и $f(\mathrm{i}\ln\,\phi/\mathrm{i})$, где f – одна из функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$
6. *Экспоненциальные представления*: $\phi = e^{\pm g}$ и $\phi = \pm\mathrm{i}\,e^{\pm g}$, могут также считаться определениями константы ϕ
7. Последовательности Люка: $\{U_n(P, Q)\}$ и $\{V_n(P, Q)\}$, определяются заданием начальных членов и рекуррентных отношений
8. *Числа Фибоначчи и их свойства*:
   - золотая струна
   - исходные и простейшие соотношения
   - чётные и нечётные числа
   - признаки делимости
   - первые знаки десятичного представления
   - трёхчленные уравнения
   - приведённые числа Фибоначчи и число 24
   - определения принадлежности целого числа к множеству $\{F_n\}$
   - необычные свойства
9. *Формула Бине*: связь между золотой константой и числами Фибоначчи для произвольной комплексной переменной ρ, в частности для любого действительного числа r или целого числа n
10. *Теорема Гурвица*: особая роль константы $1/(2\phi - 1) = 1/\sqrt{5}$ в континууме действительных чисел
11. Соотношения между константой ϕ, числами Фибоначчи и Люка:
    - квадраты чисел F_n и L_n, их суммы и разности для разных индексов
    - третьи степени чисел F_n
    - степени выше третьей
    - индексы в виде суммы и разности
    - произведения с индексами в виде сумм и разностей
    - формулы Кассини, Каталана и д'Осанье как особые случаи формул более общего типа
    - матрицы и детерминанты
    - константы суммирования обратных величин
    - суммы и бесконечные ряды
    - суммирование с разложением индекса на множители
    - дифференциальные уравнения разных степеней
    - отношения между числами F_n и L_n
12. *Числа F_n и L_n, константа ϕ , ФМК и МК*: отношение между бесконечными рядами посредством экспоненты, интегралы, включая эллиптические функции Якоби, связь через обратные тригонометрические функции, бесконечные произведения, логарифм и тригонометрические функции
13. *Соотношения Рамануджана*: связь константы ϕ с ФМК и другими математическими величинами
14. *Производящие функции* для последовательностей Фибоначчи (и Люка) с различными индексами:
    - F_{kn}, $(F_n,\ L_n,\ F_{2n},\ F_{3n},\ F_{4n},\ F_{5n})$
    - F_{n+k}
    - F_n^k, $(F_n^2,\ F_n^3,\ F_n^4,\ F_n^5)$
    - F_{n+k}^m, $(F_{n+7}^2,\ F_{n+7}^3,\ F_{n+7}^4,\ F_{n+7}^5)$
15. *Фибономиальные коэффициенты*: $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_F = \dfrac{F_n\,F_{n-1}\ \ldots\ F_{n-k+1}}{F_k\,F_{k-1}\ldots\ F_1}$ – числа Фибоначчи вместо биномиальных коэффициентов в формуле для числа сочетаний $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
16. *Полином Фибоначчи*: частный случай последовательности Люка, обобщение чисел Фибоначчи
17. *Полином Люка*: частный случай последовательности Люка, обобщение чисел Люка

18. *Отношения между полиномом Фибоначчи и числами F_n и L_n*: соотношение $F_n(L_k) = \dfrac{F_{kn}}{F_k}$, для любого n и если k – нечётное
19. *Полиномы Чебышева первого и второго рода*: определения, основные свойства, соотношения между двумя полиномами
20. *Отношения между полиномами Чебышева и числами F_n и L_n*: соотношению с участием константы i, тригонометрическое и гиперболическое определения полиномов Чебышева, связь с гиперболическими функциями ЗС
21. *Золотые гиперболические функции:*
    - сравнение с обычными гиперболическими функциями
    - выражения для гиперболических функций в общем случае, обычной форме и в золотых модификациях
    - обратные гиперболические функции
    - обратные гиперболические функции в общем случае, обычной форме и в золотых модификациях
    - тройные точки пересечения кривых линейных, гиперболических и обратных гиперболических функций
22. *Уравнения тройных точек*: глобальные аттракторы как математические константы
23. *Треугольник Паскаля*: связь биномиальных коэффициентов с числами Фибоначчи
24. *Золотые p-сечения*: золотая p-пропорция Φ_p, корни уравнения $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$, $p = 0, 1, 2, \ldots$
25. *Золотые подмножества квадратных уравнений*: золотые, содержащие константу $\sqrt{5} = 2\phi - 1$ корни квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$ при различных значениях параметров p и q

3. С чего начинается теория

Пусть неполный, но достаточно представительный список непосредственно относящихся к золотому сечению математических конструктов свидетельствует о многогранности проблемы, имеющей прямые выходы в различные разделы чистой математики. Если выражаться высоким слогом, это *золотые ворота математики*, к которым надо ещё подобрать подходящие ключи. Однозначных решений здесь нет. Очевидно только одно: ТЗС, в узком смысле и первом приближении – это во многом теория неких формальных свойств константы ϕ, подобно тому как в физике, упрощённо, СТО – теория постоянной c как неизменного и максимального значения скорости себетождественных тел, нерелятивистская квантовая механика – теория постоянной $\hbar$ как минимального значения физической величины, называемой моментом импульса, спином и т. п. Разница в том, что в случае ЗС нельзя опираться на какие-либо экспериментальные данные, коль скоро речь идёт о математической теории, не требующей для своих построений внешнего оправдания.

В любом случае постулаты теории должны сразу привести к константе ϕ, которая уникальностью свойств и посредством своих производных фактически определяет структуру многих геометрических и теоретико-числовых конструкций. Вопрос в том, из какой теоретической “скорлупы” должна “вылупиться” сама золотая константа, поскольку по строгим правилам построения формальной системы любая константа есть следствие, а не источник, формальный продукт исходных постулатов, а не исходный пункт построения. В этом и вся загвоздка, если учесть обилие альтернативных вариантов для конструктивного начала теории, уже обсуждаемое в предыдущих главах. Субъективный фактор здесь практически неустраним, можно только стараться его минимизировать.

Подвести, в изолированности от других математических реалий, золотую константу под некий универсальный принцип едва ли возможно и целесообразно. Математическая константа высокого ранга лучше “смотрится” в достойном окружении, как один из элементов системы. Именно в таком модусе, в сопоставлении с другими родственными числовыми величинами с наибольшей ясностью выявляется истинная значимость константы, её теоретический статус и формальный рейтинг. Это, отметим особо, не попытка обобщения константы, а её включение в не очень широкий и не слишком узкий контекст числовой структуры, объединяющей величины на основе общих признаков. В этом смысле принадлежность константы ϕ, например к множеству иррациональных чисел, или даже намного уже – множеству содержащих квадратный корень иррациональных чисел, мало о чём говорит: это чересчур широкие для нашего случая классы чисел и явно *не то*. Речь может идти лишь об объединении на основе признаков близкого родства.

Но прежде чем перейти к конкретной формулировке *родовых признаков*, перечислим общие правила обобщения теории или модели, принципа, уравнения и вообще теоретической конструкции. Они сформулированы нами в работе [A16], на основе которой, а также шестой главы монографии [A7] составлены ближайшие разделы.

Правило 1. Обобщаемое есть частный случай обобщённого

Правило 2. Обобщённое отличается от обобщаемого новыми объектами и константами

Правило 3. Фундаментальные особенности обобщаемого сохраняются в обобщённом

Правило 1 выполняется практически при любом обобщении. Правило 2 означает такое расширение области рассмотрения, при котором появляются новые выделенные величины. Наиболее важное в конструктивном плане и ответственное с точки зрения конкретных решений правило 3 равносильно закону сохранения неких свойств, инвариантных по отношению к любому изменению.

Каковы, однако, эти свойства, *родовые признаки*, неизменность которых должна быть закреплена законом сохранения, призванным обозначить пределы минимально допустимого расширения? Это, по сути, выбор надёжной фундаментальной основы для всего остального. Только такая основа способна канализировать исследование, ограничивать и предотвращать появление произвольных допущений и прочих излишеств, нередко затемняющих сущность вопроса и уводящих его в ненужном направлении. В работе [A[16]] в качестве соответствующего данному случаю закона сохранения взято *правило сохранения мантиссы* (ПСМ) как свойство, имманентно присущее числам определённого типа и только им и реально объединяющее их в единое золотое семейства. Сохранение мантиссы m для величин $1/x$, обратных искомым константам x, запишется в виде уравнения

$$\frac{1}{x} = x - m \tag{4.1}$$

Отсюда квадратное уравнение

$$x^2 - mx - 1 = 0 \tag{4.2}$$

и его корни

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2} \tag{4.3}$$

Вот, собственно говоря, и всё.

Обозначив положительные и отрицательные корни уравнения соответственно через x_+ и x_-, приведём для наглядности несколько примеров для различных значений m в десятичной системе счисления.

Таблица

Корни уравнения $x^2 - mx - 1 = 0$, десятичные значения корней и их обратных величин

m	**Корни**	x_+	$1/x_+$	x_-	$1/x_-$
1	$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	1,61803 39887…	0,61803 39887…	–0,61803 39887…	–1,61803 39887…
2	$1\pm\sqrt{2}$	2,41421 35623…	0,41421 35623…	–0,41421 35623…	–2,41421 35623…
3	$\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$	3,30277 56377…	0,30277 56377…	–0,30277 56377…	–3,30277 56377…
4	$2\pm\sqrt{5}$	4,23606 79775…	0,23606 79775…	–0,23606 79775…	–4,23606 79775…
5	$\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$	5,19258 24035…	0,19258 24035…	–0,19258 24035…	–5,19258 24035…
6	$3\pm\sqrt{10}$	6,16227 76601…	0,16227 76601…	–0,16227 76601…	–6,16227 76601…
…	…	…	…	…	…
24	$12\pm\sqrt{145}$	24,04159 45787…	0,04159 45787…	–0,04159 45787…	–24,04159 45787…
…	…	…	…	…	…
137	$\frac{137\pm\sqrt{18773}}{2}$	137,00729 88812…	0,00729 88812…	–0,00729 88812…	–137,00729 88812…
…	…	…	…	…	…

Полагая, что константа должна быть положительным числом, обозначим по аналогии с ϕ семейство полученных констант символом ϕ_m, где $m = 1, 2, \ldots k, \ldots$. Без знания ПСМ это семейство “вслепую” может быть получено по меньшей мере пятью основными способами на основе тех формальных конструкций, которые представлены выше.

1) Положительные корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, при условии, что $a = 1$, $c = -1$, $b = -m$:

$$x^2 - mx - 1 = 0 \tag{4.4}$$

2) Строящаяся по правилу третьего члена последовательность $u_{n+2} = a_1u_{n+1} + a_2u_n$ с множителями $a_1 = m$, $a_2 = 1$:

$$u_{n+2} = mu_{n+1} + u_n \tag{4.5}$$

Заметим, что как и в случае квазифибоначчиевой последовательности выбор начальных членов заметной роли здесь не играет: в общем случае комплексных членов $u_0 = a + b\mathrm{i}$, $u_1 = c + d\mathrm{i}$ имеем те же четыре последовательности, что и в простейшем случае $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ и ту же константу.

3) Замена в составленной из единиц цепной дроби числа 1 на положительное целое m:

$$m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m\ddots}}} \tag{4.6}$$

4) Замена в определённом интеграле верхнего предела 1 на m:

$$\int_0^m \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}} + \frac{m+2}{2m} \right) dx \tag{4.7}$$

5) В экспоненте 1/2 заменяется на $m/2$:

$$e^{\operatorname{arsh}(m/2)} \tag{4.8}$$

Отметим, что в последние два с небольшим десятилетия уравнение (4.4), рекуррентная последовательность (4.5) и цепная дробь (4.6) привлекли внимание многих исследователей [A[3, 16]; Spinadel[1, 2, 3]; Gazale; Татаренко[1, 2]; Kappraff[1, 2]; C[8]; Косинов; Falcon, Plaza; Шенягин]. Это очень простые, особенно квадратное уравнение, математические формы, но важно было за их внешней непритязательностью разглядеть открывающиеся возможности в плане обобщения уравнения для константы ϕ и последовательности Фибоначчи. Следует сказать, что указанные уравнение и рекурсия фактически содержатся в открытых ещё Эдуардом Люка последовательностях, носящих сегодня его имя (см. формулы (3.39)–(3.43) в гл. 3). Что касается квадратных уравнений безотносительно к ЗС, то это слишком очевидная, “лежащая на поверхности” и важная уже для начальных этапов математического познания конструкция, чтобы её могли проглядеть в достаточно развитых для своего времени цивилизациях. Более четырёх тысячелетий назад уравнения типа $x^2 + q = px$ по-своему решали ещё древние шумеры, позже квадратные уравнения частных типов умели различными способами, нередко геометрическими, решать математики Вавилона, Индии, Китая, Греции, стран мусульманского востока, в частности Египта, других научно продвинутых стран. А общее решение, с приведением к известному сейчас виду, получено европейскими математиками Кардано (Girolamo Cardano, 1501–1576), Стевином (Simon Stevin, 1548–1620) и Декартом (Rene Descartes, лат. Renatus Cartesius – Картезий, 1596–1650), см. [Quadratic equation].

Выбор нами правила сохранения мантиссы отнюдь не случаен. Ведь если вдуматься, ПСМ связано с понятием обратной величины, относящимся к числу основных в корневой структуре теории чисел, необходимым прежде всего для сведения операции деления к умножению на обратную величину. Именно благодаря этому условию константы ϕ_m во всём схожи с первенцем и наиболее важным членом золотого семейства, константой ϕ. Ещё раз при этом отметим, что речь идёт не об *обобщении константы* ϕ, а об обобщении *принципа*, связанного с её характерными особенностями. Подобное обобщение приводит к отысканию членов семейства, объединяемых, образно говоря, узами кровного родства.

Возрастающая с увеличением параметра m от $\phi \approx 1{,}62$ до бесконечности последовательность констант названа *металлическими пропорциями* В. Шпинадель (Вера Марта Виницки де Шпинадель; Vera Martha Winitzky de Spinadel, 1929), *T_m-гармониями* – А.А. Татаренко, мы же, подчеркивая соотнесённость этих чисел с $\phi = \phi_1$, предпочитаем говорить о семействе констант ϕ_m. Из таблицы хорошо видно, что с увеличением переменной значения функции приближаются к значениям её аргумента: $\phi_m \approx m$ и понятно, что наибольший интерес представляют числа с малыми значениями m. Существование семейства констант, родственных с золотой константой, скорее подчёркивает, чем принижает её значимость, поскольку $\phi_1 \equiv \phi$ является первенцем, а потому и уникумом этой бесконечной последовательности чисел.

Это чрезвычайно важно для понимания теоретического, а в определённой степени и онтологического статуса ЗС. Аналогичным свойством обладают, кстати, и другие семейства математических, а также физических констант. Вот два хорошо узнаваемых числа:

$$\delta = 4{,}66920\ 16091\ 02990\ 67185\ \ldots \text{ и } \alpha = 2{,}50290\ 78750\ 95892\ 82228\ \ldots,$$

считающиеся универсальными постоянными [Фейгенбаум]. Первая из постоянных Фейгенбаума характеризует скорость перехода к детерминированному хаосу систем, испытывающих удвоение периода, вторая – это отношение между шириной ветви и шириной одной из её подветок в процессе удвоения. А вот монотонно возрастающая и монотонно убывающая бесконечные последовательности чисел, которые едва ли многим известны:

$$5{,}96796\ 87038\ \ldots,\ \ 7{,}28468\ 62171\ \ldots,\ \ 8{,}34949\ 91320\ \ldots,\ \ 9{,}29624\ 68327\ \ldots$$

$$1{,}92769\ 09638\ \ldots,\ \ 1{,}69030\ 29714\ \ldots,\ \ 1{,}55577\ 12501\ \ldots,\ \ 1{,}46774\ 24503\ \ldots$$

Между тем, это определяемые по рекуррентным формулам для $\delta(r)$ и $\alpha(r)$ числа, соответствующие значениям переменной $r = 3, 4, 5, \ldots$ и образующие со своими начальными членами $\delta(2) = 4{,}66920\ldots$ и $\alpha(2) = 2{,}50290\ldots$ единое семейство констант [Finch[2]; W[10]].

В список благородных семейств МК со своим явно выделенным лидером и родоначальником можно добавить и омега постоянную W(1). В теории ЛМФ она является одной из восьми ФМК, получаемых в рамках аксиоматической системы универсальной математики в результате решения системы функциональных уравнений, а в последовательности значений функции Ламберта $W(z)$ предстаёт в виде её минимальной, а по сути единственно значимой числовой величины.

Первостепенность, в буквальном и фигуральном смысле слова, экстремальных значений особенно заметна в физической теории. Двуединая природа (математическое число и природная величина с определённым онтологическим статусом, “физическим смыслом”) нескольких фундаментальных физических постоянных дополняется их минимальностью, которая выражается термином *квант*. Квант энтропии $k/2$, квант момента импульса $\hbar/2$, квант электрического заряда $e/3$ (не путать с ФМК e) в кварковой модели. С формальной точки зрения это физико-математические числа, минимальные значения соответствующих величин, с которых начинаются если не бесконечные, то достаточно длинные цепочки числовых величин, не обязательно даже меняющихся по целочисленному закону (Холловское сопротивление). И что особенно важно в данном контексте: теория интересуется лишь ближайшими соседями квантов, таких как $\hbar$ – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, e – элементарный заряд, и с редким безразличием относится к великому множеству остальных значений, которые ей попросту без надобности.

Если теперь провести аналогию между семейством ϕ_m и указанными последовательностями ФФП, которая, как большинство аналогий, возможно и *хромает на одну ногу,* но не лишена убедительности, золотую константу можно условно назвать *квантом семейства* ϕ_m. Собственно говоря, коренное отличие квантованных по математической или физической константе рядов от других последовательностей, включая ряды $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$, в том и состоит, что в первом случае важен принцип “квантования” и начальные члены ряда, во втором – рекуррентное правило и формула для общего члена.

Свою роль первенца, а значит и наиболее значительного члена семейства констант, число ϕ сохраняет и во всех рассмотренных в настоящей главе вариантах обобщения ТЗС, поскольку принцип минимума всегда на его стороне. Мы часто ссылаемся на этот фундаментальный принцип, известный в разных вариациях, в различных обличьях и под разными названиями, полагая, что именно здесь спрятан ключ к пониманию принципа золотого сечения как частного случая ПМ. Вся история математики и теоретического естествознания явно даёт понять, что в экстремумах, как особых точках математических функций и особых значениях физических величин, математика и природа закодировали значительную часть своих легко выявляемых и глубоко запрятанных тайн. Без учёта ПМ математика ЗС фактически предстает в виде конгломерата формальных структур, а вся золотая концепция может свестись к нескончаемым пререканиям между восторженными апологетами и непреклонными скептиками, к досужим размышлениям и умозрительному теоретизированию.

4. Свойства семейства констант ϕ_m

Инвариантность по отношению к системам счисления

Известно, что чем проще формулировка физического закона сохранения, тем шире её охват. Так, простое равенство $c = \text{const}$ для скорости света в вакууме является одним из немногих, не знающих ограничений фундаментальных законов природы; аналогично и для столь же простых законов сохранения зарядов и момента импульса. Конечно, законы сохранения в математике имеют свою специфику, обусловленную особенностями абстрактных математических объектов, в частности природой и формальной структурой числовых констант. Но принцип *чем проще, тем универсальнее* неплохо работает и здесь. Заметим в этой связи, что в законе сохранения, названном выше *правилом сохранения мантиссы*, нет ограничений, касающихся выбора позиционной системы счисления. Всё же воочию убедимся на нескольких примерах в инвариантности данного закона по отношению к системе счисления с произвольно взятым основанием k. Пусть, например, в уравнении (4.4) параметр $m = 8$, а значит

$$x_+ = 8{,}12310\,56256\ldots,\quad 1/x_+ = 0{,}12310\,56256\ldots$$

в десятеричной системе, и посмотрим, чему равны корни квадратного уравнения в других системах счисления. Для определённости возьмём, как обычно, двоичную, пятеричную и двенадцатеричную системы. Имеем:

$$x_+(2) = 1000{,}00011\,11110\,00001\,11101\ldots \qquad 1/x_+(2) = 0{,}00011\,11110\,00001\,11101\ldots$$

$$x_+(5) = 13{,}03014\,32303\,14142\ldots \qquad 1/x_+(5) = 0{,}03014\,32303\,14142\ldots$$

$$x_+(12) = 8{,}15888\,75183\,48560\ldots \qquad 1/x_+(12) = 0{,}15888\,75183\,48560\ldots$$

Комментарии излишни.

Целые числа как конечная сумма констант ϕ_m

Запись любого иррационального числа в n-ичной позиционной системе счисления осуществляется посредством *бесконечной* непериодической последовательности целых чисел. Такое представление является фундаментальной, отличающей их от чисел рациональных, особенностью этого класса математических величин, используемой и для их определения. Связь иррациональных чисел с целыми – тонкая материя и нетривиальный характер этих связей особенно нагляден при формальном анализе свойств членов семейства констант ϕ_m. Выясним в свете сказанного, можно ли целое число представить в виде *конечной* суммы типа

$$\sum_{l=0}^{k+i}\sum_{r=n}^{-i} a_l\phi_m^r = a_0\phi_m^n + a_1\phi_m^{n-1} + \ldots + a_k\phi_m^0 + a_{k+1}\phi_m^{-1} + a_{k+2}\phi_m^{-2} + \ldots + a_{k+i}\phi_m^{-i} \qquad (4.9)$$

положительных и отрицательных степеней любой из констант ϕ_m, где множители a_l могут принимать одно из значений 0, 1, 2, … t, не превышающее ϕ_m. Возьмём для определённости целое число 1836 и константы

$$\phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \equiv e^{\operatorname{arsh}(5/2)} \quad \text{и} \quad \phi_{26} = 13 + \sqrt{170} \equiv e^{\operatorname{arsh}13}$$

Нетрудно установить, что

$$1836 = 2\phi_5^4 + 2\phi_5^3 + 3\phi_5^2 + 4\phi_5 + \phi_5^{-1} + 3\phi_5^{-2} + 3\phi_5^{-3} + 3\phi_5^{-4}$$

$$1836 = 2\phi_{26}^2 + 18\phi_{26} + 11\phi_{26}^0 + 8\,\phi_{26}^{-1} + 3\,\phi_{26}^{-2}$$

Понятно, что конечность этих выражений – всего лишь конкретная иллюстрация общего для всего семейства ϕ_m свойства. Любое целое число может быть выражено в виде конечной суммы степеней иррациональных чисел ϕ_m – ещё одна фундаментальная характеристика этого уникального семейства [C[6]]. Остальные числа типа $\frac{k+\sqrt{l}}{2}$, не говоря уже о числах типа $\frac{k+\sqrt[r]{l}}{2}$ $(r \neq 2)$, данным свойством не обладают.

Уравнения произвольных степеней

Математическая запись правила сохранения мантиссы в виде равенства (4.1) открывает широкие возможности для перехода от квадратных уравнений типа (4.2) к уравнениям произвольных степеней. Если, по-прежнему сохраняя мантиссу для обратной величины, возвести обе части (4.1) в степень n, получим

$$(x-m)^n x^n - 1 = 0 \qquad (4.10)$$

Придавая для наглядности параметрам n и m различные значения, посмотрим на соответствующие уравнения, с указанием их действительных корней.

$$n=2 \quad m=1 \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0 \qquad x_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad x_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$n=3 \quad m=2 \quad x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3 - 1 = 0 \qquad x_+ = 1+\sqrt{2} \qquad x_- = 1-\sqrt{2}$$

$$n=4 \quad m=3 \quad x^8 - 12x^7 + 54x^6 - 108x^5 + 81x^4 - 1 = 0 \qquad x_+ = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \qquad x_- = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

Уравнение (4.10) степени $2n$ содержит $n + 2$ слагаемых, имеет $2n - 2$ комплексных и только два действительных корня типа ϕ_m и $-\phi_m^{-1}$.

Показатель степени в (4.10) необязательно должен быть целым положительным числом, поскольку ПСМ остаётся справедливым при возведении частей равенства (4.1) в любую степень, необязательно даже в действительную. Другими словами, в самом общем случае комплексного $\rho = x + iy$ уравнение

$$(x-m)^{\rho}x^{\rho}-1=0 \tag{4.11}$$

приводит к действительному корню ϕ_m. В частном случае, если $m = 1$, имеем бесконечное множество уравнений

$$(x-1)^{\rho}x^{\rho}-1=0 \tag{4.11′}$$

для золотой константы ϕ. Это, в свою очередь, вносит некоторые коррективы в ТЗС, поскольку золотая константа оказывается корнем континуально бесконечного множества уравнений любой степени, кроме нулевой. Конечно, чисто формально (4.11′) может быть получено из классического квадратного уравнения $(x-1)x = 1$ возведением обеих его частей в степень ρ и с учётом особенностей числа 1, но тогда это будет выглядеть не как результат расширенного применения универсального для ЗС принципа, а просто как технический приём. В любом случае, квадратное уравнение не является единственным неявным определением подобного рода, но в то же время именно оно наиболее онтологически обосновано и содержательно оправданно, к тому же может быть получено из общей формулы (4.11) применением принципа минимума.

Подходящие дроби и числовые последовательности $F_{m,n}$

Представим теперь в классическом варианте ($u_0 = 0$, $u_1 = 1$) для первых пяти значений m подходящие дроби $F_{m,n+1}/F_{m,n}$, ($n = 1, 2, 3,\ldots$) констант ϕ_m и соответствующие им числовые последовательности $F_{m,n}$.

$$m=1 \quad \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \frac{144}{89},\ \frac{233}{144},\ \frac{377}{233},\ \frac{610}{377},\ldots \tag{4.12}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, …

$$m=2 \quad \frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{29}{12},\ \frac{70}{29},\ \frac{169}{70},\ \frac{408}{169},\ \frac{985}{408},\ \frac{2378}{985},\ \frac{5741}{2378},\ \frac{13860}{5741},\ldots \tag{4.13}$$

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025, 470832, …

$$m=3 \quad \frac{3}{1},\ \frac{10}{3},\ \frac{33}{10},\ \frac{109}{33},\ \frac{360}{109},\ \frac{1189}{360},\ \frac{3927}{1189},\ \frac{12970}{3927},\ \frac{42837}{12970},\ \frac{141481}{42837},\ \frac{467280}{141481},\ \frac{1543321}{467280},\ldots \tag{4.14}$$

0, 1, 3, 10, 33, 109, 360, 1189, 3927, 12970, 42837, 141481, 467280, 1543321, …

$$m=4 \quad \frac{4}{1},\ \frac{17}{4},\ \frac{72}{17},\ \frac{305}{72},\ \frac{1292}{305},\ \frac{5473}{1292},\ \frac{23184}{5473},\ \frac{98209}{23184},\ \frac{416020}{98209},\ \frac{1762289}{416020},\ \frac{7465176}{1762289},\ldots \tag{4.15}$$

0, 1, 4, 17, 72, 305, 1292, 5473, 23184, 98209, 416020, 1762289, 7465176, …

$$m=5 \quad \frac{5}{1},\ \frac{26}{5},\ \frac{135}{26},\ \frac{701}{135},\ \frac{3640}{701},\ \frac{18901}{3640},\ \frac{98145}{18901},\ \frac{509626}{98145},\ \frac{2646275}{509626},\ \frac{13741001}{2646275},\ \frac{71351280}{13741001},\ldots \tag{4.16}$$

0, 1, 5, 26, 135, 701, 3640, 18901, 98145, 509626, 2646275, 13741001, 71351280, …

Разумеется, для всех членов семейства имеет место сходимость

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{m,n+1}}{F_{m,n}} = \phi_m, \tag{4.17}$$

но с возрастающей по мере увеличения m скоростью. Обозначая через $\delta_m(n)$ разность по абсолютной величине между отношением $F_{m,n+1}/F_{m,n}$ и константой ϕ_m, и взяв для определённости $n = 12$, имеем довольно быстро сходящуюся к 0 последовательность приближений для разных m:

$$\delta_1(12) \approx 2{,}2\cdot 10^{-5},\quad \delta_2(12) \approx 1{,}8\cdot 10^{-9},\quad \delta_3(12) \approx 1{,}3\cdot 10^{-13},\ \ldots,\ \delta_{24}(12) \approx 1{,}7\cdot 10^{-32},\ \ldots,\ \delta_{137}(12) \approx 7{,}2\cdot 10^{-50},\ \ldots$$

ПСМ для степеней констант ϕ_m

Правило сохранения мантиссы намного более значимо, чем может показаться вначале. Математические константы имеют, как правило, многочисленную “свиту” из своих производных и гомологов, представляющих собой числовые конструкты, строящиеся на материнской основе, например, положительные и отрицательные степени констант ϕ_m. О них сейчас и пойдёт речь. Возьмём наугад по одному нечётному и чётному числу семейства

ϕ_m, скажем, третье и четырнадцатое и посмотрим на десятичную запись нечётной и чётной целых степеней чисел ϕ_3 и ϕ_{14} и их обратных величин. Для определённости пусть будет $n = 5$ и $n = 12$ в первом случае, $n = 3$ и $n = 4$ – во втором. Имеем:

$$\phi_3^5 = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^5 \equiv e^{5\operatorname{arsh}(3/2)} = 393{,}00254\,45127\,87416\ldots \qquad \phi_3^{-5} = 0{,}00254\,45127\,87416\ldots$$

$$\phi_3^{12} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{12} \equiv e^{12\operatorname{arsh}(3/2)} = 16\,84801{,}99999\,94064\,58444\ldots \qquad \phi_3^{-12} = 0{,}00000\,05935\,41555\,62514\ldots$$

$$\phi_{14}^3 = \left(7+5\sqrt{2}\right)^3 \equiv e^{3\operatorname{arsh}(14/2)} = 2786{,}00035\,89374\,98623\ldots \qquad \phi_{14}^{-3} = 0{,}00035\,89374\,98623\,06966\ldots$$

$$\phi_{14}^4 = \left(7+5\sqrt{2}\right)^4 \equiv e^{4\operatorname{arsh}(14/2)} = 39201{,}99997\,44910\,97376\ldots \qquad \phi_{14}^{-4} = 0{,}00002\,55089\,02623\,60859\ldots$$

Мы видим, что независимо от чётности или нечётности параметра m, мантиссы в случае нечётных степеней $2k - 1$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) совпадают, в случае же чётных степеней $2k$, как нетрудно убедиться, их сумма равна 1 (доказательство по индукции). ПСМ фактически распространяется на любые нечётные степени ϕ_m^{2k-1} и сумму типа $\phi_m^{2k} + \phi_m^{-2k}$ для чётных степеней.

В общем случае произвольно взятых m, чётных и нечётных n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) имеют место формулы

$$\phi_m^n + \phi_m^{-n} = F_{m,n-1} + F_{m,n+1} \quad \text{для чётных степеней} \tag{4.18}$$

$$\phi_m^n - \phi_m^{-n} = F_{m,n-1} + F_{m,n+1} \quad \text{для нечётных степеней} \tag{4.19}$$

Сумма или разность степеней золотых констант и обратных им величин, то есть двух иррациональных чисел, равна сумме двух натуральный чисел – это одна из особенностей семейства чисел ϕ_m. Сюда можно, конечно, добавить и формулы для положительных и отрицательных степеней констант ϕ_m:

$$\phi_m^n = F_{m,n}\phi_m + F_{m,n-1} \tag{4.20}$$

$$\phi_m^{-n} = (-1)^n(F_{m,n+1} - F_{m,n}\phi_m) \tag{4.21}$$

Последнюю формулу запишем также в отдельности для чётной и нечётной степеней:

$$\phi_m^{-2k} = F_{m,2k+1} - F_{m,2k}\phi_m \qquad n = 2k,\ (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.22}$$

$$\phi_m^{-(2k-1)} = F_{m,2k-1}\phi_m - F_{m,2k} \qquad n = 2k - 1 \tag{4.23}$$

Любые целые степени золотых констант сводятся к их линейным функциям, с участием стоящих рядом членов соответствующих последовательностей. Степенная функция сводится к линейной – замечательное свойство ϕ_m.

Производные константы ϕ в семействе ϕ_m

Рассмотрение в разделе 14 предыдущей главы квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$ с целочисленными коэффициентами p и q и корнями в области действительных чисел привело к формулам для подмножеств чисел, непосредственно выражаемых через константу $\sqrt{5} = 2\phi - 1$. Понятно, что это формулы для чисел более общего типа, чем соответствующее в квадратном уравнении частному значению $q = 1$ семейство ϕ_m. Бесконечное подмножество “позолоченных” констант имеется, конечно, и здесь, причем довольно своеобразное и не лишённое интереса.

Опуская, как обычно, технические детали, приведём первые, связанные с $2\phi - 1$ положительные числа в последовательности ϕ_m:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{4+2\sqrt{5}}{2},\ \frac{11+5\sqrt{5}}{2},\ \frac{29+13\sqrt{5}}{2},\ \frac{76+34\sqrt{5}}{2},\ \frac{199+89\sqrt{5}}{2},\ \frac{521+233\sqrt{5}}{2},\ \frac{1364+610\sqrt{5}}{2},\ldots$$

Целые числа в числителе образуют соответствующие значениям $p = 1, 4, 11, 29, 76, 199, 521, 1364, \ldots$ два бесконечных ряда:

1, 4, 11, 29, 76, 199, 521, 1364, … и 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, …

Нетрудно заметить, что это последовательности, составленные из чисел Люка L_{2n-1} и Фибоначчи F_{2n-1} ($n = 1, 2, \ldots$). Следовательно, в семействе ϕ_m для позолоченных значений множителя m и положительных корней квадратного уравнения имеем формулы

$$m = L_{2n-1}, \quad x = \frac{L_{2n-1} + F_{2n-1}\sqrt{5}}{2} = \frac{F_{2n-2} + F_{2n} + F_{2n-1}(2\phi - 1)}{2} \tag{4.24}$$

Аналогичные формулы могут быть получены и для других членов семейства ϕ_m, но окончательное решение этого вопроса всё же отложим до рассмотрения математической модели боле высокого уровня общности.

Некоторые формулы семейства ϕ_m

Если математическую модель с единственной константой ϕ определить как “золотоносную” теорию первого уровня общности, модель с семейством констант ϕ_m может считаться теорией второго уровня общности. Очертив минимально допустимые границы обобщения теории константы ϕ и рядов Фибоначчи посредством ПСМ, попытаемся проникнуть глубже в формализм обобщённой модели. Без экспоненты и её производных, в частности гиперболических функций

$$\operatorname{sh} y = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

как и прежде, не обойтись. Так, сумма или разность возведённой в любую вещественную или даже комплексную степень ρ константы ϕ_m и обратной ей величины не будут, вообще говоря, выражаться целыми числами, как в случае целых степеней n. Здесь справедливы формулы

$$\phi_m^{\rho} + \phi_m^{-\rho} = 2\operatorname{ch}[\rho \operatorname{arcsh}(m/2)] \tag{4.25}$$

$$\phi_m^{\rho} - \phi_m^{-\rho} = 2\operatorname{sh}[\rho \operatorname{arcsh}(m/2)] \tag{4.26}$$

А формула Бине для $F_{m,n}$ с помощью гиперболических функций запишется в виде

$$F_{m,n} = \frac{\operatorname{ch}[n \operatorname{arsh}(m/2)]}{\phi_m - m/2} \qquad \text{для нечётных } n \tag{4.27}$$

$$F_{m,n} = \frac{\operatorname{sh}[n \operatorname{arsh}(m/2)]}{\phi_m - m/2} \qquad \text{для чётных } n \tag{4.28}$$

Для произвольного действительного числа r формула Бине обобщённой теории содержит тригонометрическую функцию $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ с четырьмя фундаментальными математическими константами – проточислами e, π, i, 2, посредством которых может быть построен континуум действительных и комплексных чисел [A[2], 122–129]:

$$F_{m,r} = \frac{\phi_m^{r} - (\phi_m^{-1})^{r}\cos(r\pi)}{2(\phi_m - 1)} \tag{4.29}$$

Легко заметить, что формулы обобщённой модели формально отличаются от прежних лишь наличием индекса m, хотя и охватывают намного более широкую числовую область.

5. Теория ЛМФ и семейство чисел ϕ_{mk}

Коротко о теории ЛМФ

Обобщение посредством ПСМ является минимальным обобщением ЗС на уровне её теоретико-числовой корневой системы. Это наиболее бесспорное включение эквивалентных построений ЗС (квадратное уравнение, экспонента, линейная рекурсия, цепная дробь, определённый интеграл и т.д.) в структуру формализма более общего типа и только первый шаг на пути возможных обобщений. Формулы для более широкого семейства иррациональных чисел получены в рамках теории ЛМФ методом математической индукции. Коротко о самой теории ЛМФ. По замыслу это фундаментальная теория физического мира начала XXI века, охватывающая все области физической реальности. В своём окончательном виде она изложена в капитальной монографии [A[7]], её сокращенный примерно в четыре раза вариант представлен в книге [A[8]], ещё более сжатое изложение – в изданной в 2010 г. книге [Ar[4]], а в связи с золотым сечением она представлена в 2011 г. в книге [A[15]]. Название теории составлено из начальных букв слов **Л***огика*, **М***атематика* и **Ф***изика*, стало быть ЛМФ – теория единства логики, математики и физики, и задумана она как базисная, материнская теория физического мира. Можно сказать, что это в некотором роде общая теория всех физических теорий, возведённая на фундаменте математической логики и чистой математики. В рамках теории ЛМФ решается ряд важнейших задач, среди которых можно последовательно выделить следующие:

- Составление набора исходных логических и математических операций, понятий функции и переменной, терма и формулы, полного алфавита формальной структуры теории ЛМФ
- Построение, с использованием первичных элементов и операций, формальной логико-математической системы, охватывающей множество всех чисел
- Вывод в рамках этой системы, состоящей из логических постулатов и математических аксиом, исходных математических функций экспоненты и логарифма и начальных чисел – восьми фундаментальных математических констант (ФМК), включая две новые [A[10, 12, 17]; Ar[2, 3]]
- Построение множества всех чисел с помощью исходных операций аксиоматической системы и начальных чисел – проточисел
- Переход от математических переменных и фундаментальных констант к фундаментальным физическим величинам
- Получение в закодированном виде основных физических уравнений – законов сохранения, изменения и квантования фундаментальных физических величин
- Построение безразмерной системы измерения физических величин, или **A**-системы, в которой каждая величина приобретает свое истинное числовое значение
- Верификация **A**-системы, а косвенно формализма теории ЛМФ в целом, на основе удивительного результата для константы Ферми G_F
- Решение проблемы теоретического определения численных значений для таких физических констант, как постоянная тонкой структуры (постоянная Зоммерфельда), время жизни мюона, масс заряженных лептонов и нуклонов
- Определение экстремальных значений физических величин, границ физической реальности
- Введение новой космологической постоянной N_U, равной отношению максимальных и минимальных параметров Вселенной и вообще отношению экстремальных значений физических величин
- Объединение посредством константы N_U основных физических законов сохранения, изменения и квантования в единые обобщённые законы

В приложениях теории ЛМФ, наряду с рассмотрением проблем физической теории, касающихся в частности пространства-времени, гипотезы вариаций постоянных, антропного принципа, больших чисел Дирака, большое место уделено **экспоненциальному обобщению математической теории золотого сечения**, которое приводит к семейству констант ϕ_{mk}.

Семейство констант ϕ_{mk}

За подробностями отсылаем читателя к указанным работам, особенно к первой и последней, а здесь дадим выжимку из непосредственно относящихся к ЗС математических результатов, являющихся приложением и следствием теории ЛМФ. В основе обобщения лежит известное нам из первой главы определение золотой константы

$$\phi = e^{\operatorname{arsh} ½}, \ \operatorname{arsh} z = \ln(z + \sqrt{1+z^2}\,), \tag{4.30}$$

выражающее константу ϕ посредством основных (материнских) для всей математики экспоненциальной и логарифмической функций

Экспоненциальной формой записи обеспечивается очень простой вывод всех основных соотношений ТЗС, а обобщение приводит к семейству чисел

$$\phi_{mk} = e^{\pm \operatorname{arsh}(m/k)}, \tag{4.31}$$

где m и k произвольные комплексные числа. В общем случае ϕ_{mk} представляет собой множество отличных от нуля комплексных чисел, хотя удобнее, конечно, иметь дело с действительными m и k, отделяя их при необходимости запятой. А соответствующие множества положительных и отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных чисел можно образовать посредством экспоненты $\exp(\pi i n/2)$, зная, что для всего бесконечного множества переменных n = 0, ±1, ±2, … существует лишь четыре значения функции: ±1, ±i. Следовательно, в достаточно общем случае

$$\phi_{mk} = e^{\pi i n/2 \,\pm\, \mathrm{arsh}(m/k)}, \tag{4.32}$$

где $n = 1, 2, 3, 4$, а m и k действительные числа. Фиксируя, например, значения $m = 1$, $k = 2$ и заставляя переменную n пробегать последовательность 1, 2, 3, 4, получим следующие значения: ϕi, $-\phi$, $-\phi$i, ϕ. Можно ограничиться областью положительных действительных значений, поскольку остальные три случая вполне аналогичны и не содержат принципиально новых моментов.

Гиперболическая функция $y = \mathrm{arsh}\, x$ действительной переменной x определена для всех значений $-\infty < x < +\infty$ и заполняет область значений $-\infty < y < +\infty$, поэтому исследуемое множество $\{\phi_{mk}\}$ является множеством всех чисел $\phi_{mk} > 0$. Используя связь между гиперболическим синусом и логарифмом, получим

$$\phi_{mk} = e^{\pm \mathrm{arsh}(m/k)} = \pm\frac{m}{k} + \sqrt{1 + \frac{m^2}{k^2}} \tag{4.33}$$

Отсюда квадратные уравнения

$$(\phi_{mk}^{\max})^2 - 2\left|\frac{m}{k}\right|\phi_{mk}^{\max} - 1 = 0 \tag{4.34}$$

$$(\phi_{mk}^{\min})^2 + 2\left|\frac{m}{k}\right|\phi_{mk}^{\min} - 1 = 0 \tag{4.35}$$

имеющие положительные корни

$$\phi_{mk}^{\max} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{k^2}} + \left|\frac{m}{k}\right| \tag{4.36}$$

$$\phi_{mk}^{\min} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{k^2}} - \left|\frac{m}{k}\right| \tag{4.37}$$

Можно ввести обозначения

$$\phi_{mk}^{\max} \equiv x, \quad \phi_{mk}^{\min} \equiv y, \quad 2\frac{m}{k} = a \tag{4.38}$$

сильно упрощающие запись последних уравнений:

$$x^2 - ax - 1 = 0 \tag{4.39}$$

$$y^2 + ay - 1 = 0 \tag{4.40}$$

В частном случае $k = 2$ приходим к уравнению для семейства ϕ_m, если же $k = 2$ и $m = 1$, имеем уравнение для константы ϕ. Ясно, что множество ϕ_m является подмножеством ϕ_{mk}, выделенным из него правилом сохранения мантиссы. В чём-то это серьёзная и, возможно, чрезмерная уступка строгому требованию ПСМ: установление родства на уровне позиционной системы счисления, а не только идентификация посредством общих алгебраических свойств. Независимо от этого, необходима чёткая демаркация границ применимости теоретических моделей различной степени общности и соответствующая терминология. Условимся теорию, представленную в предыдущих главах, с перечислением основных элементов в начале настоящей главы, называть, как и раньше, *теорией золотого сечения* (ТЗС). Это как бы *золотой домен*, с единственной константой ϕ и последовательностью Фибоначчи в классическом или обобщённом, но тем не менее сходящемся к ϕ варианте. Математическую модель, основанную на ПСМ и приводящую к семейству чисел ϕ_m, можно назвать *обобщённой теорией золотого сечения* (ОТЗС), но учитывая, что это лишь один шаг на пути последовательных обобщений ТЗС, более оправданно и менее претенциозно назвать такую модель *теорией семейства констант* ϕ_m. Аналогично, модель, генетически связанную с теорией ЛМФ и основанную на экспоненциальной формуле (4.30), назовем *теорией семейства констант* ϕ_{mk}. Для удобства введём также следующие, не требующие комментариев символические обозначения для моделей трёх уровней: $T(\phi)$, $T(\phi_m)$ и $T(\phi_{mk})$.

ПСМ для семейства чисел ϕ_{mk}

Запись экспоненты в виде квадратного уравнения даёт возможность определить, при каких значениях переменных n, k и m мантисса членов семейства ϕ_{mk} и их целых степеней

$$\phi_{mk}^n = e^{n\,\mathrm{arsh}(m/k)}, \;\; n, k \text{ и } m - \text{целые положительные числа} \tag{4.41}$$

сохраняется с переходом к их обратным величинам. Поскольку значением индекса $k = 2$ из множества ϕ_{mk} выделяется подмножество ϕ_m, то для семейства чисел ϕ_{m2} ПСМ выполняется автоматически. Это, напомним, означает, что независимо от чётности или нечётности параметра m, мантиссы в случае нечётных степеней совпадают, в случае же чётных степеней их сумма равна 1. Разумеется, это имеет место и в случае, когда отношение m/k является целым числом r:

$$\phi_{mk}^{n} = e^{n\,\mathrm{arsh}\,r}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.42}$$

При любом другом наборе переменных n, k и m ПСМ выполняться не может.

Основные положения и формулы $T(\phi_{mk})$

В заключение, не вдаваясь в какие-либо подробности, которые даны в указанных выше работах, представим в тезисной форме основные положения и формулы теории семейства констант ϕ_{mk}. Заметим только, что в выражениях типа F_{mkn} первые два индекса означают принадлежность к семейству, а последний индекс – переменная, определяющая место числа в последовательности. В случае, если из обозначаемого через mk общего множества выделяется подмножество для конкретных значений m и k, индексы заменяются этими значениями и отделяются друг от друга черточкой /.

Основной тезис $T(\phi_{mk})$ как приложения теории ЛМФ:

Формализм $T(\phi_{mk})$ может быть получен из свойств материнской экспоненциальной и логарифмической функций определённого типа и из принципа минимума

Исходная форма: $\phi_z = e^{\mathrm{arsh}\,z} = e^{\mathrm{arsh}(x+iy)}$ (4.43)

Исходная форма в частном случае действительной переменной:

$$\phi_{mk} = e^{\pm\mathrm{arsh}(m/k)} = \pm\frac{m}{k} + \sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}}, \quad m \text{ и } k \text{ действительные числа} \tag{4.43′}$$

Экспоненциальная форма золотой константы: $\phi = e^{\mathrm{arsh}\,1/2}$

Закон третьего члена, или линейная рекурсия для чисел F_{mkn}:

$$F_{mk(n+2)} = aF_{mk(n+1)} + F_{mkn} \tag{4.44}$$

Две формулы для чисел последовательности F_{mkn}:

$$F_{mkh}F_{mkt} - F_{mks}F_{mkl} = (-1)^r F_{mk(h-r)}F_{mk(t-r)} - F_{mk(s-r)}F_{mk(l-r)} \tag{4.45}$$

$$F_{mk(n+1)}F_{mk(n+2)} - F_{mkn}F_{mk(n+3)} = (-1)^n a \tag{4.46}$$

Соответствующее исходной форме квадратное уравнение:

$$z^2 - 2z - 1 = 0 \tag{4.47}$$

Квадратное уравнение для частного случая действительных параметров m и k:

$$x^2 - 2m/k - 1 = 0 \tag{4.48}$$

Положительные корни квадратных уравнений для некоторых значений m и k:

(в частности, $\phi_{1/2} \equiv \phi$; $\phi_{2/1} \equiv \phi^3$; $\phi_{1/1} = 1+\sqrt{2}$ – константа да Винчи; $\phi_{11/2} = 3 + 5\phi$; $\phi_{2/11} = (10\phi - 3)/11$)

$$\phi_{5/12} \qquad x^2 - 2\,\frac{5}{12}\,x - 1 = 0 \qquad x = \frac{3}{2} \tag{4.49}$$

$$\phi_{12/5} \qquad x^2 - 2\,\frac{12}{5}\,x - 1 = 0 \qquad x = 5 \tag{4.50}$$

$$\phi_{4/11} \qquad x^2 - 2\,\frac{4}{11}\,x - 1 = 0 \qquad x = \frac{4+\sqrt{137}}{11} = 1{,}42769\ldots \tag{4.51}$$

$$\phi_{11/4} \qquad x^2 - 2\,\frac{11}{4}\,x - 1 = 0 \qquad x = \frac{11+\sqrt{137}}{4} = 5{,}67617\ldots \tag{4.52}$$

$$\phi_{3/4} \qquad x^2 - 2\frac{3}{4}x - 1 = 0 \qquad x = 2 \tag{4.53}$$

$$\phi_{4/3} \qquad x^2 - 2\frac{4}{3}x - 1 = 0 \qquad x = 3 \tag{4.54}$$

$$\phi_{1/3} \qquad x^2 - 2\frac{1}{3}x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1+\sqrt{10}}{3} = 1{,}38742\ldots \tag{4.55}$$

$$\phi_{3/1} \qquad x^2 - 2\frac{3}{1}x - 1 = 0 \qquad\qquad x = 3 + \sqrt{10} = 6{,}16227\ldots \tag{4.56}$$

Цепные и подходящие дроби членов семейства ϕ_{mk}:

$$\phi_{2/11} = [1; 5, 22, 5, 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} \tag{4.57}$$

$$\frac{1}{1}, \frac{6}{5}, \frac{133}{111}, \frac{671}{560}, \frac{804}{671}, \frac{1475}{1231}, \frac{8179}{6826}, \frac{181413}{151403}, \frac{915244}{763841}, \frac{1096657}{915244}, \frac{2011901}{1679085}, \ldots$$

$$\phi_{11/2} = [11; 11, \ldots] = 11 + \cfrac{1}{11 + \ddots} \tag{4.58}$$

$$\frac{11}{1}, \frac{122}{11}, \frac{1353}{122}, \frac{15005}{1353}, \frac{166408}{15005}, \frac{1845493}{166408}, \frac{20466831}{1845493}, \frac{226980634}{20466831}, \frac{2517253805}{226980634}, \ldots$$

$$\phi_{4/11} = [1; 2, 2, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}}} \tag{4.59}$$

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{10}{7}, \frac{227}{159}, \frac{237}{166}, \frac{701}{491}, \frac{1639}{1148}, \frac{2340}{1639}, \frac{3979}{2787}, \frac{10298}{7213}, \frac{24575}{17213}, \ldots$$

$$\phi_{11/4} = [5; 1, 2, 11, 2, 1, 5, 5, \ldots] = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \ddots}}}}}}} \tag{4.60}$$

$$\frac{6}{1}, \frac{17}{3}, \frac{193}{34}, \frac{403}{71}, \frac{596}{105}, \frac{3383}{596}, \frac{17511}{3085}, \frac{20894}{3681}, \frac{59299}{10447}, \frac{673183}{118598}, \frac{1405665}{247643}, \ldots$$

$$\phi_{1/3} = [1; 2, 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}} \tag{4.61}$$

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{18}{13}, \frac{25}{18}, \frac{43}{31}, \frac{111}{80}, \frac{154}{111}, \frac{265}{191}, \frac{684}{493}, \frac{949}{684}, \frac{1633}{1177}, \ldots$$

$$\phi_{3/1} = [6; 6, \ldots] = 6 + \cfrac{1}{6 + \ddots} \tag{4.62}$$

$$\frac{6}{1},\ \frac{37}{6},\ \frac{228}{37},\ \frac{1405}{228},\ \frac{8658}{1405},\ \frac{53353}{8658},\ \frac{328776}{53353},\ \frac{2026009}{328776},\ \frac{12484830}{2026009},\ \frac{76934989}{12484830},\ \ldots$$

$$\phi_{2/1} = [4;\, 4,\, \ldots] = 4 + \cfrac{1}{4 + \ddots} \tag{4.63}$$

$$\frac{4}{1},\ \frac{17}{4},\ \frac{72}{17},\ \frac{305}{72},\ \frac{1292}{305},\ \frac{5473}{1292},\ \frac{23184}{5473},\ \frac{98209}{23184},\ \frac{416020}{98209},\ \frac{1762289}{416020},\ \frac{7465176}{1762289},\ \ldots$$

Основные формулы $T(\phi_{mk})$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi_{mk} \tag{4.64}$$

$$\phi_{mk}^n = F_{mkn}\phi_{mk} + F_{mk(n-1)} \tag{4.65}$$

$$\phi_{mk}^{-n} = (-1)^n (F_{mk(n+1)} - F_{mkn}\phi_{mk}) \tag{4.66}$$

$$\phi_{mk}^n + \phi_{mk}^{-n} = F_{mk(n-1)} + F_{mk(n+1)} \quad \text{для чётных степеней} \tag{4.67}$$

$$\phi_{mk}^n - \phi_{mk}^{-n} = F_{mk(n-1)} + F_{mk(n+1)} \quad \text{для нечётных степеней} \tag{4.68}$$

$$F_{mkn} = \frac{\phi_{mk}^n - (-1)^n \phi_{mk}^{-n}}{2\phi_{mk} - 2m/k} \quad \text{формула Бине} \tag{4.69}$$

$$F_{mkn} = \frac{\phi_{mk}^r - (\phi_{mk}^{-1})^r \cos(r\pi)}{2\phi_{mk} - a} \quad \text{обобщённая формула Бине} \tag{4.70}$$

Формула Бине для произвольного F_{mkn}

$$F_{mkn} = \frac{\mathrm{ch}[n\,\mathrm{arsh}\,(m/k)]}{\phi_{mk} - m/k} \quad \text{для нечётных } n \tag{4.71}$$

$$F_{mkn} = \frac{\mathrm{sh}[n\,\mathrm{arsh}\,(m/k)]}{\phi_{mk} - m/k} \quad \text{для чётных } n \tag{4.72}$$

Обобщённый закон Бенфорда (подробнее см. ниже, раздел 7)

$$P(q) = \frac{\ln(1 + 1/q)}{\ln a}, \quad q = 1, 2, \ldots, a-1 \tag{4.73}$$

Равенства для чисел ϕ_{mk}, числителей P_n и знаменателей Q_n их подходящих дробей

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/\phi_{mk})^{\frac{1}{n}} \tag{4.74}$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/\phi_{m2}^{\pm1})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/\phi_{m2}^{\pm2})^{\frac{1}{n}} = \phi_{m2} \tag{4.75}$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/\phi_{m2}^{\pm2p})^{\frac{1}{n}} = \phi_{m2}^p \tag{4.76}$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/\phi_{m2}^{\pm(2p+1)})^{\frac{1}{n}} = \phi_{m2}^{2p+1} \tag{4.77}$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/\phi_{(m+1)/2})^{\frac{1}{n}} = \phi_{(m+1)/2} \tag{4.78}$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2}^{\pm1})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2}^{\pm2})^{\frac{1}{n}} = \phi_{(m+1)/2} \tag{4.79}$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2}^{\pm2p})^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}\,\phi_{m2}^p \tag{4.80}$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2}^{\pm(2p+1)})^{\frac{1}{n}} = \phi_{m2}^{2p+1} \tag{4.81}$$

Формулы, справедливые для любого действительного или комплексного ρ

$$\phi_{mk}^{\rho} + \phi_{mk}^{-\rho} = 2\mathrm{ch}[\rho \operatorname{arcsh}(m/k)] \tag{4.82}$$

$$\phi_{mk}^{\rho} - \phi_{mk}^{-\rho} = 2\mathrm{sh}[\rho \operatorname{arcsh}(m/k)] \tag{4.83}$$

Нетрудно заметить, что многие формулы модели $T(\phi_{mk})$ могут быть получены из формул модели $T(\phi_m)$ простой заменой индекса m на mk, подобно тому, как посредством индекса m модель $T(\phi)$ как бы переводится в $T(\phi_m)$. Такая нехитрая формальная процедура вообще характерна для математики, которая сумела со временем создать язык в высшей степени компактной символической записи своих порой очень сложных конструктов, что в немалой степени способствовало бурному развитию чистой математики в последние несколько столетий. В качестве примера можно сослаться на тензорные уравнения, символическая запись которых поместится в несколько строк, а развёрнутая займет не одну страницу. При каждой подобной замене необходимо, конечно, учитывать, что речь может идти уже о существенно более широком классе математических величин, или даже о совершенно других абстракциях, генетически тем не менее связанных с исходными.

6. Экспонента, периоды и закон Бенфорда

Любопытным проявлением некоторых особенностей исходной золотой экспоненты являются своеобразные периоды связанных с ней бесконечных рядов, приведённых к однозначному виду. С подобной периодичностью мы сталкивались в разделах 2 и 9 третьей главы при обсуждении рядов Фибоначчи, Люка и квазифибоначчиевых последовательностей типа (3.66). Напомним, что выделенными тогда оказались периоды из 24 членов, сумма которых всегда равнялась 117. В модели $T(\phi_{mk})$ при анализе проблемы в целом эта интригующая тема получает дальнейшее развитие, приводит к довольно неожиданным результатам, частично изложенным ниже. Речь идёт о целочисленных последовательностях, для которых переменная m/k целое или полуцелое число. Ограничимся при этом положительными рядами, поскольку отрицательные ряды отличаются от них лишь знаком минус при чётных членах. Другими словами, мы имеем дело с частным случаем золотой экспоненты

$$\phi_{mk} = e^{\operatorname{arsh}(m/2)}, \; m = 1, 2, 3, \dots \tag{4.84}$$

Следовательно, предметом непосредственного анализа являются бесконечные последовательности положительных чисел $F_{m/2,n}$, обозначаемые общим символом u, а также последовательности общего типа

$$a_1 F_{m/2,(n+n_1)} + a_2 F_{m/2,(n+n_2)} + \dots + a_j F_{m/2,(n+n_j)} \tag{4.85}$$

где $a_1, \dots, a_j$ и $n_1, \dots, n_j$ произвольные наборы целых чисел включая нуль. Сразу отметим, что в конечном счёте всё можно свести к формуле

$$e^{\operatorname{arsh}(m/2)} = m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m \ddots}}} \tag{4.86}$$

выражающей указанную экспоненту в виде бесконечной непрерывной дроби из двух элементов – единицы и целого числа m; для золотого числа, как известно, $m = 1$, для константы да Винчи $m = 2$. Поэтому данную экспоненту можно считать универсальным генератором целочисленной последовательности чисел $e^{\operatorname{arsh}(m/2)}$ как подмножества золотого семейства. Отсюда в принципе может быть получено кроме самой константы ϕ_{mk} многое другое: обобщённое правило третьего члена, все целочисленные ряды золотого семейства начиная с ряда Фибоначчи, соответствующие квадратные уравнения типа (4.48)

$$x^2 - 2m/k - 1 = 0$$

подходящие дроби и т. д.

Наш интерес к периодам вызван ещё и тем, что это как бы узловая точка пересечения проблем, связанных с непрерывными и подходящими дробями, со скрытыми особенностями позиционных систем счисления, в частности десятичной, с правилом третьего члена и законом Бенфорда, а также с сюрпризами неполной индукции как порой незаменимого, но не совсем надёжного проводника по неизученным уголкам математической теории. Для наглядного представления проблемы при отсутствии общих доказательств нужна достаточно репрезентативная статистика по конкретным рядам. С этой целью кроме исходных $F_{m/2,n}$ возьмём ещё две очень разные последовательности u_1 и u_2 общего типа, одну попроще, другую посложнее, с произвольно, без всякой системы выбранными наборами параметров a_j и n_j:

$$u_1 = 3F_{m/2,(n-2)} + 7F_{m/2,(n+5)} \tag{4.87}$$

$$u_2 = -4F_{m/2,(n+2)} + 19F_{m/2,(n-8)} - 3F_{m/2,(n-6)} + 8F_{m/2,(n+11)} - 6F_{m/2,(n-4)} - 5F_{m/2,n} \tag{4.88}$$

Основные в данном контексте характеристики приведённых к однозначному виду и представленных восемнадцатью начальными членами последовательностей u, u_1, u_2 даны в таблице.

Таблица

Периодичность приведённых рядов, связанных с числами типа $e^{\mathrm{arsh}\ m/2}$

N	Число семейства $\phi_{m/k}$	Ряд	Период	Сумма
1	$\phi_{1/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 1/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	u u_1 u_2	24 (**1**, **8**) 24 (**5**, **4**) 1 (9)	117 117 9
2	$\phi_{2/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 1} = 1+\sqrt{2}$	u u_1 u_2	24 (**2**, **7**) 24 (**7**, **2**) 24 (**4**, **5**)	117 117 117
3	$\phi_{3/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 3/2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$	u u_1 u_2	6 (1, 3, 1, 6, 1, 9) 6 (3, 7, 6, 7, 9, 7) 6 (1, 5, 7, 8, 4, 2)	21 39 27
4	$\phi_{4/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 2} = 2+\sqrt{5}$	u u_1 u_2	8 (1, 4, 8, 9, 8, 5, 1, 9) 8 (2, 7, 3, 1, 7, 2, 6, 8) 1 (9)	45 36 9
5	$\phi_{5/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 5/2} = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$	u u_1 u_2	8 (1, 5, 8, 9, 8, 4, 1, 9) 8 (4, 7, 3, 4, 5, 2, 6, 5) 8 (9, 2, 1, 7, 9, 7, 8, 2)	45 36 45
6	$\phi_{6/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 3} = 3+\sqrt{10}$	u u_1 u_2	6 (1, 6, 1, 3, 1, 9) 6 (3, 7, 9, 7, 6, 7) 6 (1, 2, 4, 8, 7, 5)	21 39 27
7	$\phi_{7/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 7/2} = \frac{7+\sqrt{53}}{2}$	u u_1 u_2	24 (**7**, **2**) 24 (**8**, **1**) 1 (9)	117 117 9
8	$\phi_{8/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 4} = 4+\sqrt{17}$	u u_1 u_2	24 (**1**, **8**) 24 (**1**, **8**) 24 (**7**, **2**)	117 117 117
9	$\phi_{9/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 9/2} = \frac{9+\sqrt{85}}{2}$	u u_1 u_2	2 (1, 9) 2 (3, 7) 2 (1, 8)	10 10 9
10	$\phi_{10/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 5} = 5+\sqrt{26}$	u u_1 u_2	24 (**1**, **8**) 24 (**5**, **4**) 1 (9)	117 117 9
11	$\phi_{11/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 11/2} = \frac{5+5\sqrt{5}}{2}$	u u_1 u_2	24 (**2**, **7**) 24 (**7**, **2**) 24 (**4**, **5**)	117 117 117
12	$\phi_{12/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 6} = 6+\sqrt{37}$	u u_1 u_2	6 (1, 3, 1, 6, 1, 9) 6 (3, 7, 6, 7, 9, 7) 6 (1, 5, 7, 8, 4, 2)	21 39 27
13	$\phi_{13/2} = e^{\mathrm{arsh}\ 13/2} = \frac{13+\sqrt{173}}{2}$	u u_1 u_2	8 (1, 4, 8, 9, 8, 5, 1, 9) 8 (2, 7, 3, 1, 7, 2, 6, 8) 1 (9)	45 36 9

14	$\phi_{14/2} = e^{\text{arsh } 7} = 5 + 5\sqrt{2}$	u u_1 u_2	8 (1, 5, 8, 9, 8, 4, 1, 9) 8 (4, 7, 3, 4, 5, 2, 6, 5) 8 (9, 2, 1, 7, 9, 7, 8, 2)	45 36 45
15	$\phi_{15/2} = e^{\text{arsh } 15/2} = \dfrac{15 + \sqrt{229}}{2}$	u u_1 u_2	6 (1, 6, 1, 3, 1, 9) 6 (3, 7, 9, 7, 6, 7) 6 (1, 2, 4, 8, 7, 5)	21 39 27
16	$\phi_{16/2} = e^{\text{arsh } 8} = 8 + \sqrt{65}$	u u_1 u_2	24 (**1**, **8**) 24 (**8**, **1**) 1 (9)	117 117 9
17	$\phi_{17/2} = e^{\text{arsh } 17/2} = \dfrac{17 + \sqrt{293}}{2}$	u u_1 u_2	24 (**1**, **8**) 24 (**1**, **8**) 24 (**2**, **7**)	117 117 117
18	$\phi_{18/2} = e^{\text{arsh } 9} = 9 + \sqrt{82}$	u u_1 u_2	2 (1, 9) 2 (3, 7) 2 (1, 8)	10 10 9

Данные этой таблицы даже при относительно небольшом их количестве предоставляют немало возможностей для анализа, но вначале – кое-какие пояснения. Прежде всего отметим, что хотя периодичность это общее свойство всех без исключения последовательностей указанного типа, однако сами периоды могут сильно разниться как по длине, так и своими элементами. Помимо наиболее часто встречаемого периода $T = 24$, характеризующего, мы уже видели, классические ряды Фибоначчи и Люка, встречаются периоды равные 8, 6, 2 и 1. При этом если сумма чисел, образующих период из 24 членов, всегда равна 117 (приведённая к однозначному виду сумма $S_{\text{пр}} = 9$), а при $T = 1$ единственный элемент равен 9, в остальных случаях суммы могут быть разными: 45, 36 и 39 ($S_{\text{пр}}$ равно 9 и 3) при $T = 8$; 21, 39 и 27 ($S_{\text{пр}}$ равно 3 и 9) при $T = 6$; 10 ($S_{\text{пр}} = 1$) и 9 при $T = 2$; нельзя впрочем исключать и другие варианты. Все цифры, из которых составлены ряды с периодами из одного, двух, шести и восьми элементов, даны в скобках, что же до рядов с $T = 24$, общая их особенность в том, что каждый ряд неизменно содержит все цифры от 1 до 9 и, что интересно, во всех случаях семь цифр входят по два раза, а две цифры по пять раз. Притом сумма этих двух цифр (отмеченных в скобках полужирным в порядке появления в периоде) всегда равна 9, а поскольку 1 + … + + 9 = 45, 45 – 9 = 36, общая сумма всех членов периода неизменно равна ста семнадцати: $5 \cdot 9 + 2 \cdot 36 = 117$ ($S_{\text{пр}} = 9$). Конечно, ни одно число здесь не случайно; чаще других, нетрудно заметить, встречается 9 – наибольшая цифра в десятичной системе счисления. Самое, быть может, важное проявление особой роли девятки как одной из важнейших особенностей рядов данного типа это повторяемость периодов через каждые девять значений переменной $a = 2m/k$; отсюда наша таблица для 18 значений $\phi_{m/k}$, то есть для двух больших периодов. Для большей уверенности в этой особенности проведём дополнительный тест для больших значений параметра m и для каждого из рядов u, u_1, u_2. Пусть например $m(u) = 429$, $m(u_1) = 281$, $m(u_2) = 532$, и если идея сохранения равного девяти большого периода верна, то по этим трём числам нетрудно определить, что в первом случае период должен быть равен 6, во втором 24, в третьем 1. Посмотрим теперь, каковы эти периоды в действительности. После соответствующих вычислений имеем:

$$T_{u(m\,=\,429)} = 6\,(1, 6, 1, 3, 1, 9),\ T_{u_1(m\,=\,281)} = 24\,(\mathbf{7}, \mathbf{2}),\ T_{u_2(m\,=\,532)} = 1\,(9),$$

то есть ожидание полностью подтвердилось и даже параметры периодов в скобках совпали.

Строго говоря, одного этого ещё недостаточно для окончательного заключения, поскольку полученный на базе – пусть даже достаточно обширной – статистических данных вывод, то есть вывод, полученный по неполной индукции, нередко оказывается ложным, вводит в заблуждение. Для большей ясности возьмём экспоненциальную функцию

$$\mathrm{G}(n) = I(e^{n/2\,-\,1})$$

с функцией округления $I(x)$, ставящей в соответствие действительному числу $x > 0$ целое число $n \geq x$, и посмотрим на значения функции для первых девяти n [Guy]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{G}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Нижний ряд это первые девять чисел Фибоначчи, отсюда в качестве индуктивной догадки следует общая формула

$$\mathrm{G}(n) = I(e^{n/2\,-\,1}) = F_n,$$

которая подтверждается для следующего $n+1$-го значения переменной: $G(10) = 55$. Тем не менее, индуктивная догадка неверна и эта формула не может быть справедливой для больших n, поскольку $\phi < e$ и экспонента e^x не может давать в округлении растущий по правилу третьего члена, то есть приблизительно пропорционально ϕ^x ряд Фибоначчи. Действительно, $G(11) = 91$, $G(12) = 148$, что на 2 и 5 единиц больше соответственно F_{11} и F_{12}, а быстро растущая разность $G(n) - F_n$ с увеличением n стремится к бесконечности. О других лжерядах Фибоначчи см. [Stewart; Knott[5]].

Неполная индукция могла породить ложное представление, что все квазифибоначчиевы ряды имеют период, равный 24, но уже наличие ряда u_2 в таблице для начального $m = 1$, то есть для золотого числа ϕ, как и других $m = 9k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), опровергает этот тезис. Кстати, число 24 здесь лишь одно из нескольких возможных значений приведённого периода и никак не может считаться фундаментальной константой ещё и потому, что период $T = 24$ относится лишь к десятичной системе, в других же системах счисления сохраняется свойство периодичности, но не длина периода. С десятичной системой связано и существование равного 9 большого периода для рядов общего типа, то есть для любого целого m все члены бесконечного множества

$$\phi_{(m\,+\,9n/2)/2} = e^{\operatorname{arsh}(m+9n/2)/2}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.89}$$

имеют один и тот же период.

Не лишены интереса с точки зрения периодичности и расположения чисел и отдельные целочисленные ряды золотого семейства, например классический ряд u с параметром $m = 10$. Выпишем для начала первые десять его членов:

1, 10, 101, 1020, 10301, 104030, 1050601, 1061004, 107151001, 10821212005

– все они начинаются с единицы. Эта единичная серия, связанная с соотношением

$$e^{\operatorname{arsh}\,10/2} = 10 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{10\,\ddots}}}$$

будет продолжаться ещё довольно долго, до 72-го члена включительно, дальше на первом месте будут только двойки, потом пойдёт непрерывная серия троек и так далее до девяток, после чего всё повторяется снова. Любопытен не только сам факт периодичности данных серий, но и относящиеся к ним числовые значения. Чтобы убедиться в этом, нужна хотя бы минимальная статистика, поэтому выпишем данные по восьми большим периодам, отмечая начало и конец каждой серии с указанием в скобках её длины, а в последней строке – длины всего периода (серии).

Таблица

Данные по первому знаку членов ряда, связанных с числом $\phi_{10/2}$

Цифра	**Период 1**	**Период 2**	**Период 3**	**Период 4**
1	1–72 (72)	236–306 (71)	470–539 (70)	704–773 (70)
2	73–113 (41)	307–347 (41)	540–580 (41)	774–814 (41)
3	114–142 (29)	348–376 (29)	581–610 (30)	815–543 (29)
4	143–165 (23)	377–399 (23)	611–632 (22)	844–866 (23)
5	166–183 (18)	400–417 (18)	633–651 (19)	867–884 (18)
6	184–199 (16)	418–433 (16)	652–666 (15)	885–900 (16)
7	200–213 (14)	434–446 (13)	667–680 (13)	901–914 (14)
8	214–224 (11)	447–458 (12)	681–692 (12)	915–925 (11)
9	225–235 (11)	459–469 (11)	693–703 (11)	926–936 (11)
Итого	**235**	**234**	**234**	**233**

Цифра	Период 5	Период 6	Период 7	Период 8
1	937–1007 (71)	1171–1240 (70)	1405–1474 (70)	1638–1708 (71)
2	1008–1048 (41)	1241–1281 (41)	1475–1515 (41)	1709–1749 (41)
3	1049–1077 (29)	1282–1311 (30)	1516–1544 (29)	1750–1778 (29)
4	1078–1100 (23)	1312–1333 (22)	1545–1567 (23)	1779–1801 (23)
5	1101–1118 (18)	1334–1352 (19)	1568–1585 (18)	1802–1819 (18)
6	1119–1134 (16)	1353–1367 (15)	1586–1601 (16)	1820–1835 (16)
7	1135–1147 (13)	1368–1381 (14)	1602–1615 (14)	1836–1848 (13)
8	1148–1159 (11)	1382–1393 (12)	1616–1627 (12)	1849–1860 (12)
9	1160–1170 (11)	1394–1404 (11)	1628–1637 (11)	1861–1871 (11)
Итого	**234**	**234**	**233**	**234**

Очень любопытные данные, если внимательно в них вглядеться. Начнём с выделенных полужирным общих количеств членов в периодах, включающих непрерывные серии первых знаков от 1 до 9. Со второго члена последовательности и далее, как выясняется, закономерность чередования периодов такова:

234, 234, 233; 234, 234, 233; 234, 234, 233…

Становится более понятным число 117, неизменно фигурирующее при рассмотрении рядов u_1, u_2, u_3 в качестве суммы чисел в периоде $T = 24$. Связь элементарна: $117 \cdot 2 = 234$. Заметим также, что приведённое к однозначному виду произведение числа 117 на любое целое число n равно 9. Это одна из конкретных особенностей десятичной системы счисления, которую при желании нетрудно доказать. А вторая величина, число 233 – не что иное как тринадцатый член ряда Фибоначчи, следовательно, данную закономерность можно записать в таком виде:

$$F_{13}+1,\, F_{13}+1,\, F_{13};\quad F_{13}+1,\, F_{13}+1,\, F_{13},\, \ldots$$

а сумму 117, общезначимую для всех периодов указанного типа из 24 членов, представить как $(F_{13} + 1)/2$.

Теперь обратимся к числам в скобках, указывающим, что с точностью до единицы цифра 1 на первом месте стоит 70 (или 71) раз подряд, цифра 2 – 41 раз подряд и так далее до цифры 9, непрерывная серия которой равна 11 (или 10). Словом, рассмотрим последовательность

$$70(71),\ 41,\ 29,\ 23(22),\ 19(18),\ 16(15),\ 14(13),\ 12(11),\ 11(10)$$

из девяти определяемых точно, или с точностью до единицы целых чисел, сумма которых равна 234 в двух случаях из трёх и 233 в одном. Вспомним теперь про феномен первого знака, выражаемый в десятичной системе в виде логарифмического закона Бенфорда (3.445) из третьей главы, и применим этот закон к числу 234; результаты для 233 практически те же, лишь в одном случае вместо 19 получается 18. Используя функцию округления $R(x)$, имеем такую таблицу значений:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	**41**	**29**	**23**	**19**	**16**	**14**	**12**	**11**

Сразу видно, что закон Бенфорда выполняется здесь с абсолютной точностью. Но это ещё не всё. Полученные результаты, справедливые для простейшего ряда u с параметром $m = 10$, могут быть обобщены на множество других, более сложных случаев включая последовательности общего типа (4.85) с произвольно взятыми значениями целочисленных параметров a_j и n_j и с параметрами $m = 9k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Например, для ряда u_2 со значением переменной $m = 208$ ($208 = 9 \cdot 23 + 1$) выполняется указанное чередование периодов при строгом соблюдении логарифмического закона первого члена, с той лишь разницей, что данные закономерности начинают действовать с 14-го, а не 2-го – как в простейшем случае – члена последовательности.

7. Обобщённый закон Бенфорда

Дальнейшее рассмотрение приведённых к однозначному виду последовательностей предполагает переход с уровня статистически установленных закономерностей к более строгой математической модели, учитывающей все возможности и требующей также обобщения имеющихся данных, со всеми необходимыми дополнениями и корреляциями на случай систем счисления с любым целочисленным основанием $n \geq 2$. Вполне возможно, что в подобной модели могут быть получены достаточно важные результаты, однако развитие данного фрагмента обобщённой модели уводит в сторону, а нас сейчас больше интересует ответ на поставленный в конце раздела 10 предыдущей главы вопрос о применимости закона логарифмического распределения первого знака к числовым последовательностям, отличным от рядов Фибоначчи, Люка и производных от них рядов. Нам потребуются статистические данные, относящиеся к двум разным типам рядов золотого семейства. Это определяемые формулой (4.86) целочисленные последовательности и получаемые из экспоненты $e^{\operatorname{arsh}(m/k)}$ все остальные последовательности, для которых $a = 2m/k$ – нецелое рациональное число. Начнём с ряда

$$u_4 = 4F_{28/2(n+6)} - 2F_{11/2(n-1)} - 17F_{57/2(n+7)} + F_{67/2(n+2)} - 3F_{32/2(n-16)} + 6F_{51/2(n-9)} + 19F_{106/2(n+14)} - 5F_{40/2(n+5)} - \\ - 8F_{45/2(n+11)} \qquad (4.90)$$

составленного так, чтобы каждое отдельно взятое слагаемое представляло одно из девяти подсемейств, образующих, мы знаем, равный 9 большой период. Другими словами, чтобы были представлены все девять последовательностей, отличающиеся друг от друга значениями l (l = 1, ..., 9) в выражении $m = 9k + l$ для параметра m при совершенно произвольном выборе k = 0, 1, 2, ...

Показанные ниже для наглядности 4513 первых знаков последовательности u_4 расположены один за другим по пронумерованным, для удобства, строкам с соответствующей группировкой одинаковых знаков.

0) 444 555 666 77 88 99
– –
1) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
2) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
3) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
4) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
5) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
6) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
7) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
8) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
9) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
10) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
11) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
12) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
13) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
14) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
15) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
16) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
17) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
18) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
19) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
20) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
21) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
22) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
23) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
24) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
25) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
26) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
27) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
28) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
29) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
30) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
31) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
32) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
33) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
34) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
35) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
36) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
37) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
38) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
39) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
40) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
41) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

42) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
43) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
44) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
45) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
46) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
47) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
48) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
49) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 888 9
50) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
51) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
52) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
53) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
54) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
55) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
56) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
57) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

---

58) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
59) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
60) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
61) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
62) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
63) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
64) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
65) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
66) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
67) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
68) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
69) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
70) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
71) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
72) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
73) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
74) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
75) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
76) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
77) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
78) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
79) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
80) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
81) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
82) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
83) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
84) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
85) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
86) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
87) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
88) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
89) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
90) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
91) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
92) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
93) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
94) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
95) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
96) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
97) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
98) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

99) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
100) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
101) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
102) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
103) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
104) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
105) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
106) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 888 9
107) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
108) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
109) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
110) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
111) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
112) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
113) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
114) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
– –

Общие закономерности упорядочения первых знаков видны с первого взгляда. Минуя нулевой ряд, начиная с первого, а точнее с 16-го члена последовательности, все знаки располагаются в строгом, ни разу не нарушаемом порядке: сперва группа из одних единиц, потом двойки, тройки и далее до одной-двух девяток, потом с новой строки снова единицы, двойки и т.д. до бесконечности. В каждой строке содержится 39 либо 40 цифр, причем количество одинаковых знаков в разных строках если и разнится, то не более чем на единицу. Это то, что трудно не заметить чисто визуально, а менее явные закономерности требуют более детального рассмотрения.

Вначале посмотрим, *насколько точно* выполняется для данной последовательности логарифмический закон распределения первого знака, поскольку сам факт его выполнения интуитивно достаточно очевиден – недаром цифры выстраиваются в таком строго групповом порядке с убывающими по количеству членами в группе. Учитывая, что такой порядок, если отсчитывать с 1, начинается с 16-го члена последовательности u_4, а последний в нашем списке из 4513 членов 114-й ряд полностью “укомплектован”, приведём статистические результаты для 4513 – 16 = 4498 членов с указанием в скобках данных идеального, то есть соответствующего логарифмическому закону распределения.

Цифры	**Частота вхождения**
1	1354 (1354)
2	792 (792)
3	562 (562)
4	436 (436)
5	356 (356)
6	300 (301)
7	262 (261)
8	230 (230)
9	206 (206)

Отклонение реального распределения от идеального здесь, как видим, крайне незначительно. От относительно большой выборки перейдём к очень малой и возьмём для сравнения с идеальным распределением какие-либо две соседние строки, хотя бы первую и вторую.

Цифра	**Частота вхождения**
1	24 (24)
2	14 (14)
3	10 (10)
4	8 (8)
5	6 (6)
6	5 (5)
7	5 (5)
8	4 (4)
9	3 (4)

Поскольку применение функции округления $R(x)$ к общему числу 79 приводит к "лишней" единице, вследствие чего сумма в скобках равна 80, соответствие в данном случае тоже идеальное и можно уже делать первые выводы, относящиеся к тестируемой последовательности. Во-первых, закон Бенфорда справедлив по отношению ко всему ряду u_4, во-вторых, он с точностью близкой к идеальной справедлив для любого относительно небольшого отрезка данного ряда, в-третьих, с неменьшей точностью справедлив для любого малого периода, состоящего из 39 либо 40 членов. Словом, распределение первых знаков в данной комбинированной последовательности происходит в строгом соответствии с законом логарифмического распределения и по периодам, точнее квазипериодам, исключающим по понятным причинам равное количество знаков во всех периодах.

Для всех девяти десятичных знаков это количество колеблется в пределах одной единицы: одиннадцать-двенадцать вхождений подряд для цифры 1, шесть-семь для 2, четыре-пять для 3, три-четыре для 4 и 5, два-три для 6, 7, 8, одно-два вхождения подряд для цифры 9. Эти колебания от периода к периоду также происходят по определённому закону, сущность которого можно видеть в обеспечении такого порядка знаков и их количества в каждой малой группе, при котором в конце каждого насчитывающего $39-40$ членов периода закон логарифмического распределения выполняется с максимально возможной точностью.

А сейчас мы попытаемся на примере знака 1 отыскать ещё одну закономерность, для чего и потребовалась выборка именно из 4513 элементов, поскольку для других тестов можно обойтись круглым и значительно меньшим их количеством. Последовательно отмечая вхождение знаков по периодам (строкам), будем для удобства различения выделять полужирным максимальные, а обычным шрифтом – минимальные вхождения знака. Например выражение **8** + 1 + **1** означает, что налицо восемь периодов подряд максимального (12) вхождения знака 1, потом один период минимального (11) и один период максимального вхождения. Общая картина для девяти знаков и первой сотни периодов такова:

(**8** + 1 + **1** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **1** + 1) + (**8** + 1 + **1** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **1** + 1) + …

Взятый в скобки большой период играет, оказывается, важную роль для данной и многих других, хоть и не всех комбинированных последовательностей чисел. Отделённый в списке для наглядности пунктирной линией большой период состоит из 57 малых периодов (строк) и содержит 2249 элементов – цифр. В шутку можно сказать, что два больших периода содержат 114 малых, между тем как раз 114-й элемент периодической таблицы есть не что иное, как рассмотренный в [A[14]] пик замечательного "острова стабильности", а значит получено косвенное свидетельство существования определённой связи между стабильностью химических элементов и свойствами F_{mkn} последовательностей. Но это ещё не всё: число 57 в периодической таблице тоже явно выделено. Это порядковый номер лантана – редкоземельного элемента, с которого начинается семейство близких по свойствам лантаноидов, завершаемое элементом с $Z = 71$; в периодической таблице сразу за лантаном идёт гафний ($Z = 72$), а все лантаноиды выделены в специальную группу и даются отдельной строкой. Числа 71 и 72 тоже связаны с F_{mkn} последовательностью, осталось только разобраться с самой главной здесь величиной, числом 2249. Оно разлагается на два простых множителя: $2249 = 13\cdot173$, а это просто замечательно, ведь некоторые считают, см. [Попов], что 173 как раз есть количество всех возможных химических элементов. Что касается "чёртовой дюжины", то она может быть числом периодов периодической системы; на сегодня твёрдо установлены лишь семь периодов, иногда говорят о девяти, но и конец таблицы ещё не близок.

Словом, если хочешь проникнуть в тайны периодической системы химических элементов, изучай F_{mkn} числа. А если серьёзно, то число 2249, не входящее, насколько можно судить, в какую-либо известную числовую последовательность, уникально по своему обслуживанию закона логарифмического распределения. Действительно, если в формулу типа (3.445) из главы 3 в стоящее под знаком функции округления $R(x)$ выражение $x = n\cdot\lg(1 + 1/j)$ подставить $n = 2249$ и заставить переменную j пробегать значения 1, 2,…, 9, получим такие числа:

$x_{j=1} = 677{,}016\ldots$ $\quad x_{j=2} = 396{,}029\ldots$ $\quad x_{j=3} = 280{,}987\ldots$

$x_{j=4} = 217{,}950\ldots$ $\quad x_{j=5} = 178{,}078\ldots$ $\quad x_{j=6} = 150{,}563\ldots$

$x_{j=7} = 130{,}423\ldots$ $\quad x_{j=8} = 115{,}042\ldots$ $\quad x_{j=9} = 102{,}908\ldots$

Семь значений очень близки к целым, а два ($x_{j=6}$ и $x_{j=7}$) к полуцелым числам. Сумма Σ_+ абсолютных значений всех отклонений от целого или полуцелого значения равна $\approx 0{,}46$, в среднем $\approx 0{,}05$ на одну цифру, а с учётом знака сумма Σ_{+-} равна нулю! Для сравнения: если брать например соседние числа 2248 и 2250, то в первом случае $\Sigma_+ = 1$, $\Sigma_{+-} = -1$ (все отклонения отрицательные), во втором $\Sigma_+ = 1{,}127$, $\Sigma_{+-} = 1$. Это существенная разница, особенно для суммы Σ_{+-}, обусловленная индивидуальной спецификой числа $x = 2249$, минимизирующего функцию

$$\sum_{j=1}^{9}\{x\lg(1+1/j) - R[x\lg(1+1/j)]\} \tag{4.91}$$

Естественно, возникает вопрос, насколько хорошо это нежданное и нигде, похоже, не отмеченное число обслуживает закономерность, которую можно назвать *правилом сохранения первого знака* (не путать с законом логарифмического распределения первого знака). Интуитивно ясно, что в данном случае целое число, каким бы особенным оно ни было, едва ли дотянет до уровня универсальной константы бесконечной последовательности трансцендентных чисел, но для более строгого и обоснованного ответа нужна соответствующая статистика. Выберем удобный для сравнения малый интервал Δu_4 последовательности u_4, например интервал между 243-м и 254-м членами, содержащий в качестве начальных знаков цифры 5, 6, 7, 8, 9, 1. Правило сохранения первого знака подлежит проверке по формуле

$$k_j(N) = k_{0j} + 2249 \cdot N, \tag{4.92}$$

где k_{0j} первый знак j-го члена начального интервала, $k_j(N)$ – первый знак соответствующего члена N-го периода, удаленного от начального на $2249 \cdot N$ номеров. Возьмём для сравнения четыре очень разных номера N, выделяя совпадения первых знаков крупным полужирным.

Таблица

Проверка правила сохранения первого знака для различных номеров N

Номер N и интервал номеров последовательности u_4				
243–254	**$N = 1$** **2492–2503**	**$N = 50$** **112693–112704**	**$N = 100$** **225143–225154**	**$N = 400$** **899843–899854**
$5{,}8466 \cdot 10^{519}$	$\mathbf{5{,}84}41 \cdot 10^{5074}$	$\mathbf{5}{,}7187 \cdot 10^{228269}$	$\mathbf{5}{,}5936 \cdot 10^{456019}$	$4{,}8983 \cdot 10^{1822519}$
$6{,}1980 \cdot 10^{521}$	$\mathbf{6{,}19}53 \cdot 10^{5076}$	$\mathbf{6}{,}0624 \cdot 10^{228271}$	$5{,}9297 \cdot 10^{456021}$	$5{,}1927 \cdot 10^{1822521}$
$6{,}5705 \cdot 10^{523}$	$\mathbf{6{,}5}676 \cdot 10^{5078}$	$\mathbf{6}{,}4267 \cdot 10^{228273}$	$\mathbf{6}{,}2861 \cdot 10^{456023}$	$5{,}5047 \cdot 10^{1822523}$
$6{,}9653 \cdot 10^{525}$	$\mathbf{6{,}96}22 \cdot 10^{5080}$	$\mathbf{6}{,}8129 \cdot 10^{228275}$	$\mathbf{6}{,}6638 \cdot 10^{456025}$	$5{,}8355 \cdot 10^{1822525}$
$7{,}3839 \cdot 10^{527}$	$\mathbf{7{,}38}06 \cdot 10^{5082}$	$\mathbf{7}{,}2223 \cdot 10^{228277}$	$\mathbf{7}{,}0643 \cdot 10^{456027}$	$6{,}1862 \cdot 10^{1822527}$
$7{,}8276 \cdot 10^{529}$	$\mathbf{7{,}82}42 \cdot 10^{5084}$	$\mathbf{7}{,}6564 \cdot 10^{228279}$	$\mathbf{7}{,}4888 \cdot 10^{456029}$	$6{,}5580 \cdot 10^{1822529}$
$8{,}2980 \cdot 10^{531}$	$\mathbf{8{,}29}44 \cdot 10^{5086}$	$\mathbf{8}{,}1165 \cdot 10^{228281}$	$7{,}9389 \cdot 10^{456031}$	$6{,}9521 \cdot 10^{1822531}$
$8{,}7967 \cdot 10^{533}$	$\mathbf{8{,}79}28 \cdot 10^{5088}$	$\mathbf{8}{,}6042 \cdot 10^{228283}$	$\mathbf{8}{,}4160 \cdot 10^{456033}$	$7{,}3698 \cdot 10^{1822533}$
$9{,}3253 \cdot 10^{535}$	$\mathbf{9{,}32}12 \cdot 10^{5090}$	$\mathbf{9}{,}1213 \cdot 10^{228285}$	$8{,}9217 \cdot 10^{456035}$	$7{,}8127 \cdot 10^{1822535}$
$9{,}8857 \cdot 10^{537}$	$\mathbf{9{,}88}14 \cdot 10^{5092}$	$\mathbf{9}{,}6694 \cdot 10^{228287}$	$\mathbf{9}{,}4579 \cdot 10^{456037}$	$8{,}2822 \cdot 10^{1822537}$
$1{,}0479 \cdot 10^{539}$	$\mathbf{1{,}0475} \cdot 10^{5095}$	$\mathbf{1{,}0}250 \cdot 10^{228290}$	$\mathbf{1{,}0}026 \cdot 10^{456040}$	$8{,}7799 \cdot 10^{1822539}$
$1{,}1109 \cdot 10^{541}$	$\mathbf{1{,}11}04 \cdot 10^{5097}$	$\mathbf{1}{,}0866 \cdot 10^{228292}$	$\mathbf{1}{,}0628 \cdot 10^{456042}$	$9{,}3076 \cdot 10^{1822541}$

Как видим, в первом периоде, то есть для членов последовательности, отстоящих от соответствующих чисел начального интервала на 2249 номеров, выполняется правило сохранения не только первого, но и второго, третьего, а в одном случае и четвёртого десятичного знака. Сохранение первого знака имеет место и при значении $N = 50$ и даже, кроме двух случаев, при $N = 100$, а это уже очень далеко отстоящие от начала ряда числа: для полной десятичной записи каждого из них понадобится не менее сотни страниц. Лишь начиная с номеров порядка $N = 100$ наблюдается слабое нарушение указанного правила. Приближённую формулу для стоящих перед степенью 10^n чисел b можно представить в виде

$$b = a\frac{c(N)}{N + c(N)} \tag{4.93}$$

где a – значение в начальном интервале Δu_4, $c(N)$ – параметр, близкий при $N = 1$ к 2249 и медленно дрейфующий в сторону уменьшения с увеличением номера периода N.

Хотя u_4 взята как образец комбинированной целочисленной последовательности общего типа, не следует думать, что все установленные для неё закономерности справедливы и в других случаях. Далеко не все F_{mkn} последовательности включая ряд Фибоначчи, не говоря уже о других, нецелочисленных последовательностях золотого семейства, обнаруживают свойства периодичности, сходные с только что рассмотренными. Не останавливаясь на этом, покажем на частном примере, что закон первого знака универсально значим для всего семейства. Дадим для наглядности статистику первого знака для какой-либо достаточно “нестандартной” последовательности, например состоящей начиная с 29-го члена из одних отрицательных чисел последовательности с нецелыми значениями всех параметров $2m/k$:

$$u_5 = 7F_{1/3(n+3)} - 2F_{7/5(n-11)} - 4F_{3/7(n)} + 7F_{11/9(n+5)} - 13F_{5/6(n-8)} + 11F_{2/3(n-2)} - F_{9/7(n-14)} + 3F_{3/5(n+4)} - \\ - 9F_{123/101(n+1)} \quad (4.94)$$

Поскольку правилу сохранения первого знака последовательность u_5, оказалось, не подчиняется, возьмём для тестирования какой-либо не слишком большой и не слишком малый отрезок бесконечного ряда, например первые 100 членов.

Цифра	**Частота вхождения**
1	302 (301)
2	177 (176)
3	125 (125)
4	96 (97)
5	80 (79)
6	66 (67)
7	56 (58)
8	47 (51)
9	51 (46)

Сравнение с теоретическими значениями в скобках говорит о пусть не идеальном, но достаточно хорошем выполнении закона логарифмического распределения даже в случае небольшого отрезка бесконечного ряда.

Таким образом, существование различных типов последовательностей золотого семейства, связанное с теми или иными значениями параметра m/k в экспоненте $e^{\text{arsh}(m/k)}$, позволяет выделить правила и законы как частного, так и общего характера. По отношению ко всем классам F_{mkn} последовательностей это правило третьего члена, по отношению к некоторым из них – наличие больших и малых периодов и квазипериодов наряду со слабо нарушаемым для больших номеров правилом сохранения первого знака. А общезначимым для всего золотого семейства является

ОБОБЩЁННЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРВОГО ЗНАКА

В любой связанной с экспонентой $e^{\text{arsh}(m/k)}$ золотой последовательности или в любой конечной комбинации таких последовательностей вероятность $P(q)$ появления на первом месте знака q в системе счисления с основанием а определяется формулой

$$P(q) = \frac{\ln(1 + 1/q)}{\ln a}, \quad q = 1, 2, \ldots, a - 1. \quad (4.95)$$

Действие данного закона, в отличие от закономерностей частного образца, не ограничено рамками десятичной системы счисления, и в форме (4.95) закон справедлив не только для любой комбинации золотых последовательностей, но и в любой системе счисления с целочисленным основанием a. Добавим без дальнейшего обсуждения, что закономерности сходные с указанными, например существование малых и больших периодов в чередовании первых знаков, имеются и в других помимо десятичной системах счисления, но общего аналитического закона, тем более относящегося ко всем золотым последовательностям, здесь пока не видно. Можно полагать по крайней мере на качественном уровне, что если наличие подобных закономерностей обусловлено как свойствами материнских функций экспоненты и логарифма, так и особенностями записи числа в позиционной системе счисления, а также конкретными характеристиками той или иной системы, то закон Бенфорда обусловлен главным образом существованием тонких связей материнских функций с целыми числами, которые при переходе от одной системы к другой меняют лишь свою количественную специфику, сохраняя содержание и формальную структуру самой связи.

Сказанного выше достаточно для понимания заложенных в экспоненте $e^{\text{arsh}(m/k)}$ потенций, имеющих множество разнообразных проявлений. Это в частности получение бесконечного множества последовательностей, выявление больших и малых периодов, относящихся к отдельным рядам и ко всему их множеству в целом. Особенно важны результаты, ведущие к более глубокому пониманию и широкому применению логарифмического закона Бенфорда, с абсолютной, можно сказать, точностью выполняемого для определённых рядов, с выстраивающимися в строго регламентированном порядке знаками n-ичной системы счисления и статистически справедливого для всех последовательностей золотого семейства, независимо от выбора системы счисления.

8. Константа да Винчи

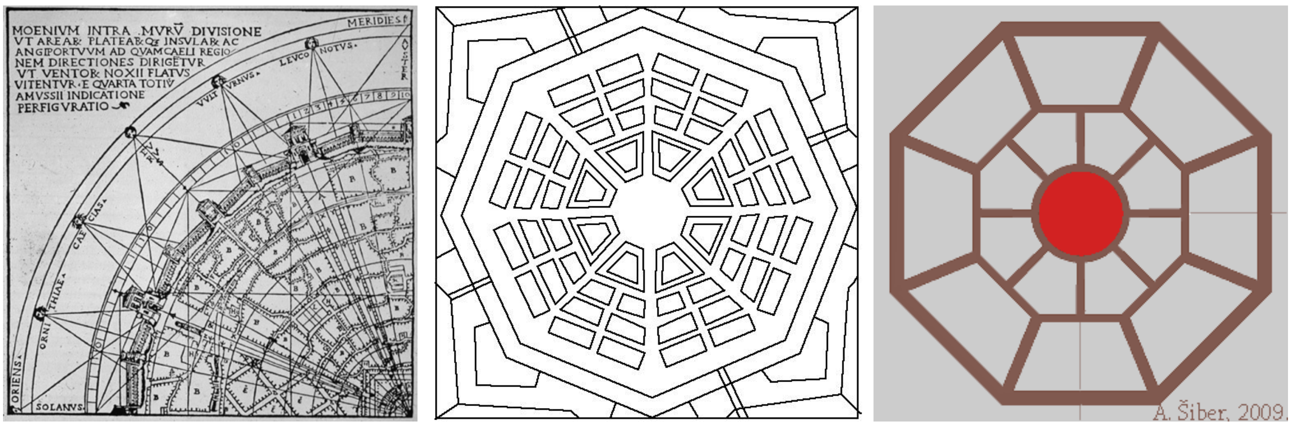
В практически любой, строящейся по определённому правилу или закону последовательности констант по-настоящему значимы, отметим лишний раз, лишь начальные члены ряда. В этом у нас была возможность убедиться на примере констант Фейгенбаума и последовательности значений функции Ламберта, об этом свидетельствуют и примеры из физической теории, где фундаментальными физическими постоянными являются минимальные значения – кванты для момента импульса, зарядов и энтропии, а кратные им значения для теории уже не так важны. В последовательности ϕ_m, как и во всех последующих обобщениях, константа ϕ под определение *кванта* подпадает несколько условно, поскольку здесь все константы являются независимыми друг от друга величинами, получаемыми посредством общего для всего семейства принципа. Тем не менее, золотая константа, как минимальный начальный член, первенец семейства, занимает совершенно особое место в формальной иерархии упорядоченного множества чисел, чем, собственно говоря, и определяется её содержательная важность и прикладной потенциал.

Второй же по своей значимости как в образованном посредством ПСМ семействе чисел ϕ_m, так и в более общем случае семейства ϕ_{mk} вправе считаться константа $\phi_2 = 1 + \sqrt{2} \equiv e^{\operatorname{arsh}(2/2)} \equiv e^{\operatorname{arsh}1}$. Её иногда называют *серебряной*, говорят также о серебряном сечении, определяя его следующим образом:

Две величины находятся в “серебряном сечении”, если отношение суммы меньшей и удвоенной большей величины к большей то же самое, что и отношение большей величины к меньшей [Серебряное сечение].

Не совсем складное определение, способное разве что посеять сомнения в значимости определяемого. Да и само название трудно признать удачным, хотя, видимо, оно и вдохновило на ряд *металлических пропорций*, который оказался очень уж коротким, очевидно, из-за нехватки известных металлов. Если золотую константу нередко называют именем Фидия (Φειδίας, ок. 490 – ок. 430 до н.э.), найдётся подходящее имя и для второго члена благородного семейства, имя титана эпохи Возрождения. Правда, Леонардо да Винчи (Leonardo di ser Piero da Vinci, 1452 – 1519) едва ли был первым исследователем правильного восьмиугольника, восьмиугольной звезды, являющейся геометрическим символом соответствующих сечения и константы. Но интерес Леонардо к восьмиугольнику, вписанной в него звезде, с использованием в архитектуре, как свидетельствуют взятые из [Reynolds] и показанные в разделе 6 главы 5 рисунки, см. также [Пидоу], настолько велик, что вряд ли будет ошибкой назвать число ϕ_2 *константой да Винчи*. Принято считать, что Витрувианский человек Леонардо прекрасно вписывается в золотой прямоугольник и пятиугольник со звездой, а насколько хорошо он вписывается в восьмиугольник с восьмиугольной звездой, можно судить по рисункам в разделе 7 из той же главы.

Интересно, что именно в форме правильного восьмиугольника представлял себе планировку идеального города Витрувий, мысли которого о совершенных пропорциях человеческой фигуры и архитектурных сооружений разделял и Леонардо да Винчи. Хотя Витрувий изображений идеального города после себя, похоже, не оставил, его концепция восьмиугольного города-крепости оказала большое влияние на таких архитекторов Ренессанса, как Чезаре Чезарино (Cesare di Lorenzo Cesariano, 1475 – 1543) и Даниеле Барбаро (Daniele Matteo Alvise Barbaro, 1514 – 1570). В реконструкции идеальный, по Витрувию, город состоит из большого и малого восьмиугольников, с восемью секторами каждый и с выделенным общим центром [Community…; Green & Ingram; Šiber].



Реконструкция идеального города по Витрувию

Простейшие и вместе с тем основные характеристики константы ϕ_2 получаются подстановкой значения $m = 2$ в формулы и выражения (4.2) – (4.8) соответственно для квадратного уравнения, его положительного корня, строящейся по правилу третьего члена последовательности, цепной дроби, интеграла и экспоненты. Выражение в радикалах и десятичная дробь даны в таблице на стр. 139, а подходящая дробь и последовательность, носящая имя английского математика Джона Пелля (John Pell, 1611 – 1685), приведены в (4.13). Как и в случае чисел Фибоначчи и Люка, простыми числами Пелля могут быть лишь числа с простыми номерами. В настоящее время выявлено 16 таких чисел с номерами

2, 3, 5, 11, 13, 29, 41, 53, 59, 89, 97, 101, 167, 181, 191, 523

кроме того 15 чисел Пелля с номерами

929, 1217, 1301, 1361, 2087, 2273, 2393, 8093, 13339, 14033, 23747, 28183, 34429, 36749, 90197

предположительно также являются простыми [Sloane[6]].

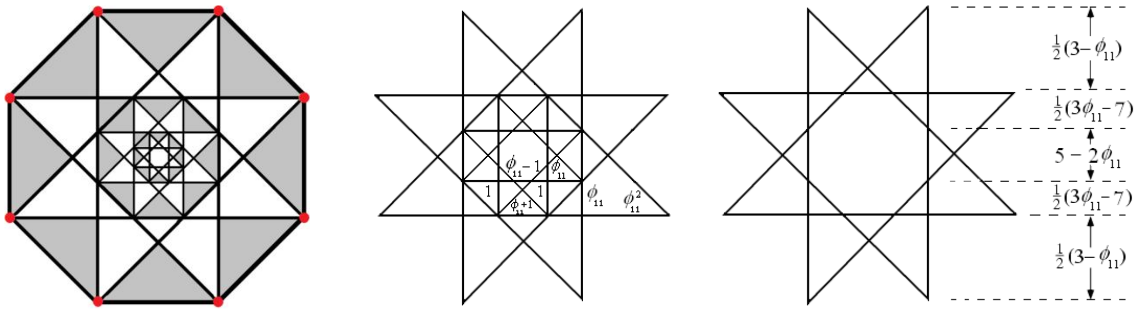
Дополним теперь геометрический и теоретико-числовой портрет константы $\phi_2 \equiv \phi_{11}$ некоторыми данными, см. [A[15,h]]. Вначале, минуя прямоугольник, треугольники, эллипсы, ромбы и другие связанные с константой ϕ_2 геометрические фигуры, рассмотрим правильный восьмиугольник и упомянем логарифмическую спираль. Далее остановимся на трёхмерных телах, фракталах, формулах, соотношениях и задачах. Помещая, как обычно, геометрический центр фигуры в начало декартовой системы и принимая длину ребра равной двум, получим следующий набор значений для координат восьми вершин восьмиугольника:

$$\pm 1, \pm\phi_2; \quad \pm\phi_2, \pm 1 \tag{4.96}$$

Обозначая далее через a длину ребра, R и r радиусы описанной и вписанной окружностей, S площадь поверхности и θ двугранный угол между рёбрами восьмиугольника, имеем:

$$R = \frac{1}{2}\csc\frac{\pi}{8}a = \frac{\sqrt{2(1+\phi_2)}}{2}\,a \qquad r = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}a = \frac{\phi_2}{2}\,a \qquad S = 2\mathrm{ctg}\frac{\pi}{8}\,a^2 = 2\phi_2 a^2 \qquad \theta = 135° \tag{4.97}$$

В этих соотношениях наглядно видна связь константы да Винчи с экспонентой в форме тригонометрических функций. О других параметрах правильного восьмиугольника и получаемой соединением её диагоналей восьмиконечной звезды можно судить по рисункам.



Восьмиугольник, восьмиугольная звезда и её параметры

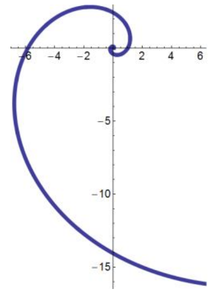
Из двумерных геометрических фигур стоит также упомянуть логарифмическую спираль, уравнение которой в полярных координатах даётся выражением

$$r = e^{\frac{2\ln\phi_2}{\pi}\theta} = \phi_2^{\frac{2}{\pi}\theta} \tag{4.98}$$

которому соответствует постоянный параметр

$$\mathrm{arcctg}\left(\frac{2\ln\phi_2}{\pi}\right) = 1{,}05947\ 11164\ 58249\ldots \tag{4.99}$$

Отсюда постоянный для данной спирали угол между радиусом-вектором и касательной $\varphi_2 \approx 60{,}70322°$, что заметно меньше аналогичного угла $\varphi \approx 73°$ для константы ϕ, а значит спираль да Винчи закручена меньше золотой.



Кривая спирали $\phi_2^{\frac{2}{\pi}\theta}$

Трёхмерные тела

Начнём, как обычно, с платоновых тел. Мы знаем, что додекаэдр и икосаэдр являются телами золотого сечения. Посмотрим, как обстоит дело с остальными тремя правильными многогранниками, помещая их центры в начало трёхмерной декартовой системы и определяя значения координат вершин.

Тетраэдр: $(\pm1, 0, -1/\sqrt{2})$; $(0, \pm1, 1/\sqrt{2})$

Куб: $(\pm1, \pm1, \pm1)$

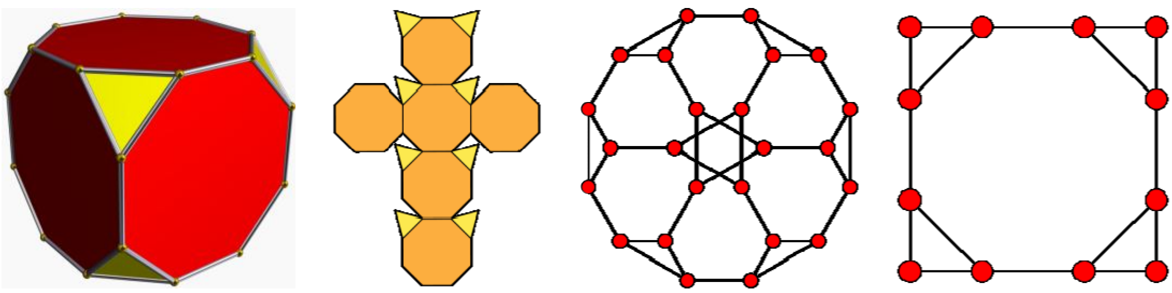
Октаэдр: $(\pm1, 0, 0)$; $(0, \pm1, 0)$; $(0, 0, \pm1)$

Судя по их декартовым координатам вершин, куб и октаэдр, в отличие от тетраэдра, с константой да Винчи не связаны. Но есть нюанс, который кое-что в оценках меняет: другие параметры всех трёх тел связаны с неизменным “спутником” ϕ_2 – постоянной Пифагора $\sqrt{2}$. Для константы да Винчи это формально то же самое, что $\sqrt{5}$ для золотого числа. Оба спутника уникальными свойствами своих констант не обладают. Иррациональное число $\sqrt{5}$ хоть и важная математическая величина, но с золотой константой сравниться не может, а вот постоянная Пифагора рангом как минимум не ниже константы да Винчи. В этом можно убедиться уже на примере платоновых тел. Так, через константу $\sqrt{2}$ выражается объём тетраэдра, угол между его гранями, угол между гранью и ребром, радиус описанной сферы и *угол тетраэдра*, равный $2\text{arctg}\sqrt{2}$; число $\sqrt{2}$ фигурирует в выражениях для радиуса вписанной сферы и диагоналей граней куба, радиуса описанной сферы и объёма октаэдра и т. д. Если сторону октаэдра принять равной 1, сторона двойственного ему куба равна $\sqrt{2}$ и наоборот: если единичный куб вписать в октаэдр, длина стороны последнего больше длины стороны куба в той же пропорции. Конечно, все перечисленные величины могут быть выражены и посредством $\phi_2 - 1$, но выглядит это искусственно и не совсем убедительно. Константу ϕ_2, если и считать причастной к трём платоновым телам, то только через постоянную Пифагора.

Иначе обстоит дело в случае других, менее известных трёхмерных тел. Ниже Архимедовы тела представлены своими числовыми параметрами, рисунками, в развёрнутом виде и двумя ортогональными проекциями. Двунаправленная стрелка ⇔ указывает на название дуального каталанова тела со схожими данными, которые нет нужды представлять, см. [W[9]], а к прежним обозначениям добавился только символ V для объёма тела.

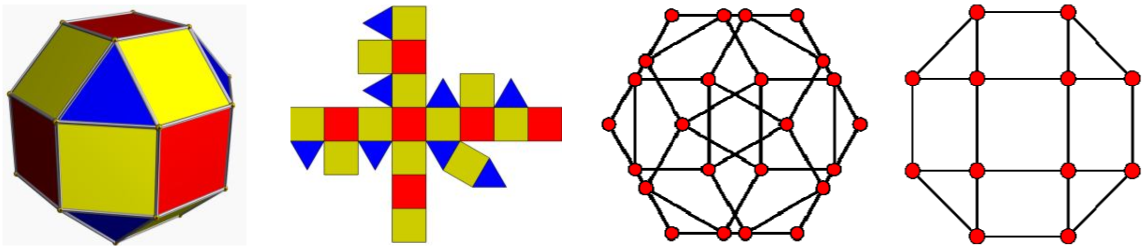
Усечённый куб ⇔ триакисоктаэдр
14 граней: 8 треугольников, 6 восьмиугольников; 24 вершин, 36 рёбер

Координаты	*R*	*r*	*S*	*V*
$\pm(\phi_2-2),\ \pm1,\ \pm1,$ $\pm1,\ \pm(\phi_2-2),\ \pm1,$ $\pm1,\ \pm1,\ \pm(\phi_2-2)$	$\dfrac{\sqrt{3+4\phi_2}}{2}$	$\dfrac{(3+\phi_2)\sqrt{3+4\phi_2}}{17}$	$2(6\phi_2+\sqrt{3})$	$\dfrac{7}{3}(1+2\phi_2)$



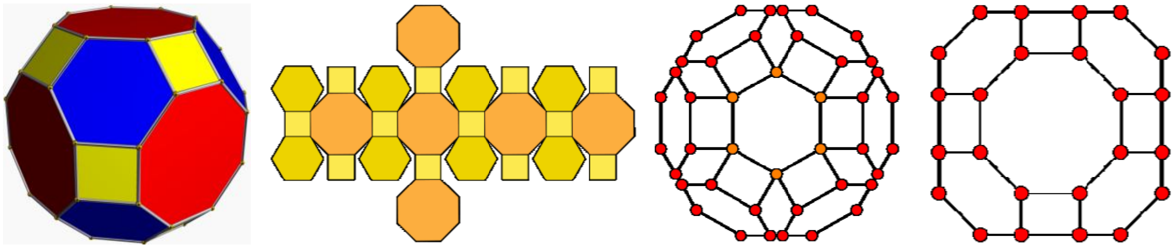
Ромбокубооктаэдр ⇔ дельтоидальный икоситетраэдр,
26 граней: 8 треугольников, 18 квадратов; 48 рёбер, 24 вершины

Координаты	*R*	*r*	*S*	*V*
$\pm1,\ \pm1,\ \pm\phi_2$	$\dfrac{\sqrt{3+2\phi_2}}{2}$	$\dfrac{(5+\phi_2)\sqrt{3+\phi_2}}{17}$	$18+2\sqrt{3}$	$\dfrac{2+10\phi_2}{2}$



Ромбоусёченный кубооктаэдр ⇔ гекзакисоктаэдр
26 граней: 12 квадратов , 8 шестиугольников, 6 восьмиугольников; 72 ребра, 48 вершин

Координаты	***R***	***r***	***S***	***V***
$\pm1,\ \pm\phi_2,\ \pm(\phi_2-1)$	$\frac{\sqrt{7+6\phi_2}}{2}$	$\frac{3(13+\phi_2)\sqrt{7+6\phi_2}}{97}$	$12(1+\phi_2+\sqrt{3}\,)$	$2(4+7\phi_2)$



Платоновы, архимедовы и каталановы тела, называемые также правильными и полуправильными многогранниками, это, мы знаем, геометрическая “элита” трёхмерных тел, их как бы первый и второй дивизионы. В неисчислимом многообразии всевозможных трёхмерных тел явно выделены именно эти 31 многогранник. И вот мы видим, что 14 из них являются золотыми, 6 (три архимедовых и столько же каталановых) связаны с константой ϕ_2, ещё три платоновых тела связаны с ней хотя бы косвенно. Заметим также, что других констант из семейства ϕ_m здесь нет. Вывод напрашивается сам собой. Первые два члена благородного семейства и только они являются гегемонами в мире геометрических тел, хотя по основным свойствам в $T(\phi_m)$ и $T(\phi_{mk})$ все члены бесконечной последовательности ϕ_m и ϕ_{mk} формально равноправны. Впрочем, подобная привилегированность характерна и для других семейств констант в математике, например для семейства вышеупомянутых постоянных Фейгенбаума. В этом можно видеть отличие семейств констант от таких числовых последовательностей, как, скажем, ряд Фибоначчи, где по мере удаления от начала ряда обеспечивается всё более высокая степень приближения к теоретическому пределу. Предел, конечный или бесконечный, как в нашем случае, может существовать и для семейства констант, но здесь он важной роли не играет и почти все призы достаются первенцам.

Беспристрастный формальный анализ даёт полное основание утверждать, что геометрия, по крайней мере трёхмерная, вправе считаться несокрушимой цитаделью золотого сечения. Между тем, всё это уже было в истории познания, а детали и уточнения по большому счёту не так существенны. Следует лишний раз воздать должное мудрости и прозорливости античных мыслителей, цельностью своего мировосприятия и величием духа создавших нечто такое, что мы сейчас можем назвать *геометрией гармонии* или, если угодно, *геометрической составляющей математики гармонии*.

Не так благополучно сложились отношения античной математики с *арифметикой гармонии*. Пифагорейцы и Платон в своём понимании космоса как единого целого вышли на самые, пожалуй, совершенные даже с современной точки зрения геометрические тела – правильные многогранники. А вот путь к вершинам теории чисел был, как известно, долог и тернист. Не случайно евклидовские *Начала* известны как *Геометрия Евклида*, хотя по сути это вся античная математика, включая арифметику и алгебру, изложенная в геометризованном виде. Есть поэтому немало построений, равносильных золотому сечению, но нет самой золотой константы. Мировую гармонию невозможно выразить посредством лишь натуральных или даже рациональных чисел. Серьёзные достижения есть и здесь, но даже в наши дни игра с целыми числами – занятие характерное для праздных, не шибко подкованных в математике любителей-энтузиастов, возрождающих (в не лучшем обычно варианте) древнюю числовую магию и мистику, дополняемую доморощенной отсебятиной. По-настоящему глубокое понимание числовых закономерностей, лежащих, как принято считать, в основе гармонии мира, возможно только при наличии математического аппарата, обязанного своим существованием расширениям понятия числа до уровня комплексных чисел. Без тонких методов математического анализа, операции предельного перехода, фундаментальных математических констант, без экспоненты, через которую выражаются 24 тригонометрические, гиперболические и обратные им функции, а также несметное количество их интегральных форм, теория золотого сечения – повод для радостных восклицаний, вызванных изяществом и доступностью исходных положений, и предмет бесконечных споров относительно подлинности того или иного факта обнаружения ЗС во внешнем мире.

Бесконечные ряды

Геометрический портрет константы да Винчи дополним некоторыми числовыми соотношениями и формулами для ϕ_2 и чисел Пелля P_n, аналогичными тем, что представлены в предыдущей главе для золотой константы и чисел Фибоначчи.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{P_nP_{n+2}}=\frac{9}{4}-\phi_2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{P_{n+1}P_{n+2}}=\frac{\phi_2^{-2}}{2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_{2n}P_{2n+2}}=\frac{\phi_2^{-2}}{4} \tag{4.100}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n}{3^n}=\frac{3}{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n}{4^n}=\frac{4}{7} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n}{5^n}=\frac{5}{14} \tag{4.101}$$

В общем случае сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n}{a^n}$$

расходится, если $-\phi_2 \le a \le \phi_2$, и сходится для остальных действительных чисел:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n}{a^n}=\frac{a}{a^2-2a-1} \tag{4.102}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n}=1{,}84220\ 30498\ldots \tag{4.103}$$

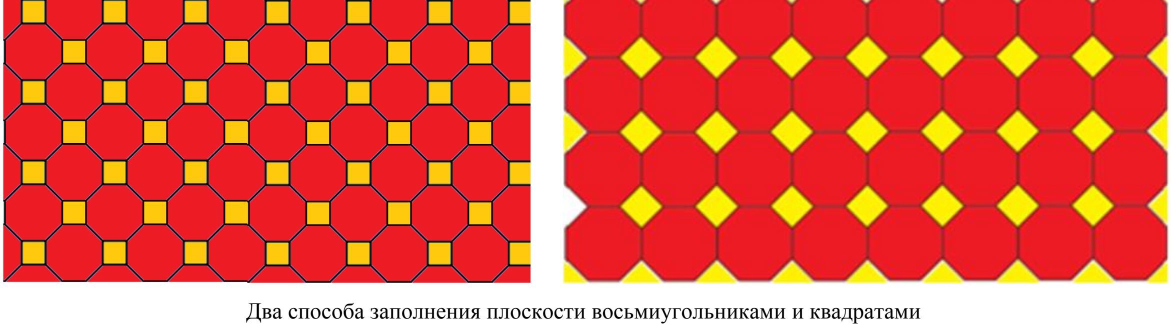
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_{2n}}=0{,}60057\ 76422\ldots \tag{4.104}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_{2^n}}=0{,}5857864376\ldots \tag{4.105}$$

$$h_P=\sqrt{P_0+\sqrt{P_1+\sqrt{P_2+\sqrt{P_2+\ldots}}}}=1{,}34224\ 01361\ \ldots \tag{4.106}$$

$$\sqrt{h_P}=1{,}15855\ 087768\ \ldots \tag{4.107}$$

Покидая золотую и “позолоченную” геометрию, в дополнение раздела 8 второй главы коротко остановимся на проблеме, у истоков которой стоят И. Кеплер и А. Дюрер. Речь о плотном, без зазоров и перекрываний, заполнении плоскости. Как известно, одними только золотыми пятиугольниками или серебряными восьмиугольниками, в отличие от правильных трёх-, четырёх- и шестиугольников, заполнить плоскость невозможно. В случае золотых фигур плоскость может быть замощена плитками Пенроуза, а пространство ромбоэдрами, грани которых являются золотыми ромбами, причем подобная структура была относительно недавно обнаружена среди квазикристаллов, см. [Shechtman *et al.*]. А заполнение плоскости двумя различными способами посредством восьмиугольников и квадратов показано на рисунке.



Два способа заполнения плоскости восьмиугольниками и квадратами

9. Фигурные числа. Золото семиугольных чисел

Раздельное рассмотрение теоретико-числовых и геометрических характеристик золотой константы и константы да Винчи продолжим обсуждением проблемы связи между числовыми величинами и геометрическими объектами с более общих позиций и в ином контексте. Может показаться, что при сравнении записываемых посредством радикалов формальных конструкций констант ϕ и ϕ_2 наблюдается некая числовая "асимметрия". В самом деле, иррациональное число ϕ, геометрическим символом которого является пятиугольник, содержит корень квадратный из пяти и двойку в знаменателе, а символизируемое восьмиугольником, второе по значимости в золотом семействе число ϕ_2 содержит корень квадратный из двух и не имеет знаменателя. В действительности формального неравноправия здесь нет, а $1+\sqrt{2}$ является сокращённой записью числа $(1+\sqrt{8})/2$.

Содержащая иррациональные константы связь между натуральными числами и замкнутыми фигурами достаточно проста. Это, по сути, однозначное соответствие между правильными многоугольниками и бесконечными множествами чисел, называемых *фигурными*. Сегодня подобная, возможно, несколько наивная с позиций современного знания *геометризация чисел* представляет скорее исторический интерес, поэтому обратимся вначале к истории. Долгое время, начиная, видимо, уже с Египта и Вавилона, но особенно с пифагорейцев, интерес к фигурным числам был достаточно высок. Среди их исследователей встречаются и те, чьи имена ассоциируются с историей золотого сечения (Гипсикл, Пачоли, Фибоначчи и другие).

Фигурные числа, по мнению пифагорейцев, играют важную роль в структуре мироздания. Поэтому их изучением занимались многие математики античности: Эратосфен, Гипсикл, Диофант Александрийский и другие. Гипсикл (II век до н.э.) дал общее определение m-угольного числа P_n как суммы n членов арифметической прогрессии, у которой первый член есть 1, а разность равна $m-2$. Диофант написал большое исследование о свойствах многоугольных чисел, фрагменты которого дошли до наших дней. О фигурных числах много говорится в пифагорейских учебниках арифметики, созданных Никомахом Герасским и Теоном Смирнским (II век), которые установили ряд зависимостей между фигурными числами разных размерностей. Большой интерес к фигурным числам проявили индийские математики и первые математики средневековой Европы (Фибоначчи, Пачоли, Кардано и др.) [*Фигурные числа*].

А небольшой отрывок из сочинения неопифагорейца Никомаха из Герасы (Νικόμαχος ὁ Γερασένος, 1-я пол. 2 в. н.э.) может служить примером традиционного понимания означенных чисел.

Треугольным называется такое число, которое, будучи разложенным на единицы, может быть выложено на плоскости в форме равностороннего треугольника. К примеру, таковы числа 3, 6, 10, 15, 21, 28 и так далее; ведь они могут быть изображены схематически в виде равносторонних треугольников. И, продвигаясь дальше, ты найдёшь, что ряд треугольных чисел образуется, когда в качестве элементарной формы берётся та, которая вырастает из единицы, поскольку единица является треугольным числом в возможности, а первым настоящим треугольным числом будет 3 [Никомах Герасский, Гл. VII].

Четырёхугольное число есть следующее по порядку, и оно показывает нам на схеме уже не три угла, как предыдущее, но четыре, и точно так же является равносторонним. К примеру, таковы числа 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. В графическом представлении все эти числа являются равносторонними четырёхугольниками; и так будет сколь угодно долго [Там же, Гл. VIII].

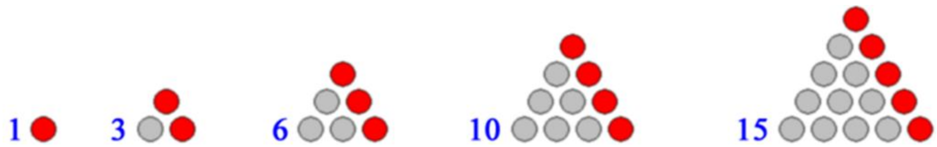
Пятиугольное число есть такое, которое в разложении на единицы изображается пятиугольной равносторонней фигурой. Таковы числа 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 и аналогичные им [Там же, Гл. IX].

Шестиугольные, семиугольные и следующие за ними числа будут расставлены в своих рядах таким же образом, если из натурального ряда чисел извлекать ряды, идущие от единицы со своими разностями. Как треугольное число было получено последовательным сложением членов, которые разнились на единицу и нигде не пропускались; и четырёхугольное – с разностью в двойку, пропуская одно; и следующее пятиугольное – с разностью в тройку, пропуская два (и мы показали это на примере как самих чисел, так и составленных из них многоугольников); так и шестиугольники получаются, когда последовательно складываются их гномоны, идущие с разностью в четвёрку, пропуская три, то есть 1, 5, 9, 13, 17, 21 и так далее; так что шестиугольники будут равны 1, 6, 15, 28, 45, 66 и сколь угодно далее [Там же, Гл. XI].

Числа, в частности натуральные, могут быть соотнесены с чем угодно, в данном случае они соотносятся с правильными многоугольниками. Фактически, по числу вершин, или ребёр, замкнутой фигуры строится последовательность чисел, каждое из которых может быть представлено в виде, например, кружочков, упакованных в геометрическую конфигурацию, воспроизводящую форму данного многоугольника. Как обычно, наибольший интерес представляют фигурные числа для правильных многогранников с небольшим количеством вершин. Ниже приведены формулы $P(s, n)$ и первые двадцать членов фигурных последовательностей для значений $s = 3, 4, 5, \ldots, 12$; первые четыре фигуры проиллюстрированы соответствующими рисунками из [*Polygonal number*].

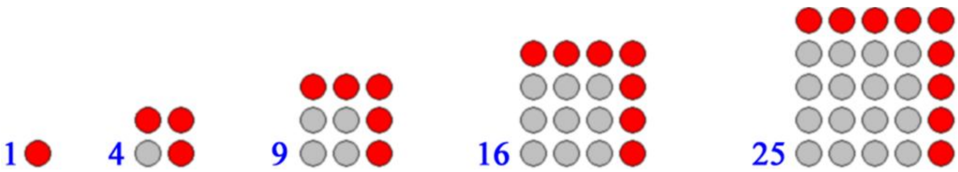
Треугольные числа, $P(3, n) = \dfrac{n^2 + n}{2}$:

1, **3**, 6, 10, 15, **21**, 28, 36, 45, **55**, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, …



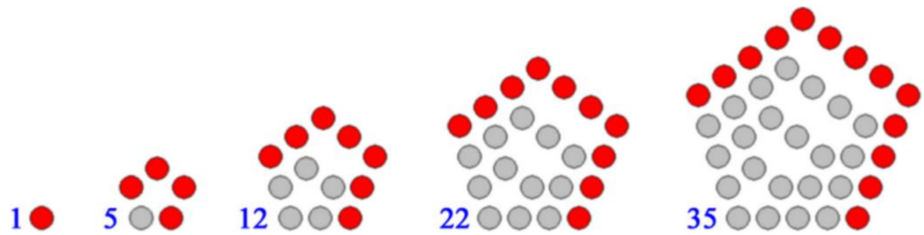
Четырёхугольные числа, $P(4, n) = n^2$:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, **144**, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, …



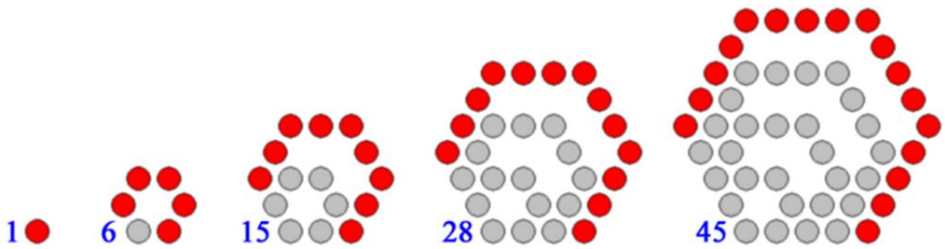
Пятиугольные числа, $P(5, n) = \dfrac{3n^2 - n}{2}$:

1, **5**, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425, 477, 532, 590, …



Шестиугольные числа, $P(6, n) = \dfrac{4n^2 - 2n}{2}$:

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325, 378, 435, 496, 561, 630, 703, 780, …



Семиугольные числа, $P(7, n) = \dfrac{5n^2 - 3n}{2}$:

1, 7, 18, **34**, **55**, 81, 112, 148, 189, 235, 286, 342, 403, 469, 540, 616, 697, 783, 874, 970, …

Восьмиугольные числа, $P(8, n) = \dfrac{6n^2 - 4n}{2}$:

1, **8**, **21**, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, 341, 408, 481, 560, 645, 736, 833, 936, 1045, 1160, …

Девятиугольные числа, $P(9, n) = \dfrac{7n^2 - 5n}{2}$:

1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, 204, 261, 325, 396, 474, 559, 651, 750, 856, 969, 1089, 1216, 1350

Десятиугольные числа, $P(10, n) = \dfrac{8n^2 - 6n}{2}$:

1, 10, 27, 52, 85, 126, 175, 232, 297, 370, 451, 540, 637, 742, 855, 976, 1105, 1242, 1387, 1540, …

Одиннадцатиугольные числа, $P(11, n) = \dfrac{9n^2 - 7n}{2}$:

1, 11, 30, 58, 95, 141, 196, 260, 333, 415, 506, 606, 715, 833, 960, 1096, 1241, 1395, 1558, 1730

Двенадцатиугольные числа, $P(12, n) = \dfrac{10n^2 - 8n}{2}$:

1, 12, 33, 64, 105, 156, 217, 288, 369, 460, 561, 672, 793, 924, 1065, 1216, 1377, 1548, 1729, 1920, …

Формула для любых натуральных $s \geq 3$ и $n \geq 1$ представляет собой квадратичную форму, то есть полином второй степени:

$$P(s, n) = \frac{n^2(s-2) - n(s-4)}{2} = \frac{n(s-2)(n-1)}{2} + n \tag{4.108}$$

Нетрудно заметить, что все последовательности начинаются с единицы, а второй член всегда равен s:

$$P(s, 1) = 1, \;\; P(s, 2) = s$$

Ясно, что числами Фибоначчи являются все первые и те вторые члены последовательностей, у которых $s = F_n$. К последним относятся числа $P(3, 2)$, $P(5, 2)$ и $P(8, 2)$. Что касается других фигурных чисел, являющихся одновременно числами Фибоначчи, их у нас не так много: треугольные числа $P(3, 6) = 21$, $P(3, 10) = 55$, квадратное число $P(4, 12) = 144$, семиугольные $P(7, 4) = 34$, $P(7, 5) = 55$ и восьмиугольное $P(8, 3) = 21$. Все эти значения выделены полужирным и могут быть также получены для конкретных значений s из уравнения типа $P(s, n) = F_n$, в котором F_n выражается через золотую константу посредством формулы Бине:

$$\frac{n^2(s-2) - n(s-4)}{2} = \frac{\phi^n - (-\phi^{-1})^n}{\sqrt{5}} \tag{4.109}$$

При фиксированных значениях $s = 3, 4, 5, \ldots$ целочисленные относительно n решения этого трансцендентного уравнения и есть множество фигурных чисел, являющихся числами Фибоначчи.

В случае ряда Люка уравнение для фигурных чисел, являющихся одновременно и числами L_n, запишется в виде

$$n^2(s-2) - n(s-4) = 2(\phi^n + (-\phi^{-1})^n), \tag{4.110}$$

не содержащем радикала. Заметим, что в левых частях обоих уравнениях стоит степенная функция n^2, а в правых – показательная ϕ^n, отношение которых с возрастанием n и при любом значении s стремится к нулю. Другими словами, ряды Фибоначчи и Люка растут значительно быстрее, чем последовательности фигурных чисел. Этим и объясняется крайне ограниченное число совпадений между числами, притом только начальными, двух типов.

Если усложнить задачу и попытаться выделить те треугольные числа, которые одновременно являются пятиугольными и числами Фибоначчи, это фактически сведётся к решению уравнения

$$\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \tag{4.111}$$

После элементарных преобразований оно может быть приведено к виду

$$x^2 - 3y^2 = -2 \tag{4.112}$$

Решение этого диофантова уравнения даёт пары пентагонально-треугольных значений [W13]

$$[P(5, 1); P(3, 1)], \quad [P(5, 12); P(3, 20)], \quad [P(5, 165); P(3, 285)], \quad [P(5, 2296); P(3, 3976)], \ldots \tag{4.112$'$}$$

которым соответствуют следующие пятиугольно-треугольные числа:

$$1, \; 210, \; 40\,755, \; 7\,906\,276, \; 1\,533\,776\,805, \ldots \tag{4.112$''$}$$

Кроме единицы, других чисел F_n здесь нет.

Аналогично, для выявления общих фигурных чисел пары треугольник–восьмиугольник необходимо найти решения уравнения

$$n(3n-2) = \frac{m(m+1)}{2} \tag{4.113}$$

которое приводится к диофантову уравнению [W14]

$$2x^2 - 3y^2 = 5 \tag{4.114}$$

с такими парами решений:

$$[P(8,1);\,P(3,1)],\quad [P(8,3);\,P(3,6)],\quad [P(8,63);\,P(3,153)],\quad [P(8,261);\,P(3,638)],\ \ldots \tag{4.114′}$$

Отсюда следует быстро растущая последовательность фигурных чисел

$$1,\ 21,\ 11781,\ 203841,\ 113123361,\ \ldots, \tag{4.114″}$$

из которых, как и в предыдущем случае, числом Фибоначчи является только начальный член ряда.

Последовательности фигурных чисел, как и многие другие известные числовые последовательности, полны любопытных математических диковинок и курьёзов, в том числе эзотерического толка. Например, тридцать шестое ($36 = 6\cdot 6$) треугольное число равно апокалиптическому *числу зверя*: $P(3,\ 6\cdot 6) = 666$. Формально, это попросту равенство $(37\cdot 36)/2 = 666$. Есть и немало интересных задач, таких как *золотая теорема*, сформулированная в середине XVII века Пьером Ферма (Pierre de Fermat, 1601–1665) и окончательно решённая лишь в начале XIX века Огюстеном Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789–1857).

Учение о фигурных числах привлекало к себе математиков на протяжении многих столетий. Ими много занимался живший в XVII в. французский учёный Пьер Ферма, который доказал, например, что любое натуральное число есть или треугольное или сумма 2 или 3 треугольных чисел, квадратное или сумма 2, 3 или 4 квадратов, пятиугольное или сумма 2, 3, 4 или 5 пятиугольных и т.д. Как и многие другие полученные им результаты, он лишь сформулировал это утверждение в письме к Блэзу Паскалю (юрист по основной профессии, Ферма занимался математикой лишь в часы досуга). Частные случаи этой теоремы доказали Эйлер и Лагранж, а общее доказательство было дано в 1815 г. французским математиком О. Коши [Виленкин, 10–11].

Нас, естественно, интересуют математическое результаты, без всякой привязки к мистике чисел, но обязательно с золотым содержанием, которое в самих последовательностях $P(s, n)$ оказалось не слишком высоким.

С точки зрения связей фигурных чисел с МК имеет смысл обратиться к суммам, составленным из слагаемых, обратных $P(s, n)$ и с множителем 2 уже в знаменателе, то есть к суммам типа

$$1/4P(s,n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4P(s,n)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2[sn^2-(s-2)n]} \tag{4.115}$$

для различных значений “фигурного параметра” s. Посмотрим вначале на имеющиеся выражения для значений $s = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ и 14 [*Polygonal number*].

Таблица

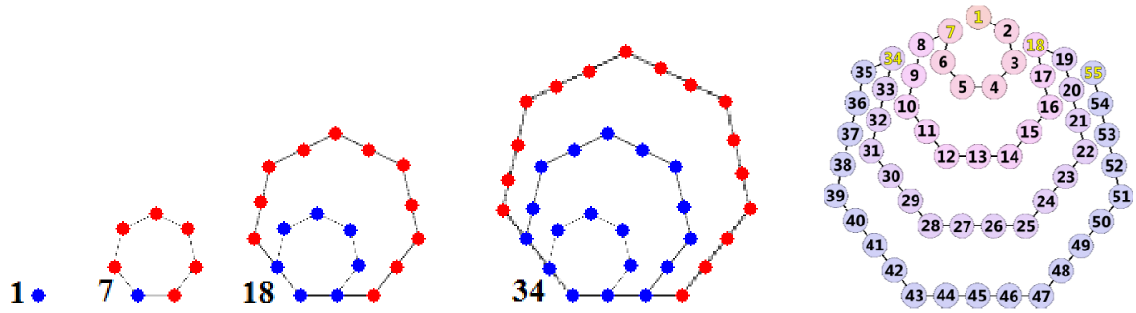
Суммы $S(s, n)$, составленные из величин, обратных $P(s, n)$

s	3	4	5	6	8	10	14
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4P(s,n)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$3\ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$	$2\ln 2$	$\frac{3\ln 3}{4}+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$	$\ln 2+\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\ln 2}{5}+\frac{3\ln 3}{10}+\frac{\pi\sqrt{3}}{10}$

Налицо любопытная связь составленных из комбинаций натуральных чисел бесконечных сумм с числом π, выражаемых посредством логарифма фундаментальными константами e, i, 2 и некоторыми целыми числами. Но, вопреки ожиданиям, интересующих нас констант здесь нет. Впрочем, в математике, как и во многих других областях, не всегда знаешь, где найдёшь, где потеряешь, поэтому посмотрим, как обстоит дело в случае семиугольных чисел:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4P(7,n)} = \frac{2}{3}\left(\pi\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}-\phi^{-1}\right)} + \ln(5\sqrt{2+\phi}) - \phi\ln\phi\right) = 1{,}32277\,92531\ldots \tag{4.116}$$

Другая совсем картина: константа ϕ и её обратная величина, а также ϕ под знаком логарифма и под квадратным корнем. Золотой, одним словом, самородок, относящийся к ничем, казалось бы, не примечательному правильному семиугольнику, в то время как связанные с пяти- и десятиугольником суммы к золотой константе, как оказалось, не причастны.



Геометрия семиугольных чисел, выделенных на правом рисунке золотистым цветом

Но само выражение

$$\frac{1}{2(5n^2 - 3n)}$$

содержит 5-й и 4-й члены ряда Фибоначчи в знаменателе, и выражение $5n^2 - 3n$ при бесконечном суммировании по n даёт любопытнейшее сочетание золотоносных слагаемых, включая $\ln \phi$ из модели $T(\phi_{mk})$. Заметим также, что первые пять семиугольных чисел являются числами либо Фибоначчи (1, 34, 55), либо Люка (1, 7, 18).

10. Золотоносные бесконечные суммы

При рассмотрении констант ϕ и ϕ_2 то и дело приходится иметь дело с бесконечными рядами. Это вполне объяснимо, поскольку такие ряды – один из наиболее интересных и важных разделов математики и мы только что видели, как составленные из натуральных чисел суммы дают в пределе замысловатые комбинации математических констант, включая золотую. Богатое константой ϕ семиугольное $1/4P(7, n)$ под знаком суммы побуждает провести небольшое собственное исследование на предмет выявления золотоносных “залежей” в выражениях, не связанных с фигурным числами, но построенных по их “образу и подобию”. Следовательно, речь идёт о бесконечных суммах

$$S(a, b, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{an^2 - bn} \tag{4.117}$$

составленных из слагаемых, содержащих двойку в числителе и двучлен типа $an^2 - bn$ в знаменателе, причём, как и прежде, в качестве множителей a и b будем брать только числа Фибоначчи:

$$S(F_m, F_k, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{F_m n^2 - F_k n} \tag{4.118}$$

С учётом результатов предыдущего раздела, мы надеемся получить для $F_m = 5$ формулы, содержащие золотую константу, а для $F_m = 8$ – константу да Винчи. Но вначале нам потребуются некоторые общие сведения из теории бесконечных рядов. Известно, что *ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

который при $s = 1$ называется *гармоническим рядом*, расходится, если $s \le 1$, и определяется через дзета-функцию Римана во всех остальных случаях:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s), \quad s > 1 \tag{4.119}$$

в частности, для чётных значений показателя степени

$$\zeta(2) = \pi^2/6, \quad \zeta(4) = \pi^4/90, \quad \zeta(6) = \pi^6/945, \ldots$$

А сумма $S(a, b, n)$ для произвольных значений a и b выражается посредством гамма-функции и производной от неё полигамма-функции. В случае целых положительных значений a и b, сумма S выражается через логарифмическую и тригонометрические функции. Следует также отметить, что при значениях $b = la$, $(l = 1, 2, \ldots)$ сумма S расходится, поскольку имеет нуль в точке $n = l$; например, суммы, содержащие, допустим, в знаменателе

$$5n^2 - 5n, \;\; 5n^2 - 55n, \;\; \text{или} \;\; 8n^2 - 8n, \; 8n^2 - 144n,$$

расходятся из-за нулей в точках $n = 1$, $n = 11$, и $n = 1$, $n = 12$. Кроме того, из-за двойки в числителе, хотя бы один из множителей a и b должен быть нечётным.

Принимая во внимание подобные ограничения, используя $\sqrt{5}$ вместо $2\phi - 1$ и желая показать разнообразие значений $S(a, b, n)$ при заданном $a = 5$ и различных $b = F_k$, заставим k пробегать все допустимые значения от 1 до 7. Имеем:

$$S(F_5, F_1, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n^2 - n} = -\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} + \sqrt{5}\ln\phi + \frac{1}{2}\ln 5 = 0{,}77558\,58036\ldots \qquad (4.120)$$

$$S(F_5, F_3, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n^2 - 2n} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} - \sqrt{5}\ln\phi + \frac{1}{2}\ln 5\right) = 0{,}96340\,35489\ldots \qquad (4.121)$$

$$S(F_5, F_4, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n^2 - 3n} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} - \sqrt{5}\ln\phi + \frac{1}{2}\ln 5\right) = 1{,}32277\,9253\ldots \qquad (4.122)$$

$$S(F_5, F_6, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n^2 - 8n} = -\frac{5}{12} + \frac{1}{8}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} - \sqrt{5}\ln\phi + \frac{1}{2}\ln 5\right) = 0{,}07937\,55532\ldots \qquad (4.123)$$

$$S(F_5, F_7, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n^2 - 13n} = -\frac{55}{156} + \frac{1}{13}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} - \sqrt{5}\ln\phi + \frac{1}{2}\ln 5\right) = -0{,}04730\,73518\ldots \qquad (4.124)$$

Как видим, сумма S может быть положительной или отрицательной, больше или меньше единицы, положительными или отрицательными могут быть радикалы, а начиная с $S(F_5, F_6, n)$ появляется отрицательное слагаемое $-C(5, F_k)$, определяемое посредством гамма-функции. Общая формула для сумм подобного рода вполне очевидна:

$$S(F_5, F_k, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n^2 - F_k n} = -C(5, F_k) + \frac{1}{F_k}\left(\pm\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} \pm \sqrt{5}\ln\phi + \frac{1}{2}\ln 5\right) \qquad (4.125)$$

Аналогичное рассмотрение связанных с восьмиугольником ($8 = F_6$) сумм типа $S(F_6, F_k, n)$ приводит, как и следовало ожидать, к выражениям, содержащим константу да Винчи:

$$S(F_6, F_1, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{8n^2 - n} = -\phi_2\pi - 2\sqrt{2}\ln(\phi_2 - 2) + 8\ln 2 = 0{,}45360\,28132\ldots \qquad (4.126)$$

$$S(F_6, F_4, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{8n^2 - 3n} = \frac{1}{3}\left[-(\phi_2 - 2)\pi + 2\sqrt{2}\ln(\phi_2 - 2) + 8\ln 2\right] = 0{,}58366\,20664\ldots \qquad (4.127)$$

$$S(F_6, F_5, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{8n^2 - 5n} = \frac{1}{5}\left[(\phi_2 - 2)\pi + 2\sqrt{2}\ln(\phi_2 - 2) + 8\ln 2\right] = 0{,}87071\,33536\ldots \qquad (4.128)$$

$$S(F_6, F_7, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{8n^2 - 13n} = -\frac{16}{65} + \frac{1}{13}\left[(\phi_2 - 2)\pi + 2\sqrt{2}\ln(\phi_2 - 2) + 8\ln 2\right] = 0{,}08873\,59052\ldots \qquad (4.129)$$

$$S(F_6, F_8, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{8n^2 - 21n} = -\frac{96}{455} + \frac{1}{21}\left[(\phi_2 - 2)\pi + 2\sqrt{2}\ln(\phi_2 - 2) + 8\ln 2\right] = -0{,}00367\,63077\ldots \qquad (4.130)$$

$$S(F_6, F_{10}, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{8n^2 - 55n} = -\frac{81038112}{838612775} + \frac{1}{55}\left[\phi_2\pi - 2\sqrt{2}\ln(\phi_2 - 2) + 8\ln 2\right] = 0{,}18741\,29072\ldots \qquad (4.131)$$

Общую формулу для $S(F_6, F_k, n)$, с учётом знаков и двух возможных значений 0 и 1 для множителя k, можно записать в таком виде:

$$S(F_6, F_k, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{8n^2 - F_k n} = -C(8, F_k) + \frac{1}{F_k}\left(\pm\phi\pi \mp k\cdot 2\pi \pm 2\sqrt{2}\ln\phi + 8\ln 2\right) \qquad (4.132)$$

Следует добавить, что золотая константа ϕ фигурирует и в медленно стремящихся к нулю с увеличением m выражениях для сумм типа $S(mF_5, F_k, n)$, а константа ϕ_2 – для $S(mF_6, F_k, n)$, ($m = 2, 3, \ldots$). Это, понятно, более сложные выражения, чем предыдущие, а с увеличением множителя m их сложность неуклонно возрастает. Наконец, обе константы, наряду со своими вечными спутниками $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$, присутствуют в выражениях для сумм типа $S(mF_5F_6, F_k, n)$.

11. Тонкие связи между константами ϕ и ϕ_2

Теоретико-числовое рассмотрение константы да Винчи продолжим её отношением с числом золотого сечения. Определяемые посредством ПСМ константы формально хотя и независимы друг от друга, однако схожи не только по основным свойствам, но также по своей структуре. Между двумя первенцами семейств ϕ_m и ϕ_{mk} существует ряд весьма неординарных, нетривиальных и заслуживающих внимания связей. Так, сравнение цепной дроби константы ϕ_2 с цепными дробями $-\phi$, $-\phi^{-1}$, $-\phi^2$, $-\phi^{-2}$, то есть взятой с отрицательным знаком золотой константы и её ближайших степеней приводит к любопытному предельному соотношению для числителей P_n/a числа a и знаменателей Q_n подходящих дробей четырёх отрицательных чисел:

$$\lim_{n\to\infty}[Q_n(-\phi^{\pm k})] = \lim_{n\to\infty}[P_n/a(-\phi^{\pm k})] = \sqrt{2}+1, \quad (k = 1, 2) \tag{4.133}$$

В физической теории связь между двумя основными членами семейства ϕ_m выявляется посредством гамильтониана Фибоначчи (Fibonacci Hamiltonian), представляющего собой дискретный оператор Шрёдингера [Damanik *et al.*]

$$[Hu](n) = u(n+1) + u(n-1) + V(n)u(n) \tag{4.134}$$

Здесь $V(n) = \lambda\chi_{[1-\phi^{-1},1)}(n\phi^{-1} + \theta \bmod 1)$, $\lambda > 0$ – константа связи, $\theta \in [0, 1)$ – фаза. Размерность Хаусдорфа (обобщение обычного понятия размерности) гамильтониана при $\lambda \to \infty$ стремится к пределу, который оказывается равным

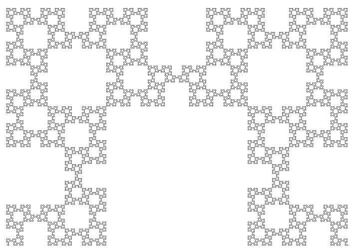
$$\ln \phi_2 = 0{,}881\,373\,587\ldots \tag{4.135}$$

Другими словами, размерность Хаусдорфа фрактала, называемого спектром гамильтониана Фибоначчи (Spectrum of Fibonacci Hamiltonian [List of fractals by Hausdorff dimension]) и связанного с золотым числом ϕ, равна логарифму константы да Винчи!

Равную утроенному отношению логарифмов констант ϕ и ϕ_2 размерность Хаусдорфа имеет фрактал фибоначчиева слова (Fibonacci word fractal)

Фрактал Фибоначчиева слова

$$3\frac{\ln\phi_2}{\ln\phi} = 3\frac{\ln[(1+\sqrt{5})/2]}{\ln(1+\sqrt{2})} = 1{,}637\,938\ldots$$



Удивительно, скорее даже уникально выражение для площади поверхности, образованной вращением кривой

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{i(e^{ix} + e^{ix})}, \quad 0 \le x \le \pi/4 \tag{4.136}$$

вокруг оси Ox:

$$S = \pi\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right) + \ln\frac{\phi_2}{\phi}\right] \tag{4.137}$$

В задаче вращения тангенса сразу семь (!) важнейших констант: фундаментальные математические константы π, e, i, основные константы золотого семейства ϕ, ϕ_2, их спутники $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$.

Соотношения для последовательности Пелля и константы да Винчи

Напомним, что правило третьего члена для константы ϕ_2

$$F_{2,n+2} = 2F_{2,n+1} + F_{2,n}$$

приводит к носящей имя английского математика Джона Пелля бесконечной последовательности (Pell's sequence), общий член которой мы для единообразия обозначили символом $F_{2,n}$. Как и для чисел Фибоначчи, для чисел Пелля (4.13), а также их квадратов, сумм и т. п. существует множество различных представлений посредством рядов, факториалов и т. д.; некоторые из них приводятся ниже [Ram[2]]:

$$F_k = \sum_{m=1}^{\frac{k+1}{2}} 2^{k-2m+1} \binom{k-m}{m-1} \tag{4.138}$$

$$F_k^2 = \sum_{m=1}^{k} 4^{k-m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \binom{2k-m-j}{m-j} \tag{4.139}$$

$$\sum F_k = \sum_{m=1}^{k} 2^{m-1} \sum_{j=0}^{\frac{k-m}{2}} \binom{m-1+j}{j} \tag{4.140}$$

Формулы, преобразующие степенные выражения ϕ_2^n и ϕ_2^{-n} в линейные, и формулы, преобразующие сумму $\phi_2^{2k} + \phi_2^{-2k}$ и разность $\phi_2^{2k-1} - \phi_2^{-(2k-1)}$ в целые числа, получаются прямой подстановкой ϕ_2 вместо ϕ_m в общие формулы (4.18)–(4.23). А суммы и разности для любых действительных или комплексных степеней ϕ_2 получаются той же подстановкой в формулы (4.25) и (4.26), построенные посредством гиперболических косинуса и синуса. Из общей формулы (4.29) сразу получается формула Бине для ряда Пелля:

$$F_{2,n} = \frac{\phi_2^n - (-1)^n \phi_2^{-n}}{2(\phi_2 - 1)} \tag{4.141}$$

Аналогично и в случае формул Бине (4.25), (4.26), выражающих $F_{m,n}$ с помощью гиперболических функций. Обобщение обычной формулы Бине на случай произвольного действительного числа r даёт формулу

$$F_{2,r} = \frac{\phi_2^r - (\phi_2^{-1})^r \cos(r\pi)}{2(\phi_2 - 1)} \tag{4.141$'$}$$

тождественную предыдущей при целых значениях показателя степени r.

Если геометрическими носителями и символами золотой константы считать пятиугольник со вписанной в него звездой, а в меньшей степени десятиугольник, то для константы да Винчи это соответственно восьмиугольник с восьмиугольной звездой и в какой-то степени квадрат. Отсюда и получаются числа 5 и 10 в первом случае, 8 и 4 во втором для аргументов тригонометрических функций синуса и косинуса. А таблицу значений

$$2\sin(n\frac{\pi}{8}) \text{ и } 2\cos(n\frac{\pi}{8})$$

сходную с таблицей для

$$2\sin(n\frac{\pi}{10}) \text{ и } 2\cos(n\frac{\pi}{10})$$

построить нетрудно, зная значения функций синуса и косинуса для аргументов $\pi/4$ и $\pi/2$, но надобности в этом здесь нет.

Не обошёл вниманием число ϕ_2 и Рамануджан, открывший удивительную формулу, см. [Левин, 36], связывающую эту константу с ФМК e, π, 2 и натуральным рядом:

$$1 - \frac{2}{3^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5^2} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9^2} - + \ldots = \frac{(\pi/2)^2 - \ln^2\phi_2}{2} \tag{4.142}$$

Интересны и приведённые например в [Knopp; Gradshteyn and Ryzhik] формулы

$$\phi_2 = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{2n-1}} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \ldots \tag{4.143}$$

$$\phi_2 = 1 + \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right) = 1 + \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)\ldots \tag{4.144}$$

для бесконечной суммы и произведения.

Задачи и упражнения с появлением констант ϕ и ϕ_2

Математическая константа высокого ранга может неожиданно появляться при решении задач самого разного уровня и типа. Это один из наиболее интригующих фрагментов теории чисел и математического анализа, поскольку именно здесь появление той или иной константы в решениях задачи заранее непредсказуемо. Если в условиях задачи ничто не указывает на конечный результат и если сама задача важна и соотносится с какими-то реалиями внешнего мира, тогда теоретический рейтинг константы заметно повышается. По сути это и есть *то самое*, что больше всего ценят математические эстеты.

Следует отметить, что в решении подобных задач довольно часто фигурирует неизменный спутник константы да Винчи постоянная Пифагора $\sqrt{2}$ и значительно реже сама константа $1 + \sqrt{2}$, хотя не всегда просто отличить одно от другого. Вначале приведём примеры из курса математического анализа совместного появления констант, а после, начиная с номера 9, уже сольного явления константы ϕ_2.

1. Функция $y=\dfrac{2-x^2}{1+x^4}$, обращающаяся в нуль при $x = \pm\sqrt{2}$, имеет минимум $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\phi}=\dfrac{1}{2\phi^3}$ при значениях $x=\pm\sqrt{\phi^3}$.
2. Экспонента e^{2x-x^2} имеет точки перегиба $y_{1,2}=\pm\sqrt{e}$ в точках $x_1 = \phi_2/2$ и $x_2 = 1 - \phi_2/2$.
3. Функция $x^2+y^2=x^4+y^4$: $|x_{\max}| = \sqrt{\dfrac{\phi_2}{2}}$ при $|y| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $|y_{\max}| = \sqrt{\dfrac{\phi_2}{2}}$ при $|x| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Длина дуги параметрически заданной кривой $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$ равна $1 + \dfrac{\ln\phi_2}{\sqrt{2}}$.
5. Длина дуги параметрически заданной кривой $x = a(\mathrm{sh}\,t - t)$, $y = a(\mathrm{ch}\,t - t)$, $(0 \le t \le T)$ равна

   $$2\left(\mathrm{ch}\frac{T}{2}\sqrt{\mathrm{ch}\,T}-1\right)-\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\dfrac{T}{2}+\sqrt{\mathrm{ch}\,T}}{\phi_2}.$$
6. Длина дуги параметрически заданной кривой $r=\dfrac{p}{1+\cos\varphi}$ равна $p(\sqrt{2}+\ln\phi_2)$.
7. Объём тела, образованного вращением фигуры $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ вокруг оси Ox: $V=\dfrac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln\phi_2-\dfrac{2}{3}\right]$.
8. Статистический момент дуги параболы $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le p/2)$ относительно прямой $x = p/2$ выражается соотношением $\dfrac{p^2}{8}\left[\sqrt{2}+5\ln\phi_2\right]$.
9. Максимум функции $y=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, определённой в интервале $(0,\ \infty)$: $y_{\max} = \phi_2/2$.
10. Область существования функции $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{ch}^2 y = 1$: $|x| \ge \ln\phi_2$, краевой минимум при $|x| = \ln\phi_2$.
11. Поверхность тела вращения P вокруг прямой $y = p$ фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямой $y = p/2$: $P = 2\pi p^2(1 + \phi_2 + \ln\phi_2)$.
12. Разложение в ряд Фурье функции $y = \sec x$, $(-\pi/4 < x < \pi/4)$. Очень длинное выражение, дважды содержащее $\ln\phi_2$.
13. Наибольшее значение функции $u = x + y + z$, если $x^2 + y^2 \le z \le 1$: $\sup u = \phi_2$.
14. Поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$, равен $\dfrac{\pi}{2}\phi_2$.

12. Третий уровень обобщения ТЗС

Чем выше уровень обобщения математической теории или модели, тем больше её охват, обширнее предметная область и, как правило, слабее связь с исходными конструктами. В нашем случае, образно говоря, с каждым новым обобщением *золотое содержание* теории понижается. Нельзя, однако, допустить, чтобы оно почти полностью исчезло, как бы “растворившись” в формализме более общего типа. Последний может представлять немалый интерес, но к золотому сечению уже не будет иметь отношения. Наличие константы ϕ следует считать необходимым условием для признания за числовой моделью статуса обобщённой теории ЗС. Например, любая из постоянно упоминаемых в связи с ЗС структур (экспонента, квадратное уравнение, линейная рекурсия, определённый интеграл) лишь в очень частном своём проявлении имеет к ней касательство.

Необходимо отметить, что наличие золотой константы в той или иной структуре, или её появление при решении каких-то задач и уравнений ещё не означает переход на более высокий уровень математического абстрагирования. Вспомним, что согласно методологическому Правилу 2 из третьего раздела настоящей главы *Обобщённое отличается от обобщаемого новыми объектами и константами*, а это возможно лишь применением более общих принципов построения. Если при этом требовать и соблюдения Правила 3, по которому *Фундаментальные особенности обобщаемого сохраняются в обобщённом*, допустимым пределом обобщения может оказаться семейство ϕ_m, поскольку при такой постановке вопроса совсем непросто найти нечто равнозначное правилу сохранения мантиссы. Но если понизить уровень требований, полагая, что наряду с золотым доменом, семейством ϕ_m, а также экспоненциальным обобщением ϕ_{mk} допустимы и другие математические модели, сохраняющие пусть не столь тесную, но тем не менее достаточно ощутимую близость с золотой константой, поиск таких моделей должен быть продолжен.

Сейчас самое время напомнить о последовательностях $\{U_n(P, Q)\}$ и $\{V_n(P, Q)\}$ Люка, кратко представленных в первой, а подробнее в третьей главе. Там же даны рекуррентные отношения с начальными членами и соотношения между U_n и V_n, характеристическое уравнение, формулы для дискриминанта, корней уравнения и их степеней, короче, элементарная арифметика последовательностей Люка, которую здесь нет нужды воспроизводить. Обратим внимание лишь на те моменты, которые важны с точки зрения обобщения ТЗС. Прежде всего заметим, что характеристическим уравнением для U_n и V_n является квадратное уравнение типа

$$x^2 - Px + Q = 0, \qquad (4.145)$$

в котором начальными множителями P и Q могут быть как целые числа, так и переменные. В первом случае рекурсия приводит к числовым последовательностям, в частности Фибоначчи, Люка и Пелля, во втором – к полиномам Фибоначчи и Люка. Ясно, что это модель более высокого уровня общности, чем предыдущие; золотой домен и теория семейства констант ϕ_m – частные случаи теории последовательностей Люка, что касается теории семейства констант ϕ_{mk}, в ней нет полиномов и Q равен 1, но в то же время множитель P – не обязательно целое число. По ранее принятой терминологии теорию последовательностей Люка следует обозначить через $T(\phi_{PQ})$ и считать теорией третьего уровня обобщения.

Большинство формул $T(\phi_{PQ})$, как и для двух других обобщений, формально отличаются от формул ТЗС лишь индексами, относящимися к значениям переменных параметров. Заниматься этим поэтому не стоит, лучше обратиться к ранее уже рассмотренной задаче о выделении из бесконечных последовательностей подмножеств констант определённых подсемейств. Тогда из последовательностей, получаемых из уравнения

$$x^2 - px - q = 0 \qquad (4.146)$$

для различных целых значений p и q, были выделены подмножества, связанные с константой $\sqrt{5} = 2\phi - 1$. Теперь же решим задачу в более общем виде, то есть для любого члена последовательностей, получаемых из уравнения (4.145) для различных значений P и Q, при условии, что это целые числа, а дискриминант квадратного уравнения неотрицателен: $D = P^2 - 4Q \geq 0$. Следовательно, в отличие от $T(\phi_m)$ в теории $T(\phi_{PQ})$, при заданном значении P допустимые в области действительных чисел значения свободного множителя ограничены условием

$$-\infty < Q \leq E(P^2/4), \qquad (4.147)$$

где функция $E(x)$ – целая часть числа x.

Отличительным признаком любого числа ϕ_{PQ} является квадратный корень из дискриминанта уравнения (4.145). Так, для золотой константы ($P = 1$, $Q = -1$) это $\sqrt{5} = 2\phi - 1$, для константы да Винчи ($P = 2$, $Q = -1$) это $\sqrt{2} = \phi_2 - 1$, а если, допустим, $P = 11$, $Q = 26$, тогда имеем $\sqrt{17} = 2\phi_{11,26} - 11$. Во всех случаях $\sqrt{D} = 2\phi_{P,Q} - p/2$, так что $\sqrt{D}$ служит достаточно точным ориентиром поиска бесконечных множеств ϕ_{PQ} для заданной пары параметров P и Q. Искомые формулы, которые могут быть получены, например, методом математической индукции, дадим в готовом виде и затем проиллюстрируем на двух примерах. Последовательность, каждый член которой содержит определяемое квадратным уравнением данное значение $\sqrt{D}$, обозначим индексом Q_n, ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$).

a) P – чётное, положительное или отрицательное целое число:

$$Q_n = P^2/4 - Dn^2 \qquad (4.148)$$

корни соответствующих уравнений:

$$P/2 \pm Q_n\sqrt{D} \tag{4.149}$$

b) P – нечётное, положительное или отрицательное целое число:

$$Q_n = \frac{P^2 - D}{4} - Dn(n+1) \tag{4.150}$$

корни соответствующих уравнений:

$$P/2 \pm Q_n\sqrt{D} \tag{4.151}$$

Согласно этим формулам любой член семейства ϕ_{PQ} обобщённой модели $T(\phi_{PQ})$ существует в бесконечном множестве модификаций в бесконечных подмножествах.

Примеры.

1. В уже упомянутом уравнении $x^2 - 11x + 26 = 0$ дискриминант $D = 17$, и теперь хотим убедиться, что для каждого чётного P справедлива формула (4.148). Заметим вначале, что значения Q_n не зависят от знака параметра P и переменной n. Для определённости возьмём $P = 42$. Нетрудно убедиться, что в уравнении

$$x^2 - 42x + Q = 0 \tag{4.152}$$

все корни для $Q > 42^2/4$ – комплексные числа, следовательно, при данном значении P действительные значения Q ограничены областью $-\infty < Q \le 441$. Заставляя n пробегать ряд значений 1, 2, 3, …, получим последовательность

$$Q_n = 424,\ 373,\ 288,\ 169,\ 16,\ -171,\ -392,\ -647,\ -936,\ -1259,\ -1616,\ -2007,\ -2432, ...$$

Подстановка любого из этих значений в (4.148) приводит к уравнению с корнями, содержащими $D = 17$ и определяемыми в соответствии с (4.149).

2. Возьмём теперь какое-то другое уравнение, скажем, $x^2 - 91x + 2013 = 0$, дискриминант которого равен 229, и посмотрим, как обстоит дело в случае уравнения с нечётным значением P, например

$$x^2 - 67x + Q = 0 \tag{4.153}$$

Здесь область действительных значений $-\infty < Q \le 1122$, а искомая последовательность должна определяться формулой (4.150), причём уже в зависимости от знака переменной n. Придавая n значения ±1, ±2, ±3, имеем последовательность, “симметричную” относительно двух наибольших чисел 1065, с разбегающимися от них в обе стороны отрицательными, за исключением двух, числами.

$$Q_n = \ldots, -5805,\ -3515,\ -1683,\ -309,\ 607,\ 1065,\ 1065,\ 607,\ -309,\ -1683,\ -3515,\ -5805, -8553, \ldots$$

Подставив любое из них в последнее уравнение, действительно получим содержащие $\sqrt{229}$ и определяемые по формуле (4.151) корни уравнения.

Экспонента, принцип минимума и иерархия обобщённых моделей

Соотношение между различными типами обобщений, иерархия обсуждаемых моделей станет более ясной и наглядной, если к построению модели посредством экспоненты подойти по-прежнему с использованием принципа минимума, но с несколько иной позиции. Вспомним, что в предлагаемой теорией ЛМФ и взятой в $T(\phi_{mk})$ за исходное экспоненте

$$e^{\operatorname{arsh} z}$$

действительная переменная z, как сказано в разделе 5 первой главы, равна

$$(x^2 - 1)/2x.$$

Вот с этого простого выражения для стоящей под знаком обратного гиперболического синуса переменной и следует “плясать”. Потребуем, чтобы во всей конструкции не было случайных чисел, а значит переменная z, которую теперь обозначим символом C, должна быть значимым числом. Выражение

$$C = \frac{x^2 - 1}{2x} \tag{4.154}$$

приводит к квадратному уравнению

$$x^2 - 2Cx - 1 = 0 \tag{4.155}$$

с корнями

$$x_{1,2} = C \pm \sqrt{C^2 + 1} \tag{4.156}$$

причём без знаменателя.

Исключая тривиальный случай $C = 0$, используем при анализе квадратного уравнения и его корней в качестве селективного принципа идею минимизации формальной структуры. Простейшими в области целых чисел и рациональных дробей m/k (m и k – натуральные числа) естественно считать уравнения и их решения, соответствующие значениям $2C = 1$ и $C = 1$.

Таблица
Квадратные уравнения и их корни для значений $2C = 1$ и $C = 1$

Переменная	**Квадратное уравнение**	**Корни уравнения**
$\boldsymbol{2C = 1}$	$x^2 - x - 1 = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \phi, x_2 = -\phi^{-1}$
$\boldsymbol{C = 1}$	$x^2 - 2x - 1 = 0$	$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, $x_1 = \phi_2, x_2 = -\phi_2^{-1}$
$\boldsymbol{2C = m}$	$x^2 - mx - 1 = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$
$\boldsymbol{C = m}$	$x^2 - 2mx - 1 = 0$	$x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 + 1}$
$\boldsymbol{2C = m/k}$	$x^2 - m/k \cdot x - 1 = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 + 4k^2}}{2k}$
$\boldsymbol{C = m/k}$	$x^2 - 2m/k \cdot x - 1 = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 + k^2}}{k}$

Как видим, формальный анализ экспоненты определённого типа, минимизирующий допустимые значения её переменной, приводит к золотой константе, константе да Винчи и их уравнениям, как выделенным при данном рассмотрении конструктам, а также к семействам констант ϕ_m и ϕ_{mk}. Очевидно, что вариант $C = m/k$, являющийся частным случаем экспоненты (4.43′) $\phi_{mk} = e^{\pm \operatorname{arsh}(m/k)}$, содержит в себе все остальные, представленные в таблице случаи, которые могут быть получены соответствующим подбором значений m и k. Другими словами, золотая константа с её уравнением, семейство ϕ_m с константой да Винчи являются частными случаями семейства ϕ_{mk}.

Обозначены также пределы экспоненциального обобщения ТЗС: в соответствующем экспоненте $e^{\operatorname{arsh}(m/k)}$ квадратном трёхчлене $x^2 - px - q$ множитель p может быть произвольным рациональным числом, а вот свободный член q равен 1. Это ограничение как раз и снимается в теории последовательностей Люка, где q не обязательно равен единице, хотя, с другой стороны, множитель p не выражается в ней рациональной дробью. Обобщение посредством последовательностей Люка можно поэтому считать более высоким уровнем обобщения, чем экспоненциальное, поскольку начинает "работать" свободный член, но вместе с тем второе не является частным случаем первого. С методологической точки зрения можно сказать, что соотношение между двумя моделями объяснимо скорее *принципом дополнительности*, а не требующим строгой иерархической вертикали *принципом соответствия*.

13. Итоги

Характерной особенностью математических и естественнонаучных теорий и моделей является простота оснований и возрастающая сложность построений и конструкций по мере удаления от корневой структуры. Связанные с ЗС модели исключения не составляют. Уже золотой домен, который в первом приближении можно назвать теорией константы ϕ, включает (как это видно из перечисленных в разделе 2 определений, геометрических и теоретико-числовых элементов) непростой математический аппарат, который затем, естественно, усложняется с каждым последующим обобщением. Математические структуры, обозначенные выше как $T(\phi_m)$, $T(\phi_{mk})$ и $T(\phi_{PQ})$, безусловно могут претендовать на роль *обобщённых теорий золотой пропорции* (ОТЗС). Однако, это, возможно, режет слух и звучит несколько претенциозно, поэтому, не отказывая данным структурам в законном праве на подобное именование, мы всё же предпочитаем говорить о теориях, а ещё лучше о моделях, определённого типа, о семействах числовых величин, сохраняющих формальную связь с константой ϕ.

Дело, впрочем, не в названиях, а в безусловной соотнесённости всех этих моделей с ЗС, золотой константой, рядами Фибоначчи и Люка. Ведь в основе $T(\phi_m)$ лежит закон сохранения, основанный на родовом признаке ЗС –

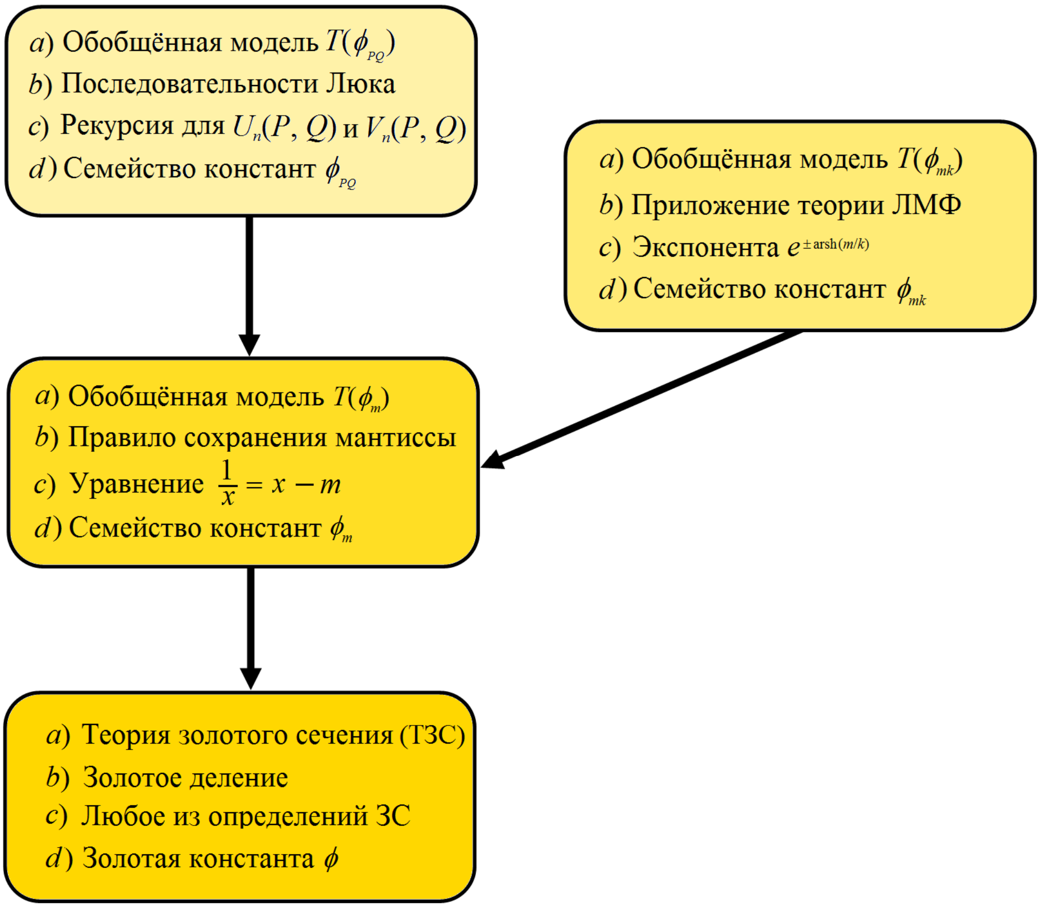
правиле сохранения мантиссы; $T(\phi_{mk})$ основана на экспоненциальной форме представления ϕ, являющейся следствием фундаментальной теории ЛМФ; $T(\phi_{PQ})$ исходит из последовательности Люка, частным случаем которой являются числа и полиномы Фибоначчи и Люка. Но можно, по идее, не останавливаться и на этом, используя в качестве первоначала более общий тип квадратного уравнения, или даже уравнений более высоких степеней, более сложный тип экспоненты с комплексным показателем степени, рекуррентные последовательности, строящиеся по правилу не третьего, а четвёртого, пятого, n-го члена, или вообще нелинейные рекурсии и тому подобное. Пределы возможных обобщений трудно даже обозначить, но здесь уже встают вопросы методологического характера и мировоззренческой значимости, которые неизбежны всегда, когда дело доходит до оснований теории.

Для некоторых математика – нечто вроде интеллектуального спорта, увлекательной игры с символами по особым правилам, которые опытный игрок может дополнять и усложнять по своему усмотрению. При таком понимании математика самодостаточна и во внешнем оправдании нисколько не нуждается. Для других математика – зашифрованная в числах и формальных структурах книга природы, чтение которой доступно немногим. Книга с трудно поддающимися толкованию текстами, с множеством изящных, но бесполезных фрагментов, и обычно очень непросто определить, где в ней *то самое*, а где воздушный замок из абстракций, или *игра в бисер*. Не секрет, что только небольшая часть математического аппарата находит применение на практике и один из самых, наверное, интригующих моментов познания состоит в совершенно неожиданном, никем ранее не угаданном использовании абстрактных построений за пределами математики. Одни могут сказать, что это мало о чём говорит: форма наполняется каким-то необязательным содержанием, в “сосуд” вливается какая-то “жидкость”, вот и всё. Другие воспримут такое применение математического формализма как свидетельство универсальности языка “царицы наук”. Третьи увидят здесь частное проявление мировой гармонии, которая по замыслу является гармонией математической.

В относительно развитой форме идея математической гармонии мира впервые была высказана пифагорейцами и с тех пор занимает умы, может, и немногих, но наиболее ярких представителей науки. Об этом сказано достаточно в первой главе, сейчас же заметим, что вера в *математику гармонии* как объективную *гармонию мироздания*, см. [С[10, 13]], является, быть может, основным стимулом для исследований в области ЗС, включая её возможные обобщения. Если поставлена высокая цель, хотя бы и труднодостижимая, её обязательно попытаются реализовать, или по крайней мере приблизиться к ней. Золотое сечение, несмотря на всю свою формальную простоту и кажущуюся теоретическую незамысловатость, а может, и наоборот – именно благодаря этому, привлекательное начало для подобных исследований. Мы видим, что цепочка последовательных обобщений посредством моделей, соединяемых методологическим принципом соответствия и генетической связью с исходной константой ϕ, ведёт к достаточно сложным разделам математики. Сюда относятся алгебраические уравнения степени n, линейные и нелинейные рекуррентные соотношения высокой степени и необязательно с действительными множителями, экспонента и логарифм с действительными и комплексными переменными, производные от них прямые и обратные тригонометрические и гиперболические функции, интегралы, бесконечные ряды и произведения, матрицы, дифференциальные уравнения и так далее. С таким математическим арсеналом можно, пожалуй, решать задачи высокой степени сложности, если, конечно, знать, что и как делать.

Но насколько, спрашивается, правомерно заходить так далеко по пути обобщений, не теряется ли при этом реальная связь с золотым сечением? Она, безусловно, сохраняется для моделей $T(\phi_m)$, $T(\phi_{mk})$ и $T(\phi_{PQ})$, по-разному, но непосредственно соотносимых с константой ϕ, рядами Фибоначчи и Люка. Такая связь сохранится и в случае отказа в последовательностях Люка от целочисленности начальных значений параметров P и Q. Шаг за шагом заменяя в соответствующем уравнении (4.145) множители P и Q рациональными, иррациональными, мнимыми и наконец комплексными числами, мы, по принятой выше классификации, будем каждый раз повышать на единицу уровень обобщённости модели Люка $T(\phi_{PQ})$, оставаясь при этом в рамках квадратного уравнения и линейной рекурсии. Научный опыт подсказывает, что без комплексных чисел даже относительно простые математические проблемы, как правило, не решаются. Об этом можно судить и по формализму самой теории ЗС, в которой экспоненциальные, в частности элементарные гиперболические и тригонометрические функции играют весьма заметную роль. Видимо, именно здесь, на уровне комплексных начальных членов в рекуррентных формулах для последовательностей Люка и надо остановиться, если желаем сохранить хотя бы тонкую “пуповину”, связывающую обобщённую модель с изначальной теорией.

Связь между ТЗС и его обобщениями, с указанием в каждом отдельном случае названий, основных постулатов, формальной основы и констант теории схематически представлена ниже. Очевидно, что с повышением уровня обобщения уменьшается *золотое содержание* теории по сравнению с изначально заданным *золотым стандартом*. Вместе с тем, исчезает и характерная для ТЗС некоторая неоднозначность в выборе исходных положений, обозначенных на схеме пунктами *b*) и *c*). Наиболее знаковыми (в любом смысле слова) элементами любой из четырёх моделей могут считаться их фундаментальные константы, причем в ТЗС константа только одна, а в остальных моделях имеем бесконечные семейства числовых величин, из которых по-настоящему значимы лишь самые первые. Поскольку все эти ряды неизменно начинаются с константы ϕ, тем самым определяется её особый статус при любом обобщении.



Связь между ТЗС и тремя уровнями её обобщения

Второй же по теоретической и практической значимости является константа да Винчи, отличающаяся от $\sqrt{2}$ лишь единицей, но с целым “букетом” не присущих постоянной Пифагора формальных свойств. По большому счёту, с точки зрения формальных преимуществ и математической гармонии мира, ПЗС является, как неоднократно отмечалось, проявлением универсального принципа минимума, оптимума, наименьшего действия, которым обусловлена стабильность различных систем и природных явлений, соразмерность и согласованность их компонентов.