Глава 7.
С XVII века до начала XX века

1. Адольф Цейзинг

В европейской науке после феерических трудов Кеплера другие наступили времена (Галилей, Ньютон, Лейбниц, классическая механика с использованием дифференциального и интегрального исчисления, теоретическое естествознание, экспериментальная наука и т. д.). Интерес к ЗС резко упал и, возможно, поэтому Мартин Ом понизил *Божественную пропорцию* до более скромного и ставшего впоследствии более употребительным названия *Goldener Schnitt* (*Goldene Schnitt* – у Цейзинга). Золото вместо Бога, сечение вместо пропорции, если же говорить о достойных упоминания событиях, весь продолжительный период относительного забвения божественно-золотой пропорции-сечения отмечен связанной с именем французского математика Жака Бине (Jacques Philippe Marie Binet, 1786 – 1856) формулой аналитической зависимости между числами Фибоначчи и степенями золотой константы. Сюда можно также добавить обнаружение швейцарским философом и учёным Шарлем Бонне (Charles Bonnet, 1720 – 1793) чисел Фибоначчи в спиралях филлотаксиса – листорасположения, закрученных как по часовой, так и против часовой стрелки.

Но, как нередко бывает, штиль – предвестник бури, и она грянула в форме книги Адольфа Цейзинга *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*, изданной в 1854 г. Это многостраничный хвалебный гимн золотому сечению, с философскими рассуждениями и основанными на многочисленных измерениях расчётами, отражёнными во множестве таблиц и рисунков. Перестав быть божественным, принцип золотого сечения стал рассматриваться Цейзингом как универсальное по природе, практически неограниченное по широте охвата эстетическое начало:

Для того чтобы целое, разделённое на две неравные части, казалось прекрасным с точки зрения формы, между большой и меньшей частями должно быть то же отношение, что и между большей частью и целым (*Эстетические исследования*, 1855; взято из [Гика, 19]).

В *Proportionen* … собран богатый материал, призванный подтвердить *Goldne Schnitt* в качестве всеобщего закона пропорциональности. Одно только перечисление, очевидно неполное, областей природы и искусства, подпадающих по Цейзингу под действие принципа ЗС либо в форме последовательности Фибоначчи, либо непосредственно как деление в крайнем и среднем отношении, о многом скажет. Это мужские и женские фигуры, животные, птичьи яйца, растения, греческие статуи, архитектурные сооружения разных эпох, планеты и астероиды, геометрические фигуры, платоновы тела и другие многогранники, минералы, звуковые аккорды, стихотворные размеры… Словом, всеобъемлющий закон пропорции, где на первом месте всё же человеческое тело. Цейзинг, по словам Тимердинга (Heinrich Carl Franz Emil Timerding, 1873 – 1945), "высказывает руководяшую основную мысль, что построение частей в отношении золотого сечения есть"

Вообще основной принцип всякого созидания, стремящегося к красоте и цельности, как в царстве природы, так и в области искусства. Оно изначально представлялось высшей целью и идеалом всякого образования форм и отношений, как космических, так и индивидуальных, как органических, так и неорганических, как звуковых, так и световых, но лишь в человеческом теле нашло своё полнейшее осуществление (цитата из [Zeising] по [Тимердинг, 69]).

В числовом анализе скелета человека, Аполлона Бельведерского (работы Леохара), Антиноя Фарнезского, Венеры Милосской (Агесандр), Афродиты Книдской (Пракситель) [Zeising, 178, 279, 282, 284, 288] и других, не представленных здесь античных скульптур пупок неизменно делит фигуру в золотой пропорции. Целые числа в столбиках, одинаковые во всех случаях, равны числам Фибоначчи от восьмого до двенадцатого, либо отличаются от них на единицу. Эти же числа получаются при рассмотрении и отдельных частей фигуры. Из рисунков, например Аполлона, видно, что расстояние от макушки до верхнего конца лба выражается 8-м членом последовательности Фибоначчи – числом 21, и тогда параметры отдельных частей тела таковы: от макушки до плеч 144 (F_{12}), от плеч до пупка 233 (F_{13}), от пупка до колена 380 ($F_{14} + 3$), голень 233 (F_{13}); общая длина тела 990 ($F_{16} + 3$).


Neue Lehre
von den
Proportionen des menschlichen Körpers,
aus einem bisher unerkannt gebliebenen,
die ganze Natur und Kunst durchdringenden
morphologischen Grundgesetze
entwickelt
und
mit einer vollständigen historischen Uebersicht der bisherigen Systeme
begleitet
von
Professor Dr. A. Zeising.

Mit 177 in den Text gedruckten Holzschnitten.

LEIPZIG,
RUDOLPH WEIGEL.
1854.

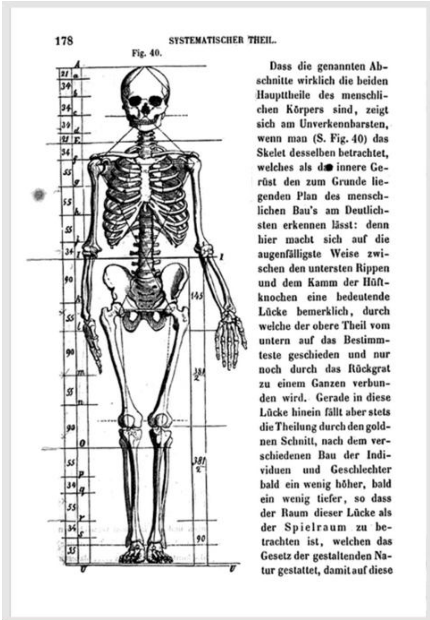
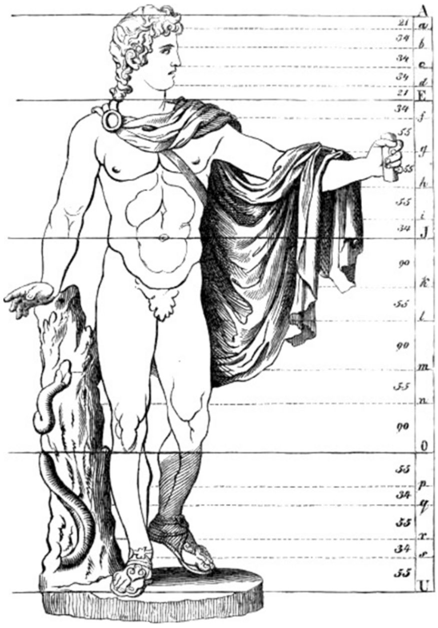
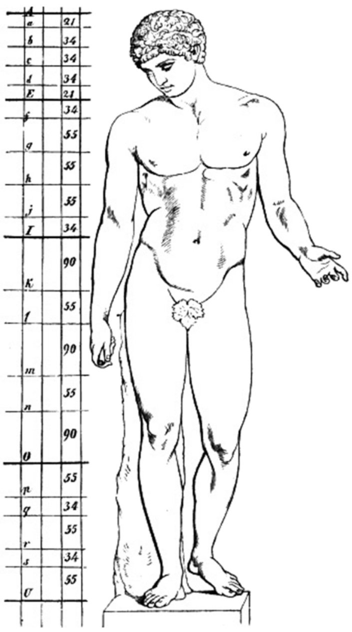
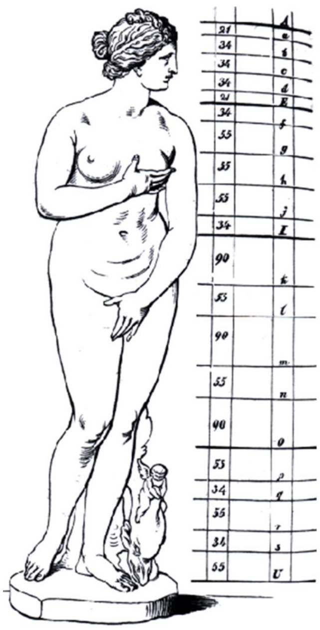
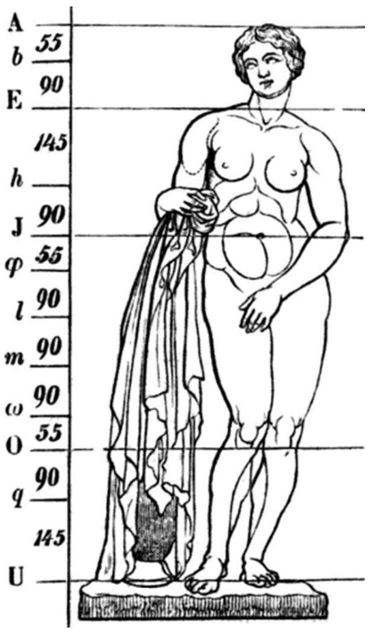

178 SYSTEMATISCHER THEIL.

Fig. 40.

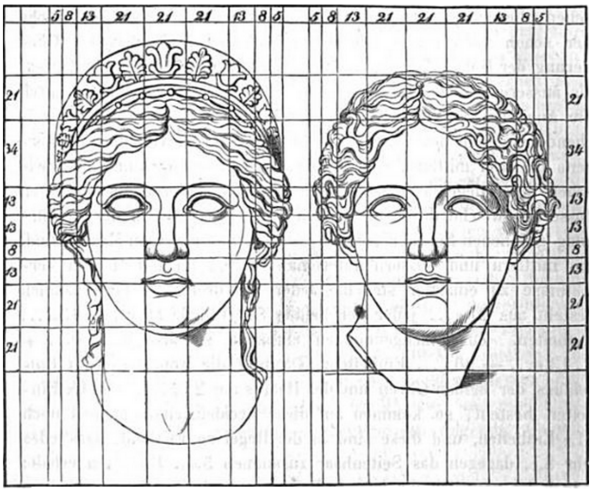
Dass die genannten Abschnitte wirklich die beiden Hauptheile des menschlichen Körpers sind, zeigt sich am Unverkennbarsten, wenn man (S. Fig. 40) das Skelet desselben betrachtet, welches als das innere Gerüst den zum Grunde liegenden Plan des menschlichen Bau's am Deutlichsten erkennen lässt: denn hier macht sich auf die augenfälligste Weise zwischen den untersten Rippen und dem Kamm der Hüftknochen eine bedeutende Lücke bemerklich, durch welche der obere Theil vom untern auf das Bestimmteste geschieden und nur noch durch das Rückgrat zu einem Ganzen verbunden wird. Gerade in diese Lücke hinein fällt aber stets die Theilung durch den goldnen Schnitt, nach dem verschiedenen Bau der Individuen und Geschlechter bald ein wenig höher, bald ein wenig tiefer, so dass der Raum dieser Lücke als der Spielraum zu betrachten ist, welchen das Gesetz der gestaltenden Natur gestattet, damit auf diese



Книга Цейзинга, числовой анализ скелета и Аполлона Бельведерского

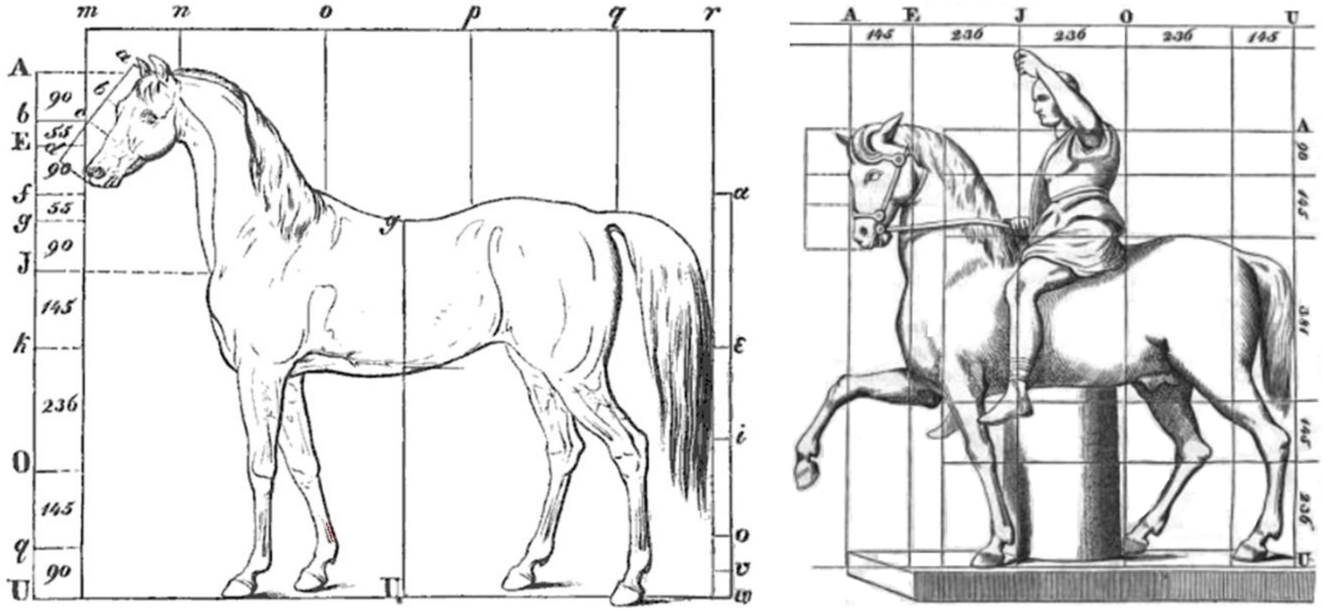




Антиной, Венера Милосская и Афродита Книдская

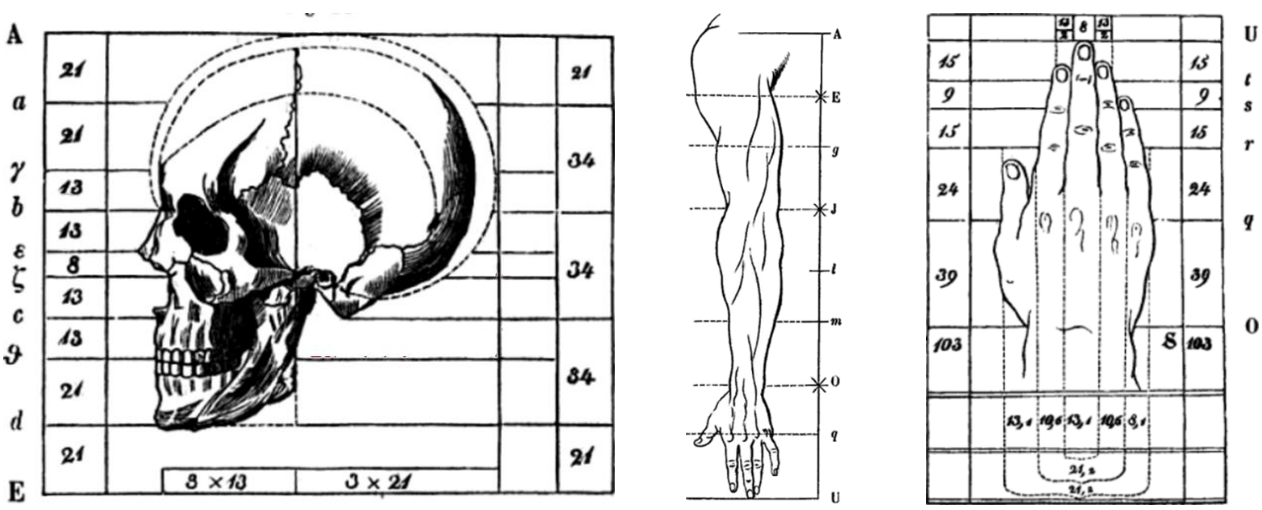
Голова статуи Антонии Младшей и её числовой анализ по Цейзингу

Числами Фибоначчи 5, 8, 13, 21, 34 определяется числовой портрет головы огромной статуи I в. н.э. Антонии Младшей, сестры Марка Антония и Октавии Младшей, в виде богини Юноны, известной как *Юнона Людовизи* (или *Гера Людовизи*). Для сравнения приводим рисунок головы Антонии из палаццо Альтемпс Национального музея Рима, где представлена коллекция античных скульптур семьи Людовизи [Juno Ludovisi]. Перед нами замечательное скульптурное произведение, с явной идеализацией реального женского прототипа в соответствии с канонами красоты греко-римского искусства. А насколько убедителен и точен Фибоначчи-анализ головы Антонии-Юноны, предоставляем судить читателю.



Лошадь и всадник (Марк Ноний Балбус)

Несколько хуже, но в целом тоже неплохо, обстоят дела в случае лошади и античной скульптуры всадника (римский наместник Марк Ноний Балбус) [Там же, 384, 385]. В выбранных масштабах у лошади 996 по вертикали и 998 по горизонтали; у всадника соответственно 997 и 998. Подняв слегка руку над головой, Марк Балбус со своим конём вписывается в квадрат, а у некоторых прямоугольников на рисунке отношение длин сторон близко к ϕ, ϕ^2, ϕ^3, ϕ^4 и ϕ^5.

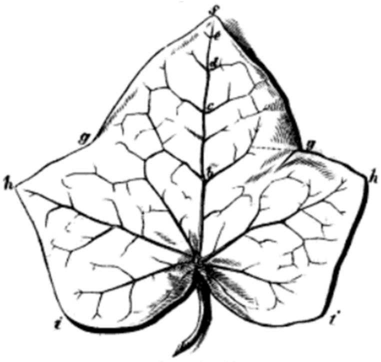


Голова человека, рука и кисть руки

По Цейзингу хороший человеческий череп в профиль, что спереди, что сзади или по горизонтали, поистине золотой: кроме чисел Фибоначчи других чисел здесь нет [Там же, 192]. Интересно, что в этом и предыдущих примерах, как и во всей книге, золотая константа явно не присутствует. Но она фактически используется при анализе руки, когда приводится геометрическая прогрессия со знаменателем как раз равным константе ϕ. На рисунках членам прогрессии в порядке возрастания соответствуют отрезки кисти Ut, Us, Ur, UO, далее по руке отрезки Um, UJ и UA. Делением же чисел левого столбца на три получаются в правом столбце значения, близкие к числам от F_5 до F_{12} [Там же, 201–203].

437,6941017	=	3	mal	145,8980339
270,5098305	=	3	"	90,1699435
167,1842712	=	3	"	55,7280904
103,3255593	=	3	"	34,4418531
63,8587119	=	3	"	21,2862373
39,4668474	=	3	"	13,1556158
24,3918645	=	3	"	8,1306215
15,0749829	=	3	"	5,0249943

Помимо чисел Фибоначчи и указанной прогрессии принцип золотого сечения неоднократно используется Цейзингом и через традиционное деление в крайнем и среднем отношении, что хорошо видно на примере листа и бутона цветка [Там же, 355–356].



fe : ed : fd
ed : dc : ec
dc : cb : db
cb : ba : ca.

ab : *bc* = *bc* : *ac*
ec : *cb* = *cb* : *ec*
cd : *de* = *de* : *ce*

Деление листа и бутона цветка в крайнем и среднем отношении

Эмпирические данные по орбитам планет Солнечной системы в золотую последовательность укладываются хуже, чем в остальных наборах. Обращает на себя внимание включение в список планет пояса астероидов, являющегося, по предположениям, осколком некогда существовавшей между Марсом и Юпитером планеты, а также вопросительный знак на том месте, где должно стоять десятое по удалённости от солнца небесное тело. Малая планета Плутон, масса которой составляет лишь 0,2% от массы Земли и более чем в пять раз меньше массы Луны, действительно была обнаружена в 1930 г. Однако Пифагорейская идея о десяти планетах Солнечной системы, высмеянная ещё Аристотелем (др.-греч. Ἀριστοτέλης, 384–322 до н.э.) [Аристотель, 239a], даже в таком варианте не реализуется, поскольку в последнее десятилетие в малоисследованной области за Нептуном обнаружены и другие карликовые планеты, называемые транснептуновыми объектами.

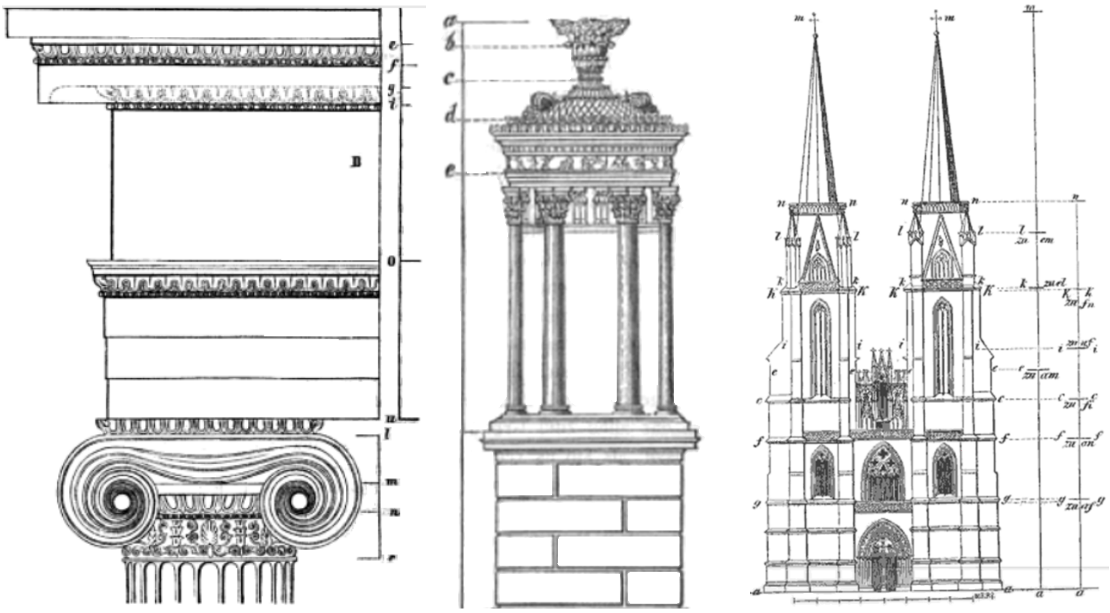
VERHÄLTNISSE DES PLANETENSYSTEMS. 327

wie sich dieselben nach unserem Gesetz verhalten, werden wir am Besten thun, wenn wir die von der Astronomie hierüber festgestellten Zahlenbestimmungen mit den Proportionalzahlen unseres Systems einfach neben einander stellen. Dadurch erhalten wir folgende Uebersicht:

	Geringster Abstand.	Grösst. Abst.	Mittl. Abst.	Proportionalzahl
1) Merkur:	6,400000.	9,700000.	8 Mill.	8.
2) Venus:	14,900000.	15,100000.	15 "	13.
3) Erde:	20,500000.	21,100000.	21 "	21.
4) Mars:	28,800000.	34,700000.	32 "	34.
5) Asteroiden:	41,000000.	69,000000.	55 "	55.
6) Jupiter:	103,200000.	113,700000.	108 "	90.
7) Saturn:	187,700000.	210,200000.	196 "	145.
8) Uranus:	380,200000.	415,700000.	395 "	236.
9) Neptun:	. . . . .	. . . . .	626 "	381.
10) ?	. . . . .	. . . . .	. . .	618.

Числовой анализ орбит планет Солнечной системы по Цейзингу

Минуя другие примеры, покажем без комментариев образцы *золотой* античной и средневековой архитектуры. Скажем только, что спираль ионийского ордера античной капители близка к логарифмической, а католический храм – это церковь святой Елизаветы Венгерской в Марбурге, возведённая в конце XIII – начале XIV века [Zeising, 398, 401, 407].



Античная капитель и средневековый собор

Книга Цейзинга – фактически вторая в истории, после трактата Пачоли, капитальная работа, целиком посвящённая золотой пропорции. Если с именем францисканского монаха и математика Луки Пачоли связана её сакрализация, то с именем интересующегося математикой и философией психолога Адольфа Цейзинга связана её универсализация. При всей преувеличенности понимания ЗС как всеобщего закона пропорциональности и спорности результатов отдельных исследований, роль этой книги в истории ЗС исключительно велика. Не потеряла она своего значения и сегодня. Даже при беглом её просмотре и сравнении с современными работами, особенно популярными, и за исключением чисто математических исследований, создаётся впечатление, что значительная их часть это в какой-то мере переложение книги Цейзинга, нечто вроде научных “римейков”. Огромное количество охватывающих различные области знания измерения с их последующей статистической обработкой способствовали шумному успеху книги, выходу принципа золотого сечения из “мёртвой зоны”. Начался продолжительностью в сто с лишним лет *серебряный век* золотого сечения.

После, где-то с 60-х годов прошлого столетия наступил продолжающийся и поныне *век золотой*, если под этим понимать огромный интерес широких кругов научной, но больше околонаучной, а ещё больше ненаучной общественности к золотому сечению и “вокруг него”. Здесь можно найти работы на любой вкус: серьёзные исследования преимущественно математического характера, популярные и не всегда соответствующие историческим фактам переизложения золотой классики, опусы любительского уровня, сомнительные спекуляции самого разного толка, мистико-эзотерическую чепуху. Возникли и полюса: армия адептов с доходящей до умоисступления восторженностью и кучка твердокаменных хулителей, а между ними легионы умеренных сторонников и сердитых критиков, предостерегающих публику от чрезмерного легковерия. В стремлении к объективности полярные точки зрения обычно надо отсекать. Излишняя экзальтированность фактически огрубляет и дискредитирует идею, а железобетонный скепсис пытается её уничтожить как лженауку. Но это уже тема отдельного большого исследования с продолжением, поэтому серебряным веком мы и ограничимся, а с золотым веком можно ознакомиться из работ последних десятилетий, указанных в первой главе источников, включая нашу книгу [A15] и капитальную монографию [Stakhov].

2. Густав Фехнер

Если, имея в виду количество работ и их значимость, античный период истории ЗС можно условно назвать греко-римским, средневековый и Нового времени – итало-немецким, а современный – англо-русским, то период, непосредственно предшествующий Серебряному веку, и его первую половину можно назвать франко-немецким (Ж. Бине, М. Ом, А. Цейзинг, Г. Фехнер, Э. Люка, Ф. Клейн). Центральной фигурой этого периода, по крайней мере по уровню общественного резонанса, является, как указывалось, Адольф Цейзинг с его пониманием ЗС как универсальной пропорции, основного морфологического закона природы и искусства. Под такое понимание, с помощью всевозможных измерений и применяя методы экспериментальной психологии, попытался подвести психофизическую основу другой немецкий психолог – Густав Фехнер (Gustav

Theodor Fechner, 1801–1887). Измерялись картинные рамы, книги, окна, игральные карты, другие предметы прямоугольной формы, измерялись даже могильные кресты и каждый раз статистически обнаруживалась близость отношений измеряемых длин сторон к золотой пропорции. По словам автора популярной до сих пор книги:

Форматам книг, известным картинам, входным билетам, бумажникам, аспидным доскам, сундукам, ящикам, шкатулкам, шоколадным плиткам, пряникам и всевозможным другим предметам, частью сознательно, частью бессознательно, придаётся форма согласно основному принципу золотого сечения [Тимердинг, 70].

Но этого ещё явно недостаточно, чтобы говорить о некой предрасположенности к ЗС, нужны специальные исследования, начало которым положил Густав Фехнер.

Людям разного возраста и пола (228 мужчин и 119 женщин) он показывал десять прямоугольников с отношением длин сторон

5/2, 1/1, 6/5, 2/1, 5/4, 4/3, 29/20, 23/13, 3/2, 34/21

(в порядке приближения к числу ϕ) и предлагал выбрать прямоугольник, который удовлетворяет их в наибольшей степени и который их в наибольшей степени не удовлетворяет [Fechner]. Добрая треть испытуемых высказалась в пользу прямоугольника золотого сечения (34/21), 20 и 19 процентов – в пользу ближайших его соседей (3/2, 23/13), а из оставшихся семи прямоугольников ни один больше 10% голосов не набрал. Результаты представлены в таблице со следующими обозначениями: О – отношение сторон, Ч – число благоприятных отзывов, ч – число неблагоприятных отзывов, м. – лица мужского пола, ж. – лица женского пола, см. [Тимердинг, 89]. Таким образом, результаты опыта оказались статистически благоприятными для золотого сечения, причём никто из испытуемых неблагоприятного отзыва о прямоугольнике золотого сечения не дал. Оппоненты пробуют объяснить такое предпочтение не столько “внутренним влечением” к золотому сечению, сколько “привычкой” и “рассудочными соображениями”, тем более что результаты такого же теста, проведённого среди детей, показали совсем другое. Если поэтому судить по опытам Фехнера со взрослыми и детьми, предрасположенность к золотому сечению проявляется не сразу, а лишь в определённом возрасте.

О	*Ч*		*ч*		*Ч* в процентах	
	м.	*ж.*	*м.*	*ж.*	*м.*	*ж.*
$\frac{1}{1}$	6,25	4,0	36,67	31,5	2,74	3,26
$\frac{6}{5}$	0,5	0,33	28,8	19,5	0,22	0,27
$\frac{5}{4}$	7,0	0,0	14,5	8,5	3,07	0,00
$\frac{3}{4}$	4,5	4,0	5,0	1,0	1,97	3,66
$\frac{29}{20}$	13,33	13,5	2,0	1,0	5,85	11,35
$\frac{3}{2}$	50,91	20,5	1,0	0,0	22,33	17,22
$\frac{34}{21}$	78,66	42,65	0,0	0,0	34,50	35,83
$\frac{23}{13}$	49,33	20,21	1,0	1,0	21,64	16,99
$\frac{2}{1}$	14,25	11,83	3,83	2,25	6,25	9,94
$\frac{5}{2}$	3,25	2,0	57,21	30,25	1,43	1,68
	228	119	150	95	100,00	100,00

Таблица результатов опроса, полученных Фехнером для прямоугольников с различным отношением длин сторон

Кроме опытов с прямоугольниками, Фехнер проводил аналогичные тесты с девятью эллипсами, для которых отношение длины большой оси к малой менялось в пределах от 5/2 до 1. Результаты тестов, опубликованные лишь много лет спустя [Witmer], оказались не очень благоприятными для золотой пропорции, поскольку 42% испытуемых отдали предпочтение эллипсам с отношением 3/2 : 1, а близкий к золотому эллипс оказался лишь на втором месте – 16,7%. Кроме того, Фехнер исследовал 20 000 картин известных мастеров из 22 музеев на соответствие золотому сечению отношения высоты картины к ширине. Результаты были не в пользу ЗС и на этот раз, поскольку выявилось тяготение к отношению 5 : 4 для вертикальных и 3 : 4 для горизонтальных картин.

Тем самым исконность человеческой предрасположенности к золотому сечению ставится под сомнение. Критика полученной Фехнером золотой статистики может быть безжалостной:

…**Вследствие того, что это отношение потом было избрано нормой для бесчисленного множества употребляемых форм, … оно, в конце концов, так утвердилось в представлении, что даже бессознательный выбор отношения размеров тоже тяготеет к нему.**

Проще говоря, дело в привычке, хотя сжигать за собой мосты тем не менее не стоит:

Но уверенности в этом вопросе во всяком случае очень трудно достигнуть. Мы должны всё же считаться с возможностью того, что тяготение к золотому сечению происходит благодаря внутренней склонности [Там же, 91, 92].

Витая в высоких эмпиреях, можно, конечно, говорить о том, что человек, “венец природы”, не только пропорциями своего тела, включая и мелкие детали, но и особенностями мозга, отражаемыми в его чувственном восприятии окружающего мира, повторяет природу, органически вписываясь в общую картину мира как один из носителей универсальной гармонии. Однако ни опыты Фехнера, ни множество аналогичных опытов, поставленных уже много позже и по постоянно усовершенствуемой методике, не дают серьёзных оснований для подобных умозаключений. Результаты, полученные различными исследовательскими группами, весьма противоречивы, а порой и диаметрально противоположны, см. [A[1], Гл. 6, *п.* 6.3], так что поставленный Фехнером вопрос об изначальной природной склонности человека к золотому сечению следует считать открытым и трудноразрешимым методами статистического анализа данных и экспериментальной психологии.

3. Филлотаксис

То, что с достаточной степенью убедительности не получилось в области человеческой психологии, неплохо удалось для растений. Филлотаксис, или листорасположение, относится к числу тех удивительных природных явлений, где действие принципа золотого сечения в виде универсального закона оптимума наиболее наглядно и убедительно. Это тем более важно, что применение математического анализа к явлениям природы очень часто наталкивается на серьёзные трудности, связанные прежде всего со сложностью, многофакторностью самих явлений, не подпадающих под действие лишь одного метода или алгоритма и требующих для своего адекватного описания введения различных эмпирических параметров.

В списке природных явлений, объяснимых посредством ПЗС, филлотаксис занимает одно из первых мест, если не первое. Интерес к этой теме неизменно высок, о чём свидетельствуют сотни посвящённых ей публикаций, не говоря уже о том, что трудно представить работу по ЗС, в которой филлотаксис хотя бы не упомянут. Достаточно солиден и список авторов (до начала 70-х годов прошлого века), в работах которых проблема филлотаксиса в той или иной степени затронута. Лучше поэтому отослать читателя к специальной литературе, например к тезисному изложению исторических фактов в [A Brief History of Phyllotaxis] и более полному их представлению в [Adler, Barabe and Jean]. Здесь мы ограничимся простым перечислением наиболее часто упоминаемых имён, выдержками из двух известных работ и краткими комментариями.

В последней из указанных работ, одним из авторов которой является известный исследователь филлотаксиса (Адлер; Irving Adler, 1913–2012), предлагается разбить историю изучения этого явления на три периода: первый – с древнейших времён до XIV века, второй – с XIV в. до 1970 г. и третий – с 70-х годов прошлого столетия до наших дней. Такая периодизация совпадает с хронологическими рамками рассмотрения истории ЗС, принятыми в настоящей работе, поэтому нас это вполне устраивает.

Как всегда, под подозрением “в зачинательстве” древний мир, прежде всего Египет, и как обычно не хватает достоверных свидетельств, поэтому, как и во множестве других случаев, историю исследования филлотаксиса приходится начинать с древней Греции и Рима. “Отец ботаники” Теофраст (или Феофраст; Θεόφραστος, 371–287 гг. до н. э.) в *Истории растений* и особенно Плиний Старший (Gaius Plinius Secundus, 23–79 гг. н. э.) в *Естественной истории* затронули вопросы, касающиеся некоторых особенностей расположения листьев на ветке, в том числе и их упорядоченности, что даёт право современным исследователям филлотаксиса считать их своими предтечами. Второй период связан с именами Леонардо да Винчи, Иоганна Кеплера, ранее уже упомянутого Шарля Бонне, который впервые обнаружил числа Фибоначчи в закрученных по часовой и против часовой стрелки спиралях растений, также с работами менее известных авторов Карла Шимпера (Karl Friedrich Schimper, 1803–1867), Александра Брауна (Alexander Carl Heinrich Braun, 1805–1877) и многих других (см. источники в указ. работах, а также в [Бекетов]). А наибольший вклад видимо всё же внесли французский физик и кристаллограф Огюст Браве (Auguste Bravais, 1811–1863) со своим братом Луи (Louis) и Вильгельм Гофмейстер (Friedrich Wilhelm Benedikt Hofmeister, 1824–1877). В опубликованной в 1837 г. книге братьев Браве *Опыты о спиральном расположении листьев* начато серьёзное исследования филлотаксиса, включающее математическое описание с применением решётки на цилиндре, теоретический анализ и экспериментальные наблюдения. Анализ и математическое обоснование явления проведены в 1868 г. немецким ботаником Вильгельмом Гофмейстером, который, как считают [Kaplan, Cooke], настолько опередил своё время, что был непонятен современникам и недостаточно оценен, хотя как учёный может быть поставлен рядом с Чарльзом Дарвином (Charles Robert Darwin, 1809–1882) и Грегором Менделем (Gregor Johann Mendel, 1822–1884).

В качестве характерного для второго из указанных периодов уровня понимания проблемы листорасположения приведём полностью, с крайне незначительными изменениями, небольшой отрывок из раздела *Ботаника* в академическом издании [Леонардо да Винчи, 860–862]. Это фактически антология исследований Леонардо по данной теме, составленная на основе его *Записной книжки* (Париж, прибл. 1510/16 гг.) и *Трактата о живописи* (составлен из записей Леонардо в XVI в.).

О расположении листьев

Об образовании разветвлений у растений. Образование разветвлений у растений на главных их ветках такое же, как и образование листьев на стеблях того же года. Листья четырьмя способами располагаются одни над другими. Первый способ, наиболее распространённый: шестой лист, считая вверх, располагается над шестым, считая вниз. Второй – когда два третьих листа, считая вверх, располагаются над двумя третьими, считая вниз. Третий способ – когда третий лист, считая вверх, располагается над третьим, считая вниз.

Четвёртый – сосна, которая образует ярусы (fa a palchi).

Во всех разветвлениях деревьев шестой лист, считая вверх, вырастает над шестым, считая вниз. То же самое бывает у лоз, тростников, каковы виноградная лоза, ежевика (prùno), терновник (mora) и т.д., за исключением белой матицы (vitalba) и жасмина, у которого листья посажены попарно один над другим, крест-накрест.

О рождении листьев на ветвях. Толщина любой ветви от листа к листу всегда уменьшается лишь на толщину глазка, находящегося над листом, и этой толщины недостаёт тому последующему участку ветви, который продолжается до следующего листа.

Природа во многих растениях расположила листья крайних ветвей так, что шестой лист всегда находится над первым, и так далее, в той же последовательности, если правилу этому не встречается препятствий. И сделала она это к двойной выгоде растений. Первая выгода заключается в том, что при произрастании на следующий год новой ветви или плода из почки (gemella) или глазка, непосредственно прилегающего сверху к месту прикрепления листа, вода, омывающая такую ветвь, может стекать и питать эту почку, ибо капля задерживается в углублении, образуемом у места зарождения листа. А вторая выгода та, что при рождении новых ветвей на следующий год одна не прикрывает другую, так как пять ветвей вырастают обращённые по пяти различным направлениям, а шестая вырастает над первой на довольно значительном расстоянии.

Лист всегда поворачивает свою лицевую сторону к небу, дабы смог он лучше воспринять всею своею поверхностью росу, которая медленным движением нисходит из воздуха. И эти листья распределены на своих растениях так, что один заслоняет другой сколь возможно меньше, вплетаясь один поверх другого, как видно это у плюща, покрывающего стены. И такое переплетение служит двум целям, а именно: оставить промежутки, чтобы воздух и солнце могли проникать сквозь них и – вторая причина – чтобы капли, которые падают с первого листа, могли падать также и на четвёртый или на шестой других сучьев.

Посмотри на нижнюю ветку бузинного дерева, листья которого располагаются попарно, крест-накрест друг над другом: если ствол идёт прямо к небу, этот порядок никогда не нарушается. И наиболее крупные листья находятся в более толстой части ствола, а менее крупные – в более тонкой, т. е. ближе к вершине. Но, возвращаясь к нижней ветке, скажу, что листья, которые должны располагаться крест-накрест, в соответствии с вышележащей веткой, испытывают понуждение закона, заставляющего их поворачивать свою лицевую сторону к небу, чтобы принимать ночную росу, а потому они, по необходимости, меняют своё положение, располагаясь уже не крест-накрест, а по кривой.

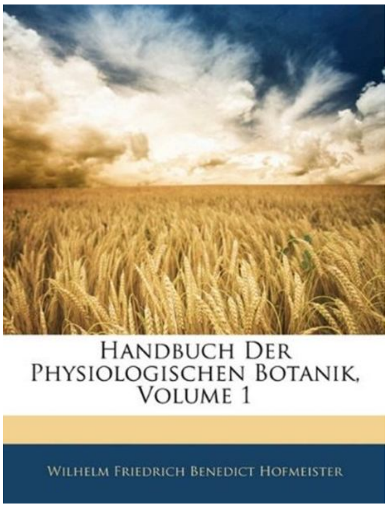
Концы разветвлений на растениях, если их не одолевает тяжесть плодов, всегда поворачиваются к небу, насколько это возможно. Лицевые стороны их листьев повёрнуты к небу, чтобы принимать питание росы, выпадающей ночью.

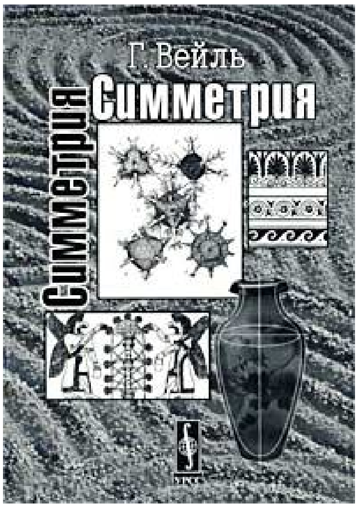
Солнце даёт растениям душу и жизнь, а земля питает их влагой. Последнее я уже проверял на опыте, оставляя у тыквы только один крошечный корешок и хорошо питая её водой. Эта тыква полностью принесла все плоды, какие только могла, и их было около шестидесяти, самых крупных. И я усердно наблюдал эту жизнь и узнал, что ночная роса обильно проникала своей влагой через черешки широких листьев, питая растение с его детьми, или, вернее, с теми яйцами, которые должны производить его детей.

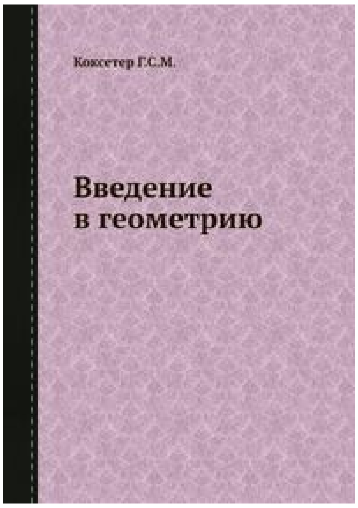
Правило расположения листьев, рождённых на последней ветке данного года: листья на двух братских ветках будут располагаться по линиям противоположных движений, т. е. по спирали, проходящей через места зарождения листьев на ветке так, что шестой лист вверху появляется над шестым внизу, и спирали эти таковы, что если на одной ветке обороты идут вправо, то на средней ветке они идут влево.

Лист есть сосок или грудь ветви или плода, рождающихся на следующий год.

При внимательном прочтении текста нетрудно обнаружить многое из того, что может считаться продолжением и развитием заложенных ещё Теофрастом и Плинием Старшим идей, ставших впоследствии предметом интенсивного экспериментального и теоретического исследования, доведённого в наше время до уровня отвечающей существу дела математической модели. У Леонардо, наряду с равным 1/2 простейшим углом расхождения листьев, говорится о *фибоначчиевых углах* 2/5 (тростник, виноградная лоза, ежевика, терновник), 1/3 и достаточно близком к “магическому” ϕ^{-2} угле 3/8. Налицо глубокое понимание растения как оптимально организованной системы, находящейся в математически согласованном единстве с такими внешними факторами, как солнце, воздух и влага. Отмечена у Леонардо и важная роль в листорасположении противоположно закрученных трёхмерных спиралей.







Некоторые из изданий книг Вильгельма Гофмейстера, Германа Вейля и Гарольда Коксетера

Обычно наблюдаемый вариант филлотаксиса – трёхмерная спираль и ряд Фибоначчи. В классической работе Германа Вейля (Hermann Klaus Hugo Weyl, 1885–1955) это представлено следующим образом.

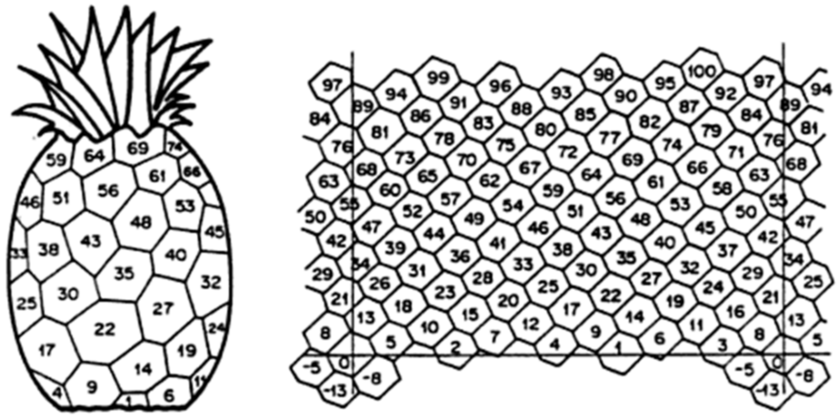
Наиболее общим движением твёрдого тела в трёхмерном пространстве является винтовое движение *s*, представляющее собой соединение поворота вокруг некоторой оси с переносом вдоль этой оси. Под действием соответствующего непрерывного и равномерного движения любая точка, не лежащая на оси этого движения, описывает винтовую линию, которая – с тем же правом, что и логарифмическая спираль, – могла бы сказать о себе: “я воскресаю той же”. Положения P_n, которые движущаяся точка достигает через одинаковые промежутки времени, равномерно распределены по винтовой линии, подобно ступеням винтовой лестницы. Если угол поворота при операции *s* представляет собой часть μ/ν полного угла в 360°, выражаемую с помощью небольших целых чисел μ, ν, то каждая ν-я точка последовательности P_n лежит на одной и той же вертикали, и необходимо совершить μ полных оборотов винта для того, чтобы попасть из точки P_n в точку $P_{n+\nu}$, расположенную над ней. Такое правильное спиральное расположение часто можно наблюдать у листьев побега какого-нибудь растения. Гёте говорил о стремлении природы к спирали, и под названием филлотаксиса это явление со времён Шарля Бонне (Charles Bonnet, 1754) послужило у ботаников предметом многих исследований, а ещё больше – умозрительных рассуждений. Обнаружено, что дроби вида μ/ν, соответствующие винтообразному расположению листьев на стебельке растения, часто являются “числами Фибоначчи”… Цилиндр, на который навит винт, можно заменить конусом, что равнозначно замене винтового движения *s* некоторым собственным подобием – вращением, соединённым с растяжением. Под эту несколько более общую форму симметрии в филлотаксисе подпадает расположение чешуек у еловой шишки. Переход от цилиндра к конусу и от него к диску очевиден, – он может быть продемонстрирован на примере цилиндрического стебелька растения с его листьями, еловой шишки с её чешуйками и шляпки подсолнечника с его цветками [Вейль, 97–99].

В дополнение к сказанному Германом Вейлем послушаем канадского геометра британского происхождения Гарольда Коксетера. Он больше знаменит своими работами по правильным политопам, являющимся обобщением правильных многогранников, включая рассмотренные во второй главе золотые тела, но проявлял немалый интерес к золотому сечению, числам Фибоначчи и филлотаксису. В одной из известных книг Коксетера по геометрии есть *Глава 11. Золотое сечение*, а в ней, приводимый ниже с некоторыми сокращениями и с заменой символов f_n и g_n на современные F_n и L_n, небольшой *§5. Филлотаксис*.

Числа Фибоначчи связаны с одним ботаническим явлением, так называемым филлотаксисом (буквально “устроение листа”). У некоторых деревьев, например у вяза и американской ивы, листья вдоль ветки чередуются с двух противоположных сторон, и мы называем это “1/2-филлотаксис”. У других, например у бука и орешника, расстояние между двумя соседними листьями задаётся винтовым перемещением, включающим в себя вращение на одну треть полного оборота, и мы называем это “1/3-филлотаксис”. У дуба и абрикоса можно наблюдать 2/5-филлотаксис, у тополя и груши – 3/8, у ивы и миндаля – 5/13 и т. д. Все эти дроби являются частными чисел Фибоначчи, взятых через одно, но их можно свести к частным соседних чисел Фибоначчи; например, вращение на 5/8 полного угла – это то же самое, что поворот на 3/8 оборота в противоположном направлении.

Другим проявлением филлотаксиса является устройство соцветия подсолнечника или чешуи еловой шишки, в которых чешуйки расположены в виде спиралей или винтовых линий (или “парастихий”). Такое расположение особенно чётко видно у ананаса, имеющего более или менее шестиугольные ячейки, которые образуют ряды, идущие в различных направлениях. Каждая ячейка входит в три ряда (так как она имеет три пары противоположных сторон): в медленно поднимающийся слева направо ряд с номерами ячеек, возрастающими через 5, в несколько круче поднимающийся справа налево ряд с номерами ячеек, возрастающими через 8, и в круто поднимающийся слева направо ряд с номерами ячеек, возрастающими через 13. В некоторых случаях значения последовательно меняются. Если рассматривать поверхность ананаса как цилиндр, то, разрезав его по вертикальной прямой (образующей) и развернув на плоскость, мы получим полоску, заключённую между двумя параллельными прямыми, которые образовались вдоль вертикального разреза.

… Если цилиндр заменить конусом и проводить аналогичные рассуждения для еловой шишки, то прямая на плоскости будет представлять не цилиндрическую винтовую линию, а конхо-спираль. Если допустить, что образующие конуса стремятся к перпендикуляру к его оси, то в пределе конхо-спирали перейдут в плоские равноугольные спирали, которые пересекаются под теми же углами, что винтовые линии на цилиндре, то есть под теми же углами, что прямые на плоскости решётки. Довольно большие числа Фибоначчи, например $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$, соответствуют числам спиралей, составленных из соседних ячеек некоторых видов подсолнечника. Однако у некоторых растений соответствующие числа принадлежат не последовательности F_n, а последовательности L_n или даже ещё более сложным последовательностям 3, 1, 4, 5, 9, …; 5, 2, 7, 9, 16, …; таким образом, нужно констатировать, что филлотаксис – это не универсальный закон природы, а лишь преобладающая тенденция [Коксетер 247, 248, 252].

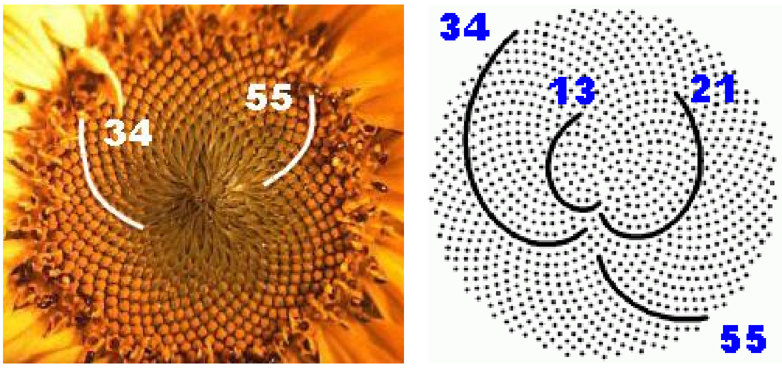


Ананас и его традиционный математический филлотаксис-анализ

Популярным и часто упоминаемым примером филлотаксиса служит головка подсолнечника. Его семянки, согласно более поздним (1979 г.) исследованиям [Vogel], упорядочены в спирали, выражаемые в полярной системе координат уравнениями

$$r = \pm c\sqrt{n}\,, \quad \theta \approx n \cdot 137{,}508°$$

для полярного радиуса r, угла θ и номера n цветка. Это, определяемые уравнением $r = \pm a\theta^{1/2}$ и являющиеся частным случаем спиралей Архимеда, спирали Ферма – с золотой константой филлотаксиса $2\pi \cdot \phi^{-2} \approx 137{,}508°$.



Спирали подсолнечника и числа Фибоначчи в спиралях его семянок

Числа Фибоначчи и трёхмерные спирали в природе

Подсчёт количества ромбовидных розеток спелого подсолнечника, притом что некоторые из них могут оказаться и пустыми, приводит к числам Фибоначчи. Их количество в спиралях, согласно работе [Church], зависит от размеров головки растения. Если она очень мала, что нечасто встречается и означает низкую урожайность, то в короткой спирали 21 розетка, в длинной 34, изредка 13 и 21. Если головка больше, от трёх до пяти дюймов в диаметре, имеет место соотношение 34 и 55; для 5–6 дюймов соответственно 55 и 89; для большой головки в 11 дюймов – 89 и 144; наконец, предположительно, 144 и 233 в выращенном в 1899 г. рекордном по размерам подсолнечнике (22 дюйма, 56 см). Все эти пары соответствуют углам расхождения (дивергенции) 13/34, 21/55, 34/89, 55/144 и 89/233, аппроксимирующим угол $\phi^{-2} \cdot 360° \approx 137{,}508°$. При этом из 140 тестируемых растений аномальными оказались лишь шесть, то есть всего 4 процента [Hambidge, 5].

Каждый раз, когда заходит речь о приложениях принципа золотого сечения к природе, в качестве примера одного из бесспорных его проявлений приводится филлотаксис. Это классика ЗС, его несокрушимый бастион, который не рискуют атаковать даже самые ярые противники значимости ПЗС. Филлотаксис хорош тем, что его репутация основана не просто на каких-то измерениях, которые в любом случае необходимы, а на математической модели, долгое время разрабатываемой и доведённой в наши дни до уровня компактной естественнонаучной модели, с использованием принципа минимума. А такими вещами шутить не рекомендуется, это не сомнительные психологические опыты с геометрическими фигурами, которые ничего не доказывают и не опровергают и которые можно толковать по-всякому, в зависимости от идейной предрасположенности толкователя. Природа способна творить математические чудеса, достаточно посмотреть на фотографии снежинок или, скажем, на пчелиные соты. Филлотаксис можно смело отнести к числу таких чудес, не забывая при этом, что, как отмечено у Коксетера,

Это не универсальный закон природы, а лишь преобладающая тенденция.

Трёхмерная спираль, о которой говорилось выше, сохраняет основные свойства двумерной спирали – неизменность формы и других параметров. Тем самым, спиральное расположение элементов растения находится под защитой сразу нескольких законов сохранения. Возможно, уже Теофраст и Плиний Старший догадывались, что оптимальное и не зависящее от размеров растения расположение листьев достигается лишь при определённых углах расхождения. В частности, именно при таких углах каждый лист в наименьшей степени затемняет нижние листья и затемняется верхними; эти углы наиболее благоприятны и для того, чтобы дождевые капли стекали назад вдоль листа, а затем вниз по стеблю к корням растения. Аналогичная закономерность наблюдается в расположении семян некоторых растений. Снова на первый план выходит закон оптимума, а вместе с ним и константа ϕ, со своей наиболее медленно сходящейся цепной дробью, приводящей к классическому ряду Фибоначчи. Конечно, во многих случаях в растениях реализуются и другие числовые последовательности. Среди них связанный с рядом Фибоначчи ряд Люка и другие неординарные последовательности чисел вроде указанных выше 3, 1, 4, 5, 9, …, или 5, 2, 7, 9, 16, …, отличающиеся от рядов F_n и L_n начальными членами, но соответствующие правилу третьего члена. Живая природа многообразна, и наряду с золотой пропорцией в ней немало числовых отношений менее благородного происхождения. Очевидно, что принцип золотой пропорции может считаться распространённым, но не единственным законом организации растительного мира.

4. Феликс Клейн и икосаэдр

Наиболее надёжные результаты как всегда связаны с математической теорией ЗС, в частности с золотыми додекаэдром и икосаэдром, интерес к которым, независимо даже от их связи с золотой пропорцией, достаточно велик. По словам Феликса Клейна, **используя уравнение икосаэдра, можно решить и любое уравнение пятой степени** [Клейн, 394]. О значении платоновых тел для современной математики можно судить по небольшому разделу с заголовком *Похвала правильным многогранникам* указанной работы.

Эти фигуры проходят через всю историю математики. Пифагорейцам они представлялись символами некоего мистического совершенства. Греческие натурфилософы сравнивали их с пятью стихиями. Греческим геометрам удалось показать, что кроме пяти известных никаких других правильных многогранников не существует и что по радиусу описанного шара их можно строить с помощью циркуля и линейки. Тринадцать книг евклидовых "Начал" являются лишь введением к построению правильных многогранников.

На протяжении всех средних веков правильные многогранники оставались предметом мистического почитания и символом твёрдости характера. … Кеплеровской фантазии правильные многогранники потребовались для установления связи между размерами планетных орбит. И теперь, в наши дни, они снова вступают в поле зрения математической науки, где удивительнейшим образом связуют воедино геометрию, теорию групп, алгебру и теорию функций, указуя путь к дальнейшим исследованиям [Там же, 396–397].

Клейн, как видим, придерживается гипотезы, по которой *Начала* Евклида **являются лишь введением к построению правильных многогранников.** Мысль, самим Евклидом чётко не обозначенная, о том, что предшествующие главы его геометрии "являются лишь введением к построению правильных многогранников", восходит к неоплатонику Проклу (Πρόκλος ὁ Διάδοχος, 412–485), к его дошедшему до наших дней произведению *Комментарий к первой книге "Начал" Евклида* [Proclus] ("гипотеза Прокла" подробно обсуждается в работе [C[11]], см. также [Сороко]). Поскольку платоновы тела, рассматриваемые в заключительной тринадцатой книге *Начал*, являются как бы венцом всех построений евклидовой геометрии, оригинальное понимание Проклом её конечной цели, разделяемое Клейном и другими, не лишено логики и имеет право на существование. Любопытно, что Платон, чьим именем названы правильные многогранники, в отрывке не упомянут; главное всё же то, что целый ряд замечательных свойств платоновых тел может быть использован для серьёзного поиска случаев применения этих свойств в живой и неживой природе, как и для всевозможных спекуляций самого разного толка. Но Клейна платоновы тела, особенно икосаэдр, интересуют больше с чисто научной, математической точки зрения.

О повышенном интересе Клейна к икосаэдру и придаваемому ему значению свидетельствует само название одной из его монографий: *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени*. В предисловии к работе сказано:

Геометрия икосаэдра заняла в последние несколько лет такое важное место почти во всех областях современного анализа, что мне показалось своевременным опубликовать её систематическое изложение. … Прошло уже 25 лет с тех пор, как Бриоски, Эрмит и Кронекер создали современную теорию уравнений пятой степени. Но, несмотря на то, что эти исследования иногда и цитируются, математический мир в целом не осознал ещё их подлинного значения. Взяв за основу своего изложения геометрическую теорию икосаэдра и показав, что именно она играет ключевую роль в процессе решения, я предлагаю такой подход к этой проблеме, яснее и проще которого вряд ли можно ожидать [Клейн[1], 9].

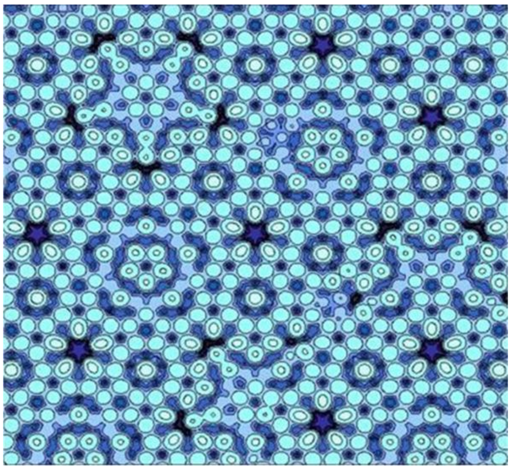
В аннотации к работе также сказано, что

В геометрии икосаэдра переплелись идеи и конструкции, лежащие в основе целого ряда красивейших теорий, развившихся впоследствии в самостоятельные ветви математики.

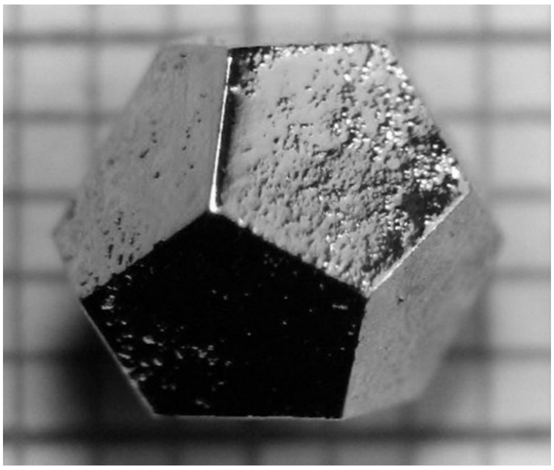
Уравнения пятой, а также 7-ой и 11-ой степеней Клейн решает с использованием симметрии икосаэдра. В решении таких уравнений может фигурировать и константа ϕ. Например, уравнение $x^5 - 5x + 12 = 0$ имеет единственный вещественный корень, выражаемый через корни пятой степени, содержащие комбинации чисел $\sqrt{\phi/2}$, $\sqrt{2\phi}$, $\sqrt{2\phi - 1}$.

Феликс Клейн известен как выдающийся математик, автор многочисленных исследований, относящихся к различным разделам геометрии: евклидовой и псевдоевклидовой, римановой, сферической, гиперболической, проективной, аффинной, топологии, … . Автор *Эрлангенской программы* (*Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований* [Клейн[3]]) ищет единство в этом многообразии геометрических теорий и немало в этом преуспел. Синтетический ум Клейна, фактически придерживаясь заложенной Декартом концепции аналитической геометрии, перебрасывает мостики между геометрическими структурами и числовой математикой. Блестящим примером подобного синтеза может служить как раз работа, в которой золотому икосаэдру отведена *ключевая роль*. Подобное возвеличивание отдельно взятого геометрического тела на уровне строгого математического исследования, а не досужих домыслов и спекулятивных рассуждений о важности платоновых тел, дорогого, конечно, стоит.

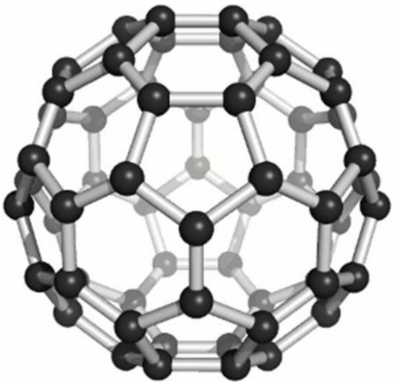
Икосаэдр, который Платон соотносил с формой воды, Евклид и Пачоли исследовали как геометрическое тело космологической значимости, а Кеплер помещал между Венерой и Землей, Феликс Клейн рассматривает в качестве центрального компонента целого ряда математических теорий, негеометрического преимущественно типа. Это, очевидно, достаточно серьёзный аргумент в пользу незаурядности ТЗС, поскольку при таком понимании икосаэдр может считаться подлинным “сокровищем”, важным элементом математической гармонии мира. С учётом математических достоинств икосаэдра и дуального ему додекаэдра, символично и не случайно, что именно с этими платоновыми телами и их модификациями связана большая часть малочисленного набора надёжно установленных эмпирических фактов, которые могут быть без натяжки отнесены к *золотой природе*. Это прежде всего обнаруженная в последние десятилетия в неживой и живой природе икосаэдро-додекаэдрическая пентагональная симметрия квазикристаллов, фуллерена C_{60}, аллотропного соединения γ-Бора, капсида аденовируса [Icosahedron; Gratias *et al*.; Capsid]. В научной практике нежданный гость – повод не для огорчения, а торжества, желанная весточка из неизведанной *Terra incognita*. Ранее полагали, что пентагональная симметрия запрещена в мире кристаллов, и вот она была предсказана [Kleinert and Maki], а вскоре, к удивленную многих, обнаружена в дальнем порядке непериодических твёрдых тел, названных квазикристаллами [Shechtman *et al*].



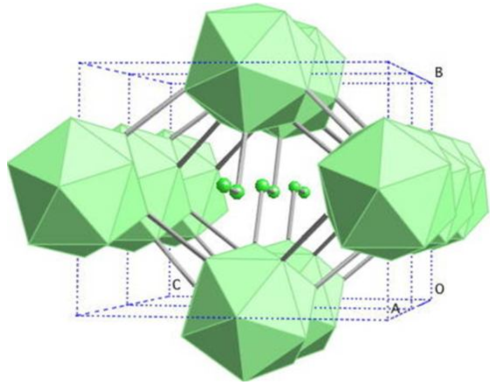
Атомная модель поверхности квазикристалла Al-Pd-Mn



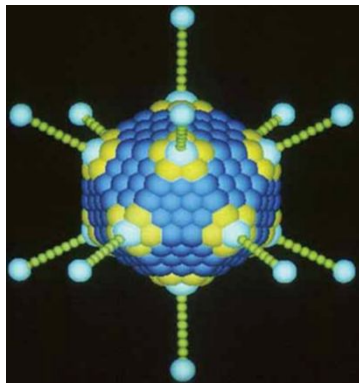
Икосаэдрический квазикристалл Ho-Mg-Zn в форме додекаэдра



Фуллерен C_{60}



Структура γ-бора



Икосаэдрический капсид аденовируса

Заметим, что фуллерен C_{60} представляет собой *усечённый* икосаэдр, то есть известное нам из второй главы и состоящее из 12 пятиугольников и 20 шестиугольников архимедово тело, которое может быть получено из икосаэдра последовательным срезанием на треть каждой из его вершин. Расположенные в вершинах усечённого икосаэдра 60 атомов углерода образуют важнейший и наиболее распространённый представитель многочисленного семейства фуллеренов, названный так именем архитектора Бакминстера Фуллера (Richard Buckminster Fuller, 1895–1983). Фуллерен C_{60}, самая большая из всех когда-либо обнаруженных в космосе молекул, наряду с алмазом, графитом, карбином, графеном и т.д. является аллотропной модификацией углерода – одного из самых распространённых в окружающем мире химических элементов [Buckminsterfullerene]. Синтезированная в 1985 г. [Kroto *et al.*] молекула C_{60} вскоре была обнаружена в образующейся на графитовых электродах саже, при исследовании грозовых разрядов в атмосфере, в горных породах докембрийского периода в Карелии [Buseck *et al.*], а в 2010 г. в облаке космической пыли, окружающем находящуюся на расстоянии 6500 световых лет от Земли звезду. По словам Харольда Крото (Harold Walter Kroto, 1939), за открытие фуллеренов удостоенного в 1996 г., вместе с Ричардом Смолли (Richard Errett Smalley, 1943–2005) и Робертом Керлом (Robert Floyd Curl Jr., 1933), Нобелевской премии по химии, это свидетельствует о существовании фуллеренов в самых удалённых закоулках нашей галактики [Gill]. Существование материальных структур с геометрией усечённого икосаэдра можно расценивать как одно из наиболее явных и впечатляющих проявлений ПЗС в природе.

5. Додекаэдр и икосаэдр: космология, Земля, куб Метатрона

Обсуждая икосаэдр, пришлось, как и в случае пентаграммы, выйти за обозначенные с самого начала хронологические рамки рассмотрения истории ЗС, поскольку без упоминания связанных с икосаэдро-додекаэдрической симметрией наиболее явных проявлений ПЗС в природе обойтись трудно. Следует вообще сказать, что история золотой платоновской пары – быть может, самая яркая, теоретически важная и успешная в плане приложений страница всей истории ЗС. Это начатая ещё пифагорейцами и Платоном математическая симфония, которая со временем зазвучала с особой силой. Помимо рассмотренных выше случаев есть множество других, не столь достоверных, как пентагональная симметрия квазикристаллов и фуллеренов, попыток использования двух правильных многогранников для описания природных явлений, которые обойти стороной мы не вправе.

Ещё Платон в *Федоне* устами Сократа (др.-греч. Σωκράτης, ок. 469–399 гг. до н.э.) заявлял, что

Земля, если взглянуть на неё сверху, похожа на мяч, сшитый из 12 кусков кожи [Платон 110b].

В наши дни футбольный мяч аналогичен фуллерену C_{60}, точнее, представляет собой усечённый икосаэдр с округлёнными гранями, что можно считать оптимальной и целесообразной для данного случая триангуляцией сферы геометрическими фигурами. Идея же моделирования природных объектов разной величины правильными многоугольниками имела и имеет немало сторонников. Так, в начале XIX в. французский геолог Эли де Бомон (Elie de Beaumont, 1798–1874) полагал, что форму додекаэдра наша первоначально жидкая планета приняла при застывании. С помощью сеток, составленных из рёбер додекаэдра и икосаэдра, он пытался построить нечто вроде додекаэдро-икосаэдрической картины рельефа планеты, объясняющей местоположение горных хребтов и наиболее устойчивых областей земной коры [Élie de Beaumont].

Ведущий математик своего времени француз Анри Пуанкаре (Henri Poincaré, 1854–1912), предложивший способ получения сферы из додекаэдра путём склеивания его противоположных граней с поворотом на золотой угол $\pi/5 = 36°$ по часовой стрелке (*сфера Пуанкаре*, см. [Björner and Lutz]), полагал, что Земля представляет собой деформированный додекаэдр. С идеей "Земля – кристалл" выступил в 1929 г. Степан Иосифович Кислицын (1882–1976), полагая, что 400–500 млн лет назад, вследствие изменения геосферы, имел место частичный переход из одного кристаллического состояния в другое: додекаэдр частично трансформировался в родственный ему икосаэдр. При этом 20 треугольников икосаэдра как бы накладываются на 12 пятиугольников додекаэдра, образуя опутывающую планету сетку, полезную в частности для отыскания новых залежей полезных ископаемых.

О практической применимости модели Кислицына, труды которого не были опубликованы, её оценке со стороны известных специалистов можно судить по выдержкам из научно-популярного журнала *Химия и жизнь* [Снова о большом кристалле, 64, 65], см. также [Макаров]; список многих статей по данной теме можно найти на сайте [Лачугин].

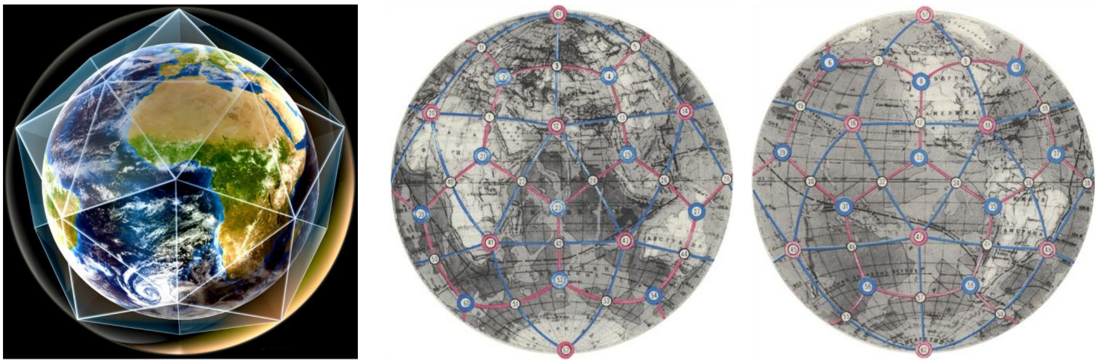
В 1928 году, изучая материалы по распределению модификаций углерода (алмазов, углей и других каустобиолитов), Кислицын нанёс на глобус известные тогда месторождения алмазов. Опустив циркуль в центр богатейшего месторождения, он начертил окружность, которая прошла через центр второго месторождения. Взяв это расстояние за основу, он начертил ещё одиннадцать окружностей, которые закономерно легли на глобус. Вырисовывалась картина, увлекательная и для геолога, и для математика: двенадцать предполагаемых алмазоносных центров легли в каркас правильного додекаэдра (многогранник, состоящий из 12 пятиугольников).

Мнение академика Алексея Васильевича Шубникова (1887 – 1970).

Ознакомившись с теорией земного шара как “геокристалла”, в результате личной беседы с автором теории С.И. Кислицыным и рассмотрения показанных им глобусов, могу высказать следующее своё мнение по этому вопросу. Гипотеза о том, что земной шар в процессе охлаждения стремится принять форму правильного многогранника, близкого к шару, вполне естественна... Из пяти правильных математических многогранников наиболее близким к шару является икосаэдр – правильный двадцатигранник. Следующим за ним по близости к шару является правильный пентагональный додекаэдр – двенадцатигранник. Оба многогранника имеют одинаковую симметрию... Обе фигуры поэтому в теории т. Кислицына по существу должны играть одинаковую роль. На показанных глобусах начерчены линии и круги, проходящие через точки, которые, по уверению т. Кислицына, взяты из наблюдений, которые отвечают довольно хорошо двум указанным математическим фигурам. Принимая гипотезу т. Кислицына о стремлении земного шара принять форму правильного многогранника как вполне правомерную, я считаю совершенно невозможным принятие земного шара за одиночный кристалл в обычном понимании этого слова.

Мнение академика Николая Васильевича Белова (1891 – 1982).

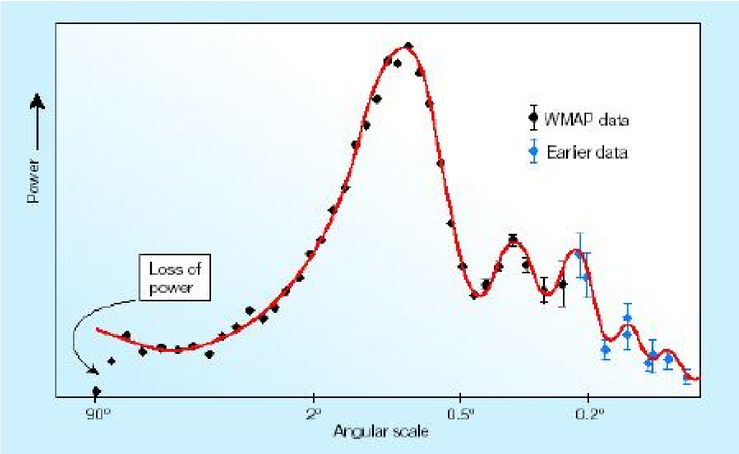
В кристаллографии мы часто имеем дело с вырождением икосаэдра (иногда до конца, иногда – нет) в кубооктаэдр, именуемый архимедовым... Представленный С.И. Кислицыным макет полностью отражает этот переход.



Земля как кристалл (додекаэдр) и как сочетание двух золотых многогранников

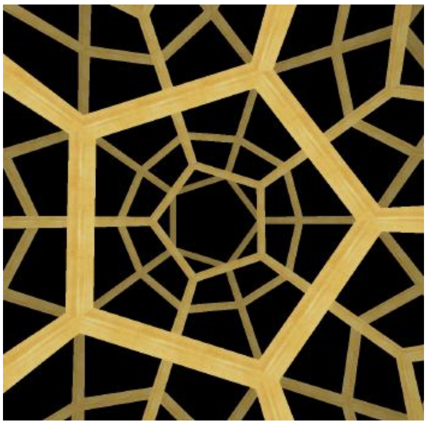
Понимание Земли как огромного кристалла – золотого многогранника (рис. слева [Earth in Dodecahedron Crystal]) или как сочетания двух таких многогранников [Гончаров, Макаров и Морозов] имеет немало приверженцев. В варианте гипотезы “Земля – кристалл” с аббревиатурой ИДСЗ (икосаэдро-додекаэдрическая структура Земли) многогранники как бы вписаны в земной шар и спроецированы на его поверхность. При этом две вершины икосаэдра совмещаются с полюсами Земли, а вершины додекаэдра совмещены с центрами граней икосаэдра. Производится расчёт точных координат показанных на рисунке узлов [Там же] с помещением исходного узла под номером 1 (на среднем рисунке) в точку 31°09′ в.д., почти совпадающую с долготой пирамиды Хеопса (31°08′03″ в.д.). На основе сопоставления расчётных и фактических данных утверждается, что с рёбрами и особенно с узлами икосаэдро-додекаэдрической модели Земли совпадают многие важнейшие структурные элементы земной коры, геологические образования, крупные рудные и нефтегазовые месторождения, центры магнитных аномалий и сейсмической активности и многие другие особенности, а также очаги наиболее примечательных древних культур и цивилизаций.

В самом начале третьего тысячелетия платоновская идея об исключительной роли додекаэдра в строении Вселенной получила неожиданное, хотя и далёкое ещё от достоверности подкрепление. Дело в том, что обработка данных, полученных запущенным в 2001 г. зондом NASA WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), привела некоторых исследователей к удивительному выводу: Вселенная имеет форму додекаэдрического пространства Пуанкаре [Luminet *et al.*[1,2]; Dumé; Muir]. Полагают, что именно такая форма конечного замкнутого пространства наилучшим образом объясняет характер распределения микроволнового реликтового излучения (МРИ), своеобразного “эха” Большого взрыва. Одновременно это “фотография” космоса в возрасте 380 тысяч лет, фиксирующая флуктуации плотности того периода, отражаемые в температурной анизотропии фонового излучения. В ранней Вселенной фотоны МРИ, образовавшиеся в результате Большого взрыва, интенсивно рассеивались свободными электронами, но позже в связи с остыванием и образованием атомов водорода Вселенная становится более “прозрачной”. Другими словами, “фотография”, полученная с помощью высокоточной аппаратуры зонда WMAP, даёт достаточно чёткое, неискажённое изображение молодой Вселенной. Первоначальные данные подтвердили предсказания стандартной модели (СМ) Большого взрыва и инфляционной космологической модели для областей пространства, разделённых малыми углами, однако позже для углов больше 60° наметились серьёзные расхождения между предсказаниями СМ и результатами наблюдений. На рисунке из [Luminet *et al.*[1]] температурная анизотропия МРИ, выраженная особым образом через энергетическую величину, представлена в виде угловой функции.



Температурная анизотропия МРИ как угловая функция

В области малых значений кривая, определяющая температурную анизотропию как угловую функцию, характеризуется серией пиков, которые почему-то исчезают в области больших углов. Неспособность СМ объяснить это явление и стала причиной выдвижения модели конечной, имеющей додекаэдрическую форму Вселенной, как наиболее разумного объяснения имеющегося массива данных.



Схематическое изображение додекаэдрической структуры Вселенной

Это удивило многих, и кое-кто заговорил о том, что предвидение пифагорейцев и Платона нашло сегодня реальное подтверждение в опытных данных и их математическом анализе, учитывающем различные альтернативные варианты, включая модель бесконечной Вселенной. Но говорить о высокой степени надёжности, тем более единственности указанного заключения (уже получившего не только одобрительные, но и критические отзывы и комментарии) пока не приходится. Это лишь возможная интерпретация эмпирического материала, нуждающаяся в дополнительном исследовании гипотеза, которая будет или подтверждена, или с неменьшим успехом опровергнута. Если всё же допустить её правильность, вывод напрашивается сам собой. Современная наука, вооружённая сложной экспериментальной техникой и утончёнными методами теоретического исследования, пришла фактически к той геометрической структуре (в уточнённом, правда, варианте додекаэдрического пространства Пуанкаре), которая была предложена два с половиной тысячелетия назад *a priori*, без использования технических средств, посредством чистого мышления и на основе пифагорейского понимания математической гармонии и геометрического совершенства Вселенной. Подтверждение этой гипотезы означало бы блестящий триумф античной религиозно-философско-математической концепции математической красоты и единственности космоса. А как всё обстоит на самом деле, действительно ли мы живём в додекаэдрическом пространстве Платона-Пуанкаре, выяснится, видимо, уже в обозримом будущем [Roukema *et al.*].

Возникшая ещё в древнем мире, задолго до пифагорейцев, идея сакральной геометрии (в дальнейшем СГ) всегда имела немало убеждённых сторонников, имеет их и в наши дни. Она, безусловно, связана с числовой магией и по определению представляет собой

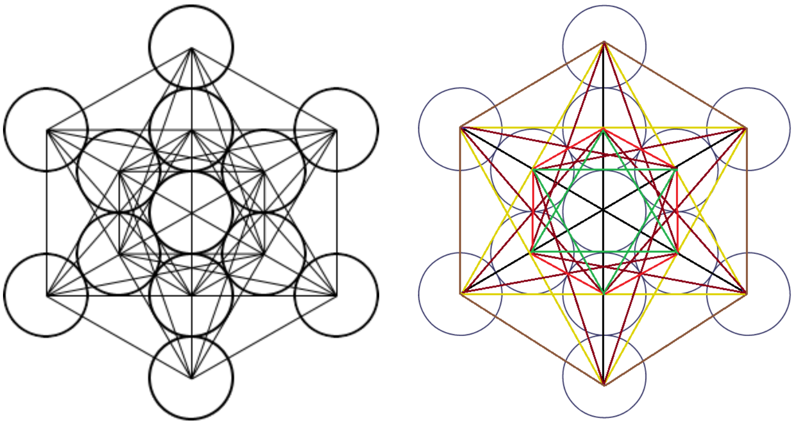
Совокупность религиозных и/или мифологических представлений о формах и пространстве мира, его гармонии, упорядоченности, пропорциональности, как геометрия форм, лежащих в основе жизни.

Сакральная геометрия – часть мифологического и религиозного мировоззрения, результат мистического опыта. Сакральная геометрия применялась во все времена и во всех мировых религиях, в музыке, искусстве, в архитектуре храмов и алтарей, в живописи и иконографии – как божественная пропорциональность, в геометрической интерпретации космоса – как формы упорядоченности Вселенной (в противоположность хаосу). [Сакральная геометрия].

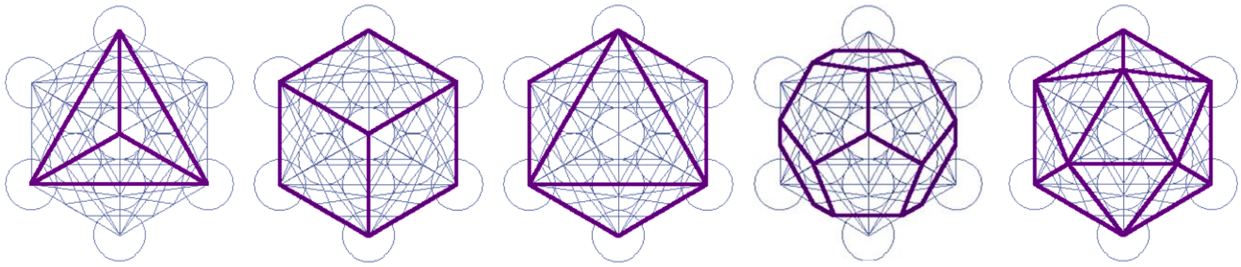
Одной из наиболее известных фигур СГ является рассмотренная в Главе 6 пентаграмма. Не обойдены, разумеется, вниманием и правильные многогранники, включая икосаэдр и додекаэдр. Не случаен, конечно, и поиск платоновых тел в разных геометрических фигурах, в частности в *кубе Метатрона*, названном так по имени одного из ангелов, *небесного посредника*. В сакральной геометрии

Это одна из наиболее важных информационных систем во Вселенной, одна из основных моделей творения бытия [Мельхиседек, 113],

а геометрически – двумерная фигура с симметрией шестого порядка, в которой при внимательном взгляде можно разглядеть контуры платоновых тел.



Куб Метатрона



Куб Метатрона в сопоставлении с платоновыми телами

Эзотерический туман, которым сакральная геометрия окутывает правильные многогранники, приводит к постановке не совсем обычных вопросов.

Откуда берутся Платоновы тела? Каков их источник?

вопрошает Друнвало Мельхиседек (Drunvalo Melchizedek, при рождении Bernard Perona, 1941). Известно с давних пор и строго доказано, что в трёхмерном евклидовом пространстве возможны только пять объёмных тел, ограниченных одинаковыми правильными многоугольниками. Равносторонними треугольниками ограничены тетраэдр, гексаэдр и икосаэдр, квадратами – куб, а правильными пятиугольниками – додекаэдр. Только эти геометрические объекты, называемые *правильными многогранниками* или *платоновыми телами*, отвечают указанным условиям, и это такая же математическая истина, как, скажем, невозможность заполнения двумерной плоскости какими-либо другими одинаковыми правильными многоугольниками, помимо равносторонних треугольников, квадратов и шестиугольников. Такой ответ, однако, не в духе сакральной геометрии, основывающейся на мистическом опыте:

Если вы изучаете священную геометрию, то неважно, какую вы раскроете книгу: она покажет вам пять Платоновых тел, потому что они являются азбукой священной геометрии. Но если вы прочитаете все эти книги – а я прочитал их почти что все – и спросите специалистов:

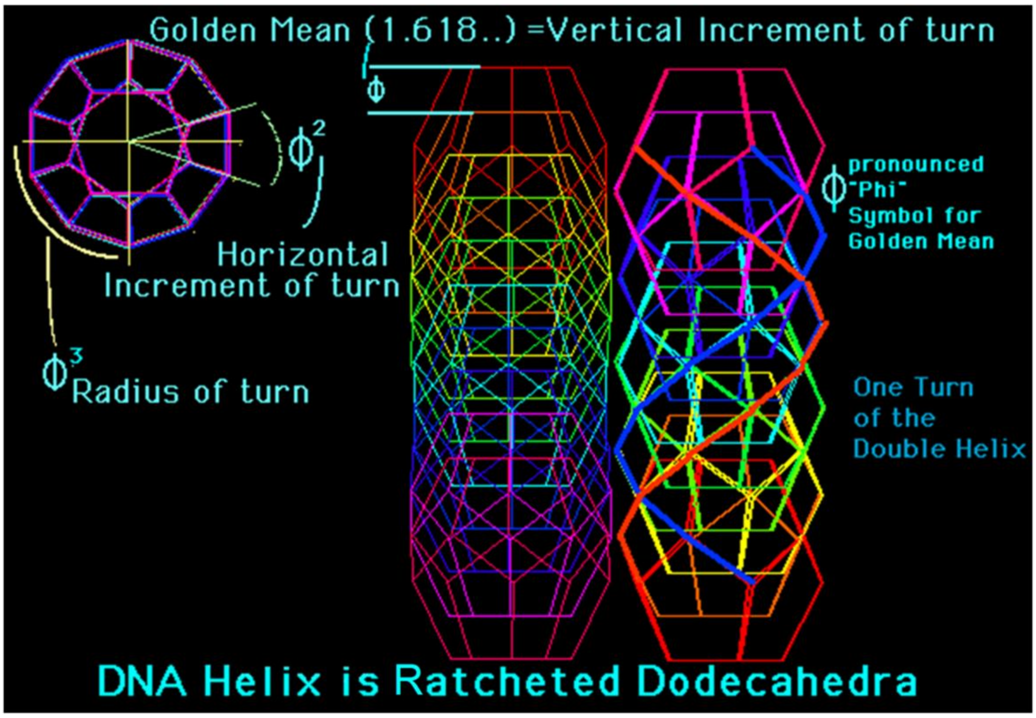
“Откуда берутся Платоновы тела? Каков их источник?”, то почти каждый скажет, что он не знает. Дело в том, что происходят эти пять Платоновых тел из первой информационной системы Плода Жизни. Сокрытые в линиях Куба Метатрона, все эти пять форм там существуют. При разглядывании Куба Метатрона вы смотрите на все пять Платоновых тел одновременно. [Там же, 114].

Вполне очевидно, что трёхмерное тело не может содержаться в двумерной фигуре, так что речь может идти лишь о соответствии между ортогональными проекциями или другими двумерными представлениями платоновых тел с одной стороны и фигурами куба Метатрона – с другой. Конкретно, необходимо совмещение узловых точек тех и других, то есть центры окружностей куба Метатрона должны совмещаться с проекциями вершин многогранников. Выясняется [A[15,g], *п.* 7], что совмещения вершин многогранников с центрами окружностей двумерной фигуры удаётся достичь для тетраэдра, куба и октаэдра и оказывается невозможным для додекаэдра и икосаэдра. Следовательно, при данном сопоставлении золотые многогранники, как это не огорчительно для почитателей сакральной геометрии, не могут считаться “сокрытыми” в двумерном кубе Метатрона.

6. Додекаэдр и икосаэдр: живая природа

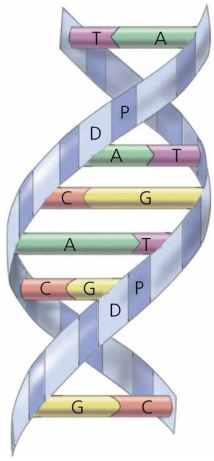
Сферой применимости *золотой составляющей* сакральной геометрии является и живая материя. Состоящий из 20 равносторонних треугольников икосаэдр является оптимальным способом формирования замкнутой оболочки из одинаковых элементов – субъединиц, и закономерно, что многие вирусы, как мы видели на примере капсида аденовируса, имеют форму икосаэдра или околосферическую форму с икосаэдрической симметрией [Virus]. В проекции на плоскость полный виток двойной спирали молекулы ДНК вписывается, как полагают, в золотой прямоугольник. В ходе зародышевого развития многоклеточных животных организмов, называемого гаструляцией, сперва образуется тетраэдр из четырёх клеток, потом октаэдр, куб, а потом, нетрудно догадаться, икосаэдр и додекаэдр, словом все пять платоновых тел, притом в строгой последовательности.

Не менее, если не более интересны утверждения, касающиеся структуры молекулы ДНК, см. например [Brooks; Implosion Group…; Perez[1]; Yamagishi, and Shimabukuro]. Поворачивая куб определённым образом на “золотой” угол в 72° (вспомним треугольники золотого сечения), можно получить икосаэдр, составляющий дуальную пару с додекаэдром. Получается, что в построенной по принципу двустороннего соответствия двойной нити спирали ДНК за икосаэдром следует додекаэдр, затем снова икосаэдр, и так далее.



Структура ДНК, золотое число и додекаэдр

Следует вообще сказать, что для некоторых “золотоискателей” молекула ДНК это поистине новое *Эльдорадо*. Известно, что в состав молекулы ДНК входят четыре азотных основания, нуклеотиды аденин (A), гуанин (G), тимин (T) и цитозин (C), образуя пары A–T и G–C. Нуклеотиды соединяются с группами сахара – дезоксирибозой (D), производной рибозы (состоящей, кстати, из четырёх атомов углерода и атома кислорода, образующих структуру с пентагональной симметрией), а группы сахара в свою очередь связываются между собой фосфатными группами (P), формируя показанную на рисунке цепь двойной спирали молекулы ДНК [*Your Dictionary com.*].



Молекула ДНК в виде двойной спирали

Генетический код, вся генетическая информация в клетке, определяющая имеющиеся различия между живыми существами, зависит от количества элементов в цепи молекулы и от порядка чередования нуклеотидов A, T, G, C. Согласно работам Переса (Jean-Claude Perez, 1947) [Perez[1,2]], они образуют фрактальные структуры дальнего порядка, названные "резонансами". Приводится такой пример резонанса: в участке цепи TCAG из 144 (F_{12}) нуклеотидов 55 (F_{10}) единиц приходится на долю тимина, а 89 (F_{11}) на долю остальных трёх нуклеотидов [Jean-Claude Perez]. Это соответствие типа $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$, где F_{n-2} количество нуклеотидов определённого вида, например тимина, а F_{n-1} – суммарное количество нуклеотидов A, G, C на том же участке цепи. Соответствие между количеством нуклеотидов в резонансах и числами Фибоначчи, или родственными им числами Люка, названо "ДНК Supra-кодом" (DNA Supracode). Утверждается, что в цепях некоторых молекул ДНК может содержаться несколько тысяч резонансов, то есть нуклеотидных отрезков длиной F_n или L_n, которые делятся золотым сечением соответственно на множества F_{n-2} и F_{n-1}, или L_{n-2} и L_{n-1}.

Молекула ДНК является основой биологической памяти, обеспечивающей генетическую программу передачи информации для воспроизводства живых организмов, поэтому любая относящаяся к ней закономерность заслуживает особого внимания. Утверждения об обнаружении золотого сечения и связанных с ним величин в молекулах ДНК – удобный случай для уточнения употребляемых при этом понятий в продолжение начатого ранее разговора, неизбежного каждый раз, когда заходит речь о приложениях ПЗС. В изначальном смысле золотое сечение это деление отрезка ἄκρος καὶ μέσος λόγος – в крайнем и среднем отношении (Евклид, *Начала*), то есть нахождение искомой точки с той точностью, которая достижима при использовании наличных технических средств. Не имеющая измерений математическая точка в принципе не может быть реализована в материальном мире, а любое геометрическое построение – лишь визуальный и весьма приблизительный образ научной абстракции. Само число золотого сечения ϕ это константа, иррациональное число, которое можно свести к другим математическим величинам посредством в частности радикалов и экспоненты, но нельзя представить через натуральные числа в виде *конечной* n-ичной дроби. Наконец, ряды Фибоначчи и Люка это последовательности чисел, не обязательно целых или действительных, строящиеся по рекуррентным формулам и сходящиеся в бесконечном пределе к числу ϕ. Ни при каком, сколь угодно большом n отношения типа F_{n+1}/F_n и L_{n+1}/L_n, аппроксимирующие золотое число, самим числом ϕ считаться не могут.

Из этих простых и достаточно тривиальных истин можно сделать несколько неожиданный на первый взгляд вывод: эмпирически, будь то геометрическое построение или физическое измерение, число ϕ получено быть не может. Любая эмпирическая процедура может привести лишь к некоему интервалу значений, содержащему бесконечное множество чисел, и если среди них окажется и золотое число, то это ещё мало о чём говорит. Поэтому любое утверждение об обнаружении путём измерения числа ϕ в каком угодно явлении микро-, макро- или мегамира, строго говоря, не вполне корректно и может быть оспорено, подвергнуто сомнению и даже осмеянию. Ведь никакая, обнаруженная в природе, допустим, спираль не является идеально логарифмической, а тем более безоговорочно золотой, и кто может сказать, в каких случаях и на каком уровне приближения к золотому стандарту допустимы подобные утверждения?

Сомнения, безусловно, оправданы, если золотое сечение понимается исключительно как геометрическая пропорция, реализуемая во внешнем мире в виде различных фигур и тел, или когда константа ϕ воспринимается просто как определённая числовая величина, а всякое измерение, дающее близкое к 1,6, в лучшем случае к 1,62 значение, вызывает трепетный восторг и торжествующую *эврику*. Не менее сомнительно отождествление встречающихся в природе малых положительных чисел, особенно первой десятки, с числами Фибоначчи. Но есть и другая сторона медали. Научному мышлению в равной мере чужды и экзальтированная восторженность, и непробиваемый "железобетонный" скепсис. Константу ϕ и её гомологи, фигуры и тела золотого сечения, числа Фибоначчи и Люка следует прежде всего воспринимать как проявления универсальных принципов мировой гармонии, таких как закон наименьшего действия. И совершенно не обязательно, чтобы реальное, не выдуманное проявление подобных принципов соответствовало математическому идеалу. Даже универсальные физические законы в безупречной математической упаковке себя, как правило, не обнаруживают. Например, Земля не движется в точности по эллиптической орбите вокруг Солнца, в сущности она вообще движется не вокруг Солнца, а вокруг их общего центра масс, и это движение не вполне по эллипсу, поскольку есть ещё и влияние различных коррелирующих факторов, в частности наличие других планет. Отсюда, однако, не следует, что в пределах классической механики законы Кеплера или закон всемирного тяготения неверны, просто малые поправки к основному закону (возмущения в небесной механике, радиационные поправки в квантовой физике и т.д.) вносят определённые изменения в общую картину.

Вывод один: близость каких-то отношений к числу ϕ или его производным, даже с высокой степенью точности, как и обнаружение в каком-то явлении чисел, совпадающих с числами Фибоначчи или Люка, пусть даже не начальными, – лишь повод для размышлений и исследований на предмет выявления *принципа золотого сечения*, которым должно быть обусловлено появление числовых величин. Можно сказать, что здесь применим известный методологический постулат: “Существовать – значит быть элементом системы” (Рудольф Карнап, Rudolf Carnap, 1891–1970). Другими словами, если соотношения золотой пропорции удаётся вывести математически из теоретических положений общего типа, таких как законы сохранения, обеспечивающие оптимальную организованность, устойчивость, стабильность системы, или если, допустим, исследуемая структура соответствует пентагональной симметрии, то резко возрастает степень правдоподобия, надёжности и нашей внутренней убеждённости в том, что действительно получен “золотой” результат.

Конкретно, в случае ДНК Supra-кода на первом плане (в смысле подтверждения) статистический закон больших чисел, требующий для своего надёжного применения большой выборки. Если, как утверждается в [Jean-Claude Perez], в таких молекулах ДНК как молекула вируса HIV (ВИЧ) насчитывается несколько тысяч резонансов, причём наиболее длинные из них покрывают 2/3 общей длины цепи нуклеотидов, это следует расценивать как серьёзный аргумент в пользу изложенной выше модели. Заметим, что если молекула ДНК геометрически представляет собой получаемое вращением куба чередование икосаэдров и додекаэдров, то инвариантом такой модели следует считать задаваемое обычно как *пересечение поверхности*

$$z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$$

с единичной сферой пространство икосаэдра, тождественное пространству додекаэдра. Разумеется, здесь, как и во многих других случаях, уместна ритуальная формула о необходимости дополнительных исследований.

Накопленный за многие столетия опыт научного исследования, не в последнюю очередь связанный с изучением золотой пропорции, показывает, что наиболее устойчивыми, жизнестойкими являются как раз те системы живой и неживой природы, которые несут в себе начала универсальной гармонии, такие как принципы минимальности, оптимальности, инвариантности, сохранения важнейших параметров системы при любых изменениях включая рост организмов. Есть достаточно серьёзные основания полагать, что правильные выпуклые многогранники, прежде всего икосаэдр и додекаэдр, относятся к числу форм пространственно-временного упорядочения материальных тел разного уровня сложности и масштаба, в наибольшей степени отвечающих указанным требованиям. Добавим, что крайне заманчивая идея единства мира на разных уровнях его организации, от структуры Метагалактики до входящей в состав живой клетки структуры молекулы ДНК [Implosion Group…], в свою очередь породила мистику золотой пропорции в додекаэдро-икосаэдрическом варианте с привлечением “священного” числа 72; останавливаться на этом, однако, не будем.

7. Герман Гримм

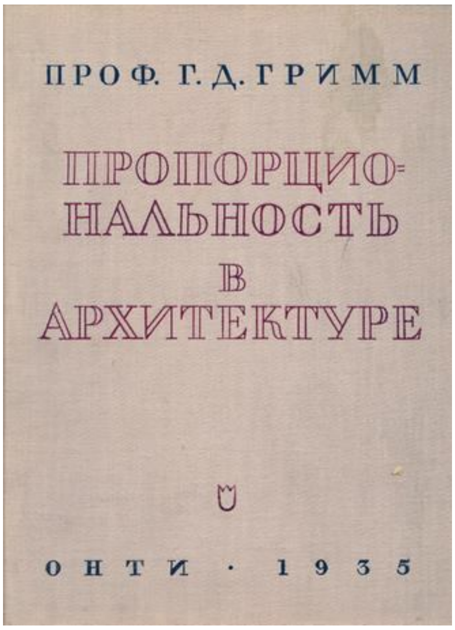
Большим любителем золотой пропорции был русский архитектор, историк и теоретик зодчества, Герман Давидович Гримм (1865–1942). Во введении к своей книге *Пропорциональность в архитектуре*, изданной в 1935 году, он заявляет следующее.

Ввиду исключительного значения золотого сечения в смысле такого пропорционального деления, которое устанавливает постоянную связь между целым и его частями, и даёт постоянное между ними соотношение, недостигаемое никаким другим делением, схема, основанная на нём, выдвигается как нормативная на первое место и принята нами в дальнейшем как при проверке основ пропорциональности исторических памятников, так и современных сооружений...

Считаясь с этим общим значением золотого сечения во всех проявлениях архитектурной мысли, теорию пропорциональности, основанную на делении целого на пропорциональные части, отвечающие членам геометрической прогрессии золотого сечения, следует признать основой архитектурной пропорциональности вообще.

Признание золотого сечения *основой архитектурной пропорциональности вообще* ко многому обязывает. Здесь оно влечёт за собой хвалебный гимн из четырнадцати пунктов – на один больше, чем у восхвалявшего *Divina Proportione* Луки Пачоли.

1. Одно золотое сечение решает полностью задачу пропорционального деления целого на неравные части, заключающегося в достижении гармоничного между ними и с целым отношения путём деления целого на такие две неравные части, из которых меньшая часть так относилась бы к большей, как эта последняя к целому, и обратно – целое к большей своей части, как большая к меньшей.
2. Одно золотое сечение из всех возможных делений целого даёт постоянное отношение между целым и его частями; только в нём от основной величины, – от целого находятся в полной зависимости оба предыдущих члена, причём отношение их между собою и с целым не случайное, а постоянное отношение, равное $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618$ при всяком значении целого.
3. При делении целого золотым сечением на майор и минор, этот последний в свою очередь является большим отрезком вновь разделённого по золотому сечению первичного майор.
4. Деление по золотому сечению, один раз проделанное над основным целым, может быть продолжено путём откладывания каждый раз минор на майор и даёт при этом непрерывный ряд золотых сечений производного порядка. Отношение же целого к любому члену производного его деления по золотому сечению равно соответствующей степени его майор.
5. Следствием п. 4 является дополнительное свойство золотого сечения, по которому постепенное деление целого по золотому сечению (высших порядков) даёт геометрически убывающую прогрессию со знаменателем $M=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618\ldots$ и каждый член этой прогрессии находится в отношении золотого сечения к его предыдущему и к его последующему члену.
6. Майор основного отрезка есть минор нового целого, состоящего из первоначального целого, сложенного с его майор.
7. На основании п. 5, прибавляя непрерывно к целому соответствующий ему майор, получаем геометрически возрастающую прогрессию со знаменателем $1/M=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618\ldots$
8. Сумма двух последовательных членов прогрессии золотого сечения равна предыдущему члену.
9. Разница двух последовательных членов прогрессии золотого сечения равна последующему члену.
10. Все перестановки отдельных членов, которые допускаются для всякой непрерывной геометрической пропорции, допустимы и для деления по золотому сечению.
11. Каждые три непосредственно расположенные друг за другом отрезка относятся между собой как майор и минор.
12. Деление по золотому сечению как первичное, так и высших порядков даёт наименьшее возможное число разных отношений между отрезками целого, делённого на неравные части, и даёт наилегчайшее восприятие этих отношений.
13. Постоянное отношение деления по золотому сечению 0,618, выраженное со сравнительно незначительной погрешностью в приближённых целых малых числах 8:5, 5:3, 3:2 отвечает численным величинам консонансных интервалов октавы – уменьшённой сексты, сексты и квинты...
14. Производное деление целого по золотому сечению. Золотое сечение высших порядков даёт приближённое значение оптимальных консонансных звуков октавы ... (Цит. по [С[6]]).



Книга Генриха Гримма

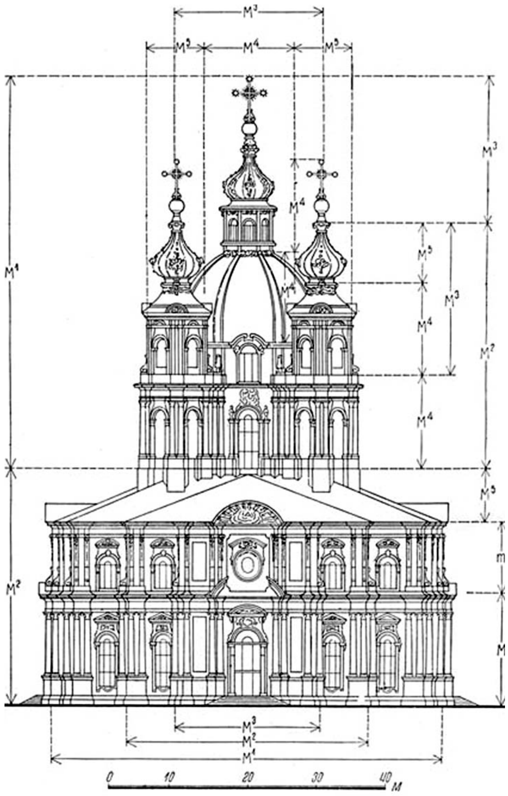
При внимательном чтении этих тезисов, особенно начальных, может возникнуть простая и, казалось бы, лежащая на поверхности, но не часто обсуждаемая дилемма. Поставим задачу следующим образом: разделить целое, для определённости отрезок, на две части, не используя в явном виде в формулировке задачи какой-либо принцип деления чисел. Есть две основные возможности: разделить отрезок на две равные или на две неравные части. С делением отрезка пополам всё, вроде, ясно, но каким должно быть деление на две неравные части? По условию задачи мы не можем требовать, чтобы один отрезок был больше или меньше другого в *n* раз. Но можно потребовать, чтобы отношение целого к большей части было бы таким же, как отношение большей части к меньшей. Фактически других возможностей сформулировать деление (отрезка), не прибегая к понятию числа, нет. Такое деление в принципе уникально и может осуществляться чисто геометрически, без знания числовой константы деления, как это, собственно говоря, и имело место в древнем мире. Нечто подобное, судя по его декларативным высказываниям, и углядел в золотой пропорции Гримм, используя такие выражения, как

Недостигаемое никаким другим делением; одно золотое сечение решает полностью задачу пропорционального деления целого на неравные части.

Единственность решения достаточно общей задачи, которое в равной мере может быть как арифметическим, так и геометрическим – в зависимости от того, составляется ли соответствующее уравнение, или же циркулем и линейкой строится искомая точка, – сильный довод в пользу теоретической значимости такого решения. Образуемая при этом геометрическая прогрессия обладает аддитивным свойством (целое равно сумме своих частей – в словесной формулировке), чего нет ни в одной другой геометрической прогрессии и что особо отмечено Гриммом. Принцип последовательного деления целого на майор и минор, приводящий к убывающей со знаменателем 0,618.. , либо возрастающей со знаменателем 1,618… геометрическим прогрессиям, имеет отношение к музыке и архитектуре. В качестве примеров Гримм приводит множество известных архитектурных сооружений, в том числе Парфенон, собор Святого Петра в Риме, Смольный собор в Петербурге.

Рассмотрение архитектурных сооружений приводит Гримма к следующему выводу.

Выясненное выше в нашем изложении исключительное значение в смысле пропорциональности деления золотого сечения как первичного, так и высших порядков, производного деления по схеме геометрической прогрессии золотого сечения, простая практическая применимость её, гибкость в подходе к композиционным началам, принятым предварительно эскизным проектом, наконец, установленное интуитивное её применение в отношении архитектурных частей выдающихся памятников прошлого, выдвигает схему золотого сечения на первое место… Основанная на законе золотого сечения пропорциональная схема геометрической его прогрессии даёт широкую возможность получения самых разнообразных делений, самых разнообразных членений архитектурного целого на пропорциональные между собой части. Полное пропорциональное равновесие архитектурного целого достигается соблюдением неразрывной пропорциональной связи общего со всеми его деталями. [Гримм, 135].

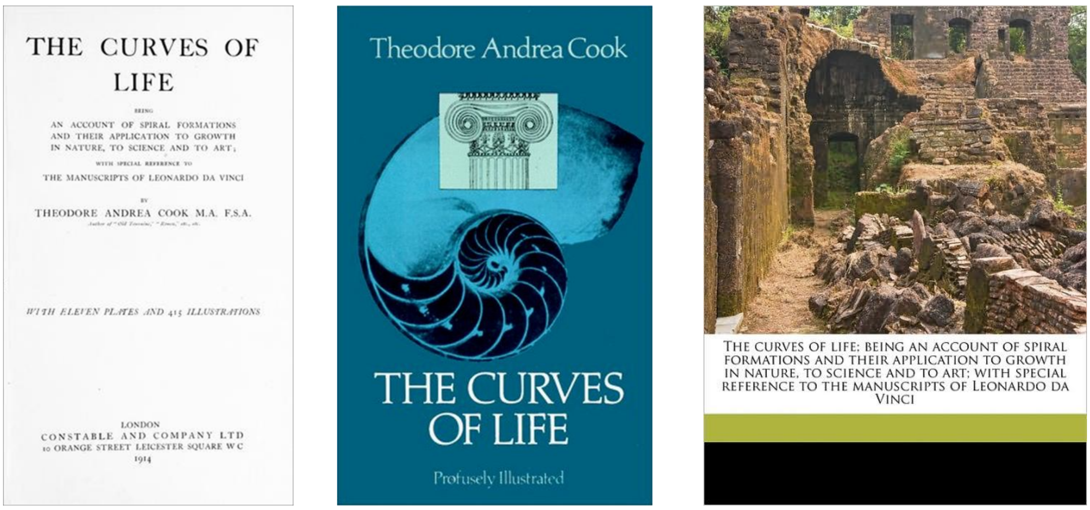


Золотой анализ Смольного собора в Петербурге по Гримму

Работа Гримма, очевидно, интересна не столько собранными им эмпирическими данными, сколько попыткой умозрительного обоснования важности золотого сечения. Писалась она в непростое время, в условиях жёсткой цензуры, что не могло не отразиться на её содержании. В наши дни книга Гримма порой упоминается в списке наиболее значительных трудов по ЗС, но котируется не так высоко, как другие известные работы первой половины прошлого века.

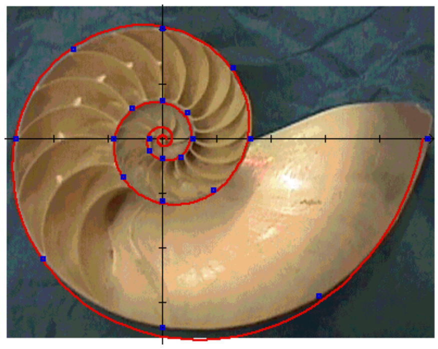
8. Теодор Кук

В 1914 г. английский искусствовед и писатель Теодор Кук (Andrea Theodore Cook, 1867–1928) издал книгу *The Curves of Life* (Кривые жизни) [Cook], переизданную в 1959, 1979 и 2010 гг. Она может быть отнесена к классике золотого сечения, и судя по переизданиям и индексу цитируемости интерес к ней сохраняется и в наши дни. Книга Кука примечательна в нескольких отношениях. Прежде всего, надо отметить, что именно в ней золотая константа впервые была обозначена заглавной греческой буквой Ф – в честь греческого скульптора и архитектора Фидия. Заметим в скобках, что по любопытному совпадению с этой же буквы начинается и прозвище Леонардо Пизанского, хотя скорее всего ни Фидий, ни Фибоначчи о числовом значении золотой константы не ведали.



Первое и более поздние издания книги Теодора Кука

Кук впервые назвал *золотым сечением* (*golden section*, сейчас чаще используется *golden ratio*, иногда – *golden mean*) основную, по сути, константу Ф = 1,61803…, а не её обратную величину 1/Ф = 0,61803…, как это было принято до него; для обозначения числа 0,61803… он использовал малую греческую букву φ. Впоследствии эти обозначения были приняты и другими; впрочем, сейчас чаще используется греческое ϕ вместо заглавной Ф и ϕ^{-1} вместо φ. Разумеется, книга Кука примечательна не только терминологическими новациями, которые в целом пришлись ко двору. Это оригинальное и многоплановое исследование спиралей, главным образом логарифмических, причём золотая спираль – на первом месте среди них. В книге 416 (!) иллюстраций, в том числе и семейства моллюсков *наутилус*, наиболее знаменитый представитель которого не случайно изображён на переплете книги 1979 года издания. О раковинах, завёрнутых в спираль, знали, конечно, и раньше, но мода на наутилус, видимо, пошла с Кука. Раковина этого моллюска, ставшая впоследствии одним из наиболее узнаваемых символов золотого сечения, привлекает своим внешним видом, особенно если в цветном изображении, и как живое, наглядное воплощение фундаментальных принципов формообразования в природе. В логарифмической спирали заложен закон роста природных объектов в виде закона сохранения формы (*Изменённая, я воскресаю той же* – Якоб Бернулли; Jakob Bernoulli, 1654–1705), причём, как считают на основе эмпирических измерений, в конкретной форме принципа золотого сечения, то есть в любой точке логарифмической спирали постоянный угол между радиусом вектором и касательной к точке равен ≈73°.



Наутилус в книге Кука, в натуре и в золотой спирали

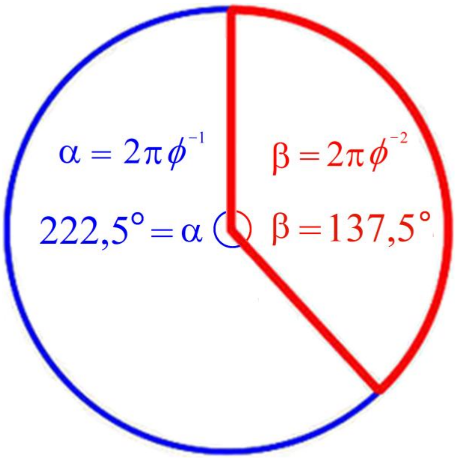
Спиральный рост, в силу его особенностей, весьма распространён в природе и характерен не только для моллюсков, но и многих рогатых, других животных и растительных организмов. Спирали, близкие к золотым, Кук во множестве обнаруживает также в архитектуре и изобразительном искусстве. Довольно часто он обращается к творчеству Леонардо да Винчи, ищет золотое сечение в пропорциях человеческого тела и находит в картинах Сандро Боттичелли, Франса Халса и Уильяма Тернера.

Спирали в волосах и на шлеме (набросок Леонардо к *Леде* и его же барельеф с изображением Сципиона Африканского)

В книге Кука затронуты и другие, непосредственно относящиеся к теории золотого сечения темы, в частности последовательность Фибоначчи и угол расхождения ≈137,5° в растениях в связи с явлением филлотаксиса. Об этом свидетельствует небольшой отрывок из работы, представленный нами в несколько вольном переводе.

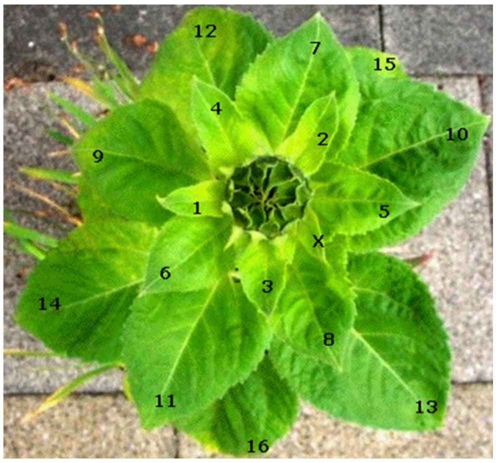
Ранее было объяснено, что в последовательности Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … отношение соседних членов приблизительно постоянно, если же мы продвигаемся вверх по последовательности, это отношение стремится к пределу, равному $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Угол в $(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2})360°$ градусов равен 137°30′27,95″, и если листья на прямом стебле растения расположены с углом расхождения, равным приблизительно 137°30′28″, никакие два листа не окажутся один над другим, и такое расположение в целом идеально. Отсюда мы выводим тот факт, что в растениях, использующих этот угол для наименьшего наложения и максимальной освещённости их поглощающих свет частей, реализуется расположение листьев, которое может быть выражено посредством чисел Фибоначчи. Следует, наконец, отметить, что числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 и т. д. случайными ни в коей мере не являются [Там же, 418, 419].

В современной терминологии задача деления окружности (угла, равного в радианах 2π) в золотой пропорции может быть сформулирована следующим образом. Целое (2π) относится к большему углу α так, как α относится к меньшему углу β; при этом, $\alpha + \beta = 2\pi$ и $\alpha > 0$. Арифметически это система двух уравнений для неизвестных α и β, решение которой в радианах и угловых градусах показано на рисунке.



Деление окружности в золотой пропорции в радианах и градусах

Нахождение в явлении филлотаксиса золотого угла дивергенции $\approx 137{,}5°$ в задаче на оптимум следует считать одним из наиболее значительных и надёжно установленных проявлений ЗС в природе. Растение, как динамическая самоорганизующаяся система, находится под действием сил, обеспечивающих её наибольшую адаптацию к внешней среде, включая наиболее выгодное с точки зрения жизнедеятельности расположение листьев. А насколько точно выполняется указанный Куком угол дивергенции, можно судить по рисунку из [Knott] для обозначенных числами от 1 до 16 пар листьев (1, 2), (3, 4), (5, 6), …, (15, 16).



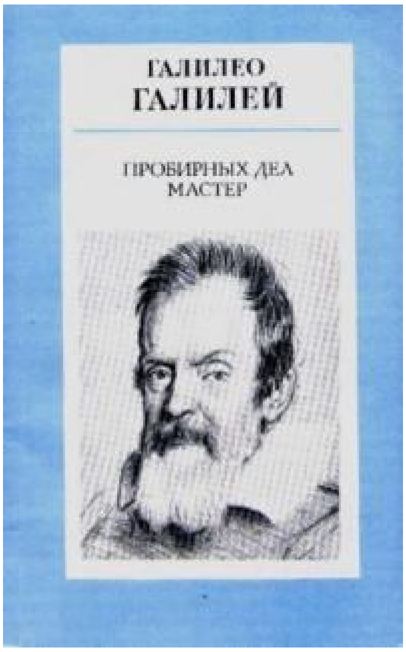
Дивергенция в явлении филлотаксиса

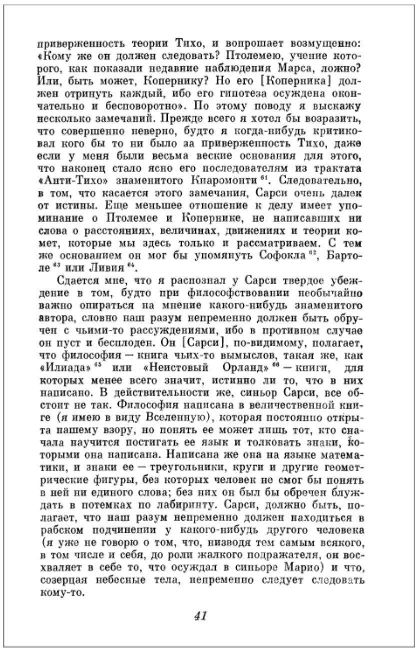
В любом случае вопросы, перешедшие к Куку "по наследству" от его предшественников, включая Леонардо да Винчи, обсуждаемые, рассмотренные и в какой-то степени решённые им, актуальны и сегодня. В историю науки Теодор Кук вошёл как исследователь спиралей и винтовых линий в их применении к науке, а в историю ЗС – как исследователь двумерной и трёхмерной золотых логарифмических спиралей.

9. Язык математики и Д'Арси Томпсон

Стремление представить окружающий нас мир, включая живую природу, посредством математических построений и моделей кажется вполне естественным, но достичь этого далеко не просто. Даже имея в своём распоряжении весь необходимый арсенал подручных средств, нет и не может быть никакой гарантии успеха, подобно тому, как даже совершенное знание языка и его тонких нюансов – не более чем заявка, но не пропуск, не входной билет в мир большой литературы, где без *божьей искры* делать решительно нечего. Единственно возможным языком, на котором может быть описана структура мироздания в целом и его тонких деталей, является, по общепризнанному, математика. При этом часто ссылаются на крылатую формулу Галилея *Книга природы написана на языке математики*, которую он в таком виде не высказывал. Приписываемая ему фраза – вольный, оторванный от контекста и по сути искажённый пересказ оригинала, в котором говорится о *философии* как *Книге* о *Вселенной*, написанной *геометрическими фигурами*.

Философия написана в той величественной Книге (я имею в виду Вселенную), которая всегда открыта нашему взору, но читать её может лишь тот, кто сначала освоит язык и научится понимать знаки, которыми она начертана. Написана же она на языке математики, и знаки её – треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых нельзя понять ни единого из стоящих в ней слов и остаётся лишь блуждать в тёмном лабиринте [Галилей, 41].




приверженность теории Тихо, и вопрошает возмущенно: «Кому же он должен следовать? Птолемею, учение которого, как показали недавние наблюдения Марса, ложно? Или, быть может, Копернику? Но его [Коперника] должен отринуть каждый, ибо его гипотеза осуждена окончательно и бесповоротно». По этому поводу я выскажу несколько замечаний. Прежде всего я хотел бы возразить, что совершенно неверно, будто я когда-нибудь критиковал кого бы то ни было за приверженность Тихо, даже если у меня были весьма веские основания для этого, что наконец стало ясно его последователям из трактата «Анти-Тихо» знаменитого Киарамонти [61]. Следовательно, в том, что касается этого замечания, Сарси очень далек от истины. Еще меньшее отношение к делу имеет упоминание о Птолемее и Копернике, не написавших ни слова о расстояниях, величинах, движениях и теории комет, которые мы здесь только и рассматриваем. С тем же основанием он мог бы упомянуть Софокла [62], Бартоле [63] или Ливия [64].

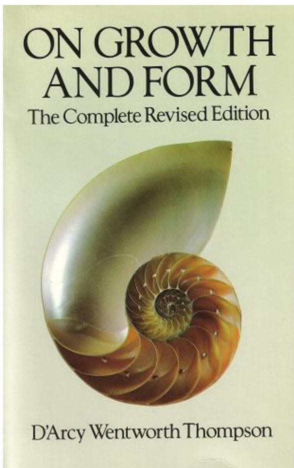
Сдается мне, что я распознал у Сарси твердое убеждение в том, будто при философствовании необычайно важно опираться на мнение какого-нибудь знаменитого автора, словно наш разум непременно должен быть обручен с чьими-то рассуждениями, ибо в противном случае он пуст и бесплоден. Он [Сарси], по-видимому, полагает, что философия — книга чьих-то вымыслов, такая же, как «Илиада» [65] или «Неистовый Орланд» [66] — книги, для которых менее всего значит, истинно ли то, что в них написано. В действительности же, синьор Сарси, все обстоит не так. Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки ее — треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова; без них он был бы обречен блуждать в потемках по лабиринту. Сарси, должно быть, полагает, что наш разум непременно должен находиться в рабском подчинении у какого-нибудь другого человека (я уже не говорю о том, что, низводя тем самым всякого, в том числе и себя, до роли жалкого подражателя, он восхваляет в себе то, что осуждал в синьоре Марио) и что, созерцая небесные тела, непременно следует следовать кому-то.

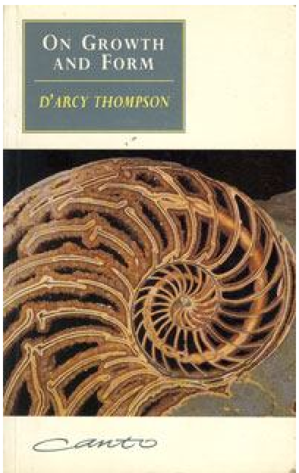
41

Фронтиспис изданного в 1623 г. оригинала, русский перевод книги и страница со знаменитым изречением

В современном понимании математики как универсального языка описания Вселенной главная роль отводится всё же числовой математике, числовым моделям и константам. Без них геометрические образы хотя и полезны, даже необходимы, но лишены той количественной конкретики, которая требуется для точности анализа, научной верификации и прогностики. Но суть вопроса здесь в другом: как не заблудиться, плутая в *тёмном лабиринте*, о котором предупреждает Галилей? Что, в частности, мешает применению математического инструментария для описания живых организмов? “Мешает” сложность организмов, трудность выявления механизмов их образования и развития, необходимость учёта различных факторов, включая не лежащие на поверхности “скрытые параметры” и так далее. Образно говоря, знание языка недостаточно для правильного прочтения и понимания сложного, запутанного, полного недомолвок текста.

Но трудности, как известно, существуют для того, чтобы их преодолевать, и недостатка в учёных-энтузиастах, стремящихся к научному пониманию природы, не наблюдается. Это проблема комплексная, и для её более полного описания используется не только математический аппарат, но также результаты, полученные в физике, химии и других областях науки. В этом плане показательным можно считать изданный в 1917 г. капитальный труд *О росте и форме* шотландского биолога и математика Д’Арси Томпсона (D’Arcy Wentworth Thompson, 1860–1948). Переиздаваемая и в наши дни книга Томпсона – классика данного жанра научной литературы, нередко цитируемая и ставшая образцом для многих авторов.





Современные издания книги Д’Арси Томпсона

Томпсон – горячий сторонник применения математичеких методов для описания формы природных явлений, о чём свидетельствуют выдержкки из главы XVII *К теории трансформаций или сравнение родственных форм* его книги.

Изучение формы может быть чисто описательным, а может быть аналитическим. Так, к примеру, форма Земли, капли дождя, радуги, висячей цепи, траектория полёта брошенного камня могут быть описаны обычными словами, однако когда мы приобретаем умение для описания сферы или параболы, мы получаем значительное преимущество. Математическое описание формы обладает точностью, которая практически отсутствует на стадии чистого описания; оно выражается несколькими словами или даже ещё короче – несколькими математическими символами, и эти слова или символы настолько информативны, что объём описания существенно сокращается. Это иллюстрирует афоризм: “Природа начертана геометрическими символами”.

… Мы привыкли думать, что математические определения недостаточно гибки для повседневного использования, но их жёсткость сочетается с бесконечной свободой. Точное определение эллипса относится ко всем эллипсам на свете, определение “сечения конуса” расширяет наши представления, а “кривая более высокого порядка” помогает нам почувствовать себя ещё более свободно. При помощи существенных ограничений этой регулируемой свободы через математический анализ мы достигаем математического синтеза.

… Более того, мы быстро переходим от математической концепции формы в статике к форме в динамике, что и составляло нашу основную цель: мы переходим от самой формы к пониманию создающих её сил; в самой форме мы видим диаграмму равновесных сил, а в сравнении родственных форм – величину и направление сил, необходимых для превращения одной формы в другую.

… Существует и метод, предложенный Пуанкаре, – выразить всё через математическую функцию и понять, почему её правила и методы соответствуют всем физическим законам. Любое сколь угодно простое природное явление в реальности состоит из многих компонент, а любое видимое действие и эффект являются результатом бесчисленных соподчинённых действий. Здесь математика являет свою истинную мощь комбинаций и обобщений… Рост и форма всецело обладают комплексной природой, поэтому математические правила необходимы для их описания и интерпретации.

… По тем или иным причинам множество живых форм невозможно описать более или менее определённо в математических терминах, потому что существуют затруднения в физике для математиков современности, к примеру, мы никогда не сможем вывести формулу для описания рыбы или черепа. Но мы уже можем использовать математический язык для описания хотя бы в общих чертах формы раковины улитки, завитка рога, контура листа, текстуры ткани, структуры скелета, волшебного кружева крыла насекомого. Даже для этого мы должны научиться у математиков упрощению и обобщению, способности держать в голове типовой случай и забывать про отклонения ([Томпсон, гл. XVII], перевод П. Волковой).

В объёмистой, содержащей более четырёхсот рисунков, графиков, диаграмм, таблиц с многочисленными эмпирическими данными, книге Томпсона, которую он сам представляет как введение к изучению органических форм, словосочетание *золотое сечение* (*golden mean*) упоминается всего несколько раз, не часто заходит речь и о числах Фибоначчи. Приводятся различные математические формулы и соотношения, плоские геометрические фигуры и трёхмерные тела, в том числе додекаэдр и икосаэдр. Подробно рассмотрена логарифмическая спираль, которой посвящена большая глава – почти сто страниц, кроме того рассматривается множество спиральных структур в природе. Спираль неявно присутствует в самом названии книги и на обложках её последних изданий; в некотором смысле книга Томпсона – это математический, с привлечением эмпирического материала, научный трактат о спиралях как о форме, по которой происходит естественный рост многих природных организмов, как и отдельных их частей.

Но даже многократно упоминаемый и исследуемый в книге наутилус, который сегодня считается символом и едва ли не наиболее значительным и наглядным примером применения принципа золотого сечения в живой природе, Томпсон с золотым сечением не соотносит. Исследуя математически логарифмическую спираль, он даёт её общую формулу в дифференциальной, логарифмической и экспоненциальной формах [Там же, 532]:

$$dr/r = d\theta \cot\alpha, \quad \log r = \theta \cot\alpha, \quad r = e^{\cot\alpha},$$

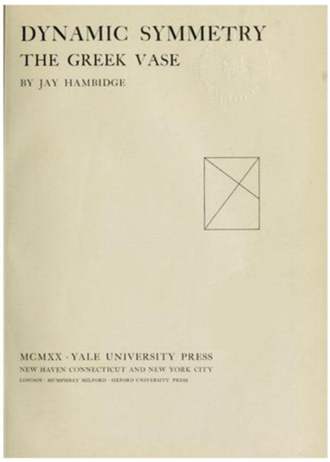
где параметр α – постоянный для каждой спирали угол между радиусом вектором r и касательной в данной точке. Далее рассматривается множество встречающихся в природе спиралей с углами α в широком диапазоне значений, и среди них не оказалось ни одной золотой ($\alpha \approx 73°$).

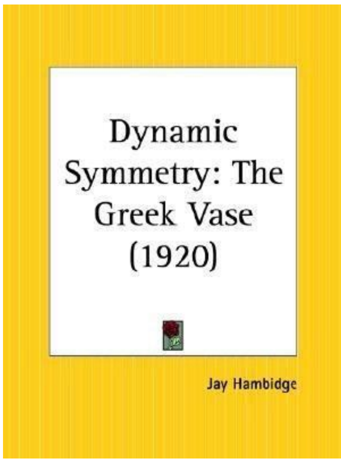
В главе XIV, в соотнесённости с винтовыми линиями и спиралями, рассматривается явление филлотаксиса. Упоминаются древние египтяне и греки, Леонардо да Винчи, Бонне, братья Браве, Цейзинг, Гофмейстер, Кук, Чёрч, а также менее известные сейчас исследователи филлотаксиса XIX в. (Sach J., Brown A., Schimper C., Naumann C.F., Lestiboudois T., Henslow G., von Wiesner J., Airy H., Schwendener S., Delpino F., de Candolle C.) [Там же, 635, 636]. Однако, в отличие от многих других, Томпсон скептически относится к существующим в то время математическим моделям филлотаксиса, включая и такой неотъемлемый их компонент, как отношения типа F_n/F_{n+1} для расположения листьев в растениях. В частности, он замечает, что даже отношение 5/8 = 0,625 весьма приблизительно аппроксимирует золотое сечение, а более точные аппроксимации 8/13, 13/21, не говоря уже о 34/55, 55/89, 89/144, встречаются редко, в то время как обычными являются совсем уж далёкие от ЗС отношения 3/5, 2/3 и 1/2. Исходя из подобных соображений, Томпсон оценивает имеющиеся математические модели филлотаксиса как геометрическую и арифметическую игру, пифагореизм, натурфилософию с идеалистическим уклоном и даже как мистический идеализм [Там же, гл. XIV].

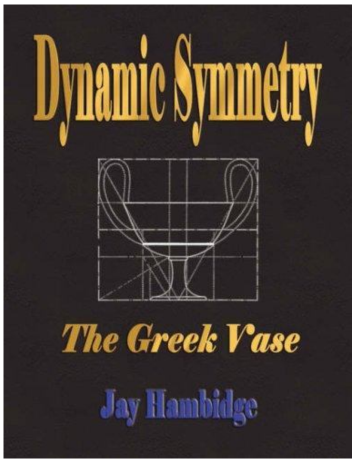
Впрочем, уважительное отношение к греческой античности, Платону и пифагорейцам автору отнюдь не чуждо, о чём свидетельствуют отдельные фрагменты книги, её эпилог и весь дух исследования. Но что касается золотого сечения и чисел Фибоначчи, их роль в работе более чем скромна, хотя, как ни странно, книга Томпсона не так уж редко упоминается среди работ по ЗС. Возможно, это связано с сохранением основной идеи работы последователями, но с изменёнными конечными результатами и выводами. Во всяком случае, усовершенствование используемых в книге Томпсона методов исследования спиральных структур, уточнение соответствующей базы эмпирических данных и особенно более глубокий математический анализ явления филлотаксиса восстановили в глазах многих принцип золотого сечения в статусе одного из формообразующих принципов живой природы.

10. Джей Хэмбидж

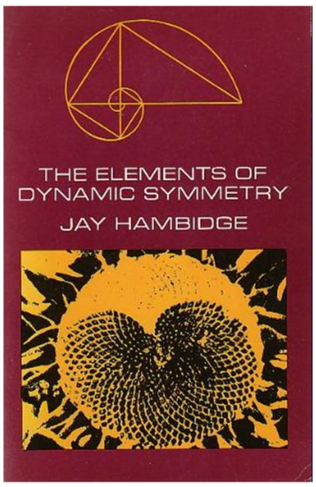
Понятие *динамическая симметрия*, используемое сейчас в науке, в частности физике, впервые ввёл американский художник и искусствовед Джей Хэмбидж (Jay Hambidge, 1867–1924) в книге *Dynamic symmetry. The Greek Vase* [Hambidge] (в дальнейшем [H]). Она издана в 1920 г. и переиздаётся в наши дни. Кроме того, динамическая симметрия подробно представлена в изданной в 1926 г. книге *The Elements of Dynamic Symmetry* [H[1]], составленной на основе опубликованных в его журнале *Diagonal* лекций, которые Хэмбидж читал в Европе. Как и во множестве других случаев, популярность подобного рода книг обусловлена тем, что поднятые в них проблемы волнуют и современного читателя, не потерявшего интерес к общим вопросам, касающимся гармонии, пропорциональности, симметрии…







Первое и некоторые из последующих изданий книги Хэмбиджа



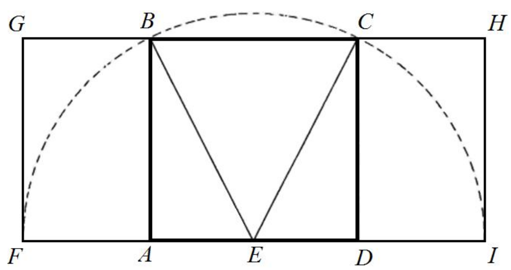
Написанная на основе лекций книга Хэмбиджа в современных изданиях

Неравнодушный, как и многие, к греческой античности, Хэмбидж полагал, что в основе пропорциональности и симметрии греческой архитектуры, скульптуры и керамики лежат определённые арифметические соотношения и геометрические построения. Идея, конечно, не нова, но Хэмбидж попытался её конкретизировать. Изучая различные памятники греческой архитектуры, в том числе Парфенон, храм Апполона в Бассах, Зевса в Олимпии, он сформулировал свою теорию *Динамической симметрии*, в которой особая роль принадлежит золотой константе, её многочисленным производным и сходящейся к ней последовательности чисел, отличающейся от классического ряда Фибоначчи. Книга Хэмбиджа на русский не переведена, поэтому основные идеи динамической симметрии, в их связи с золотым сечением, дадим в кратком изложении.

Базовые принципы, лежащие в основе высокого искусства, могут быть обнаружены в пропорциях человеческого тела и в росте растений. Эти принципы были выявлены и стали рабочим инструментом для большого числа выдающихся деятелей искусства. Принципы организации, обнаруженные в строении человека и растений, Хэмбидж называет *динамической симметрией*. Она характерна для искусства древнего Египта позднего периода, затем, перекочевав в Грецию, получила там своё дальнейшее развитие и прослеживается в работах всех известных мастеров великого классического периода. Для выявления этих принципов посредством анализа, предупреждает автор, требуется особый талант, специальная тренированность, солидная математическая выучка, большое терпение и глубокое эстетическое чувство [H[1], xi]. Людей, обладающих таким букетом достоинств, не так уж много, наверное, поэтому динамическая симметрия относится к категории оригинальных, но скорее экзотических, чем широко принятых концепций. Как бы то ни было, продолжим рассмотрение, поскольку в контексте настоящей работы динамическая симметрия представляет несомненный интерес.

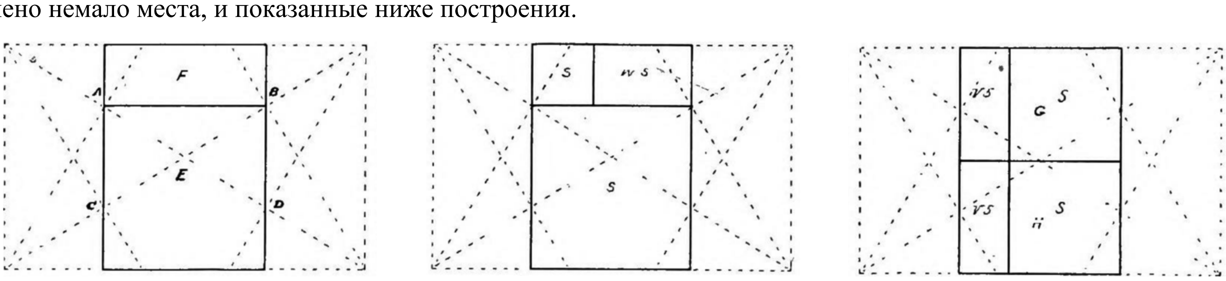
Автор отличает её от симметрии статической, характерной для искусства Египта раннего периода, а также искусства китайского, ассирийского, японского, персидского, хинди, исламского, коптского, византийского и готического. Анализ безошибочно показывает, что во всех этих случаях сознательно применялись схемы построения, относящиеся к одному и тому же типу. Речь, осторожно заявляет Хэмбидж, идёт не о преимуществах, а лишь о принципиальных различиях двух подходов. Статическая симметрия является частным случаем динамической симметрии, подобно тому как окружность есть частный случай эллипса. Она представляет собой фиксированную форму организованности или состояния, упорядоченное распределение элементов относительно центра или в плоскости, которой художник или ремесленник могут придерживаться бессознательно. В качестве примеров статической симметрии приводятся кристаллы, снежинки, сечения некоторых фруктов, диатомовые водоросли и радиолярии, произведения искусства указанных стран и культур, а также раннее античное искусство [Там же, xii, xiii].

Элементы динамической симметрии Хэмбидж показывает на множестве геометрических построений, из которых здесь представлены наиболее важные, с несущественными дополнениями чисто дидактического характера. Если, следуя фактически Евклиду, взять единичный квадрат $ABCD$ и из средней точки E как из центра провести полуокружность, легко получить, как показано на рисунке, несколько четырёхугольников. Поскольку радиус окружности (в современных обозначениях) равен $\phi - 1/2$, нетрудно посчитать что $FA = DI = \phi - 1/2$, $FD = AI = \phi$, а основание большого четырёхугольника $FGHI$ равно $2\phi - 1 = \sqrt{5}$.



Построение динамической симметрии из квадрата

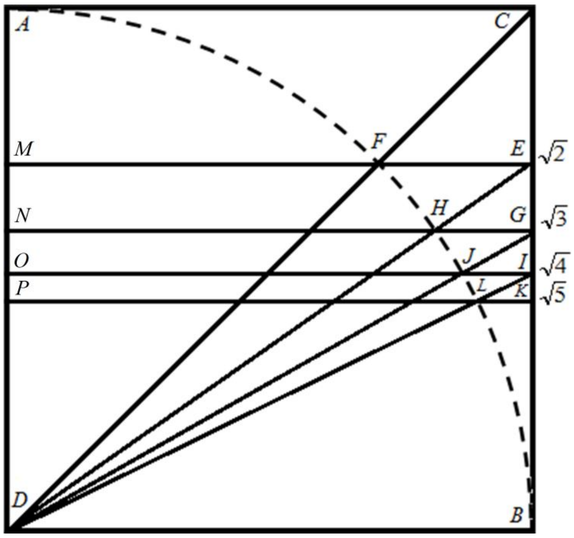
Подобные построения можно производить в разных направлениях от исходного квадрата, с повторами и дальнейшим делением на отдельные части. Таким способом могут быть получены равноугольная спираль, которой в работе уделено немало места, и показанные ниже построения.



Построение динамической симметрии в разных направлениях

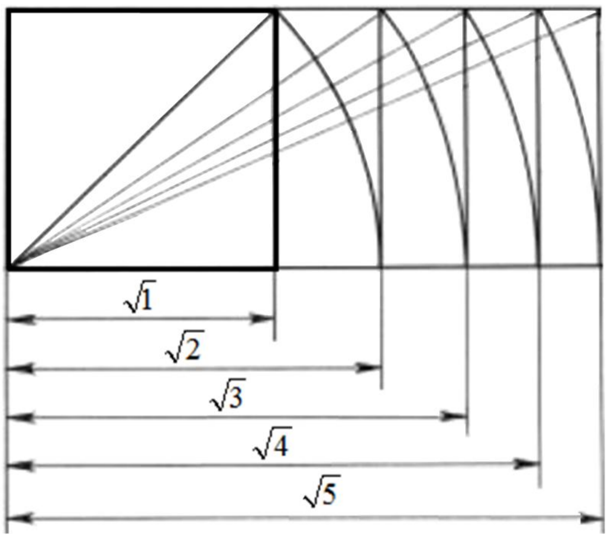
Здесь почти всё связано с константой ϕ. Например, на левом рисунке, принимая площадь квадрата E за единицу, имеем значение ϕ^{-2} для прямоугольника F, что в сумме с квадратом даёт $1 + \phi^{-2} = 1{,}382...$. По словам Хэмбиджа, многие греческие вазы были созданы в соответствии с принципом, заложенным в получение формы со значением 1,382 **[**Н, 20, 21**]**.

Динамическая симметрия, помимо непосредственной связи с золотой константой и её производными, относится и к квадратным корням, которые могут быть построены внутри и вне квадрата, причём равный $2\phi - 1$ корень квадратный из пяти выделен и здесь. В квадрате $DACB$ дуга окружности AB и диагональ DC пересекаются в точке F. Прямая, проведённая через точку F параллельно DB, пересекает квадрат в точке E, что означает построение площади, равной квадратному корню из двух. Диагональ DE пересекает дугу окружности в точке H, а прямая, проходящая через H параллельно DB, приводит в точке G к корню квадратному из трёх. Далее, пересекающая окружность в точке J диагональ DG и проходящая через неё прямая дают в точке I корень квадратный из четырёх, таким же способом получается точка K для квадратного корня из пяти. Метод геометрически прост, но дидактически не вполне удобен: ряд возрастающих по величине квадратных корней привязан к уменьшающимся по длине диагоналям и площадям. Для большей наглядности мы добавили к оригиналу символы M, N, O и P, чтобы было совершенно ясно, что $\sqrt{2}$ относится к площади четырёхугольника $DMEB$, ($ME : DM = \sqrt{2}$), $\sqrt{3}$ – к площади $DNGB$, $\sqrt{4}$ – к $DOIB$, $\sqrt{5}$ – к $DPKB$.



Связь динамической симметрии с квадратными корнями в пределах единичного квадрата

Более нагляден метод построения выражаемых квадратными корнями площадей уже не в пределах, а вне квадрата – излюбленной изначальной фигуры динамической симметрии. Рисунок ниже, в отличие от предыдушего обошедший многие работы по золотому сечению и смежным проблемам, не нуждается в комментариях и дополнительных обозначениях.

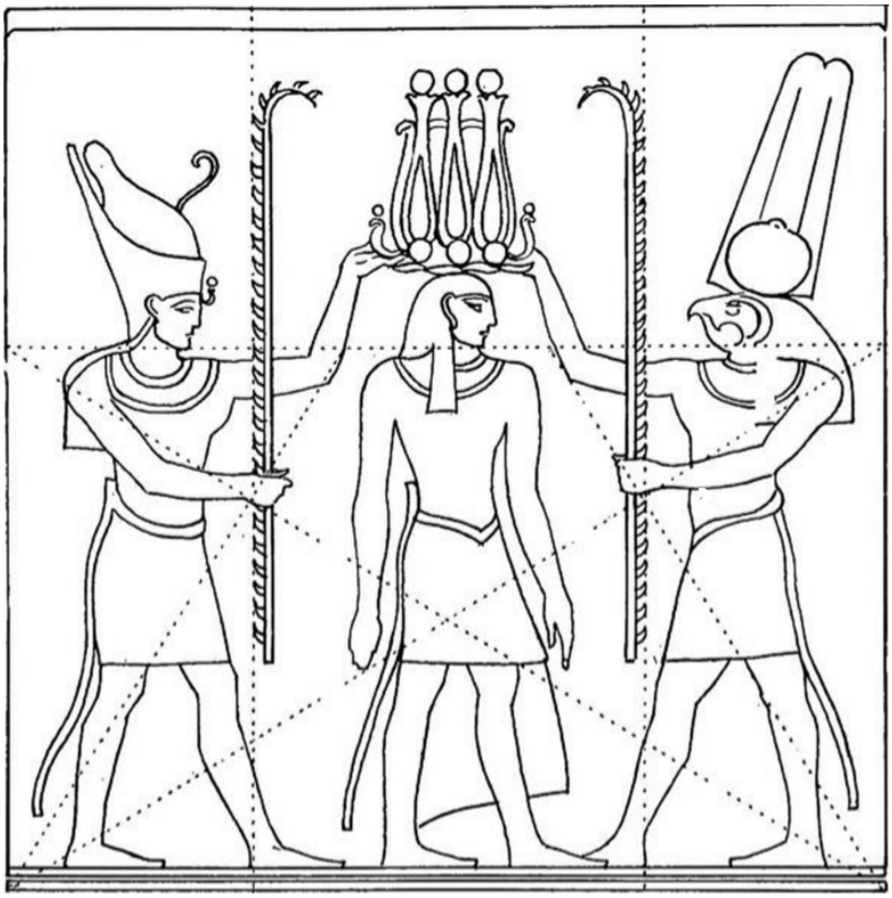


Связь динамической симметрии с квадратными корнями вне единичного квадрата

Построение динамических прямоугольников можно, конечно, продолжить, но Хэмбидж считает, что отношения подобного типа, превосходящие $\sqrt{5}$, равные, как он не раз отмечает, сумме 1,618 и её обратной величины 0,618, – большая редкость в искусстве. От иррациональных чисел можно перейти к рациональным, если от отрезков перейти к площадям. Очевидно, что квадрат, построенный на большей стороне прямоугольника со сторонами 1 и $\sqrt{2}$, в 2 раза больше квадрата, построенного на меньшей стороне. Аналогично в четырёхугольнике со сторонами 1 и $\sqrt{3}$ квадрат, построенный на большей стороне, в 3 раза больше единичного квадрата и так далее.

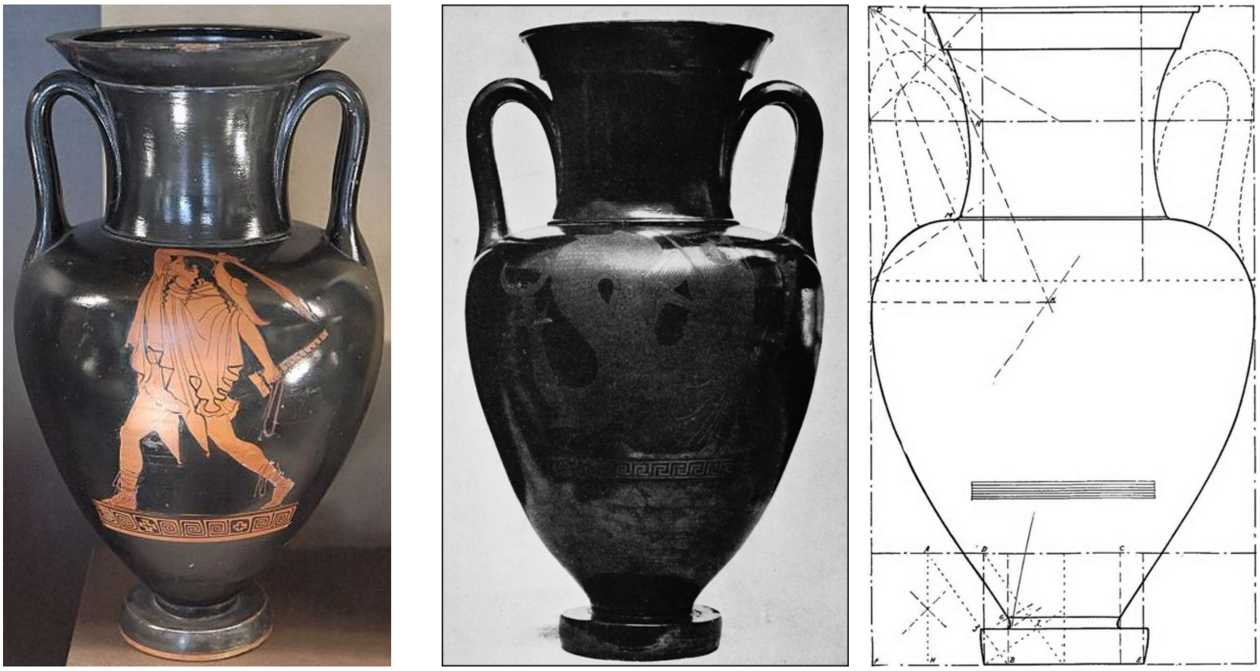
Динамические прямоугольники являются первичными элементами композиции в системе Хэмбиджа, и каждый из них может быть разбит на отдельные части, давая новые композиционные решения. Особо интересно разбиение золотых прямоугольников. Само выражение $\sqrt{5} = 2\phi - 1$ подсказывает, что прямоугольник $\sqrt{5}$ можно разбить на квадрат и два прямоугольника золотого сечения. Выражение $\phi = 1 + \phi^{-1}$ подсказывает деление на квадрат и прямоугольник со сторонами 1 и ϕ^{-1}. Золотой прямоугольник можно делить на две, три, четыре части, каждый раз получая золотые прямоугольники меньших размеров. Например, разделив прямоугольник ϕ на три части, получим, как нетрудно убедиться, по три малых золотых прямоугольника в каждой трети.

Реализацию принципов динамической симметрии Хэмбидж показывает на множестве произведений египетского и греческого искусства.



Египетский барельеф в анализе динамической симметрии

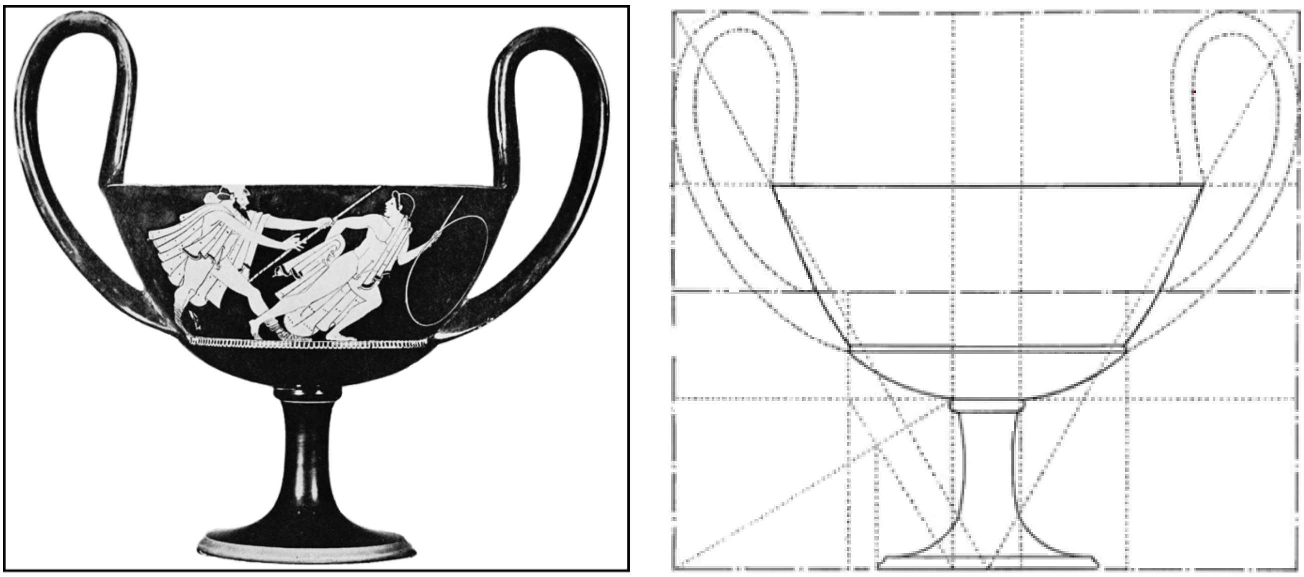
Среди полутора десятка рассматриваемых с позиций динамической симметрии античных амфор особое место занимает ноланская амфора из музея исскусств Гарвардского университета, представленная возле титульного листа книги, как некий символ всей работы. “Греческая ваза” – в заголовке книги, а ноланскую амфору Хэмбидж считает необычайно красивой, с чем можно вполне согласиться: амфоры из города Нола (южная Италия), как, впрочем, и другие античные амфоры, действительно хороши. Отношение длины к максимальной ширине гарвардской амфоры равно 1,7071, что по Хэмбиджу есть $1 + 1/\sqrt{2}$, то есть квадрат и прямоугольник с отношением длин сторон, равным величине обратной квадратному корню из двух. В нашей терминологии это отношение константы да Винчи к константе Пифагора: $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Анализ отдельных частей амфоры также приводит к $\sqrt{2}$, которое вообще является одним из основных элементов динамической симметрии [Н, 45]. “Золотого” содержания здесь, как видим, нет.



Одна из ноланских амфор (слева), амфора из Гарвардского музея и её анализ с позиций динамической симметрии

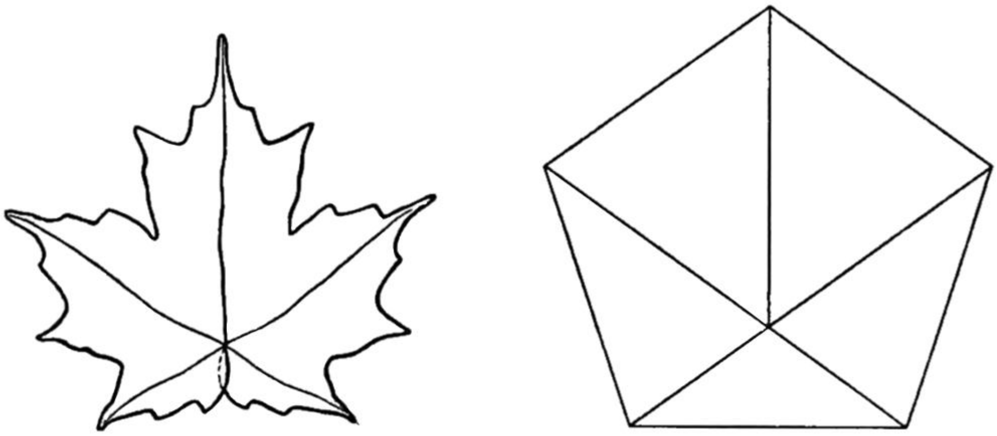
Однако во многих других случаях Хэмбидж обнаруживает целые россыпи золотых пропорций. Это не только амфоры, но также и канфары, вроде того, что хранится в Музее изобразительных искусств в Бостоне. Он не вполне симметричен, что видно уже из рисунка слева: левая ручка выше правой. Анализ динамической симметрией, проведённый Лейси Каски (Lacy D. Caskey, 1880 – 1944), "исправляет" этот дефект и даёт множество отношений, связанных с золотой константой, расположенных здесь в порядке возрастания [Н, 67, 68]:

$$\frac{1}{\phi + 2} \approx 0{,}2764, \qquad \phi^{-1} \approx 0{,}618, \qquad \frac{2}{2\phi - 1} \approx 0{,}894, \qquad 1 + \frac{1}{2\phi} \approx 1{,}309, \qquad \phi + 1 + \frac{1}{2\phi} \approx 2{,}927$$



Канфар из Бостонского музея и его анализ посредством динамической симметрии

Эти и множество других выражающихся через константу ϕ отношений, а также их половины, обратные величины и половины обратных величин, считаются наиболее часто встречающимися как в природе, так и в античном греческом искусстве пропорциями динамической симметрии [Н[1], 105]. Такое большое количество – около полусотни производных золотой константы довольно редко встречается даже в современных работах по ЗС. Появление подобных пропорций в греческом искусстве, по Хэмбиджу, отнюдь не случайно, а подсказано природой. Ссылаясь на тринадцатую книгу *Начал* Евклида, он полагает, что в основе греческого искусства – глубокое и тщательное изучение встречающихся в природе пропорций. В качестве примера приводится клёновый лист, который хорошо вписывается в богатый золотыми пропорциями правильный пятиугольник и вообще служит прекрасной иллюстрацией реализации принципов динамической симметрии в природе [Н, гл. 3].



Лист клёна в сравнении с правильным пятиугольником

Ссылаясь на опубликованную в 1904 г. классическую работу [Church] по филлотаксису, Хэмбидж приводит ряд 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … как геометрическую прогрессию, реально представляющую симметрию растений, где *симметрия* понимается как древнегреческая *аналогия*. Из такой последовательности может быть получена вся структура динамический симметрии, которая применима не только к архитектуре растений, но и к строению человеческого тела. А более точное, по мнению автора, представление может быть достигнуто последовательностью чисел

118, 191, 309, 500, 809, 1309, 2118, 3427, 5545, 8972, 14517, …,

в которой отношение соседних членов равно числу 1,6180, необходимому для объяснения наблюдаемой в растительном мире симметрии [H[1], 3]. В последовательности Фибоначчи пропущен первый член, и является она не геометрической прогрессией, а рекурсией второго порядка.

Впрочем, мелкие математические “ляпы” художника Хэмбиджа не так существенны, любопытно другое. Начальные члены классического ряда Фибоначчи – натуральные числа, с золотой константой непосредственно не связанные, аппроксимирующие её значение отношением последующего члена к предыдущему. А вот в последовательности 118, 191, 309, 500, 809, …, также аппроксимирующей константу ϕ и сходящейся к ней в пределе, уже все члены, начиная с начальных 118 и 191 связаны с числом 1,6180. Нетрудно догадаться, что 118 это первые три десятичных знака мантиссы числа $1/\phi - 1/2 \approx 0{,}118$, умноженная на тысячу, 191 – умноженная на тысячу мантисса числа $1 - \phi/2 \approx 0{,}191$, число 309 – умноженная на тысячу мантисса $1/2\phi$, равная сумме $1/\phi - 1/2$ и $1 - \phi/2$, что после несложных преобразований, с учётом особенностей числа ϕ, приводит как раз к значению $1/2\phi$. Любопытный, можно сказать, способ максимального приближения линейной рекурсии с начальными трёхзначными положительными числами к золотой константе. А вопрос о преимуществах – в применении к структуре растений и строению человеческого тела – такой последовательности по сравнению с классическим рядом Фибоначчи, как и вообще вопрос о том, насколько хорошо идея динамической симметрии раскрывает секреты античного искусства, следует считать открытым.

11. Лейси Каски

Убеждённым сторонником идей Хэмбиджа, дополнившим его исследования новыми результатами, был хранитель Музея искусств в Бостоне Лейси Каски. В предисловии к его книге *Геометрия греческих ваз* даётся следующая характеристика теории Хэмбиджа [Caskey, vii].

В книге “Динамическая симметрия: греческая ваза” мистера Хэмбиджа прослеживается замечательная связь между пропорциями аттических ваз и прямоугольников, получаемых из квадратов простым способом, известным греческим геометрам. Мистер Хэмбидж обнаружил, что если предельная пропорция вазы, то есть существующее отношение между её высотой и наибольшей шириной выражается посредством одного из этих прямоугольников, тогда высота и ширина всех её частей может быть выражена посредством именно этого прямоугольника. Ваза обладает симметрией в том смысле, что все её элементы соизмеримы, а общим множителем или координирующим принципом является прямоугольник со сторонами, соответствующими простым отношениям $1:\sqrt{1}$, $1:\sqrt{2}$, $1:\sqrt{3}$, $1:\sqrt{5}$. За исключением первого, эти отношения соизмеримы своими квадратами, но не отрезками; они могут быть исследованы геометрически, но не арифметически.

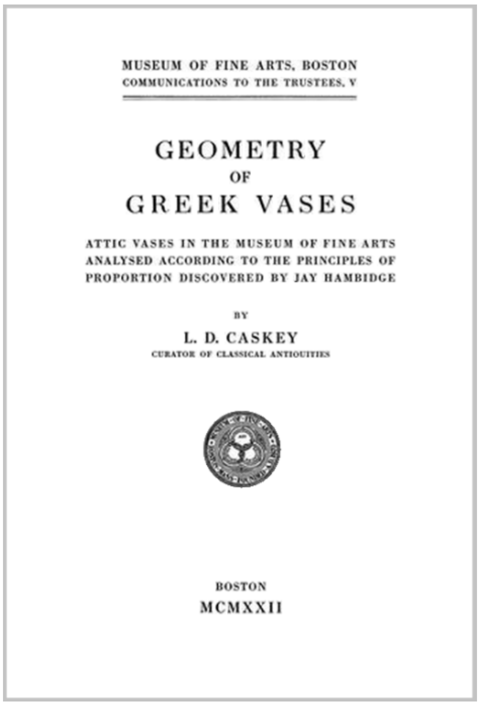
Наблюдая это явление не только в аттической керамике и в других изделиях несовершенного искусства архитектурного характера, но также в греческих храмах, особенно Парфенона, мистер Хэмбидж предложил теорию, согласно которой греческая художественная композиция основывалась на геометрических принципах. В отсутствие чётких и надёжных литературных свидетельств такое заключение не может быть строго доказано либо опровергнуто. Однако выявленные мистером Хэмбиджем совпадения слишком поразительны, чтобы их игнорировать; и прогресс в решении представляемой ими проблемы может быть достигнут лишь путём тщательного изучения как можно большего числа сохранившихся памятников.

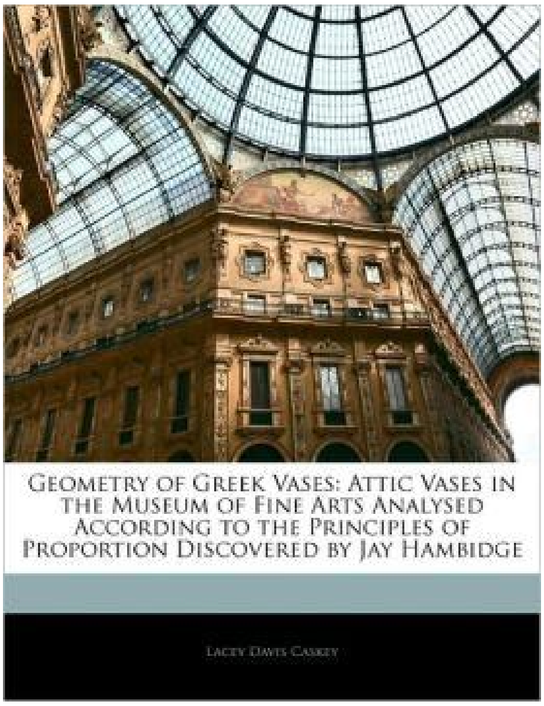
Далее, не претендующий на новшества, всецело и безоговорочно поддерживающий теорию Хэмбиджа и решительно отвергающий имеющуюся критику в её адрес Каски, как последователь и продолжатель идеи динамической симметрии, вознамерившийся дать ей дополнительное подтверждение в виде целой серии эмпирических измерений, заявляет [Там же, 1]:

В этой книге нет попыток делать какие-то новые утверждения, выводы или критические замечания в адрес относящейся к греческому искусству революционной теории м-ра Хэмбиджа. Изучение его книги "Динамическая симметрия: греческая ваза" и его журнала "Диагональ" необходимо для понимания открытых им принципов пропорции. В настоящей работе эти принципы приняты в качестве отправной точки и применены к имеющимся в музее образцам аттической керамики. Всё, что требуется для введения, это объяснение предельно простым языком прямоугольников, которые используются при анализе ваз.

Первое, что необходимо осознать и нельзя переоценить, это то, что м-р Хэмбидж открыл совершенно новый метод ... определения пропорций произведений греческого искусства. И этот, на первый взгляд странный для современного человека, метод – именно тот, который, естественно полагать, применяли греки. Со времён Витрувия попытки анализа греческих пропорций, как правило, основаны на единицах линейных измерений. И каждый согласится, что полученные результаты – независимо от экспериментирования с греческим футом или же взятым из анализа объекта модулем – были недостаточными и большей частью неубедительными. Исследователями не принималось во внимание то, что в кульминационный период греческого искусства наука о числах была по-прежнему в зачаточном состоянии, в то время как задолго до Евклида геометрия была в высшей степени развитой наукой. Если греки сознательно применяли какую-то систему пропорций, априорно более правдоподобно, что они основывали её скорее на площадях, чем на отрезках. Другими словами, они скорее использовали бы геометрию, чем арифметику.

Поняв это, м-р Хэмбидж сделал потрясающее открытие, что пропорции, обнаруженные в греческих произведениях искусства, которые, возможно, в девяти случаях из десяти несоизмеримы с точки зрения линейных единиц, или модулей, в подавляющем большинстве случаев могут быть точно и понятно выражены посредством площадей, обладающих определёнными, чётко определяемыми свойствами.





Книга Лейси Каски издания 1922 года и ее современное, 2010 года, переиздание

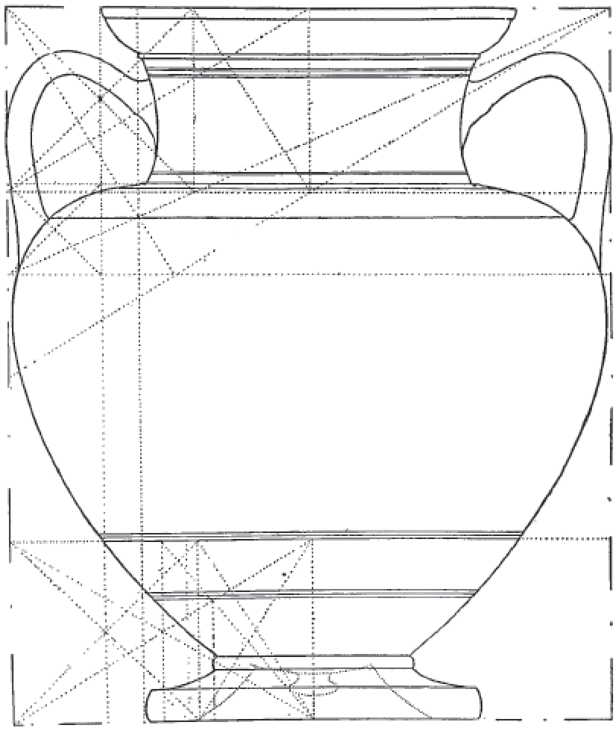
Следуя Хэмбиджу, Каски полагает, что, во-первых, древнегреческое учение о пропорциях основано на геометрии, а не арифметике; во-вторых, выражаемая целыми числами соизмеримость геометрических построений достигалась площадями, а не отрезками, а значит, надо иметь в виду квадраты чисел, а не числа, соответствующие линейным размерам и единицам измерения; в-третьих, на развитой стадии греческого искусства в большинстве случаев сознательно использовался принцип “динамической симметрии” с квадратом в качестве исходной фигуры построения; в-четвёртых, высотой и наибольшей шириной произведений греческого искусства, в частности вписываемых в прямоугольный четырёхугольник керамических изделий, задаётся их членение на отдельные части и числовая зависимость от предельных размеров указанного прямоугольника. С этих позиций Каски провёл исследование почти двухсот изделий греческой керамики; все они пронумерованы и представлены в виде рисунков с соответствующими числовыми характеристиками. В предыдущем разделе показан полученный Каски рисунок канфара, а вот и ещё один экспонат с множеством числовых характеристик [Там же, 36, 37]. Нетрудно заметить, что почти все параметры этой амфоры являются производными константы ϕ.

The ratios are:

Height.............................. 1.2034 $= .2927 + .618 + .2927$

Height, omitting lip..................... 1.118 $= \frac{\sqrt{5}}{2}$

Height, omitting foot..................... 1.118 $= \frac{\sqrt{5}}{2}$



1

Height to shoulder........................ .9107 $= .618 + .2927$

Height of lip and of foot.................. .0854

Width.................................... 1.000 $= 1$

Diameter of lip............................ .691 $= \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$

Smallest diameter of neck.................. .500 $= \frac{1}{2}$

Diameter of top of neck.................... .559 $= \frac{\sqrt{5}}{4}$

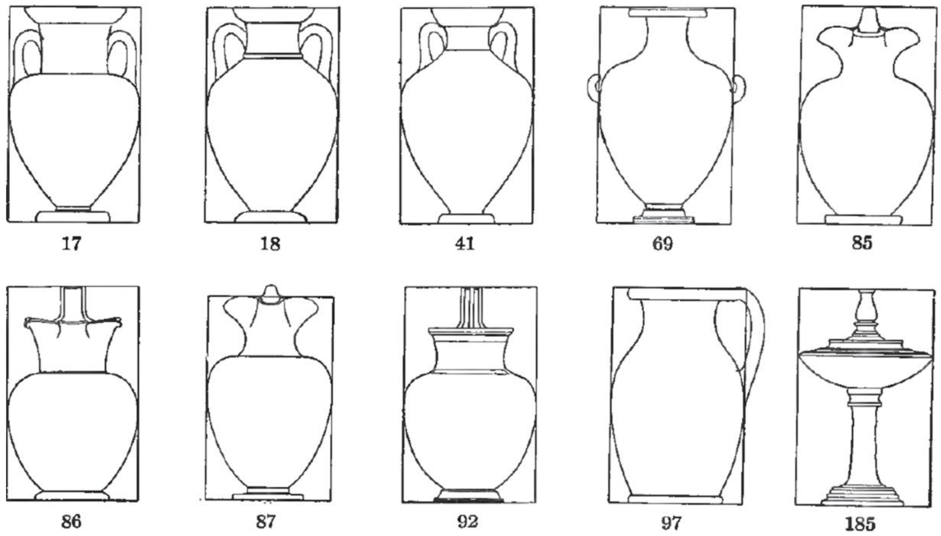
Diameter of shoulder....................... .559 $= \frac{\sqrt{5}}{4}$

Diameter of bottom of body.................. .333 $= \frac{1}{3}$

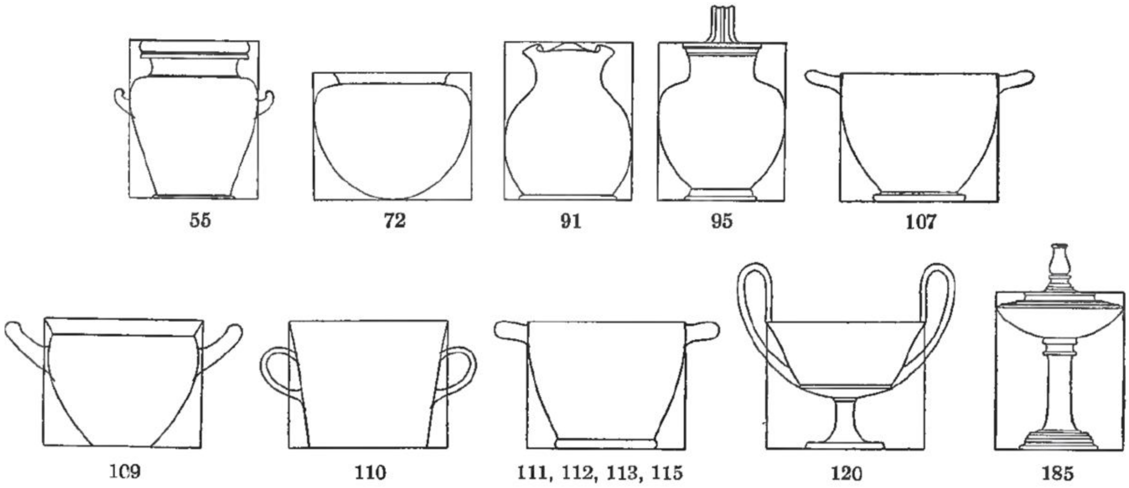
Diameter of foot........................... .559 $= \frac{\sqrt{5}}{4}$

Амфора с её числовыми параметрами

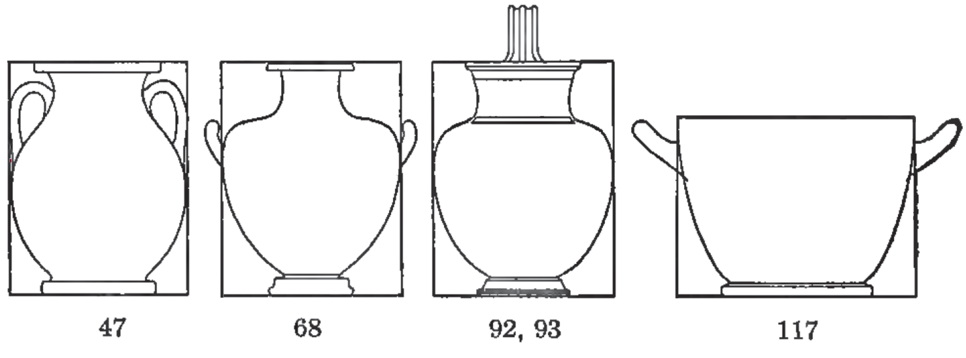
Динамическая симметрия обнаружена Каски в подавляющем большинстве исследуемых образцов, причём в одиннадцати случаях, десять из которых показаны на рисунке, отношение высоты к диаметру ширины вазы равно $1{,}618 \approx \phi$. В восьми случаях золотой четырёхугольник охватывает вазу целиком, а в трёх – без ручек. Наиболее же распространённым, по Каски, очевидно является форма с отношением сторон, равным $1{,}236 \approx 2/\phi$, или же с обратным отношением $\phi/2$. Оба этих случая, а также менее распространённое отношение $1{,}309 \approx 1 + 1/2\phi$ показаны на рисунках [Там же, 6, 9, 10].



Греческие вазы в золотых четырёхугольниках



Вазы, вписанные в прямоугольники с отношением длин сторон, равным 1,236 или 0,809



Вазы в прямоугольниках с отношением длин сторон, равным $1{,}309 \approx 1 + 1/2\phi$

Встречаются, конечно, и другие отношения, но их не так уж много, около двух десятков, при этом отношений, связанных с золотым сечением, точнее, прямоугольником с отношением длин сторон, выражаемых через $\sqrt{5}$, намного больше, чем остальных. Каски насчитал 136 таких случаев, то есть почти 3/4 от общего количества. Подводя итоги, он пишет [Там же, 25].

Как отмечалось выше, не так важен тот факт, что греческие вазы могут содержаться в прямоугольниках динамической симметрии. Показательно, однако, что (1) большая часть ваз в точности соответствует ограниченному числу сравнительно простых прямоугольников, что (2) в большинстве примеров все детали могут быть точно выражены посредством содержащих их прямоугольников и что (3) подавляющее большинство деталей в точности совпадает с небольшим числом простых отношений. В связи с первым пунктом стоит, наверное, дать полный перечень двадцати наиболее распространённых случаев, классифицируя их в зависимости от того, содержат ли они (А) вазу целиком с её крышкой и ручками или без них и (В) важнейшие части вазы.

Ratio	No. of occur-rences	A	B
1.236 = .809	21	46, 51, 55, 56, 73, 91, 95, 107, 109, 110, 111, 112, 113, 115, 120, 185	18, 19, 73, 76, 80
1.000	15	53, 55, 73, 77, 99, 118	16, 52, 53, 63, 64, 92, 93, 182
1.618 = .618	12	9, 17, 18, 41, 69, 85, 86, 87, 92, 93, 97, 185	
1.118 = .8944	11	51, 67, 68, 73, 100, 108, 116, 121, 121	9, 17
1.382 = .7236	10	4, 5, 49, 67, 69, 104, 123, 130, 131, 183	
2.000 = .500	9	122, 128, 129, 164	168, 170, 171, 174, 183
1.309 = .764	8	47, 65, 68, 92, 93, 117	35, 41
1.4472 = .691	8	6, 7, 8, 63, 72, 118, 123, 129	
3,236 = .309	8	133, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147	
1.472 = .6793	7	9, 10, 11, 12, 13, 85, 103	
1.500 = .666	7	14, 21, 23, 24, 44, 61, 62	
1,854 = .5394	7	37, 88, 104, 108, 109, 171, 183	
3.000 = .333	7	43, 135, 136, 137, 172, 173, 174	
1.809 = .5528	6	33, 34, 35, 36, 115, 117	
2.618 = .382	6	133, 145, 146, 147, 155, 181	
1.0787 = .927	5	51, 55, 58, 65, 66	
1.2071 = .8284	5	2, 45, 57, 61, 182	
1.4142 = .7071	5	20, 22, 90, 96, 105	
1.528 = .6545	5	18, 39, 63, 95, 102	
3.4142 = .2929	5	148, 149, 150, 151, 153	
20 Ratios	167		

Таблица двадцати различных случаев (occurrences) для отношений сторон прямоугольников

Каски, безусловно, проделал большую работу по измерению изделий греческой керамики и обработке полученных данных. Этим теория динамической симметрии подтверждается в той мере, в какой можно положиться на надёжность результатов его эмпирического исследования. У Хэмбиджа, естественно, нашлись и другие последователи, помимо Каски, см. [Боднар[1]], однако, судя по всему, их не так уж много. Во всяком случае, библиография по этой теме скудна и теорию динамической симметрии Хэмбиджа в античном искусстве (не путать с одноимённой теорией в физике) следует скорее отнести к разряду оригинальных, экзотических гипотез. Тем не менее, рисунок *о связи динамической симметрии с квадратными корнями* нередко приводится в литературе по золотому сечению, а идея динамических прямоугольников впоследствии разрабатывалась и другими, в частности художником и архитектором Вольфгангом Версином, о чём подробнее сказано в разделе 14 следующей главы.

12. Золотые вехи и знаковые события. Эдуард Люка

Перед тем как продолжить в последней главе движение по исторической золотой магистрали, бросим беглый взгляд на уже пройденный путь. Более подробное подведение итогов и расстановку акцентов оставим на конец, а пока просто оглянемся назад и попытаемся перечислить полученные к началу XX века реальные и мнимые результаты по ЗС, знаковые события, наметившиеся тенденции и тому подобное. Разумеется, любая попытка подобного рода несовершенна, неполна, спорна и субъективна, однако это не повод прятаться от ответственности за свои суждения и даваемые оценки. Следуя хотя и совершенно необязательной, но во всяком случае не противоречащей формату нашего рассмотрения традиции придерживаться формулы 12 + 1, ограничимся именно таким числом перечисляемых позиций. Первые двенадцать позиций несколько условно обозначим для краткости следующими словами: *эзотерика*, *легенда*, *наука*, *культ*, *отрицание*, *символика*, *определение*, *вычисление*, *обоснование, синтез*, *экспансия*, *приложение*. Конечно, в применении к ЗС эти слова – пока лишь смутные ориентиры, и раскрывая вкладываемое в каждое из них содержание, нетрудно будет заметить, что чётких граней между ними нет, как, впрочем, их нет в любом расчленяемом на составляющие едином историческом феномене. О последней, тринадцатой, позиции скажем чуть позже, а сейчас, с учётом всего сказанного в предыдущем изложении, дадим краткие пояснения к остальным составляющим.

- ***Эзотерика.*** Магическая история пентаграммы, берущая своё начало ещё со времён шумеров и почти не связанная с математикой ЗС. Сакрализация прямой, перевёрнутой и повёрнутой пентаграмм и их модификаций. Использование в оккультных учениях и магической практике, в отдельности или наряду с другими символами. Понимание пентаграммы с вписанными в неё фигурами людей как символа гармонии, совершенства и макрокосма, а с вписанными головами демонов – как символа сатаны и потусторонних сил.

- ***Легенда.*** Представление об использовании в строительстве Большой пирамиды Хеопса принципа ЗС в форме треугольника с отношением длин сторон, образующих геометрическую прогрессию со знаменателем, равным константе второго золотого сечения. Оно обязано своим происхождением фразе из *Истории*

Геродота, соответствующим образом истолкованной. Легенда популярна среди адептов ЗС, хотя имеющимися фактами она не подтверждается и не опровергается, существуя в ранге красивой гипотезы.

- ***Наука.*** В V в. до н.э. Гиппас из Метапонта, возможно, изучал золотые пятиугольник, десятиугольник и додекаэдр. Деление в крайнем и среднем отношении многократно встречается в геометрических построениях *Начал* Евклида. В *Тимее* Платона золотое деление применяется дважды для установления связи между первоэлементами, а икосаэдр и додекаэдр использовались при построении геометрической модели Вселенной в прошлом и нашли множество применений в современной математике и за её пределами. В наши дни основным объектом исследования являются числа Фибоначчи и Люка.
- ***Культ.*** В трактате начала XVI в. францисканского монаха Луки Пачоли золотая пропорция названа *Божественной*. В середине XIX в. Адольф Цейзинг поднял ЗС на уровень основного морфологического закона природы и искусства. Такая точка зрения получила со временем широкое распространение, и многочисленные восторженные почитатели ЗС стали обнаруживать его присутствие на всех уровнях живой и неживой природы, во всех жанрах искусства, во всех сферах общественной жизни, словом, повсюду.
- ***Отрицание.*** Встречная волна категорического неприятия сколь-нибудь серьёзной теоретической и прикладной значимости принципа золотого сечения. Апелляция к простоте исходного формализма ЗС и недостоверности почти всех эмпирических фактов, приводимых в качестве свидетельства универсальности ПЗС. Понимание ЗС как заурядного геометрического построения или арифметической формулы, тем не менее доводящих легковерную публику и любителей “клубнички” до состояния полной эйфории.
- ***Символика.*** Витрувианский человек Леонардо да Винчи как наиболее узнаваемый художественный символ ЗС, одновременно воплощающий идеал гармонии и совершенства человеческой фигуры. Одномерный отрезок, делённый в крайнем и среднем отношении, двумерные пентаграмма, золотая логарифмическая спираль, золотой четырёхугольник и прямоугольный треугольник Кеплера, трёхмерные додекаэдр и икосаэдр как геометрические символы ЗС.
- ***Определение.*** Различные способы введения ЗС посредством геометрических построений и теоретико-числовых формул и соотношений. Золотое деление целого на части, приводящее к квадратному уравнению определённого типа, линейная рекуррентная формула второго порядка с произвольными начальными членами, экспонента и её тригонометрическая и гиперболическая комбинации, цепная дробь, определённый интеграл как основные формы представления золотой константы.
- ***Вычисление.*** Запись иррациональной золотой константы в виде конечной последовательности знаков в той или иной позиционной системе счисления. Использование существуюших методов приближённого решения уравнений, в частности формулы касательных Ньютона или итерационной формулы Герона. Точность десятичной аппроксимации иррациональной константы ϕ, полученная применением современной компьютерной техники, достигла одного триллиона знаков.
- ***Обоснование.*** Попытка подведения философско-методологической основы под идею универсального деления целого на две неравные части. Понимание золотого деления, с сохранением свойств геометрической и арифметической прогрессий, как единственно возможного варианта последовательного деления, свободного от всякого произвола. Понимание константы ϕ как наиболее иррационального числа и единственного числа, записываемого в виде цепной дроби одинарным кодом.
- ***Синтез.*** Историческое пересечение трёх до поры до времени независимых математических конструкций: геометрических построений золотой пропорции, методов теоретико-числового определения золотой константы и получаемой применением линейной рекурсии последовательности Фибоначчи. Объединение неявного геометрического определения константы ϕ с её непосредственным арифметическим вычислением и с определением посредством предельного перехода.
- ***Приложение.*** Применения ПЗС при решении чисто математических задач различной степени сложности. Использование теории рядов Фибоначчи и Люка в компьютерной технике и при решении других задач прикладного характера. Бесчисленные и большей частью сомнительные либо неубедительные попытки поиска ЗС в самых разных явлениях природы, искусства и общественной жизни. Понимание ПЗС как всеобщего закона математической гармонии мира, справедливого на всех уровнях её организации.
- ***Экспансия.*** Выдвинутая и развиваемая Феликсом Клейном идея объединения различных разделов чистой математики на основе симметричных свойств золотого икосаэдра. Толкование икосаэдра и дуального ему додекаэдра как геометрических объектов фундаментальной значимости. Икосаэдро-додекаэдрическая концепция как геометрическая модель различных природных явлений и как способ глубокого внедрения ПЗС в математическую теорию, в качестве одного из узловых её элементов.

Остаётся назвать последнюю позицию и автора, который внёс сюда наибольший, пожалуй, вклад.

❖ ***Обобщение.*** Математическая модель, сохраняющая фундаментальные характеристики и свойства теории золотого сечения с её единственной константой ϕ и связанная с ТЗС принципом соответствия. Несколько возможных уровней обобщения, связанных с правилом сохранения мантиссы, экспоненциально-логарифмическим представлением чисел в рамках теории ЛМФ и линейной рекурсией второго порядка. Последовательности Люка как наивысший из рассмотренных в настоящей работе уровней обобщения.

Нет, понятно, никакой необходимости обсуждать указанные обобщения, достаточно подробно рассмотренные в четвёртой главе, а в общем виде последовательности $U_n(P, Q)$ и $V_n(P, Q)$ представлены также в Главе 1. Автором этих, названных его именем, последовательностей является французский математик Эдуард Люка. Он впервые употребил выражение *Série de Fibonacci* (последовательность, или ряд, Фибоначчи) в книге, изданной в 1877 г. [Lucas[1], 11, 13], и впервые обратил внимание на числа, задаваемые рекуррентной последовательностью

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

с начальными членами $u_0 = 2$, $u_1 = 1$. Сходящийся к константе ϕ числовой ряд

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, …

может считаться гомологом ряда Фибоначчи. Люка пошёл и дальше по пути обобщений, введя линейную рекуррентную последовательность

$$u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1}$$

ныне расчленённую на последовательность Люка первого рода $U_n(P, Q)$ и второго рода $V_n(P, Q)$. Это большие семейства последовательностей, частными случаями которых являются ряды Фибоначчи, Люка, Пелля и другие числовые, а также полиномиальные ряды, рассмотренные нами в Части 1. Числа и последовательность Люка, как и формулы для u_{n+p} и u^{n+p} представлены на странице 40 и далее указанной книги.

RECHERCHES

SUR PLUSIEURS OUVRAGES

DE LÉONARD DE PISE

ET

SUR DIVERSES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE

PAR M. ÉDOUARD LUCAS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE CHARLEMAGNE À PARIS

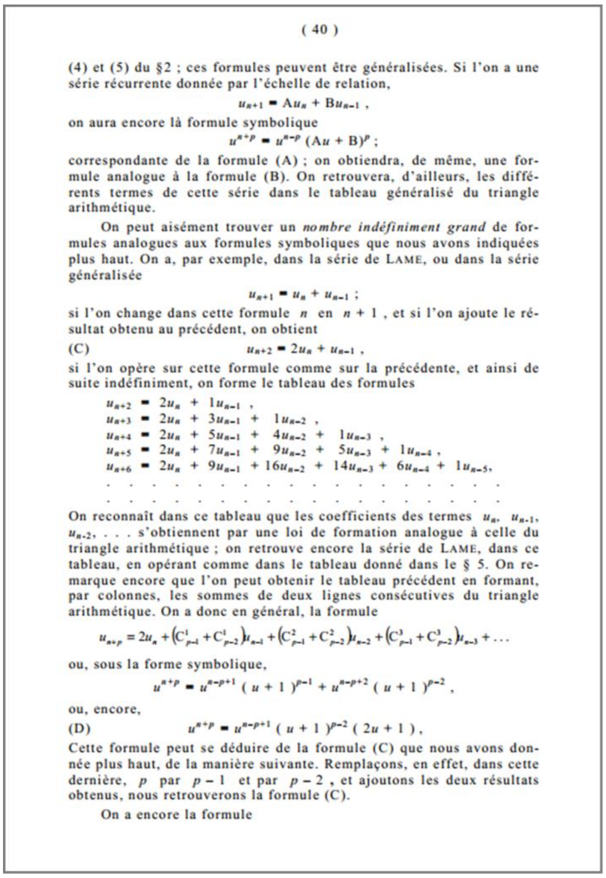
EXTRAIT DU BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
TOMO X. — MARZO, APRILE E MAGGIO 1877.

ROME

IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

Via Lata, Num. 3.

1877



(40)

(4) et (5) du §2 ; ces formules peuvent être généralisées. Si l'on a une série récurrente donnée par l'échelle de relation,

$$u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1},$$

on aura encore là formule symbolique

$$u^{n+p} = u^{n-p}(Au + B)^p;$$

correspondante de la formule (A) ; on obtiendra, de même, une formule analogue à la formule (B). On retrouvera, d'ailleurs, les différents termes de cette série dans le tableau généralisé du triangle arithmétique.

On peut aisément trouver un *nombre indéfiniment grand* de formules analogues aux formules symboliques que nous avons indiquées plus haut. On a, par exemple, dans la série de Lame, ou dans la série généralisée

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1};$$

si l'on change dans cette formule n en $n+1$, et si l'on ajoute le résultat obtenu au précédent, on obtient

$$\text{(C)} \qquad u_{n+2} = 2u_n + u_{n-1},$$

si l'on opère sur cette formule comme sur la précédente, et ainsi de suite indéfiniment, on forme le tableau des formules

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2u_n + 1u_{n-1},\\
u_{n+3} &= 2u_n + 3u_{n-1} + 1u_{n-2},\\
u_{n+4} &= 2u_n + 5u_{n-1} + 4u_{n-2} + 1u_{n-3},\\
u_{n+5} &= 2u_n + 7u_{n-1} + 9u_{n-2} + 5u_{n-3} + 1u_{n-4},\\
u_{n+6} &= 2u_n + 9u_{n-1} + 16u_{n-2} + 14u_{n-3} + 6u_{n-4} + 1u_{n-5},\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

On reconnaît dans ce tableau que les coefficients des termes u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, . . . s'obtiennent par une loi de formation analogue à celle du triangle arithmétique ; on retrouve encore la série de Lame, dans ce tableau, en opérant comme dans le tableau donné dans le § 5. On remarque encore que l'on peut obtenir le tableau précédent en formant, par colonnes, les sommes de deux lignes consécutives du triangle arithmétique. On a donc en général, la formule

$$u_{n+p} = 2u_n + \left(C^1_{p-1} + C^1_{p-2}\right)u_{n-1} + \left(C^2_{p-1} + C^2_{p-2}\right)u_{n-2} + \left(C^3_{p-1} + C^3_{p-2}\right)u_{n-3} + \dots$$

ou, sous la forme symbolique,

$$u^{n+p} = u^{n-p+1}(u+1)^{p-1} + u^{n-p+2}(u+1)^{p-2},$$

ou, encore,

$$\text{(D)} \qquad u^{n+p} = u^{n-p+1}(u+1)^{p-2}(2u+1),$$

Cette formule peut se déduire de la formule (C) que nous avons donnée plus haut, de la manière suivante. Remplaçons, en effet, dans cette dernière, p par $p-1$ et par $p-2$, et ajoutons les deux résultats obtenus, nous retrouverons la formule (C).

On a encore la formule

Книга Эдуарда Люка и страница из неё с последовательностью и числами Люка

Добавим по случаю, что хотя посредством последовательностей Люка, в зависимости от начальных значений параметров P и Q, строятся достаточно сложные математические конструкции, вроде полиномов Фибоначчи и Люка, характеристическим уравнением для $U_n(P, Q)$ и $V_n(P, Q)$ является простое квадратное уравнение определённого типа. Между тем, золотая константа ϕ, константа да Винчи ϕ_2 и бесконечные семейства ϕ_m, ϕ_{mk} и ϕ_{PQ} констант трёх обобщённых моделей могут быть получены, как мы знаем, и решением уравнений высших степеней, не обязательно даже целых и действительных. Это лишний раз свидетельствует о том, что безудержная страсть к обобщениям может привести к тому, что обобщённой теорией ЗС окажется охвачена едва ли не вся числовая математика, с практически незаметным “золотым содержанием”. Поэтому, хотя бы и субъективно, мы остановились на последовательностях Люка как последнем рубеже обобщений ТЗС, где глубинная связь с золотой константой и её непосредственным окружением всё ещё достаточно ощутима. А наличие *золотых* и *позолоченных крупинок* в других уголках необозримой математической теории не может служить достаточным основанием для всё новых и новых обобщений.

В конце концов, любое математическое число имеет практически неограниченное количество всевозможных формальных представлений, если же речь идёт о константе высокого ранга, многие из её представлений теоретически значимы и важны. Но тот факт, что, например, число π встречается в математике повсеместно, не означает, что геометрия, где π считается отношением длины окружности к диаметру, не имеет права на существование в статусе относительно независимой теории. Можно, конечно, с высокой степенью уверенности рассуждать о том, что математика, по крайней мере числовая, является по идее единой областью знания, универсальным языком науки, основанным на абстракции числа, некоторых исходных принципах и правилах построения логико-дедуктивной природы. При таком, едва ли допускающем серьёзные сомнения и возражения подходе, нет по большому счёту ни теории ЗС, ни её обобщений, ни других математических теорий и моделей: есть отдельные фрагменты, каждый со своей историей и родословной, единого целого, искусственно обособляемые, отчуждаемые от общего теоретического контекста лишь для удобства их обозрения, анализа и исследования.

Охватить одним взглядом целое, свести его к небольщому кругу первичных понятий, принципов и формальных правил построения – магистральный путь развития фундаментальной науки, сфера интересов философии, методологии и оснований научного знания, светлая мечта лучших умов. Однако на деле заманчивую идею единой науки, даже в пределах не нуждающейся в эмпирическом обосновании формальной математики, реализовать не удаётся. В любом случае, принадлежность целому не служит реальным препятствием для теоретического расчленения, дифференциации, выделения из всей системы отдельных её фрагментов с более или менее чётко обозначенными характерными особенностями, как бы изолирующими их от всего остального. Исходя из всего этого, граница предельного обобщения ТЗС, очерчиваемая последовательностями Люка, кажется нам пусть не бесспорной, но достаточно разумной и целесообразной.

Глава 8.
До начала 70-х годов XX века

1. Волновой принцип Эллиотта

Умение предсказывать, особенно если речь идёт о числовых прогнозах, относится к числу высших достижений человеческого разума. Это редчайшая способность, которой наука стала понемногу овладевать с тех пор, как стало возможным описание реалий внешнего мира в рамках физической теории и на языке математических уравнений и формул. Сегодня в квантовой электродинамике в отдельных случаях соответствие теории с экспериментом доведено до уровня 10^{-12} – 10^{-13}, а, скажем, для равенства положительного и отрицательного элементарных электрических зарядов – до уровня 10^{-20}. Хуже обстоят дела в других разделах теоретического естествознания и совсем неважно в общественных науках, где многочисленные краткосрочные и долгосрочные прогнозы, как правило, не сбываются, а число "сбывшихся предсказаний" умещается в коридоре, определяемом теорией вероятности для случайных совпадений. При этом предсказатели обычно опираются на свои знания, опыт и в первую очередь интуицию, стараясь, однако, представить предсказание как итог глубокомысленных рассуждений о тенденциях развития общества, либо как подсказку со стороны звёзд, как результат непонятных простому смертному нумерологических вычислений и т.п.

Можно указать по меньшей мере на три фактора, в решающей степени обуславливающих подобное положение вещей. Во-первых, сложность самого *объекта*: одно дело, скажем, электрон (хотя и здесь есть свои специфические трудности), другое дело общество, социум и происходящие в нём политические, социальные, экономические и прочие процессы. Это, выражаясь математическим языком, задача многопараметрическая, причём, во-вторых, сами параметры изменчивы в широких пределах, порой случайны и трудноуловимы. В-третьих, отсутствие строгой теории, которая имела бы предсказательную силу хотя бы на уровне вероятностного числового анализа, а не досужих рассуждений. Последнее утверждение неприемлемо, конечно, для тех, кто ищет закономерности общественного развития, облекая результаты своих поисков в математическую форму. Смириться с такой ситуацией нелегко, и всегда находятся дерзкие умы, пытающиеся построить теории, не просто предсказывающие тенденции развития *в общем и целом*, а выявляющие суть происходящих процессов, динамику и механизм их развития и способные давать конкретные рекомендации.

К числу таких смельчаков относится американский бухгалтер и финансист Ральф Эллиотт (Ralph Nelson Elliott, 1871 – 1948), теория которого интересует нас лишь постольку, поскольку она связана с золотым сечением и числами Фибоначчи. Отошедший из-за тяжёлой болезни от дел, Эллиотт посвятил своё время теоретическим исследованиям экономических процессов, в частности колебаний цен на рынке. Пытливый, склонный к широким обобщениям и не чуждый нумерологических фантазий ум Эллиотта породил математическую модель, известную как *Волновой принцип Эллиотта* (Elliott Wave Principle). Исследуя поведение рынка, графики колебаний цен на фондовых рынках, Эллиотт пришёл к убеждению, что открыл неизвестную ранее закономерность в поведении цен, основанную на числах Фибоначчи. Вот так, проделав долгий семисотлетний путь, числа, введённые в Европе итальянским купцом-математиком в задаче о размножении кроликов, пересекли океан и в руках американского бухгалтера-интеллектуала стали инструментом для анализа и прогнозирования взлётов и падений рыночных цен.

После несколько затянувшегося вступления обратимся к источникам, прежде всего к книге самого Эллиотта, в самом начале которой представлена общая идея автора, необходимая для понимания его теоретических построений [Эллиотт].

Никакая истина не нашла большего повсеместного признания, чем та, что Вселенной правит закон. Очевидно, что без закона был бы хаос, а там, где хаос, нет ничего. ... Поскольку отличительной чертой закона является именно установленный порядок или постоянство, то из этого следует, что всё происходящее повторится и может быть предсказано, если мы знаем этот закон.

Даже тогда, когда мы не понимаем причину, лежащую в основе конкретного явления, мы можем на основе наблюдений предсказывать повторение данного феномена. ... Человеческая деятельность, хотя и является поразительной по своей сути, при рассмотрении с точки зрения ритмических процессов содержит точный и понятный ответ на некоторые наши самые ошеломительные проблемы. Более того, так как человек является участником ритмического процесса, прогнозы, выдвигаемые в связи с его деятельностью, могут простираться далеко в будущее с обоснованием и достоверностью прежде недостижимыми.

Весьма далеко идущее исследование в области, попадающей под определение человеческой деятельности, показало, что практически весь ход развития, который является результатом нашей социально-экономической жизнедеятельности, следует некоему закону, который заставляет результаты повторяться в виде схожих и неизменно рекуррентных последовательностей определённого набора волн или импульсов установленной формы. Более того, оно показало, что эти волны или импульсы в своей глубине несут стойкую взаимосвязь между собой и с течением времени. Чтобы продемонстрировать и объяснить это явление наилучшим образом, необходимо взять некий пример из области человеческой деятельности, который предоставит массу достоверных данных, и для этой цели нет ничего лучше, чем фондовая биржа.

... Закон волн – это явление, которое всегда функционировало в любой отрасли человеческой деятельности. Волны различных уровней развивались независимо от того, существовал или нет механизм для их регистрации. Когда подобный механизм ... имелся в наличии, то модели волн проявлялись и становились видимыми для опытного глаза.

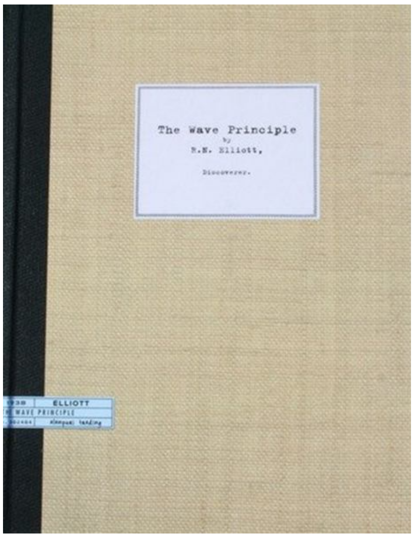
Основные элементы концепции Эллиотта изложены достаточно ясно: вселенский закон, которому подчинено всё, включая человеческую деятельность; возможность предсказаний на основе наблюдений, даже если причина явления непонятна; цикличность явлений, их повторяемость в виде схожих и неизменно рекуррентных последовательностей определённого набора волн или импульсов установленной формы, причём, что особенно важно в данном контексте, речь в дальнейшем идёт о последовательности Фибоначчи; наконец, естественный для финансиста выбор фондовой биржи в качестве характерного примера для демонстрации правильности теоретической схемы. В более полном, усовершенствованном варианте теория Эллиотта подробно изложена в книге его последователей и продолжателей. В аннотации к её русскому переводу сказано:

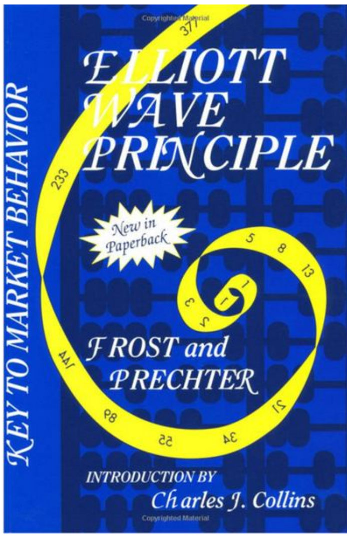
Исследуя финансовые рынки, Ральф Нельсон Эллиотт обнаружил, что цены на них меняются по узнаваемым моделям. Он назвал, определил и проиллюстрировал эти модели. Волновой принцип – не только один из лучших методов прогнозирования, это, прежде всего, детальное описание поведения рынков. Подобное описание даёт огромное количество информации о положении рынка внутри поведенческого континуума и, таким образом, говорит о его вероятном дальнейшем пути.

А в кратком *Замечании издателя к 20-му* (!) *юбилейному изданию* книги [Фрост, Пректер, 9], очевидно, не случайно упоминается *фрактальность развития*. Ведь принято считать, что именно фрактальные структуры фактически анализировал Эллиотт, и это за четыре десятилетия до того, как в 1975 г. Бенуа Мандельброт (Benoît B. Mandelbrot, 1924–2010) ввёл термин *фрактал* для самоподобных фигур, которые он детально рассматривал в своей книге [Фрактальная геометрия природы].

До недавнего времени мысль о том, что рынок движется в соответствии с самовоспроизводящейся моделью, казалась в высшей степени спорной, но более поздние исследования показали, что образование самовоспроизводящихся фигур является фундаментальной характеристикой сложных систем, к которым относятся и финансовые рынки. Некоторым из таких систем свойственен “прерывистый рост”, когда периоды роста перемежаются фазами его отсутствия или падения, образующими схожие, увеличивающиеся в размерах фигуры. Мир изобилует примерами подобного “фрактального” развития, и, как мы показали 20 лет назад в этой книге, а Р.Н. Эллиотт обнаружил 60 лет назад, фондовый рынок – не исключение.

Уяснив общую позицию Эллиотта и его последователей, можно наконец перейти к той части его теории, которая представляет для нас интерес. Основные положения, далее применённые для конкретного анализа, подробно изложены в третьей главе, озаглавленной как *Исторические и математические аспекты волнового принципа* со следующими подзаголовками: *Леонардо Фибоначчи Пизанский; Последовательность Фибоначчи; Золотое соотношение; Золотое сечение; Золотой прямоугольник; Золотая спираль; Значение числа φ; Фибоначчи и спираль фондового рынка; Математика Фибоначчи в структуре волнового принципа; Число φ и аддитивный рост*. Опуская исторический экскурс и ненужные нам детали, представим с некоторыми сокращениями последние два раздела.





7.4


Книга Р. Эллиота; книга А. Фроста и А. Пректера и её русский перевод

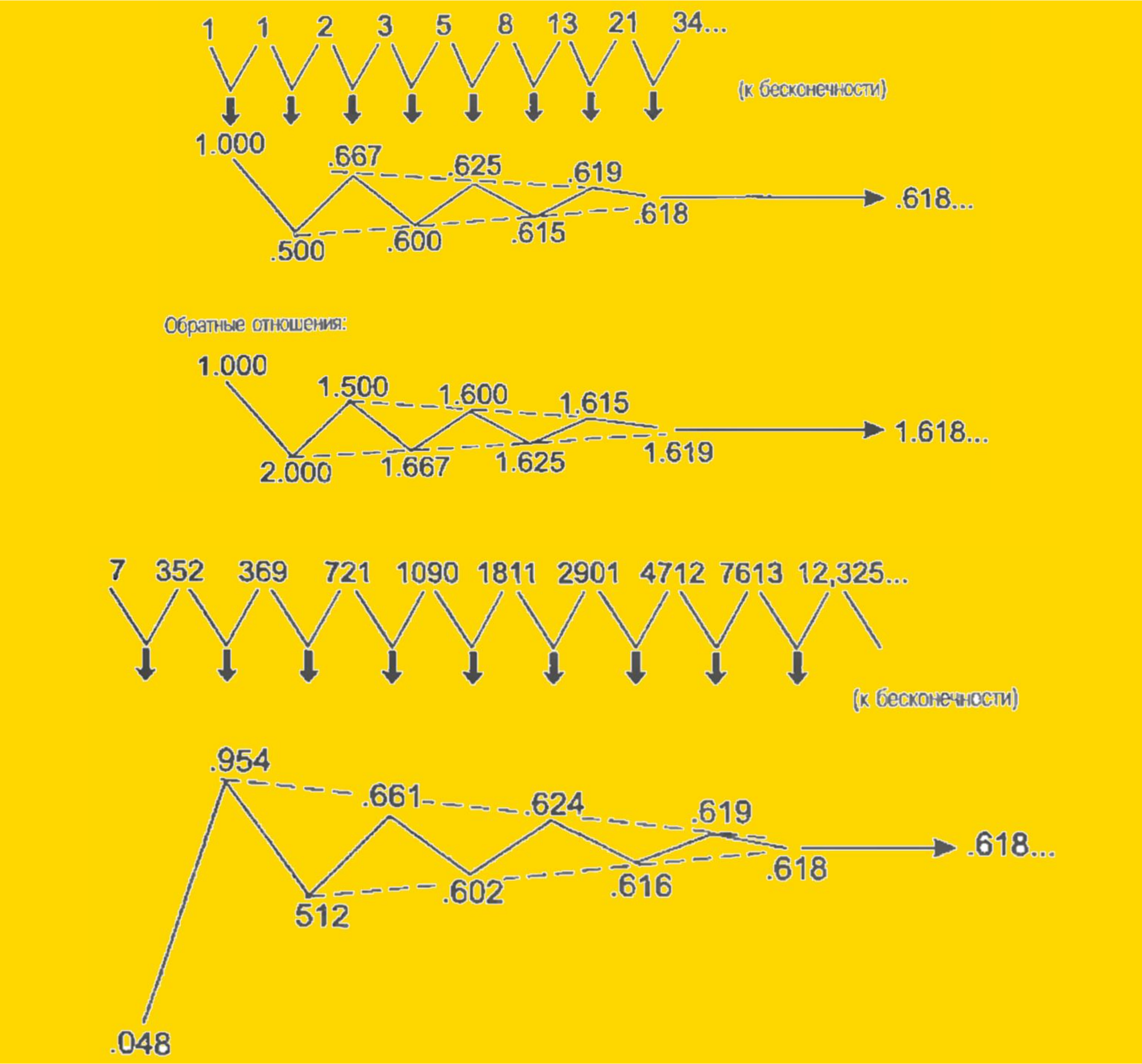
Математика Фибоначчи в структуре волнового принципа

Даже форма упорядоченной структуры сложной волны Эллиотта отражает последовательность Фибоначчи. Существует 1 основная форма: пятиволновая последовательность. Существует 2 вида волн: движущие (делящиеся на класс кардинальных волн, помечаемых цифрами) и коррективные (делящиеся на класс субкардинальных волн, помечаемых буквами). Существует 3 класса простых моделей волн: пятерки, тройки и треугольники (обладающие свойствами как троек, так и пятерок). Существует 5 семейств простых моделей: импульсы, диагональные треугольники, зигзаги, горизонтальные и треугольники. Существует 13 вариаций простых моделей: импульс, конечный диагональный треугольник, начальный диагональный треугольник, зигзаг, двойной зигзаг, тройной зигзаг, нормальная горизонтальная коррекция, расширенная горизонтальная коррекция, бегущая горизонтальная коррекция, сужающийся треугольник, нисходящий треугольник, восходящий треугольник и расширяющийся треугольник.

В коррективном виде волн различают две группы – простые и комбинированные коррекции, что доводит число групп до 3. Существует 2 класса коррективных комбинаций (двойные коррекции и тройные коррекции), что доводит общее число классов до 5. Допуская в комбинации лишь один треугольник и один зигзаг (что является необходимым), мы получаем всего 8 семейств коррективных комбинаций... что доводит общее число семейств до 13. Общее число простых моделей и семейств комбинаций равно 21. В этом классификационном процессе можно усмотреть элемент надуманности, поскольку всякий способен придумать возможные вариации, приемлемые с точки зрения классификации. И всё же тот факт, что принцип, имеющий отношение к последовательности Фибоначчи, по-видимому, сам отражает эту последовательность, заслуживает внимания.

Число ϕ и аддитивный рост

Как мы покажем в следующих главах, поведение рынка управляется золотым соотношением. Даже числа Фибоначчи появляются в рыночной статистике чаще, чем это допускается простой случайностью. Тем не менее важно понимать, что хотя сами по себе числа всё-таки имеют теоретический вес в главной концепции волнового принципа, именно соотношения оказываются основным ключом к моделям роста этого типа. Хотя на это редко указывают в литературе, коэффициент Фибоначчи возникает в аддитивной последовательности независимо от того, с каких двух чисел начинается последовательность. Последовательность Фибоначчи является базовой аддитивной последовательностью, поскольку она начинается с числа 1, которое является начальной точкой математического роста. Однако мы можем с таким же успехом взять два случайно выбранных числа, таких как 17 и 352, и сложить их, чтобы получить третье, и так далее. По мере роста этой прогрессии соотношения между соседними членами последовательности всегда будут очень быстро стремиться к пределу, равному ϕ. Это соотношение становится очевидным к тому моменту, когда получен восьмой член. Таким образом, в то время как определённые числа, составляющие последовательность Фибоначчи, отражают идеальную прогрессию волн, возникающих на рынке, коэффициент Фибоначчи является фундаментальным законом прогрессии, в которой два предыдущих члена складываются для того, чтобы получить следующий. Вот почему этот коэффициент управляет таким большим количеством отношений в рядах данных, связанных с естественными явлениями роста и снижения, расширения и сжатия, подъёмов и спадов.



Волны Эллиота

В этом широком смысле волновой принцип предполагает, что закон, формирующий живые существа и галактики, присущ духу и деятельности людей en masse. Поскольку фондовый рынок является самым точным барометром массовой психологии в мире, его данные дают прекрасную картину социально-психологических состояний и склонностей людей. Эта картина колеблющейся самооценки производительной деятельности выражает себя через определённые модели прогресса и регресса. Волновой принцип говорит, что прогресс человеческого рода (популярной оценкой которого является фондовый рынок) не проявляется в виде прямой линии, случайного движения или циклов. Скорее прогресс "делает три шага вперёд и два назад". Поскольку социальная активность человека связана с последовательностью Фибоначчи и спиральной моделью развития, по-видимому, она не является исключением из наиболее распространённого во Вселенной закона упорядоченного роста. По нашему мнению, параллели между волновым принципом и другими природными явлениями слишком очевидны, чтобы их можно было отвергнуть как простой вздор. Учитывая баланс вероятностей, мы пришли к заключению, что существует вездесущий принцип, формирующий социальные явления, и что Эйнштейн знал, о чём рассуждал, говоря: "Господь не играет с Вселенной в кости". Фондовый рынок – не исключение, поскольку массовое поведение, несомненно, связано с законом, который может быть изучен и определён. Самый короткий путь к выражению этого принципа – простое математическое утверждение: коэффициент **1,618**.

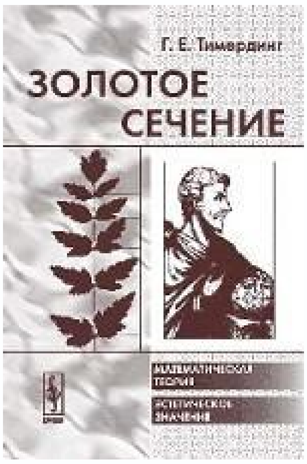
Слова Эйнштейна *Бог в кости не играет* (*God doesn't play dice*) в письме Максу Борну (Max Born, 1882–1970), сказанные по поводу несовершенства квантовой механики, даны в несколько искажённом виде, но главное здесь не это. Следует полагать, что в основу *волновой теории* положена идея *аддитивного роста*, *аддитивной последовательности*, другими словами, линейная рекуррентная последовательность второго порядка, порождающая ряд Фибоначчи и золотую константу. По поводу высказывания Эллиотта о том, что в качестве *начальных точек математического роста* могут быть взяты *два случайных числа*, напомним, что эти числа могут быть и комплексными, а целочисленный классический ряд Фибоначчи и константа ϕ являются инвариантами любой рекуррентной последовательности подобного рода (см. формулы (3.16)–(3.22) из третьей главы). Налицо фактор предопределённости некоторых важных сторон формализма теории, навязанный выбором исходного принципа. Теория Эллиотта в целом довольно сложна для понимания и рассчитана не на легковерных любителей, а скорее на серьёзную, математически подкованную публику и не в последнюю очередь на людей, одержимых жаждой обогащения посредством биржевой игры:

Второй причиной для выбора фондового рынка в качестве демонстрации волновых импульсов, общих для любой социально-экономической деятельности, является крупная прибыль, сопутствующая успешному рыночному прогнозу. Даже случайный успех в некоем отдельном рыночном прогнозе расплатится богатством чуть меньшим, чем сказочное [Эллиотт].

Случайный успех, конечно, возможен, а вот сознательное применение волнового принципа, как и других теоретических рецептов сказочного обогащения, может обернуться невосполнимыми потерями. Делать на их основе какие-то конкретные прогнозы не получается. Если бы это было не так, обязательно нашёлся бы умник, который, пройдясь *волновым принципом* по фондовым рынкам, нажил бы такое состояние, по сравнению с которым самые большие современные капиталы показались бы не более чем скромным достатком. Такого, как видим, нет, и следует признать, что в отличие от естественнонаучных теорий, по образцу и подобию которых построена теория Эллиотта, конкретный числовой прогноз ей фактически недоступен. Что касается способности волнового принципа предсказывать рыночные тренды без излишней детализации, то это уже предмет дискуссии. Одни полагают, что волновой принцип полезен для подобных предсказаний и используется некоторыми финансовыми организациями в их деятельности; судя по тому, что экономические прогнозы редко сбываются, не особенно успешно. Другие убеждены, что всё это пустое и практически бесполезное теоретизирование с нумерологическим уклоном, а сравнение рыночных тенденций с природными процессами неправомерно. Роль случайных и непредсказуемых факторов, включая фактор рассчитанного или непреднамеренного человеческого воздействия, здесь настолько велика, что можно только гадать о будущем, не сказав при этом ничего с толком и внятно о том, что будет завтра или послезавтра.

2. Генрих Тимердинг

К хорошей, пусть не вчера написанной научной или научно-популярной книге *не зарастает народная тропа* читателей. В 1919 г. Генрих Тимердинг, немецкий математик, специалист в области теории вероятностей, написал небольшую по объёму, добротно составленную и умеренно критическую книгу *Der goldene Schnitt*, которая до сих пор популярна и, судя по количеству упоминаний, может быть включена в антологию литературы по золотому сечению. Не случайно она неоднократно переиздавалась в Германии, а переведённая на русский ещё в 1924 г. [Тимердинг], в дальнейшем [Т], в последнее время постоянно переиздаётся в России. Книгу Тимердинга можно считать кратким введением в элементарную теорию золотого сечения, но с авторским словом, не лишённым интереса. Особенно когда автор рассуждает об основаниях ЗС и рассматривает его с точки зрения эстетики и психологии.



Одно из первых изданий книги Г.Е. Тимердинга на немецком и издания последнего времени на русском

Любопытны уже вводные замечания Тимердинга о необходимости отдельного преподавании ЗС в школе и подхваченная многими в наши дни идея о том, что железная логика *Начал* Евклида принизила роль золотого деления в геометрии [Т, 6].

> Золотое деление представляет очень простую, но с давних пор широко известную главу элементарной геометрии. Оно занимает прочное место в школьном преподавании, но при этом его основная сущность и то особое значение, которое ему приписывают, по большей части недостаточно разъясняются. Причина этого заключается в том, что при изложении геометрии руководствуются, главным образом, основным трудом Эвклида, а в его сочинении те точки зрения, которые привели первоначально к золотому делению, в угоду логической последовательности, почти отброшены. Чтобы разъяснить эти точки зрения, необходимо изложить вопрос о золотом делении отдельно.

Тимердинг сетует и на то, что в различных исследованиях по ЗС недостаточно отчётливо изложено как раз то, что служит к разъяснению сущности и значения золотого деления. Широкий интерес к ЗС, здесь он абсолютно прав, не обусловлен лишь его математическими характеристиками. Чего-чего, а геометрического и теоретико-числового *волшебства*, совершенно неожиданных, непредсказуемых формул, соотношений, построений и тому подобного в математике предостаточно. Это пища для знатоков и математических гурманов, а публике требуется нечто большее. Знание хотя бы основ элементарной теории ЗС необходимо всякому интересанту, но после теоретического ликбеза начинается для многих самое интересное – восхитительный и крайне ненадёжный поиск “золота” в природе, эстетике и психологии. Тимердинг прекрасно понимает, что здесь легко можно опростоволоситься, принимая кажущееся за действительное; в то же время осторожный автор, как и положено серьёзному исследователю, не любит рубить с плеча и с порога ничего не отвергает. В основе указанных исследований, заявляет он,

> … Редко лежит интерес чисто геометрический. По большей части с ними связываются побочные идеи, а именно мысль о том, что золотое деление может дать объяснение тому эстетическому впечатлению, которое производят некоторые образы, и даже объяснение природы красоты вообще, поскольку это касается зрительных образов. Попытки дать такое объяснение начались в глубокой древности и не прекращаются до настоящего времени. Даже при кратком изложении золотого деления этот вопрос едва ли может быть обойдён. Каждый, кто хотя бы что-нибудь услышит о золотом делении, захочет узнать, какое это имеет отношение к его пресловутому эстетическому значению. Без сомнения, тот ответ, который мы теперь можем дать на этот вопрос, не оправдает многих надежд на возможность простого объяснения эстетического впечатления от геометрических соотношений сведением их к золотому делению. Но и этот отрицательный вывод не лишён значения. Некоторое разъяснение природы красоты зрительных образов при этом всё-таки будет достигнуто [Т, 6].

Красота зрительных образов связана с пространственной гармонией, которая, как считает Тимердинг, более труднообъяснима, чем звуковая гармония, хотя

> Совершенно естественным кажется допустить, что то, что справедливо по отношению к уху, верно и для глаза, что подобно тому как приятное впечатление производят те звуки, у которых число колебаний находится в определённых отношениях, и глаз получит удовольствие от определённых отношений в пространственных измерениях.

С этим нетрудно согласиться: действительно, глаз ничем не хуже уха, просто с ним больше эстетической возни. Математика способна на многое, её возможности кажутся безграничными. Пифагорейцы это почувствовали и обожествили числа. Бывают, правда, и не умещающиеся в рамках принятой концепции (*парадигмы* – в современной терминологии) сюрпризы, вроде обнаружения несоизмеримых отрезков, о которых упоминает Тимердинг, но вера во всемогущество числа сохраняется, и в применении к музыке она, похоже, себя оправдывает. Однако пространственно-временная гармония намного сложнее и, может, в этом и в несоизмеримости, когда сторона и диагональ квадрата находятся в таком отношении, которое не может быть выражено ни одним числом, причина *геометризованности* античной математики, в ущерб арифметике. Геометрические фигуры и тела, геометрические построения вместо числовых расчётов. Классический пример – *Начала* Евклида, называемые иногда *геометрией* Евклида, хотя по сути это включающая в себя арифметику и алгебру математическая, в форме учебника, энциклопедия того времени, не одним, кстати, человеком изложенная. Смириться с ограниченностью своих возможностей математика не может и ищет надёжное убежище в геометрии правильных фигур и тел.

> Ясные и поддающиеся представлению числовые соотношения заключают в себе божественный порядок и незыблемость; в соотношениях же пространственных и временных протяжений, которые могут быть иной раз точно выражены, а иной раз только приближённо, обнаруживается неполное совершенство действительности; в них содержится, рядом с признаками порядка и разумности, нечто, не поддающееся разъяснению и поэтому несовершенное, неразумное, «иррациональное». Если божественная гармония всё же находит себе, хотя бы частичное, отражение в окружающей несовершенной действительности, то это может проявиться лишь в том, что мы ощущаем в вещах

известные гармонические соотношения. Чтобы эти соотношения найти, мы должны искать такие фигуры, которые на нас производят впечатление наибольшего совершенства. Такими фигурами являются правильные фигуры [Т, 12].

Среди правильных фигур особо значителен пятиугольник, точнее, составленная его диагоналями пентаграмма, которой, как мы знаем, всегда приписывали магическую силу. И вот, бросив последний камень в огород Евклида, Тимердинг берёт пентаграмму фактически для построения теории золотого сечения.

По какой причине пентаграмме приписывали такую чудодейственную силу, мы лучше всего поймём, если рассмотрим её действительные геометрические свойства. Эти свойства приведут нас к золотому делению, и такой подход к нему нам кажется наиболее простым, естественным и наглядным. Подход Эвклида к делению отрезка золотым сечением не даёт возможности судить о том, как пришли к постановке именно этой задачи. Это делается понятным только при рассмотрении правильного пятиугольника или десятиугольника, если бы при этом проследить естественный ход развития мыслей, начиная от самого построения этих фигур. Именно это мы в последующем прежде всего и попытаемся сделать [Т, 15].

Построив с помощью пятиугольника и десятиугольника элементарную теорию золотого сечения, Тимердинг во второй главе, озаглавленной *Эстетическое значение золотого сечения* и нередко сегодня цитируемой, с самого начала обозначает свою позицию по отношению к вечной проблеме *математика и красота* [Т, 58, 59].

Первенствующая роль, которую играют числа в миропонимании пифагорейцев, общеизвестна. Такое применение чисел нашему рассудочному познаванию уже больше ничего не говорит, так как оно по существу совершенно отлично от того, как современное естествознание применяет математику для исследования явлений природы. Последнее выражает только количественные соотношения языком математических формул, пифагорейцы же пытались красоту и совершенство творения объяснить математическими формами.

При этом всегда играл большую роль следующий ложный вывод, лежащий в основе всего этого направления мыслей: чем правильнее, тем совершеннее, и чем вещь совершеннее, тем с большей вероятностью можно её встретить в действительности. Мир есть воплощение абсолютного разума и красоты, и поэтому объяснение его должно исходить из наших понятий о разуме и красоте. Классическим примером такого объяснения мироздания служит "Тимей" Платона.

Не все, конечно, согласятся с подобной позицией математика и рационалиста Тимердинга. Недостатка в последователях пифагорейской доктрины и платонизма не было никогда. Вопрос о математическом, в частности геометрическом, совершенстве мира, ясно выраженный в *Тимее*, – из области метафизики, где всё основано на убеждениях и вере и оставлено мало места для строгого анализа и доказательств. Обсуждая ту часть *Тимея*, где говорится о *пропорции*, и приводя знаменитый отрывок, представленный нами в разделе 2 пятой главы, Тимердинг заявляет следующее.

Но надо сказать, что сам Платон не пользовался этим рассуждением для вывода золотого сечения и применения его к строению вселенной. Поэтому тот, кто от Платона ждёт открытия золотого сечения и его мнимого значения в строении вселенной, тот будет прежде всего разочарован. Разочарование ещё усиливается, когда обнаруживается, что Платон строит мир посредством геометрических форм, но только он пользуется при этом совсем не теми фигурами, которые дают отношение золотого сечения. ... Но основная плоская фигура, говорит Платон, есть прямоугольный треугольник и существует два рода таких треугольников – один с равными и один с неравными катетами. Существует только одна форма первых, а вторых имеется бесчисленное множество. Среди этого бесчисленного множества мы должны найти самую красивую форму, чтобы систематически двигаться дальше. Прекраснейший прямоугольный треугольник, поясняет Платон, тот треугольник, у которого гипотенуза вдвое больше меньшего из катетов, и который представляет из себя половину равностороннего треугольника. Но этим самым выдвигается другое отношение, а именно отношение $1:\sqrt{3}$ катетов этого прямоугольного треугольника, которое может непосредственно заменить золотое сечение и в действительности до известной степени представляло из себя соперника золотого сечения.

Но если присмотреться поближе, то всё же оказывается, что это устранение золотого сечения только кажущееся. Ведь Платон только земной мир строит при помощи прямоугольных треугольников двух родов. Он соединяет равнобедренные прямоугольные треугольники в квадраты, а неравнобедренные – в равносторонние треугольники. Из квадратов он составляет куб, из равносторонних треугольников – правильные многогранники: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр (двадцатигранник). Эти четыре фигуры он относит к четырём земным элементам, куб – к твёрдой и неизменяющейся земле, а остальные три – к движущимся, постоянно изменяющимся и друг друга уничтожающим элементам – огню, воздуху и воде. Но при этом ещё одно правильное тело остаётся без рассмотрения, а именно додекаэдр, грани которого суть правильные пятиугольники. Только это тело символически изображает строение небесного мира, а так как в связи с правильным пятиугольником должно появиться, как мы установили, отношение золотого сечения, то последнее и играет главную роль в небесном мире.

Фактически это не столько комментарий к *Тимею*, сколько изложение того, что там есть, хотя и не полное. Вспомним сказанное в разделе 2 об “измене” Платона додекаэдру в пользу сферы, на что обычно стараются не обращать внимания. Именно в *золотосеченно-додекаэдрическом*, если можно так выразиться, толковании было в эпоху итальянского Возрождения подхвачено *изображение мира, данное Платоном*.

Оно нравилось как следствие определённой системы. Таковым оно казалось также в эпоху раннего итальянского возрождения, когда оно снова было принято вместе с философией Платона. К этому времени, а именно к последним годам пятнадцатого столетия, относится первое самостоятельное сочинение о золотом сечении, написанное братом миноритом Лукой Пачиоли ...

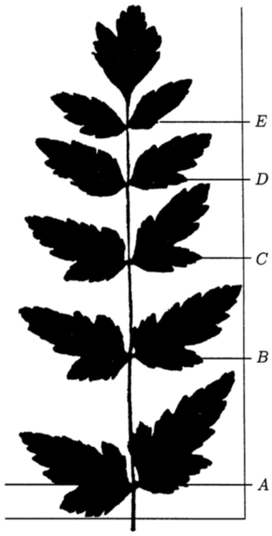
Впрочем, эта книга разочаровывает, если ждать от неё самостоятельного и ценного содержания. В существенном она ограничивается точным воспроизведением отдельных частей элементов Эвклида; это доказывает, с каким ещё трудом в те времена справлялись с геометрией, и как мало могли выйти за пределы изучения великого греческого учителя. У Луки Пачиоли ясно обнаруживается стремление найти твёрдую геометрическую основу искусства, но он не был способен пойти дальше повторения и разъяснения того, что имеется у Эвклида.

Отчитав брата Луку Пачоли за безоглядную приверженность пифагореизму и платонизму, недостаточную творческую самостоятельность и излишнее благоговение к геометрии Евклида, Тимердинг в осторожно-критическом ключе анализирует закон натурального роста растений, изобразительное искусство, работы Цейзинга, Франца Пфейфера (Franz Xaver Pfeifer, 1829–1902) [Pfeifer] и других авторов. Приведём без комментариев заключительные суждения Тимердинга о законе натурального роста, пропорциях человеческого тела, об опытах Фехнера и краткое заключение.

О законе натурального роста

Можно принять закон пропорций в природе в такой всеобъемлющей форме только после того, как его справедливость будет твёрдо и бесспорно доказана. Это, однако, не было осуществлено и в следующей за Цейзингом работе Франца Ксавера Пфейфера ..., несмотря на то что последний даёт уже фотографические снимки объектов природы с соответствующими измерениями и затрагивает обширную область царства природы. Эти исследования вызывают сомнения в двух различных направлениях. Прежде всего, измерения не произведены по строгому и единообразному принципу. Ясно, что в подобном случае остаётся некоторая свобода в выборе предметов, которые измеряются, и открыта возможность так производить измерение, чтобы оно дало желаемое отношение. Затем можно также бояться того, что измерения производятся у таких предметов, в которых уже наперёд глазомером усмотрено требуемое отношение. Ясно, что если встречающиеся отношения колеблются в известных пределах, то случайно может также встретиться отношение, совпадающее с отношением золотого сечения. Если выбрать подходящие объекты природы, равно как части его, ветку или член, и произвести у них измерения, то не следует удивляться, что получаются как будто бы благоприятные результаты.

К тому же в природе, по-видимому, действительно выполняется некоторый закон пропорций, не совпадающий, правда, с отношением золотого сечения, но, так сказать, одного с ним направления. Этот закон можно так сформулировать: когда однородные части следуют друг за другом в порядке убывания величины, если нет возмущающих влияний, уменьшение происходит в геометрической прогрессии; также происходит и увеличение там, где величина частей возрастает. Последний случай, в сущности, сводится к первому, если рассматривать последовательность в обратном направлении.



Если выбрать объект природы и части его подходящим образом, и произвести у них измерения, то можно получить отношения, совпадающие с отношением золотого сечения

Но в природе направление нам дано ростом, происходящим с течением времени. Более старые части, из которых вырастают другие – либо самые маленькие, либо самые большие. Этот закон назвали законом натурального роста. Очевидно, что там, где он соблюдается, легко может встретиться и отношение золотого сечения, если и не точное, то во всяком случае приближённое. Но предположить, что оно сплошь имеет место, будет безусловно чересчур смело.

О пропорциях человеческого тела

Весь вопрос о пропорциях мы можем, очевидно, рассматривать таким образом: речь идёт о приближении к определённым средним или нормальным значениям, обнаруживающимся на реальном человеческом теле; это приближение получается либо просто посредством чисел, как это сделали Дюрер … и Шадов … , или же посредством известных арифметических или геометрических построений. Но даже если бы таким способом было получено ещё лучшее приближение, это ещё не даёт нам права делать отсюда вывод о "законе" так же, как, например, нельзя видеть закона в том, что число $1/\pi$ с чрезвычайно большой степенью точности выражается дробью 113/355. При применении выбранного приближённого приёма случайно может появиться и пропорция золотого сечения. Но следует весьма скептически относиться ко всем попыткам смотреть на золотое сечение как на господствующее отношение и вместе с тем как на общую норму природы, до тех пор, пока биометрия, т. е. систематическое измерение живых существ, отрасль науки, находящаяся сейчас в состоянии полного расцвета, не даст этому убедительного доказательства.

О психологических опытах Фехнера

Неуверенность при выборе, которую отмечает Фехнер, почти даёт нам возможность заключить, что мы сами по себе не склонны отдавать предпочтение отношению, которое даёт нам золотое сечение. Гораздо более правдоподобным является предположение, что золотому сечению первоначально было отдано предпочтение по рассудочным соображениям. Но вследствие того, что это отношение потом было избрано нормой для бесчисленного множества употребляемых форм, и что его приближения, естественно получающиеся путём выбора удобных близких числовых отношений, в общем и целом снова выдвигаются, оно, в конце концов, так утвердилось в представлении, что даже бессознательный выбор отношения размеров тоже тяготеет к нему. Но уверенности в этом вопросе во всяком случае очень трудно достигнуть. Мы должны всё же считаться с возможностью того, что тяготение к золотому сечению происходит благодаря нашей внутренней склонности.

Заключение

Ссылаясь на Пфейфера, который, говоря о ЗС, находит его воплощение во многих местах и видит в этом ценное средство для достижения красивого и приятного впечатления, Тимердинг заключает:

Без сомнения, золотое сечение, в этом ограниченном толковании его значения, как дающего хорошее и приятное соотношение измерений или частей друг к другу, сохраняет постоянно ценность, которую не следует преуменьшать. С другой же стороны, мы должны остерегаться мистического толкования этого отношения, которое не требуется для понимания действительных законов искусства и психологических условий художественных впечатлений, а лишь препятствует правильному пониманию этих условий и направляет на ложный путь, вследствие необоснованного введения метафизического элемента.

После достаточно полного цитирования узловых моментов *непритязательной, маленькой*, по словам самого автора, книги у читателя, знакомого с основами ТЗС и попытками её применения в различных областях, может, наверное, возникнуть чувство, что всё это ему уже знакомо. Возможно, так оно и есть. Тимердинг не исследователь ЗС, а его аналитик и критик, и всё дело, видимо, в том, что выдвинутые им аргументы *pro* и *contra* были позже подхвачены другими и стали как бы неотъемлемой частью атмосферы, окружающей золотое сечение. Атмосферы вечных споров, диаметрально противоположных оценок, стремления распространить принцип золотого сечения на всё и желанием загнать в узкие рамки математического формализма, с редкими и малозначительными выходами за её пределы. Из книги, в которой автор избегает категорических суждений и однозначных оценок, каждая из сторон может извлечь выгодные для себя положения, игнорируя остальное. Можно, очевидно, сказать, что Тимердинг вооружает аргументацией и сторонников и противников универсальности ЗС, что, впрочем, не умаляет ценности его труда. Её популярность, конечно, не случайна: цитируют, переводят и регулярно переиздают, как правило, хорошие, востребованные работы. Компактное, без излишеств изложение, изящное построение элементарной теории ЗС на основе пентаграммы, а более всего небесспорный, но интересный и внятный анализ приложений ЗС в эстетике и в природе, в пропорциях человеческого тела, растениях, психологии и изобразительном искусстве предопределили успех книги Тимердинга.

3. Модулор Ле Корбюзье

Из предыдущего изложения следует, что ПЗС чаще всего проявляется как деление отрезка в крайнем и среднем отношении, в виде геометрических фигур и тел, особенно платоновых, как приводящий к константе ϕ статистический анализ данных измерения и в виде последовательности Фибоначчи. Все они как бы грани одной и той же сущности, лингвистически не совсем корректно обозначаемой родовым понятием *золотое сечение*. Ряд Фибоначчи и золотую константу иногда рассматривают как две не слишком сильно связанные друг с другом, почти независимые математические конструкции: строящаяся по рекуррентной формуле бесконечная последовательность натуральных чисел и иррациональное число, которое может определяться различными способами, притом без всякой рекурсии. Они, разумеется, не тождественны, и такая точка зрения имела бы право на существование, если иметь в виду их связь лишь в этих рамках. В такой постановке первично только положенное в основу рекурсии правило, а константа ϕ, как и последовательность Фибоначчи, к слову сказать, необязательно целочисленная или даже действительная, всего лишь следствия этого правила. Однако константа ϕ не просто предел отношения двух соседних чисел Фибоначчи. Более тонкая, не связанная с операцией предельного перехода аналитическая зависимость между ними даётся формулой Бине, построенной, мы знаем, по тому принципу, по которому строятся гиперболические функции. В такой конструкции числа Фибоначчи – значения определённой комбинации показательной функции с основанием ϕ, а искусственно отделять одно от другого, функцию от её значений, значит заниматься пустой схоластикой.

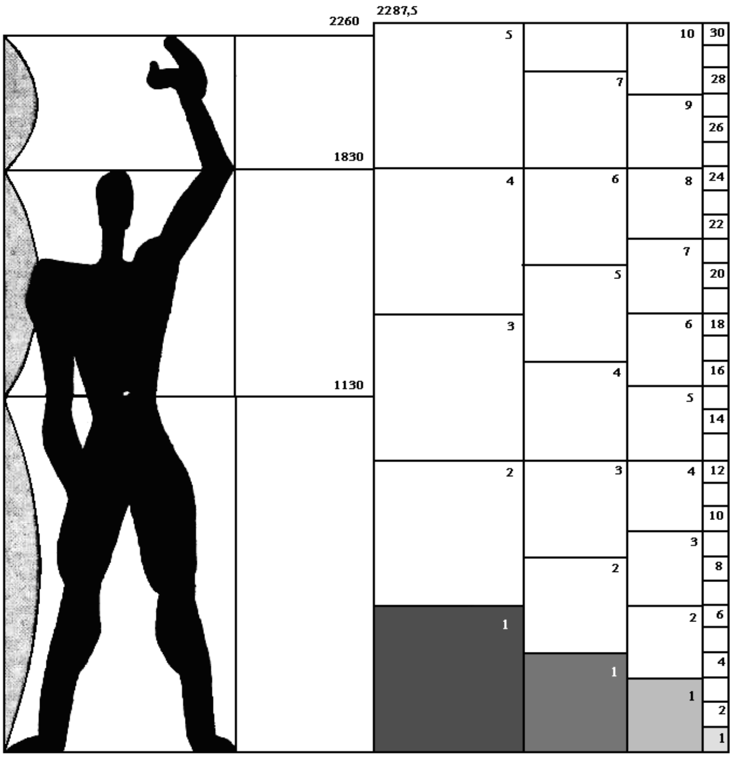
Сказанное необходимо для понимания идеи модулора Ле Корбюзье (Le Corbusier; Charles-Edouard Jeanneret-Gris, 1887–1965), где фактически нет золотой константы, нет даже в явном виде чисел Фибоначчи, а только рекурсия, строящаяся по принципу: каждый член, начиная с третьего равен сумме двух предыдущих. В самой идее модулора [Корбюзье[1,2]] нетрудно уловить витрувианский мотив о соответствии правильной композиции сооружения с пропорциями хорошо сложенного человека.

Создание системы модулор призвано нормализовать и индустриализовать строительство не только во Франции, но и на всех континентах, поскольку в наше время промышленная продукция путешествует по миру. “Модулор” примиряет футы – дюймы с метрами; он позволяет переводить фут – дюйм в десятичные меры и опрокидывает преграду, которая разделяет людей, пользующихся этими двумя различными системами мер. Это система, имеющая целью ввести в архитектуру и механику размеры и габариты, согласованные с человеческими масштабами, увязать с бесконечным разнообразием чисел те основные жизненные ценности, которые завоёвывает человек, осваивая пространство. Прошло шесть лет исследований и опытов, и “модулор” дал о себе знать. Марсельский комплекс строился с учётом этой системы. Именно поэтому столь крупное сооружение кажется вполне уместным, светлым, элегантным и человечным [Ле Корбюзье[2], 204].

Модулор призван также примирить антропоморфную английскую систему единиц длины с принятой большинством научного сообщества геоцентрической системой. А это возможно лишь посредством системы, основанной не на произвольном выборе тех или иных единиц измерения с десятичной или какой-либо другой шкалой, а на некоем универсальном принципе, безотносительном к выбору исходных единиц измерения. Главное, чтобы принцип, приводящий к образованию определённой последовательности чисел, соответствовал фундаментальным особенностям объекта, в данном случае естественному членению человеческого тела. Не случайно, конечно, что адепт золотого сечения Ле Корбюзье, неоднократно упоминавший его в своих произведениях и придерживающийся взглядов на его роль в искусстве, и природе, близких к позиции Цейзинга, остановил свой выбор на принципе золотого сечения в форме закона третьего члена.

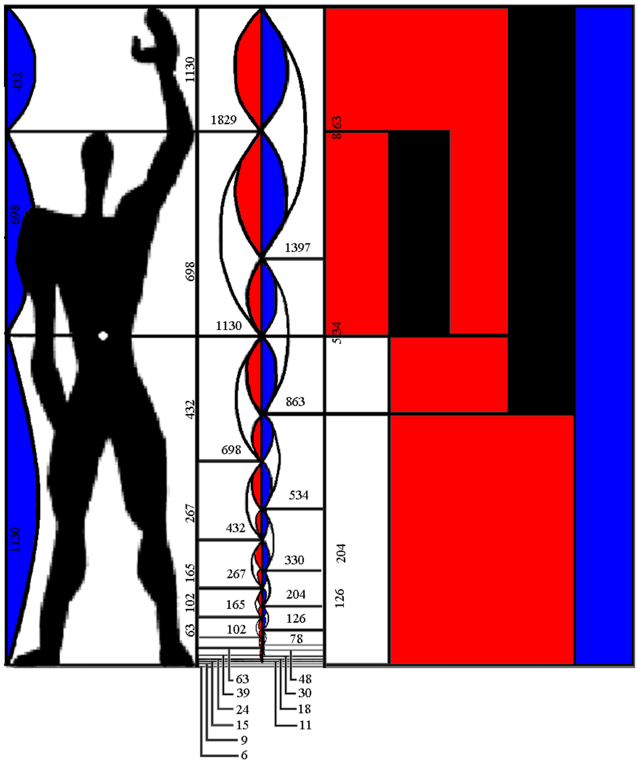
Книга Ле Корбюзье и посвящённая его столетнему юбилею швейцарская монета в 5 франков с изображением модулора

Представим теперь идею модулора с использованием работы [A[15,g], *п.* 7.6]. Рост человека для определённости Ле Корбюзье взял равным шести футам (1828,8 мм ≈ 183 см). Он делится пупком в золотой пропорции на 1130 мм и 700 мм, а числом 2260 мм = $1130 \cdot 2$ мм определяется высота от основания до кончиков пальцев поднятой руки.



Модулор I и пропорции человеческого тела

В правой части рисунка в виде неодинаково окрашенных квадратов даны единицы измерения, равные 18, 12, 9 и 3 дюймам, которые в длину равную 90 дюймам ≈228,6 см, чуть большую 226 см, укладываются соответственно 5, 7½, 10 и 30 раз. Нетрудно заметить, что даже основные пропорции и положения человеческого тела, не говоря уж о его более тонком членении, не укладываются на одной-единственной шкале, строящейся по правилу третьего члена. Поэтому усовершенствованный вариант "Модулор II" содержит уже две шкалы: красную и синюю, деления которой вдвое крупнее делений красной шкалы.



Модулор II и пропорции человеческого тела

Крайняя левая, синяя шкала состоит из измеренных в миллиметрах чисел 432, 698, 1130, дающих в сумме 2260, то есть длину тела с поднятой рукой. Остальные четыре шкалы, для удобства пронумерованные слева направо цифрами II–V, приведены в таблице.

Таблица
Четыре шкалы модулора

N	**Числовой ряд, мм**												
II	63	102	165	267	432	698							
III	6	9	15	24	39	63	102	165	267	432	698	1130	1829
IV	11	18	30	48	78	126	204	330	534	863	1397		
V	126	204	330	534	863								

Здесь нет в явном виде ни чисел Фибоначчи, ни константы ϕ, но все целочисленные последовательности построены по закону третьего члена (несколько отклонений на 1 мм, связанных с возникающими при округлении нецелых чисел погрешностями, не в счёт), а это и есть решающее условие. Соотношение между двумя величинами a_k и a_m $(k < m)$ любой из пяти указанных шкал можно с помощью функции $R(x)$ округления действительного числа x до ближайшего целого числа и с учётом сделанной оговорки о погрешностях округления записать в таком виде:

$$a_k = R(a_m \phi^{k-m})$$

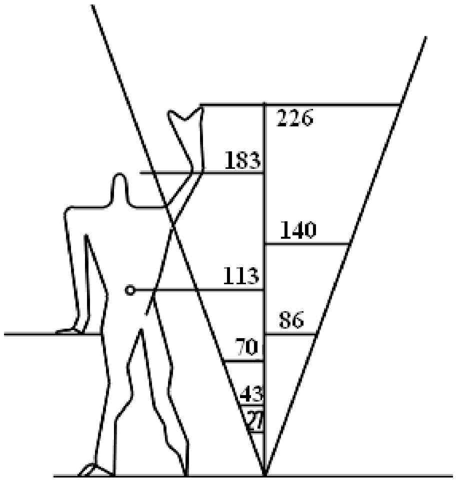
Если в третьей, например, шкале взять $a_3 = 15$ и $a_{11} = 698$, то в справедливости равенства $15 = R(698\phi^{-8})$ нетрудно убедиться хотя бы прямой проверкой. Имея два начальных члена a_1 и a_2 числового ряда шкалы модулора, можно найти общую формулу для любой величины a_n:

$$a_n = a_1 F_{n-2} + a_2 F_{n-1}$$

Например, для той же третьей шкалы, в которой $a_1 = 6$ и $a_2 = 9$, соотношение

$$a_{11} = a_1 F_9 + a_2 F_{10} = a_1 F_{n-2} + a_2 F_{n-1}$$

выполняется с точностью до единицы: $6 \cdot 34 + 9 \cdot 55 = 699 = a_{11} + 1$. Следовательно, в основу модулора как универсальной по идее системы чисел, связанных в частности с пропорциями человеческого тела, действительно положен принцип золотого сечения в форме правила третьего члена, неизменными спутниками которого являются числа Фибоначчи и константа ϕ, использованная также по устоявшейся традиции для определения основной точки деления (пупком) тела на две неравные части.



Двушкальная схема модулора

В упрощённом, содержащем лишь две шкалы варианте модулора в качестве основных величин взяты 113 см для красной шкалы и вдвое большее 226 см для синей. Нетрудно заметить, что по правилу третьего члена построен и левый числовой ряд (27 + 43 = 70, 43 + 70 = 113, 70 + 113 = 183) и правый (86 + 140 = 226). Хотя метр как десятимиллионная часть четверти парижского меридиана – чисто французское изобретение, повсеместно применяемое в научной практике, здесь единицей измерения (роста человека) служат не франко-геоцентрические метры, а английские антропоморфные футы, переведённые всё же в привычные сантиметры. Понятно, что ни метр с миллиметрами и десятичной системой счисления, ни фут с английской системой мер длины для математически точного моделирования по модулору не приспособлены; для этой цели больше подошла бы основанная на последовательности Фибоначчи золотая математика с такой единицей измерения длины (назовем её для краткости *ле*), при которой рост в шесть футов, равный 1828,8 мм, был бы равен, скажем, 2584 (= F_{18}) ле. Но в концептуальном плане важна, конечно, не единица измерения, не конкретные шесть футов и даже не система счисления, а принцип образования последовательности чисел, характеризующих пропорции человека по двушкальной системе.

Обозначив рост человека отвлеченным числовым символом l и используя функцию округления R, можно представить красную шкалу на рисунке в виде убывающей последовательности

$$l,\ R(l\phi^{-1}),\ R(l\phi^{-2}),\ R(l\phi^{-3}),\ R(l\phi^{-4}),$$

а синюю как последовательность

$$R(2l\phi^{-1}),\ R(2l\phi^{-2}),\ R(2l\phi^{-3})$$

Хотя мы постарались представить всё самое важное о модулоре, не мешает снова обратиться к первоисточнику, следуя принятому ранее постулату о незаменимости живого слова автора какими угодно комментариями и пересказом. Приведём поэтому выдержки из помещённого в сборнике [Ле Корбюзье[2], 233–257] очерка *Модулёр*, содержащего автобиографические данные и историю изобретения. Начнём с названия *модулёр* (сейчас предпочитают термин *модулор*, от лат. *modulor* – (ритмически) размерять) и его определения.

Необходимо было выбрать название для нашей золотой линейки. Из ряда слов мы выбрали “модулёр”. … Сущность изобретения была выражена с редкой простотой: “модулёр” – это средство измерения, основой которого являются рост человека и математика. *Человек с поднятой рукой даёт нам точки, определяющие занятое пространство* – нога, солнечное сплетение, голова, кончик пальцев поднятой руки, – *три интервала, обуславливающие серию золотого сечения, называемую рядом Фибоначчи. С другой стороны, математика предлагает здесь некоторое изменение, очень простое и в то же время весьма существенное: простой квадрат, удвоение и два золотых сечения.*

Далее автор, с сознанием своей правоты и не без гордости, заявляет о том, что модулёр примиряет английские футы и дюймы с метрами, сантиметрами и десятичной системой в целом [Там же, 250, 251, 253].

“Модулёр” автоматически осуществил преобразование метра в фут – дюйм. Он не только укрепил сердечное согласие метра (который есть не что иное, как условно принятый для измерения металлический брусок, хранящийся в специальном колодце около Бретёйского павильона в окрестностях Парижа) и всей десятичной системы с футом – дюймом, но и избавил фут – дюйм путём применения десятичной системы от сложных вычислений, затрудняющих сложение, вычитание, умножение и деление...

"Модулёр" – это измерение, опирающееся на математику и построенное по принципу человеческого масштаба. Он образует двойную серию чисел – красную и голубую. Однако может ли числовая таблица ответить на всё? Нет! Здесь я хочу ясно высказать свою точку зрения на то, что, по-моему, является ключом к изобретению. Метр есть не что иное, как абстрактная величина; сантиметр, дециметр, метр – только наименования десятичной системы. ... Цифры "модулёра" – размеры. Следовательно, сами по себе они жизненны и являются итогом выбора из бесконечного ряда значений. Более того, будучи выражены в числах, они обладают всеми их достоинствами. Однако объекты строительства, которые они фиксируют, представляют собой весьма различные по объёму разнообразные *вместилища человека* или *продолжение человека*. Чтобы выбрать лучшие размеры, нужно ясно *видеть их и уметь оценить, ощупывая руками*, а не ограничиваясь только *размышлениями* (это относится к размерам, очень близким к росту человека).

Определяя и уточняя понятие модулёра, продолжая мысль об условности десятичных единиц измерения длины, Ле Корбюзье ставит во главу угла понятие *размера*, как результат обоснованной и оправданной селекции из бесконечного множества вариантов, причём количественное выражение размеров наделяет их всеми теми преимуществами, которые способна обеспечить числовая математика. Это больше похоже на победный тон первооткрывателя, чем холодное рассуждение исследователя с глубоким пониманием тонкой связи между абстракцией числа и объектами внешнего мира. Впрочем, обычная для серьёзного исследователя сложность приобретения твёрдой убеждённости в правильности реализующего идею конкретного выбора может стать источником колебаний и творческого дискомфорта. Наверное, не случайно Ле Корбюзье резервирует за собой право на *сомнение* и *полную свободу действий*.

Я хочу знать, открыл ли "модулёр" *волшебную дверь в мир чисел* сознательно, как в известную ему область, или только приоткрыл то, что должен был бы открыть, случайно, наудачу, как *любую дверь* среди сотни или тысячи чудесных дверей, которые могут или могли бы нас сюда привести. ... Как я уже говорил, я задаю себе этот вопрос, предлагая подумать над ним и своим попутчикам по работе. Но во всех случаях я всегда оставлю за собой право сомневаться в бесспорности решений, подсказываемых мне "модулёром", сохраняю полную свободу действий, подчиняя их моему чувству вещей, но отнюдь не моему рассудку [Там же, 254].

Остаётся только привести с некоторыми сокращениями и обычным обозначением золотой константы заключительную часть работы Ле Корбюзье, содержащую числовые данные, в основном известные нам из вышеизложенного.

В заключение нашего небольшого очерка будет небесполезно ещё раз, вкратце ... повторить то, о чём мы уже говорили выше.

1. Наша решётка даёт три размера: 113, 70, 43 (в сантиметрах), которые согласуются с ϕ (золотое сечение) и рядом Фибоначчи: 43 + 70 = 113, или 113 – 70 = 43. В сумме они дают 113 + 70 = 183; 113 + 70 + 43 = 226.

2. Эти три размера (113, 183, 226) определяют величину пространства, занимаемого человеком шести футов.

3. Размер 113 определяет золотое сечение 70, показывая начало первой, *красной серии*: 4–6–10–16–27–43–70–113–183–296 и т.д.

... До сих пор стоящий человек служил определению трёх, а не четырёх решающих значений "модулёра", а именно:

113 – солнечное сплетение,

183 – вершина головы (отношение ϕ, 113),

226 – конец пальцев поднятой руки.

Второе отношение ϕ 140–86 вводит четвёртую существенную точку фигуры человека – точку опоры опущенной руки; 86 сантиметров.

Таким образом, если человек, у которого левая рука поднята, непринуждённо опустит правую руку, то она даст отметку 86. В результате мы получаем четыре точки, определяющие с помощью фигуры человека занимаемое им пространство.

Размер 226 (2 ×113 – удвоение) определяет золотое сечение 140–86, показывая начало второй, *голубой серии*: 13–20, 3–33–53–86–140–226–366–592 и т.д.

4. Из этих значений и размеров отметим те, которые определённо связаны с ростом человека.

5. Однако тот, кто рассчитывает в конечном итоге возвратиться к значениям, допускающим бесконечные комбинации, пусть обратиться к таблицам, посвящённым применению “модулёра” [Там же, 255, 257].

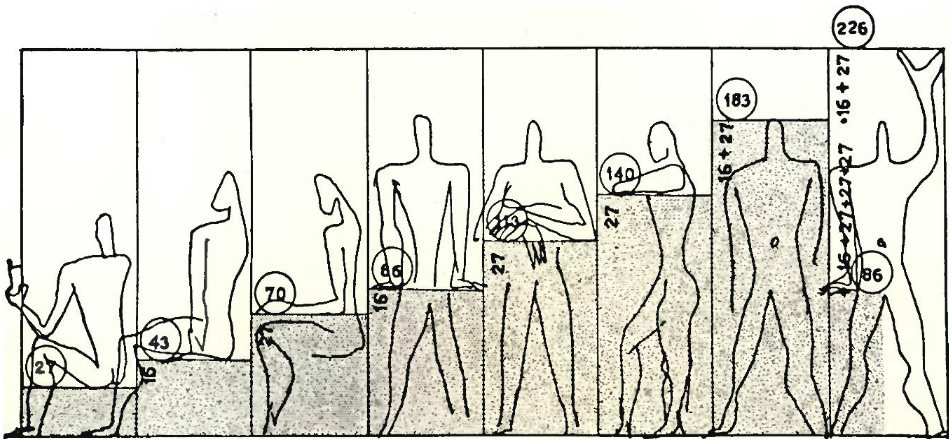


Рисунок из очерка Ле Корбюзье, соотносящий выражаемые числами *размеры* с ростом человека

В сущности Ле Корбюзье возродил, продолжил и развил на новом уровне идеи своих многочисленных исторических предшественников, стремясь полнее использовать такие особенности золотой пропорции, как её обусловленность правилом третьего члена, связь с числами Фибоначчи, аддитивное свойство. Что касается точности соответствия оригинала идее, то обычный человек, видимо, скроен по модулору Ле Корбюзье не больше, чем по витрувианскому человеку.

4. Эмилий Розенов

Музыковед и пианист с математическим образованием Эмилий Карлович Розенов (1861–1935) является, наряду с П.А. Флоренским и Л.Л. Сабанеевым, одним из зачинателей “золотого” анализа музыкальных и литературных произведений. Свои исследования в этой области он начал ещё в 1903 г., а в полном виде изложил уже в 20-е годы в работах [Розенов[1,2]]. Как и другие авторы, он уделял особое внимание теоретическому обоснованию золотой эстетики, подкрепляя свои умозаключения конкретными эмпирическими исследованиями. Анализ некоторых теоретических разработок Розенова содержится в работе [Стахов[4]], которую и процитируем.

Большое внимание исследованию законов музыкальной гармонии уделял известный русский искусствовед Э.К. Розенов. Он утверждал, что в музыкальных произведениях и поэзии существуют строгие пропорциональные отношения:

Явные черты “природного творчества” мы должны признать в тех случаях, когда в сильно одухотворённых созданиях гениальных авторов, порождённых мощным стремлением духа к правде и красоте, мы совершенно неожиданно обнаруживаем какую-то неподдающуюся непосредственному сознанию таинственную закономерность числовых отношений.

Э. Розенов считал, что золотое сечение должно играть в музыке выдающуюся роль как средство для приведения однородных явлений в соответствие, созданное самой природой:

Золотое деление могло бы: (1) устанавливать в музыкальном произведении изящное, соразмерное отношение между целым и его частями; (2) являться специальным местом подготовленного ожидания, совмещаясь с кульминационными пунктами (силы, массы, движения звуков) и с разного рода выдающимися, с точки зрения автора, эффектами; (3) направлять внимание слушателя на те мысли музыкального произведения, которым автор придаёт наиболее важное значение, которые желает поставить в связь и соответствие между собой.

Розенов выбирает для анализа ряд типичных произведений выдающихся композиторов: Баха, Бетховена, Шопена, Вагнера. Например, исследуя Хроматическую фантазию и фугу Баха, за единицу меры во времени была принята длительность четверти. В этом произведении содержится 330 таких единиц меры. Золотое деление этого интервала приходится на 204-ю четверть от начала. Этот момент золотого сечения точно совпадает с ферматой (в нотной грамоте знак ферматы увеличивает длительность звука или паузы обычно в 1,5 – 2 раза), которая отделяет первую часть произведения (прелюдию) от второй. Поразительную соразмерность частей демонстрирует также фуга, следующая за фантазией. При взгляде на схему гармоничного анализа фуги невольно приходишь в священный трепет перед гениальностью мастера, воплотившего силою художественной чуткости до такой степени точности сокровенные законы природного творчества.

Э. Розеновым подробно были разобраны: финал сонаты cis-moll Бетховена, Fantasia-Impromptu Шопена, вступление к “Тристану и Изольде” Вагнера. Во всех этих произведениях золотое сечение встречается очень часто. Особое внимание автор обращает на фантазию Шопена, которая была создана экспромтом и не подлежала никакой правке, а значит, и не было сознательного применения закона золотого сечения, которое присутствует в этом музыкальном произведении вплоть до мелких музыкальных образований [Стахов[4]].

Анализируя поэзию М.Ю. Лермонтова, Ф. Шиллера, А.К. Толстого и других известных авторов, Розенов фактически придерживается фехнеровской идеи о заложенной в человеке природной предрасположенности к золотому сечению. При этом он замечает, что

Мы не имеем права даже подозревать [авторов этих произведений] в сухом и кропотливом вычислении числовых соотношений для руководства ими во время процесса создания. В этих случаях нам остаётся прибегнуть к единственному выводу, что обнаруженная числовая закономерность является материальным выражением психической закономерности и результатом безотчётной потребности автора, то есть его бессознательного подчинения законам природного творчества.

По Розенову математический анализ музыкальных произведений великих композиторов не только свидетельствует о наличии в них ЗС, но по особенностям бессознательного применения закона золотого сечения позволяет проникнуть в творческую лабораторию композитора и судить о характерных особенностях его музыкального гения.

Мы находим у Баха сравнительно более детальную и органическую сплочённость. Закон золотого деления проявляется у него с поразительной точностью в соотношениях крупных и мелких частей как в строгих, так и в свободных формах, что, несомненно, соответствует с характером этого гениального мастера-труженика, сильным, здоровым и уравновешенным, с его глубоко сосредоточенным отношением к работе и детально отделанной манерою письма. У Бетховена проявление закона золотого сечения глубоко логично по отношению к размерам частей формы, но главным образом указывает на силу темперамента этого автора по точности совпадения всех моментов высшего напряжения чувств и разрешения подготовленного ожидания с моментами золотых сечений. У Шопена внутренняя формальная связь сравнительно слабее и проявляется не сплошь, а лишь местами. По силе темперамента он сходен с Бетховеном, но проявление это более внешне и касается чаще изящной нарядности изложения мысли, нежели его внутренней логики.

У Моцарта темперамент проявляется сравнительно слабее, закон золотого сечения направлен у него особенно часто к подчёркиванию драматических элементов (психологических контактов, противопоставлений характеров) и трагических положений. У Глинки мы находим применение данного закона только лишь в широких масштабах при полном почти отсутствии мелочных соответствий, встречающихся так часто у Баха и Шопена.

5. Леонид Сабанеев

Имя русского музыковеда, композитора и учёного Леонида Леонидовича Сабанеева (1881 – 1968) относится к числу наиболее упоминаемых в связи с новейшей историей золотого сечения имён. Приведённая почти полностью его небольшая статья [Сабанеев[1]] интересна сама по себе и даёт ясное представление об отношении Сабанеева к ЗС и характере его исследований, см. также [Сабанеев[2]].

Золотое сечение есть деление известной протяжённости таким образом, чтобы бо́льшая часть относилась к меньшей, как целое к бо́льшей. Это деление применимо и к пространственным явлениям, и к временным.

Оно было известно со времени античной древности – им занимались эллинские философы. И именно они заметили, что золотое сечение каким-то образом связано с “эстетическим восприятием” стройности, гармоничности пропорций, соразмерности частей. Уже античные мыслители заметили, что оно распространено в явлениях природы, в строении минералов, в пропорциях частей растений и членов тела животных и людей. Они же заметили распространённость этого типа соразмерности в произведениях искусства – в архитектурных пропорциях, в скульптуре, и всюду ‹это› связано с тем же эстетическим ощущением стройности, что, по мнению философов типа “эмпириокритицизма” (Авенариус, Мах), объясняется тем, что в условиях золотого сечения количество созерцаемых и наблюдаемых отношений сводится к минимуму и обусловливает наибольшую “лёгкость” восприятия.

Самое положение точки золотого сечения на отрезке прямой линии выражается иррациональным числом, приблизительная величина которого 0,618 длины отрезка.

Значительно позднее феномен золотого сечения был обнаружен в явлениях “временного характера”, а не пространственного, в искусствах “длящихся”, как поэзия и музыка, в произведениях литературы. И здесь наличие золотого сечения выражается в положении “кульминационного пункта” произведения или даже отдельных частей произведения. Если кульминационный пункт произведения или его органического отрезка падает на золотое сечение – то опять же это совпадение отмечается в восприятии ощущением максимальной “стройности”.

Долгое время все эти рассуждения о золотом сечении имели не научный характер, являлись просто “любопытным или занятным” феноменом, не более того. На научную почву его было суждено поставить русскому “музыковеду” – моему покойному другу Эл. Карл. Розенову, который произвёл первый тщательное исследование этого феномена главным образом в музыкальных произведениях и только отчасти в литературных. В музыке легче точно установить именно “кульминационный” пункт произведения, которым обычно является либо кульминация динамики, либо пункт наибольшей “значительности”, а чаще всего оба вместе.

В 1924 году я произвёл точное исследование всех этюдов Шопена с этой точки зрения – из них минимальное число оказалось не имеющих золотого сечения на надлежащем пункте линии времени (в трёх из 25), а огромное большинство со значительной точностью подтверждало теорию. Интересно, что при этом приходилось иметь дело не с “метрическим временем” при вычислении отрезков произведения, не с “нотным” временем, а с реальным временем исполнения, учитывающим задержки и колебания темпа экспрессивного типа. Для этой цели я пользовался лентами механического инструмента "миньон", записывающего живую игру пианиста, – измерение нужных отрезков времени сводилось тогда к измерению пространства на ленте. Это была вполне научно точная работа, но параллельно я не мог не отмечать совершенно чётких проявлений этой же закономерности и в произведениях почти всех гениальных композиторов.

При этом исследовании выяснилось, что обычно в музыкальных произведениях имеется не одно золотое сечение, а по меньшей мере два. Одно – главное – находится на расстоянии, выше указанном мною (0,618), от начала произведения, другое же – несколько менее важное, но всегда отмеченное каким-нибудь "эстетическим событием", – на том же расстоянии от конца. Распространённость этого явления среди гениальных композиторов необычайно велика. Я произвёл с этой целью "осмотр" едва ли не всей "гениальной и высокоталантливой" музыкальной литературы, так что даже перечень имён не представляется нужным. Исключения редки и обычно относятся к "негениальным" произведениям и к композиторам, чуждым инстинкта "стройности". Интересно, что даже такие гигантские произведения, как, например, "Нибелунги" Вагнера, имеют "правильно поставленные" кульминации, и не только в каждой части тетралогии, но и во всей её совокупности: кульминации эти падают на моменты усыпления Брунгильды и "пробуждения" её.

Я не стану обременять читателя массой примеров, но скажу, что и в области литературы я отметил то же явление. В поэзии кульминация (как и в музыке) главным образом интонационная, и так как интонация поэтом не фиксируется, а остаётся в "импровизационном плане", то тут точного исследования быть не может.

Чётче, определённее и легче исследуется этот феномен в произведениях литературы, где кульминация имеет характер смысловый (кульминационный пункт "событий"). Но хочу отметить тот факт, что интонационный "кульминационный пункт" при чтении стиха естественно попадает именно на золотое сечение. В обычном, четырёхстрофном отрывке он находится в середине третьей строфы. Отмечу, что и самая форма сонета (8 строк плюс 6) как бы сама приспособлена к золотому сечению и кульминация падает на начало 9-й строки.

Когда я усиленно работал над этим феноменом, мне пришла в голову мысль, может быть, чрезмерно смелая, о том, что если принцип золотого сечения так распространён и в природе, и в искусстве, то нельзя ли ожидать его проявления и… в человеческой жизни? Ведь в природе, по всей вероятности, этот принцип является следствием законов роста организмов, но ведь и человек – тоже организм. Я решил подойти ближе к этому вопросу. Я выбрал для исследования биографии "великих" людей в разных областях – гениев политики, науки, искусства. Выбрал я "великих" потому, что, во-первых, их биографии легче детально знать; во-вторых, потому, что великие люди обычно имеют свою центральную идею жизни и её реализация имеет обычно точно известную дату, да и вообще гениальные люди, творящие "с необходимостью законов природы", как раз подходят для такого исследования, ибо тут есть наибольшая вероятность найти подтверждение закона, который меня интересовал. Так и вышло.

Я исследовал около 800 биографий, и процент "невыполнения" закона был всего между 3–4%. Как и в музыкальных произведениях, я натолкнулся на многократность золотых сечений (нормально их два) – обычно одно соответствует выходу гения на путь своей гениальности, другое – кульминации жизни и её достижений.

Закономерность эта, конечно, является скорее своеобразной статистической закономерностью и как таковая не может претендовать на абсолютную математическую точность, но её необычайная распространённость доказывает, что с ней можно и надлежит считаться. Из случайно выбранных биографий фреквенция в 96% что-нибудь да значит. Почему в самом деле Ньютон написал (завершил) свои "Principia" в год золотого сечения своей жизни? Почему Наполеон короновался императором в тот же день золотого сечения? А Пётр Великий основал Петербург? Отчего Пушкин в годы золотого сечения своей жизни написал именно свои величайшие вещи ("Борис Годунов", "Евгений Онегин", "Пророк"), отчего Мусоргский закончил вчерне "Бориса" в тот же знаменательный момент? а Гёте в соответствующем пункте своей жизни закончил первую часть "Фауста"? Менделеев в этом пункте создал свою "Периодическую систему". Возьмём примеры более нам хронологически близкие: Ленин основал партию большевиков в год своего золотого сечения, тем самым предопределив свою кончину именно в 1924 году. Сталин в год своего золотого сечения стал генеральным секретарем партии, т.е. диктатором – выполнил "задачу жизни". Любопытно то, что характер смерти, её естественность или "неестественность", по-видимому, не имеет значения, как видно из примера Пушкина: лишняя вода на мельницу "фаталистов" – его смертный приговор был им самим написан вместе с "Евгением Онегиным" и с "Борисом".

С Львом Толстым дело обстоит сложнее и тоже чрезвычайно интересно. Его первое золотое сечение точно совпадает с появлением "Войны и мира" – вторая же (важнейшая) кульминация, хотя около того же времени написана была "Анна Каренина", точно совпадает не с литературными событиями его жизни, а с его "обращением". И надо понять, что это и правильно, ибо для Толстого, как мы все знаем, "обращение" было более важным событием его психики, чем его литература, о чём он не уставал повторять во весь конец своей жизни.

Я не могу утомлять читателя ещё другими подтверждениями закономерности – материала слишком много. Теперь перейду к иному моему экспериментированию в этой же области. Дело в том, что если известна дата рождения "гения" или выдающегося человека и если есть данные для того, чтобы уже при его жизни утверждать факт достижения им кульминационного пункта жизни, то достаточно небольшого арифметического вычисления, чтобы предсказать и конец его жизни. Такого рода вычисления я и производил, когда вышеописанные условия были налицо. Конечно, я ничего не говорил заинтересованным лицам, чтобы не повергать их в плохое состояние духа. Я сделал вычисления с двумя объектами, которые давали повод, чтобы считать, что их кульминация уже достигнута и что начинается жизненный и психический "спуск". Эти два лица были – Рахманинов и Глазунов.

Уже в начале десятых годов нашего века я почувствовал, что Глазунов уже перешёл свою кульминацию творчества, которой я считал его последние две симфонии, и что дальнейшее творчество уже является "спуском". Исходя из этой даты кульминации, падавшей на годы 1907–1908, я вычислил его дату смерти – она должна была произойти в 1935 году, и он точно последовал предсказанию (о котором я ему ничего не говорил). Приблизительно то же произошло и с Рахманиновым. Когда я убедился, что кульминационный подъём им достигнут – на мой (и на рахманиновский) взгляд, это был год написания им его лучшего произведения – "Колоколов" (кантата на текст Э. По), совпадавший и с кульминацией его славы как пианиста, то без труда вычислил, что его кончины можно ожидать в году 1942–43. Так и вышло.

Конечно, тут есть известная неуверенность именно в определении значимости данного момента как кульминационного, но если эта уверенность очень чётко выражена, то "предсказание" не представляет никакой трудности. Достаточно возраст данного лица в момент кульминации помножить на 0,62 (округляю цифру для простоты, так как все эти вычисления по необходимости приблизительны) и произведение прибавить к его возрасту, тогда сумма выразит его возраст в момент смерти. Тут нет никакого ни колдовства, ни мистики – одна арифметика. И вся таинственность всего явления, по-видимому, имеет корни в законах физиологического и психологического роста и развития, достижения возможной вершины и потом нормального и естественного увядания. И вот – статистическое исследование показывает, что эти периоды – роста и увядания – между собою образуют отношение золотого сечения.

Почему это так – неизвестно, как и вообще неизвестны причины статистического типа закономерностей. Но самое явление заставляет задуматься хотя бы над “фатальностью” этой закономерности, при которой конец жизни оказывается предопределен задолго до его осуществления.

Можно, конечно, поспорить с утверждением Сабанеева о том, что античные мыслители заметили распространённость ЗС в явлениях природы, в строении минералов, в пропорциях частей растений и членов тела животных и людей, … в произведениях искусства – в архитектурных пропорциях, в скульптуре. Античные мыслители, вернее немногие из них, занимались, как мы знаем, больше вопросами, связанными с золотой математикой и космологией: деление отрезка в крайнем и среднем отношении и выявление его иррациональности, построение фигур и тел золотого деления, в особенности пятиугольника, додекаэдра и икосаэдра, некоторые другие математические исследования, применение золотой геометрии в построении космоса. Всё остальное – желание любителей ЗС приписать древнему миру, посредством рациональной реконструкции и небесспорного толкования имеющихся артефактов, бóльший интерес к ЗС, чем это следует из достоверных источников.

Любопытна брошенная вскользь, со ссылкой на Рихарда Авенариуса (Richard Heinrich Ludwig Avenarius, 1843–1896) и Эрнста Маха (Ernst Mach, 1838–1916), мысль о том что в условиях золотого сечения количество созерцаемых и наблюдаемых отношений сводится к минимуму и обусловливает наибольшую “лёгкость” восприятия. Здесь необходимо заметить, что исследование связи ЗС с особенностями человеческого восприятия, начатое работами Адольфа Цейзинга, Густава Фехнера, Леонида Сабанеева, Павла Флоренского, Эмилия Розенова в Серебряный век и продолженная другими уже с наступлением золотого века, может быть сегодня продолжено, видимо, лишь с учётом важнейших характеристик головного мозга, генетического кода и воздействия внешней среды в процессе исторической эволюции *homo sapiens*. Положительный итог подобных исследований заранее не предопределён. Следует признать, что понимание человека как носителя мировой гармонии, в том числе и гармонии золотого сечения, является пока лишь красивой, льстящей нашим амбициям и самолюбию и правдоподобно кажущейся гипотезой, всё ещё не удовлетворяющей жёстким требованиям научной строгости. Пути, прокладываемые научными пионерами, могут оказаться ложными и ведущими в никуда, но в любом случае непозволительно не считаться, а тем более с высоты современного знания снисходительно отвергать с порога их теоретические соображения и накопленный ими огромный эмпирический материал.

Так, исследовав 1770 музыкальных произведений, Л. Сабанеев обнаружил золотое сечение примерно в трёх произведениях из четырёх, а всего наблюдалось 3275 случаев применения золотого сечения, присутствующего почти во всех произведениях Бетховена – 97%, Гайдна – 97%, Шопена – 92%, Моцарта – 91%, Шуберта – 91%, Скрябина – 90%. Как и в аналогичных исследованиях других авторов, чем талантливее композитор, тем больше “золота” в его произведениях.

6. Павел Флоренский

Философ, математик, физик, биолог, инженер, изобретатель, искусствовед, полиглот, поэт … – всё это не о Леонардо да Винчи или Альбрехте Дюрере, а о служителе бога и богослове Павле Александровиче Флоренском (1882–1937), одном из последних универсальных гениев истории. Не обошёл Флоренский в своём обширном произведении *У водоразделов мысли* (1918–1926) вниманием и золотое сечение, хотя эта сторона его деятельности относительно мало исследована и его имя не так часто упоминается в работах по ЗС. Между тем здесь есть и философия и богословские мотивы, математика и поэтика, возможно, не совсем приемлемые для рационального мышления, но представляющие несомненный интерес, по крайней мере, как оригинальное видение вопроса разносторонне одарённой личностью. Обширные знания и глубокий аналитический ум побуждают Флоренского искать “общую формулу единства”, связанную с понятиями идеи и полюсов, причём

Единство во множестве называется *идеей*. Полюсы, являющие *идею*, будучи неразрывны, в то же время и взаимо-противоположны. … *Полюсы* – это *начало* и *конец* явления сверхчувственного в области чувственной, места *входа и выхода ИДЕИ* в мир эмпирический [Флоренский, 462].

Далее следует рассуждение, в высшей степени интересное с точки зрения обоснования и дедуктивного вывода математической формулы посредством чистого мышления. Это слишком длинный вывод, чтобы приводить его полностью, но достаточно подробного цитирования он, безусловно, заслуживает.

Прежде всего попробуем наметить эту формулу приблизительно. Речь идёт о расчленении целого в пространстве и времени. Но сказано уже, что расчленение есть расчленение качественное. В пространстве и времени формальными знаками различия качеств может быть только различие в экстенсивности и в протенсивности – в протяжении и длительности. Качественная разница частей является в пространстве и времени как количественная разница их (т. е. частей) явлений. Следовательно, из двух полярно-сопряжённых частей одна должна быть большей (M), другая – меньшей (m), ибо только «больше» и «меньше» могут различать пространственно-временные образования.

Возвращаясь к той же мысли с иной стороны, мы должны сказать: части не могут быть равны, ибо тогда было бы безразличие их и взаимозаменимость. Следовательно, одна должна быть больше другой.

Начало положено: расчленение целого в пространстве и времени на неравные части. Следующий шаг – конкретизация общего положения, избегая всякого произвола и обязательно с взаимообусловленностью и взаимозависимостью частей, без чего соответствующая метафизической идее фундаментальная математическая конструкция родиться не может.

Следовательно, искомая нами формула соотношения частей должна возникнуть из сравнения частей. Таким сравнением может быть лишь измерение одной части другою. Иначе мы не получаем отвлечённого числа, которое было бы мерою соотношения, а лишь отрезок, который сам по себе есть лишь наглядная единичная величина и ничего не говорит вообще о соотношении. С другой стороны, не может быть и измерения отрезков некоторою единицею длины, ибо она была бы произвольная <функция> отношения наших отрезков и, следовательно, в результате вводила бы некоторую произвольную величину, не связанную с тем целым, которое расчленяет себя в виде наших отрезков. Очевидно, сопоставление их может быть лишь внутреннее, не выводящее за пределы самих отрезков и не вносящее ничего произвольного. Другими словами, наше сравнение может быть лишь путём измерения одного отрезка другим, т. е. наша формула будет дана как отношение одного отрезка к другому, как m/M.

В чём же особенность отношения этих отрезков [частей] сравнительно с отношением каких-либо других произвольно выбранных отрезков [частей пространства]? Очевидно, в том, что они суть отрезки не какие-либо, но образующие одно целое T, которое есть M + m. Другими словами, деление целого T должно быть таково, чтобы по частям наша мысль восходила к целому, поняла целое, как целое именно этих частей. Но их всего две. Стало быть, мера сравнения частей должна быть и мерою целого при сравнении с одною из частей. Эта последняя часть должна быть соединительным звеном для мысли при переходе от другой части к целому. Следовательно, она должна быть большею, чем другая часть, во столько же раз, во сколько целое больше её. Иначе говоря, отношение частей должно являть в себе отношение целого к части. Или, ещё иначе, то число, которое характерно для целого, измеренного своею частью, своим содержанием, должно быть характерно для всех отношений дальнейших делений или расчленений целого, при непрерывности промежуточного звена – меры – большей части деления. Этим единством числа, золотого деления, обозначаемого символом ⊙, выражается единство целого во всём многообразии его расчленений [Там же, 463–464].

При большом желании можно отыскать какие-то изъяны в рассуждениях Флоренского, но вряд ли будет преувеличением сказать, что это одно из лучших обоснований вселенской значимости ЗС, хотя и чуждое неписаным постулатам рационального мышления. К тому же это и блестящий образец того, как с помощью тонкой нетривиальной цепочки силлогизмов подводится метафизическая основа под математический формализм, в результате чего формальное построение начинает выглядеть просто как запись непререкаемой дедукции на языке математической символики. Сам автор заявляет, что

Приблизительно в таком роде, но менее строги, попытки дедукции, найденные мною в литературе. В особенности заслуживают быть упомянутыми выведения Цейзинга и Германна.

Далее философ уступает место математику, который без труда выводит искомую пропорцию, квадратное уравнение, приводящее к числам

$$\odot' = \odot = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\,39887\ldots \text{ и } \quad \odot'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}61803\,39887\ldots,$$

составленную из единиц непрерывную дробь и последовательность Фибоначчи, с пониманием произвольности выбора её начальных членов, то есть фактически на уровне рекурсии второго порядка.

Общий ход рассуждений, без обращения к пространственно-временной специфике, даёт право заявить следующее:

Построенное нами выведение золотого сечения исходило из идеи целого, раскрывающегося, являющегося в пространстве и во времени. А так как нами не были введены в ходе обсуждения особливые свойства пространства и рассуждения велись вообще, то, следовательно, закон золотого сечения, нами выведенный, есть закон явлений целого, как такового, – и в пространстве, и во времени равно, и было бы неосновательно сужать область применения его к одному только пространству. Последовательность фазисов развития или раскрытия целого во времени столь же подчинена закону золотого сечения, сколь и внеположность органов целого в пространстве.

Временной фактор, который раньше игнорировался, является теоретической новацией, а значит, закон золотого сечения связывается с понятием полюсов, смысл которых уточняется в следующем отрывке [Там же, 469].

В пространстве – полюсы суть вход и выход, во времени – начало и конец, рождение и смерть. Явление идеи надо представлять себе как деятельность, наполняющую пространство между полюсами как в смысле временном, так и в смысле пространственном, то есть как вихрь в среде, как силовую трубку, как вихревое напряжение среды. Строение этого напряжения выражает закон целого, идею. Но подобно тому, как всякая силовая линия, как всякая вихревая нить, входя в данную среду и выходя из неё, существует не только в ней, но и вне её, в иной форме, смыкаясь в себя кольцом, так, надо думать, и целое, являясь в пространстве и времени отрезком, на самом деле смыкается в себя, проходя области над временем и над пространством, и в этом смысле не имеет ни начала, ни конца… Принцип золотого сечения свидетельствует об единообразности прироста трубки. Как ни прирастает явление, оно остаётся себе подобно, оно не меняется в характере роста. Инвариантность роста – вот смысл закона золотого сечения.

Мысли Флоренского о глубоких корнях ЗС и вывод золотой математики из общих положений явно перекликаются с позицией Цейзинга. Вместе с тем, в концепции Цейзинга есть элемент недоведённости методологической рефлексии над опытом до степени логической завершенности, хотя он

С произведений искусства беспредельно распространил золотое сечение на явления биологические, акустические, химические, астрономические и, следовательно, явно выводит свой принцип из области эстетики в область космологии [Там же, 483].

Развивая эту мысль Флоренский, не сомневающийся в том, что закону золотого сечения подчинены явления природы, повышает его теоретический статус с уровня эстетической пропорции до уровня онтологического, а значит, всеобщего закона.

Если закон золотого сечения есть закон красоты, то почему должны подчиняться ему не только произведения изящных искусств, но и произведения природы (по обычному воззрению), не зависящие в своём строении от творческой воли человека? Было бы столь же чуждо произведениям искусства *не* подчиняться этому закону, как и произведениям природы ему *подчиняться*, если бы золотая пропорция была пропорцией именно эстетической. Но мы знаем, что ей подчинены явления природы, и, следовательно, золотая пропорция эстетической бывает в своём частном или, точнее, вторичном причинении, но не в своём первоистоке. Нельзя сказать, что *прекрасному* свойственно подчиняться эстетическому закону Цейзинга, но должно сказать, напротив, что подчиняющееся закону золотого – прекрасно, ибо закон золотого сечения есть закон жизни, а жизнь прекрасна. Нельзя сказать, что прекрасный организм должен быть и правильно сложенным, но должно сказать, что правильно, т. е. сообразно своему плану, сложенный организм воспринимается нами как прекрасный. Одним словом, закон золотого сечения есть закон *и* эстетический потому, что он *до* того есть закон биологический, а также может быть физический, астрономический, химический и т.д. Но тогда делается понятным, почему действительность подчиняется этому *своему* закону, закону строения своего о себе, тогда как было бы непонятно, почему она должна подчиняться законам нашего *вкуса*. ... Закон золотого сечения действительно осуществлён в природе. Но сфер или планов его осуществления много, и тогда встаёт вопрос об общем начале этих осуществлений. Это начало есть бытие в своём явлении. Другими словами, золотое сечение есть закон *ОНТОЛОГИЧЕСКИЙ*, и именно, как уяснено ранее, выражает строение *ЦЕЛОГО* как такового. Этим устанавливается смысл занимающего нас закона.

Онтологическим статусом закона определяется его связь с опытом [Там же, 484–485].

Но, будучи законом онтологическим, золотое сечение тем самым есть закон *априорный* – предшествующий опыту, а не из опыта взятый. Пусть произведения искусства и даже природы не вполне точно подчиняются ему: всё равно мы должны опираться на этот закон онтологии, подобно тому как мы не считаемся с показаниями опыта при своём утверждении закона тождества или закона достаточного основания. Отступления от их опыта служат нам не свидетельством *против них*, а, напротив, поводом искать, чтó именно вызывает отступления, т.е. признанием этих отступлений лишь *кажущимися*. Отступления действительности от законов логики, хотя бы даже не были найдены конкретные причины отступления, ведут в нашем сознании к вящему *утверждению* этих законов. То же самое должно сказать и о законе золотого сечения. Действительность, там, где она отступает от этого закона, побуждает нас утверждать *истинность* этой *НОРМЫ нашего мышления* и её, потому, *НЕПРЕЛОЖНОСТЬ* и искать причины отступления от неё и неправильностей в способе её применения. Так например, если бы оказалось, что некоторый организм не делится в крайнем и среднем отношении, то мы вынуждались бы утверждать, что не там искали точку естественного расчленения организма, где она находится, и приняли вместо неё расчленение второстепенное и несущественное.

В этих рассуждениях можно уловить сходство с мыслями, высказанными в другом, понятно, контексте и ракурсе, такими выдающимися учёными XX века, как Пуанкаре, Эйнштейн и Дирак. Относящийся к внешнему миру априорный закон естественнонаучной природы нуждается во внешнем оправдании и в то же время не может быть опровергнут не согласующимися с ним эмпирическими данными. Надо знать, где и как применять закон и всегда учитывать, что в чистом, “незамутнённом” посторонними факторами виде он редко встречается. Один из сложных моментов познания как раз и состоит в определении сути эмпирического явления, установлении его обусловленности действием общего закона и в учёте внешних коррелятов, способных в значительной мере повлиять на результаты измерений. Вместе с тем, естественнонаучный закон любого уровня общности немногого стоит, если выведенный, хотя бы и метафизически и в ранге априорного принципа, но фактически на основе известных фактов, предсказать ничего не может и существует на положении изящной, экзотической и бесполезной теоретической безделушки. Каждый серьёзный исследователь это отлично понимает и потому старается подкрепить свои теоретические построения ранее неизвестными эмпирическими данными.

Обильное цитирование работы Флоренского призвано показать, что введение временного фактора в его умозрительную конструкцию было в сущности логически неизбежно и в какой-то момент возникла необходимость эмпирического обоснования именно этой новой компоненты.

Последние издания *Водоразделов мысли* П. Флоренского и страница из книги

Инвариантность роста не следует, конечно, понимать как просто геометрическую прогрессию, где каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для данной последовательности число, а потому отношение n-го члена ($n \geq 3$) к $n-1$-му равно отношению $n-1$ члена к $n-2$-му. Между прочим, это свойство геометрической прогрессии, которое можно сформулировать как равенство $a{:}b = b{:}c$, чем-то напоминающее золотую пропорцию, иногда толкуют как наличие золотой пропорции в любой геометрической прогрессии. Конечно, если упускать из вида детали, может померещиться всё что угодно, но здесь важен не только принцип бесконечной делимости, а получаемый при этом результат. Сумма S геометрической прогрессии с начальным членом a и со знаменателем $q < 1$ в пределе, как известно, определяется выражением $a/(1-q)$. Допустим, $a > 1$ и чтобы приблизить прогрессию к золотой – с тремя постоянными в равенстве, а не четырьмя числами в равенстве, надо ещё взять $1/a = q$; это, например, прогрессия 2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ..., $1/2^n$, … . Сумма любой такой прогрессии с начальным членом $1/a$ равна $1/(a-1)$, и легко догадаться, что золотой она будет лишь в случае, когда сумма S равна a, поскольку только тогда будем иметь уравнение $a^2 - a - 1 = 0$ для константы ϕ.

Так, очевидно, надо понимать инвариантность роста по Флоренскому, означающее, что **как ни прирастает явление, оно остаётся себе подобно**, а главное **выражает строение ЦЕЛОГО как такового**. Фактически речь идёт об аддитивном свойстве геометрической прогрессии

$$\ldots\ \phi^{-n}, \phi^{-n+1}, \ldots, \phi^{-2}, \phi^{-1}, 1, \phi, \phi^2, \ldots, \phi^{n-1}, \phi^n, \ldots$$

каждый член которой равен сумме двух предшествующих, кроме того сумма всех отрицательных степеней равна ϕ, а любой член ϕ^{-n} равен бесконечной сумме отрицательных степеней $\phi^{-n-2} + \phi^{-n-3} + \phi^{-n-4} + \ldots + \phi^{-n-k} + \ldots$. Последнее свойство можно представить геометрически в виде убывающих в золотой пропорции отрезков, откладываемых по одну сторону от разделённого в той же пропорции первоначального отрезка. Последовательность отрезков, где каждый последующий меньше предыдущего в ϕ^{-1} раз, называют сейчас золотым вурфом (от введённого в работе [Staudt] немецкого *Würf*, что можно перевести как *прирост*; в математике *вурф* определяется как упорядоченная совокупность точек проективного пространства).

По Флоренскому это *Totum Absolutum* – абсолютное целое T_a, а первые два отрезка он назвал *Totum Relatium* – целым относительным T_r (латинские термины, которые встречаются в *Метафизике* Канта). Строение *Totum Absolutum*

Определяется как совокупность суставов или наращений, вместе образующих одно целое. Взаимное отношение этих суставов

$$m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots m_i, m_{i+1}, \ldots m_n$$

определяется тем условием, что каждый последующий сустав m_{i+1} есть именно прирост предыдущего, m_i, т. е. образует вместе с ним некое относительное целое T_a, или, другими словами, есть в отношении к нему меньшая часть, или прирост, золотого сечения [Там же, 494].

Поскольку исходный член m_1 берётся (в современных обозначениях) равным ϕ^{-1}, фактически речь идёт о стремящейся к нулю бесконечной последовательности отрицательных степеней золотой константы

$$\phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, \ldots, \phi^{-i}, \phi^{-i+1}, \ldots,, \phi^{-n}, \ldots$$

n	1	2	3	4	5	…	∞
ϕ^{-n}	0,61803 39887…	0,38196 60112…	0,23606 79775…	0,14589 80337…	0,090169 94374…	–	0

После несложных вычислений Флоренский приходит к равенствам

$T_a = \phi, \quad T_r = 1, \quad T_a/T_r = \phi.$

Далее первые два члена последовательности ϕ^{-n} Флоренский примеряет к трагедиям Софокла *Аянт биченосец*, *Филоктет*, *Электра*, а также использует эту последовательность для расчленения литургии золотыми сечениями [Там же, 498–502]. Остаётся только добавить, что подобный метод нахождения узловых моментов во временном интервале произведения используется и поныне, при анализе известных музыкальных и литературных произведений.

7. Алексей Лосев

В отличие от большинства представленных в настоящей работе авторов, философ, филолог и тайный монах Русской православной церкви Алексей Фёдорович Лосев (1893–1988) математическими или эмпирическими исследованиями золотого сечения не занимался. Оно интересовало его с точки зрения эстетики, а рассуждения Лосева о ЗС можно встретить в разных его работах, включая капитальный труд *История античной эстетики*. Сопоставляя различные высказывания Лосева о золотом сечении, нетрудно обнаружить в них противоречия в оценке исторической роли и эстетической значимости ЗС. Вырванные из контекста, они используются в своих целях и сторонниками и противниками ЗС. Склонный к религиозности и неоплатонизму, Лосев для защиты античной космологии, подчиняющейся закону гармонического деления – Золотого Сечения, привлекает диалектико-материалистическое представление о культуре.

С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии, мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления – Золотого Сечения ... Их (древних греков) систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьёзный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия [Лосев[1]], в дальнейшем [Л[1]].

Причём, как полагает автор,

Закон золотого деления должен быть диалектической необходимостью. Это – та мысль..., которую, насколько мне известно, я провожу впервые [Л[2], 412].

Много о диалектике ЗС говорится и в работе Лосева *Музыка как предмет логики*, в *Части IV. Логическая структура двух основных законов музыкальной формы*, в разделе *Золотое деление*, из которого приведём лишь небольшой отрывок

Диалектика закона золотого сечения есть диалектика категорий тождества и различия, которые, будучи перенесены в сферу алогического материала (пространственных наличий, звуков) в своём подвижном равновесии, специфическим образом организуют этот материал, так что в результате всего этот материал должен своими слепыми материальными средствами воплотить и выразить целиком это подвижно-равновесное самотождественное различие [Л[3]].

Больше скажет о позиции Лосева отрывок из *Истории античной эстетики*.

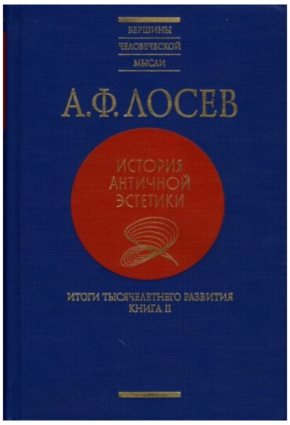
Чтобы покончить с пифагорейско-платоновским учением о пропорциях, обратим внимание ещё на одно интересное обстоятельство, которое в науке не раз переоценивалось. Дело в том, что частным видом геометрической пропорции является так называемое *золотое деление*, начало учения о котором часто приписывали "пифагорейцам" и развёрнутую теорию которого находили у Платона. В эпоху Возрождения эта "божественная пропорция" фигурировала именно в пифагорейско-платоническом обличии. Если обратиться к первоисточникам, то отчётливых материалов о сознательно проводимой теории золотого деления у Платона мы не найдём. Золотое деление получается из обычной геометрической пропорции путём внесения в неё идеи последовательного убывания чисел. Получается, что целое так относится к своей большей части, как большая к меньшей. Золотое деление, следовательно, есть равновесие между целым и частью, наблюдаемое при последовательном исчерпывании целого. Что мы имеем на эту тему у Платона?

Выше мы приводили текст Tim. 31c–32a. Этот текст прямо формулирует то, что мы теперь называем золотым делением. Но ни сам Платон не употребляет такого термина, ни его последующее изложение не показывает в отчётливой форме способ применения этого закона. Поэтому, строго говоря, использование этого закона у Платона является не столько сознательным и намеренным, сколько интуитивным и непосредственно-эстетическим. Но дело этим не кончается.

… Как известно, из равнобедренных треугольников у Платона образуется куб, а из треугольников второго рода – пирамида, октаэдр и икосаэдр. Однако есть ещё одно – пятое – правильное геометрическое тело, это додекаэдр (двенадцатигранник), которое Платон употребляет “для очертания (diadzographon) вселенной” (Tim. – 55c), в то время как первые четыре конструируют собою четыре космические стихии. Додекаэдр, следовательно, есть *форма неба;* прочие же многогранники характеризуют собою то, что внутри неба, то, что в самом космосе. *Додекаэдр точно построен по закону золотого деления.* Это особенно ярко видно на так называемой *пентаграмме,* которая представляет собою совокупность диагоналей додекаэдра, или геометрическую фигуру, образованную последовательным соединением вершин додекаэдра через одну. Элементарное построение показывает, что сторона додекаэдра так относится к его диагонали, как расстояние от вершины до ближайшей точки пересечения двух диагоналей относится к стороне додекаэдра и как расстояние между двумя соседними точками пересечения диагоналей к расстоянию от вершины до ближайшей точки пересечения диагоналей. Целым является здесь диагональ, большим – сторона додекаэдра, а меньшим – расстояние от вершины до ближайшей точки пересечения диагоналей. Интересным является также и то, что точки пересечения диагоналей додекаэдра составляют совокупность вершин правильного пятиугольника, стороны которого лежат на сторонах пентаграммы (т.е. на диагоналях основного додекаэдра).

Если Платон сознательно отнёс додекаэдр со всеми этими элементами золотого деления к форме космоса, к небу – в чём, конечно, нет ничего невероятного, – то тогда получается, что золотое деление действительно является у Платона наиболее “божественной” пропорцией. Но так ли это на самом деле и даже вообще формулировал ли Платон для себя точно и сознательно наличие золотых делений в додекаэдре и пентаграмме, – *сведений* об этом *нет никаких,* хотя *вероятность сознательной математической работы здесь весьма велика,* особенно если иметь в виду весь контекст античного пифагорейского платонизма. Заметим, впрочем, что икосаэдр тоже строится при помощи закона золотого деления. Это интуитивное конструирование золотого деления, даже если здесь не было сознательной концепции, чрезвычайно важно для всей античной эстетики. Интуитивность здесь только подчёркивает собою органическую направленность античного сознания на фиксацию целого, находящегося в одном и том же отношении с любой своей частью при последовательном постоянном и непрерывном переходе от большей части к меньшей. Заметим, кстати, что историки искусства уже давно установили в античных статуях пупок как точку, разделяющую весь человеческий рост именно по закону золотого деления. Органичность этого закона для Платона в самой чёткой форме вытекает из всей его философской теории. Ведь если идея, по-разному воплощаясь в материи, остаётся всё же сама собой, то ясно, что при переходе от большего воплощения к меньшему мы везде будем иметь закон золотого деления, т.е. везде целое будет так относиться к своей большей части, как эта последняя к меньшей

[Л[4], §2. Пифагорейско-платоническое учение о пропорциях].



Одна из книг восьмитомного капитального труда А. Лосева

Растаскивая этот отрывок по кусочкам, можно извлечь из него и так называемое золотое деление и небрежно брошенную божественную пропорцию. Но после обсуждается додекаэдр, который

Платон сознательно отнёс … со всеми этими элементами золотого деления к форме космоса, к небу – в чём, конечно, нет ничего невероятного, – то тогда получается, что золотое деление действительно является у Платона наиболее "божественной" пропорцией.

Это уже нечто другое, хотя по-прежнему неизвестно,

Формулировал ли Платон для себя точно и сознательно наличие золотых делений в додекаэдре и пентаграмме, – *сведений* об этом *нет никаких,* хотя *вероятность сознательной математической работы здесь весьма велика,* особенно если иметь в виду весь контекст античного пифагорейского платонизма.

Дальнейшее упоминание, уже без иронии, золотого деления в икосаэдре и ссылка на то, что

Историки искусства уже давно установили в античных статуях пупок как точку, разделяющую весь человеческий рост именно по закону золотого деления,

оставляет мало сомнений в серьёзности отношения Лосева к ЗС как некоему эстетическому началу.

В разделе *Художественная действительность. §5. Космос и его структура* с подзаголовком *Космос – цельное и нерушимое трёхмерное тело* Лосев подводит некоторые итоги в [Л[5]].

Наконец, для уяснения всей космической пропорциональной единораздельности, по Платону, необходимо обратить внимание ещё и на то, что Платон пользуется здесь не чем иным, как законом *золотого деления,* который хотя часто и приписывается пифагорейцам и Платону, но о котором тоже нет ясного и общепринятого представления у исследователей. Если этот закон золотого деления заключается в том, что целое так относится к большей части, как большая часть к меньшей, то, очевидно, всякая геометрическая пропорция является формулой закона золотого деления. И, следовательно, взяв первый ряд чисел, 2, 4, 8 или 1, 2, 4, 8, мы получаем, идя от 8 к 1, деление согласно выставленному у нас сейчас закону. То же самое необходимо сказать и о втором ряде 3, 9, 27 или 1, 3, 9, 27, потому что и здесь целое (27) так относится к большей части (9), как эта большая часть относится к меньшей (3); та же операция и в ряде 9, 3, 1. Таким образом, когда Платон захотел конструировать в числах своё понятие непрерывности (начиная с двоицы), он эту непрерывность понимал как построенную по законам золотого деления; и когда он то же самое делал с прерывностью, у него тоже получался закон золотого деления. Таким образом, пропорциональность всех делений внутри космоса конструируется у Платона с таким же упорством, как и пропорциональность всего космоса в целом. При этом нетрудно заметить, что закон золотого деления обеспечивает для Платона равенство всех соотношений в космосе в том случае, когда мы будем нисходить с космоса как неделимой цельности к отдельным моментам и ступеням, содержащимся внутри него самого. Восхождение от 1 к 27 происходит не только музыкально, не только определёнными тональными группами, но и равномерно ритмично, по закону золотого деления.

Такова общекосмическая пропорциональность того цельного космического тела, символом которого явился у Платона его числовой семичлен, и такова пропорциональность у него и всех отдельных прерывных моментов внутри космоса.

Что все эти рассуждения Платона имеют самое близкое отношение к эстетике, едва ли подлежит какому-либо сомнению.

3. Историческое происхождение теории космических пропорций

Вся эта очень подробно разработанная пифагорейско-платоновская система космических пропорций обычно находит то глупое объяснение, что она есть курьёзный результат безудержной и дикой фантастики. Мало того, что подобного рода объяснение базируется на некотором вполне определённом состоянии мышления как на последней инстанции и потому является субъективно-идеалистическим, оно и по самому существу своему настолько широко и абстрактно, что ровно ничего не даёт для объяснения именно данного историко-эстетического феномена. Отшвыривая все эти объяснения как антинаучную беспомощность, попробуем дать ему объективно-историческое объяснение.

Заметим ещё раз, что ни при каком разумном понимании золотого сечения, ни при какой его формулировке геометрические прогрессии типа 1, 2, 4, 8, …, или 1, 3, 9, 27… золотыми считаться не могут по той простой причине, что *целое здесь не равно сумме* её *большей и меньшей частей*, а без этого ни о каком золотом сечении говорить не приходится. Надо вообще сказать, что знакомство с приведёнными отрывками из работ Лосева не производит того впечатления интеллектуальной мощи, которое остаётся после знакомства с отрывками о ЗС Флоренского, даже если не со всеми его выводами можно соглашаться. Несколько раздражённый тон некоторых фрагментов (*антинаучная беспомощность*, *глупое объяснение*) скорее выдаёт некий дискомфорт и нервозность автора, чем придаёт бóльшую убедительность его аргументации. Лосев – слишком хороший, тонко чувствующий текст автор, чтобы не замечать, что здесь у него не всё получается гладко. Этому, конечно, можно дать разумное объяснение, выходящее за рамки чисто интеллектуальной сферы. Лосев – человек своего времени, а в условиях засилья определённых идеологических догм, жёсткой цензуры и преследования инакомыслия творческая личность, которой есть что сказать и которая хочет донести свои мысли до современников и потомков, вынуждена маневрировать, идти на компромиссы и прибегать к эзоповскому языку. В художественной литературе это иногда даёт замечательные плоды, которых могло и не быть в случае отсутствия идеологических ограничителей. Однако писать философскую работу по принципу *и нашим и вашим* очень непросто и кое-какие издержки здесь, очевидно, неизбежны; хорошая работа такого рода в принципе должна делаться безбоязненно и без оглядки, делаться для себя или для *мирового читателя*. Лишённый такой возможности, Лосев порой говорит чужим голосом, давая, вероятно, читателю об этом знать несвойственной ему резкостью тона.

Приведём напоследок отрывок из того же трактата (*§4. Канон Поликлета 6. Вопрос о числовых данных*), написанный уже, пожалуй, в традициях Витрувия, Леонардо да Винчи и Цейзинга. Осторожность в конечной оценке здесь, скорее всего, связана с нежеланием делать безапелляционные выводы на основе хотя и кажущейся правдоподобной и весьма вероятной, но тем не менее недостаточно полной информации [Л6].

Есть, впрочем, ещё одна возможность приблизиться к числовому представлению канона Поликлета. Дело в том, что Поликлет прочно связан с пифагорейской традицией. От пифагорейцев же идёт теория так называемого золотого деления (вся длина так относится к большей части, как большая к меньшей). Если считать Поликлетова Дорифора выразителем его канона, то установлено, что весь его рост относится к расстоянию от пола до пупка, как это последнее расстояние – к расстоянию от пупка до макушки. Установлено, что если взять расстояние от пупка до макушки, то оно так относится к расстоянию от пупка до шеи, как это последнее – к расстоянию от шеи до макушки, и если взять расстояние от пупка до пяток, то золотое деление падёт тут на коленки. Витрувий (III 1, 3) утверждает, что если провести круг из человеческого пупка как центра, когда человек распростёрт на земле с максимально раскинутыми ногами и руками, то окружность пройдёт как раз через крайние точки всех конечностей. Он при этом не говорит, что здесь образуется пентаграмма; но она фактически образуется.

А пентаграмма, как об этом говорится во множестве работ по искусству, построена именно по закону золотого деления. Это весьма немаловажное обстоятельство способно наводить на большие размышления, и хотя точных данных к такому пониманию числовой природы канона Поликлета не имеется, всё же вероятность его огромна и эстетическая значимость его почти очевидна.

8. Сергей Эйзенштейн

Большим любителем золотого сечения был кинорежиссер, сценарист и теоретик кино Сергей Михайлович Эйзенштейн (1898–1948). Приводимый с сокращениями отрывок из книги *Неравнодушная природа* – это написанная на одном дыхании настоящая ода золотому сечению. После краткого экскурса в его историю Эйзенштейн, в духе упомянутого им Розенова, анализирует отрывки из поэзии Пушкина, а также (не приведённую ниже) картину Василия Ивановича Сурикова (1848–1916) *Боярыня Морозова* и собственную кинокартину *Броненосец "Потёмкин"* – один из мировых шедевров немого кино. Опуская вступительную часть, начнём с того места, где Эйзенштейн переходит к собственным исследованиям.

Книга Сергея Эйзенштейна

Вопросы золотого сечения особенно обстоятельно разработаны в области пластических искусств.

Менее популярны они в приложениях к искусствам временным, хотя здесь они имеют, пожалуй, ещё большее поле приложения.

Однако для области поэзии кое-что существует и в этом направлении. … Примеры из поэзии бесчисленны. Особенно ими изобилует Пушкин. Беру наугад два любимых наиболее ярких образца: в них попадания золотого сечения в самих стихах отбиты знаком полной остановки – точкой. Точкой, которая попадается внутри стиха только в месте золотого сечения.

Первый пример взят из второй песни "Руслана и Людмилы":

… С порога хижины моей
Так видел я, средь летних дней,
Когда за курицей трусливой
Султан курятника спесивый,
Петух мой по двору бежал
И сладострастными крылами
Уже подругу обнимал;
Над ними хитрыми кругами
Цыплят селенья старый вор,
Приняв губительные меры,
Носился, плавал коршун серый
И пал как молния на двор.
Взвился, летит. ‖ В когтях ужасных
Во тьму расселин безопасных
Уносит бедную злодей.
Напрасно, горестью своей
И хладным страхом поражённый,

Зовёт любовницу петух...
Он видит лишь летучий пух,
Летучим ветром занесённый.

("Руслан и Людмила", 1817–1820. Песнь вторая)

Золотое сечение проходит по тринадцатому стиху (из двадцати), разрезая его на два массива словесного материала, из которых больший – точно 0,62 всего объёма (золотое сечение: 0,618).

Из самого же содержания очевидно, что как раз по этому месту проходит *сюжетно-тематическое* разделение массива на две части, из чего наглядно следует, что золотое сечение – отнюдь не отвлечённая "игра ума", а что оно глубоко связано с содержанием.

Насколько же оно резко выделено, видно хотя бы из того, что во всём примере – это единственный стих, разрезаемый внутри знаком "полного препинания" – точкой.

Пример второй:

Верхом, в глуши степей нагих,
Король и гетман мчатся оба.
Бегут. || Судьба связала их.
Опасность близкая и злоба
Даруют силу королю.
Он рану тяжкую свою
Забыл. || Поникнув головою,
Он скачет, русскими гоним,
И слуги верные толпою
Чуть могут следовать за ним.

("Полтава", 1829. Песнь третья)

Основное золотое сечение приходится после слова "забыл". А : В = 6 : 4; точнее, 6,25 : 3,75.

По золотому же сечению распадаются и массивы А и В внутри в такой же примерно степени приближения.

Дробления *всего массива*, а также дробления внутри массива А опять-таки отсечены полными остановками – точками, единственными опять-таки случаями, когда точка появляется *внутри стиха*.

На слове "слуги", где дробится по золотому сечению массив В, вместо точки мы имеем дело с чисто интонационным акцентом, обязательно возникающим при чтении и вызывающим *соответствующую задержку* перед словом "верные" (как бы "мнимая точка").

Даты обоих примеров (1817–1820 и 1829) и приведены для того, чтобы показать, что эти элементы "органичности" одинаково характерны для Пушкина в совершенно различные этапы его творчества.

Для произведений киноискусства "проверки" золотым сечением, кажется, не делалось никогда.

И тем любопытнее отметить, что именно "Потёмкину", эмпирически известному "органичностью" своего строя, выпадает доля быть целиком построенным по закону золотого сечения.

Мы не случайно говорили выше, что членение надвое каждой отдельной части и всего фильма в целом лежит *приблизительно* посередине. Оно лежит гораздо ближе к пропорции 2 : 3, что является наиболее схематичным приближением к золотому сечению.

Ведь как раз на водоразделе 2 : 3, между концом второй и началом третьей части пятиактного фильма, лежит основная цезура фильма: *нулевая* точка остановки действия.

Даже точнее, ибо тема мёртвого Вакулинчука и палатки вступает в действие не с третьей части, а с *конца второй*, добавляя недостающие 0,18 к шести очкам остающейся части фильма, что даёт в результате 6,18, то есть точную пропорцию, отвечающую золотому сечению. Так же смещены в аналогичную пропорцию точки цезур – перелом *ОВ* по отдельным частям фильма.

Но, пожалуй, самое любопытное во всём этом то, что закон золотого сечения в "Потёмкине" соблюдён не только для *нулевой точки* движения, – он же одновременно верен и для *точки апогея*. Точка апогея – это красный флаг на мачте броненосца. И красный флаг взвивается тоже... в точке золотого сечения! Но золотого сечения, отсчитанного на этот раз *от* *другого конца* фильма – в точке 3 : 2 (то есть на водоразделе трёх первых и двух последних частей – в конце *третьей части.* При этом с захлёстом же в четвёртую, где флаг фигурирует ещё и в начале четвёртой части).

Таким образом, в "Потёмкине" не только каждая отдельная часть его, но весь фильм в целом, и при этом в обоих его кульминациях – в точке полной неподвижности и в точке максимального взлёта, – самым строгим образом следует закону золотого сечения – закону строя органических явлений природы.

В этом секрет органичности его композиции и в этом же подтверждение на практике тех предположений о композиции вообще, которые мы высказывали вначале.

Для того же, чтобы эти предположения о композиции уже окончательно сделать "положениями о композиции", займёмся разбором второго решающего признака "Броненосца "Потёмкин" – вопросом его пафоса и теми средствами композиции, какими пафос темы воплощается в пафос картины.

* * *

Прежде, однако, чем обратиться к вопросу пафоса, отметим то обстоятельство, что "Потёмкин" не единичен в том, что у него как момент апогея, так и контрапогея попадают по расстоянию от начала и конца фильма оба раза в точки золотого сечения – один раз отсчитанную от начала, а другой раз – от конца.

В этом отношении "Потёмкин" отнюдь не единичен. В любом смежном искусстве можно найти примеры того, как *две* ударные точки композиционного строя *обе* оказываются в точках золотого сечения. В этом случае эти точки оказываются совершенно так же отсчитанными от разных концов основной массы, которая ими членится.

Приведём пример такого "двойного золотого сечения" из живописи.

Пример этот особенно интересен потому, что он взят из произведения крупнейшего, никем не оспариваемого представителя реалистического направления в живописи.

И тот факт, что это встречается именно у него, может служить укором тем предрассудкам, согласно которым для реализма будто бы достаточно одной бытовой правды, строгость же композиционного письма отнюдь не важна и даже чуть ли не вредна!

Анализ работ подлинно великих мастеров реализма говорит о другом. Проблемы композиции творчески мучили их так же неустанно, как проблемы воплощения правды жизни, ибо до конца искренне прочувствованная и до конца полно выраженная в своих чувствах правда воплотится через все средства, которые находятся в руках автора. Но об этом уже было сказано подробно и обстоятельно.

Совершенно аналогичное происходит в "точке высшего взлёта" и в "Потёмкине": в ней оказывается *красный* флаг; в ней чёрно-серо-белая световая гамма фотографий внезапно перебрасывается в другое измерение – в раскрашенность, в *цвет*. Световое изображение становится цветовым.

Мастерство Эйзенштейна как режиссёра и сценариста, безусловно, не связано лишь с правильным выбором во времени кульминационных моментов. Так же как не только с акцентированностью и выделенностью узловых "точек" в текстовом поле, во времени, в композиционном пространстве, или с соразмерностью пропорций связана сила воздействия выдающихся произведений литературы, музыки, изобразительного искусства и архитектуры. Пространственно-временная, композиционная структура художественного произведения, конечно, важна, с этим трудно спорить. Возможно, это один из тех нюансов, которым отличается творение мастера от работы любителя. Но вопрос в том, насколько существенен этот фактор и какую при этом роль играет принцип золотого сечения. А это уже предмет бесконечных споров, которые не прекратятся, пока есть, кому спорить. Нам постоянно приходится возвращаться к этой теме, поскольку практически любой выход за рамки чистой математики означает попадание из мира абстракций во внешний мир, мир реалий, математическое описание которых редко бывает полным и убедительным. Такое положение вещей носит достаточно общий характер и касается не только принципа золотого сечения. Чрезмерная увлечённость золотым сечением, желание искать и находить его везде и повсюду больше вредит, чем помогает его научной легитимности, поскольку раздражает некоторых, вызывая у них чувство протеста и желание опрокинуть построения пылких золотоискателей, нередко возведённые на песке. При этом, как водится в подобных случаях, с водой выплёскивается и ребёнок.

Разумеется, изложенная нами в Части I математическая теория ЗС, будь то в пределах своего *коронного домена* или в расширенной версии, является неприступной цитаделью логической строгости, к которой не подступишься. Но принцип золотого сечения это и принцип минимума и, по крайней мере в глазах его адептов, он слишком хорош, чтобы прилагаться к внешнему миру лишь в строго ограниченном числе случаев. Принцип минимума, во всех его проявлениях, является неотъемлемым и важнейшим компонентом того, что принято называть *мировой гармонией*, *гармонией космоса*, *математикой гармонии*. Без его современных формулировок теоретическое естествознание было бы отброшено к доньютоновским, а то и к докеплеровским временам, без философско-методологической концепции – к временам, предшествующим появлению пифагорейской доктрины математического совершенства космоса, а без общего интуитивного ощущения – чуть ли не к эпохе кроманьонца. Отказываться от таких краеугольных камней научного мышления никто никогда не станет. Требуется лишь осторожность и определённый уровень доказательности в каждом конкретном случае. А девизом золотоискательства могут, наверное, быть слова, сказанные по другому поводу, кажется, Валерием Брюсовым: “Возможно, мы ошибаемся, но мы ищем”.

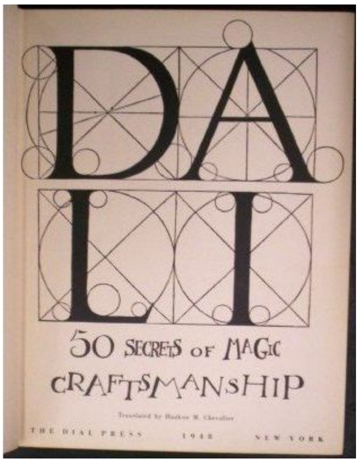
9. Сальвадор Дали

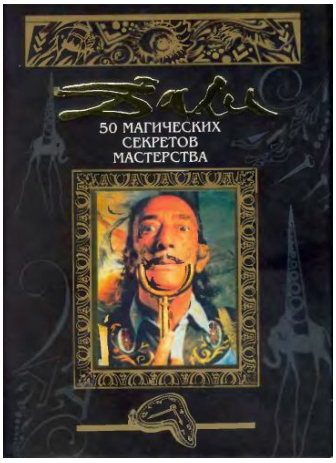
Среди художников XX века, открыто провозгласивших свою приверженность золотому сечению, следует особо выделить испанского маркиза Сальвадора Дали (Salvador Domingo Felipe Jacinto Dalí i Domènech, 1904–1989). Не чужд ему и интерес к науке, особенно к геометрии, платоновым телам, к золотому же сечению он явно неравнодушен. Так, в его книге *50 секретов магического мастерства* непосредственно к нему относятся два секрета. Написанная в характерной для Дали эпатажной форме, книга даёт советы *юным художникам*. С самого начала Дали заявляет:

Теперь, в сорок пять лет я хочу создать шедевр и спасти современное искусство от хаоса и праздности. И я добьюсь своего! Ради этого крестового похода я написал книгу, которую посвящаю молодёжи – тем, кто верит в настоящую живопись.

Далее следует краткий *перечень* секретов [Дали, 9], в том числе:

46. **Секрет сорок шестой**: как использовать в перспективе золотое сечение, чтобы полученные результаты навевали лёгкую грусть.
47. **Секрет сорок седьмой**: как с помощью циркуля без труда спроецировать столько золотых сечений, сколько вам нужно.



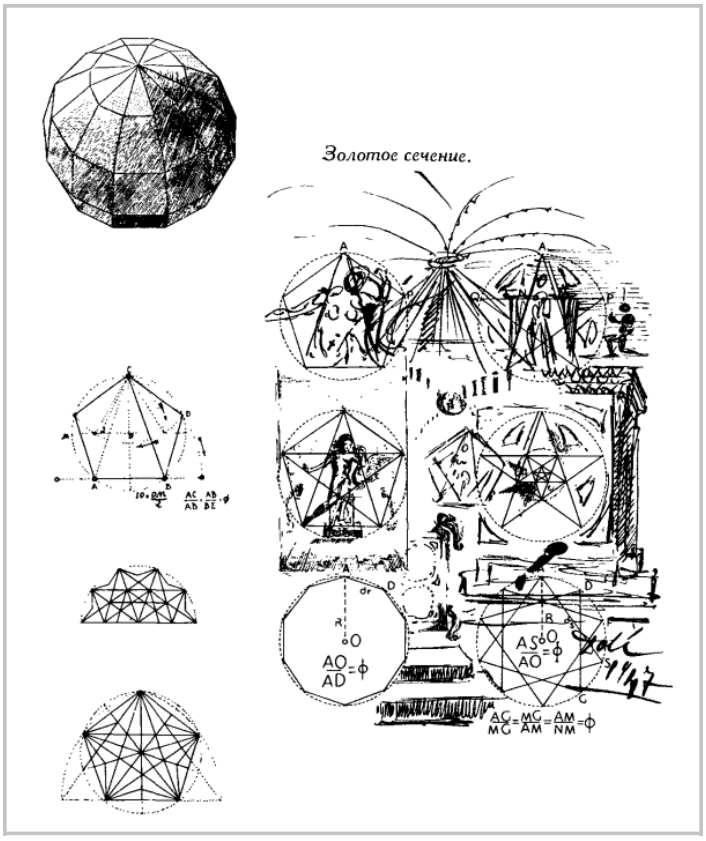


Книга Сальвадора Дали с монограммой автора и её русский перевод

Сущность “золотых” секретов раскрывается в пятой главе книги, в заголовке которой, наряду с экстравагантными подзаголовками, говорится о числе пять, платоновых телах, золотом сечении и изготовлении соответствующего циркуля [Там же, 245].

Глава V

О том, почему у художника пять пальцев и почему в мире минералов нет места цифре «пять». Уникальные свойства пяти твёрдых тел, которых не может быть больше пяти. О яйце на картине Пьеро делла Франчески, яблоке Евы, яблоке Ньютона, яблоке Вильгельма Телля и о яйце Колумба. О молочной короне и духовных достоинствах морского ежа. Божественное соотношение Луки Пачоли. О том, как пользоваться золотым сечением, когда пишешь перспективу, и как определить золотое сечение. Как сделать циркуль, с помощью которого можно найти золотое сечение. О том, как пользоваться рамками в виде геометрических тел. О неподражаемом изяществе усиков виноградной лозы; о губке и кресте. Секрет ангела.



Одна из страниц книги Дали с фигурами золотого сечения

Уважительное отношение Дали к античности и великим мастерам Ренессанса видно даже из его монограммы, составленной из знакомых нам четырёх букв золотого алфавита Пачоли–Дюрера [Там же, 2, 3].

Произведения старых мастеров – это живопись будущего, поскольку только старые мастера достигли художественного совершенства, только они владеют волшебными тайнами мастерства.

Или же третья из десяти заповедей [Там же, 25, 28],

Которым должен следовать тот кто собирается стать художником:

Сначала выучись рисовать и писать красками, как старые мастера, а затем можешь делать что хочешь – все будут тебя уважать.

А в *Сравнительной таблице значимости художников* талант старых мастеров (Леонардо да Винчи, Веласкес, Рафаэль, Вермеер) Дали оценивает наивысшим балом 20, на единицу больше, чем свой собственный талант, в то время как художникам более позднего периода выставлена оценка 0. Преклонением перед унаследовавшими античный идеал красоты художниками Ренессанса, в особенности перед “знаменитой книгой Пачоли” (*О сумме арифметики, геометрии, пропорциях и пропорциональности*), являющейся наиглавнейшей из всех известных трактатов по эстетике, очевидно, и обусловлен интерес Дали к золотому сечению, платоновским телам, пятиугольнику и числу 5.

Подобный интерес отражён в золотых секретах, которыми сорокапятилетний мэтр делится с юным поколением художников. Сущность упомянутых в начале книги секретов 46 и 47 раскрывается в достойном подробного цитирования отрывке из пятой главы [Там же, 259–262].

Поскольку на страницах этой книги морфология, самая современная и самая юная наука, которую ждёт блестящее будущее, сочетается королевским браком с самой блистательной эстетической геометрией эпохи Возрождения, то я скажу вам, юный художник, ДА, ДА и ещё раз ДА! Вы, особенно в подростковом возрасте, должны пользоваться всеми достижениями геометрии, когда проводите линии, призванные служить ориентирами при разработке композиции картины. Я знаю, что художники более-менее романтического склада полагают, будто эти строительные леса математики губительно сказываются на вдохновении, заставляя художника предаваться излишним размышлениям. Можете смело и без колебаний возразить им, что вам не придётся утруждать свою голову, так как золотое сечение, которое Лука Пачоли называл «божественной пропорцией», позволит вам воспользоваться теми естественными возможностями, которые этот метод открывает перед вами. В знаменитой книге Пачоли, являющейся наиглавнейшей из всех известных трактатов по эстетике, философское учение Платона очищается от примитивного идеализма. Вам необходимо познакомиться с этим произведением, которое всегда должно быть при вас, став вашей настольной книгой.

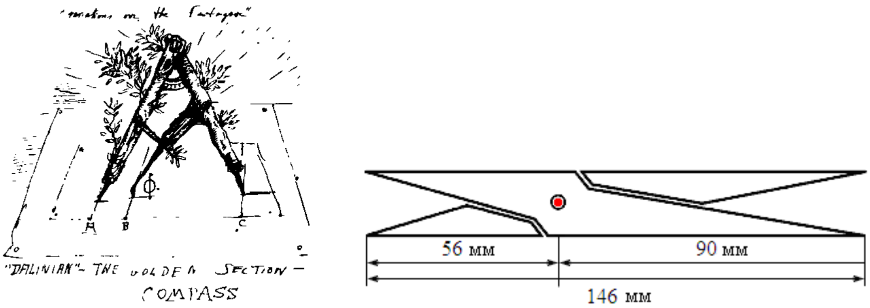
Я не собираюсь повторять то, что вы отыщете у других авторов, как бы поучительно это ни было. Лучше я посвящу вас в ещё одну тайну, которая станет сорок шестым секретом Дали. Например, вы хотите изобразить какие-то предметы на картине, разбросав их по пустынному пляжу, следуя при этом линиям-ориентирам. Вы впадёте в глубокую ошибку примитивизма, пойдя обычным путём; вот так, на мой взгляд, вам следует действовать. Определите ваши соотношения золотого сечения и перенесите их на линии, уходящие вдаль, к горизонту, то есть стремящиеся к бесконечности. Поступайте именно так, помня, что хотя это и кажется очень простым способом, но подобное продолжение в перспективе линий-ориентиров является на самом деле оригинальным методом, особенно если вы сложете, следуя учению о формах, придать им вид созвездий: ведь глаз, несмотря на искажения перспективы, схватывает самые тонкие математические соотношения. Я даже берусь утверждать, что он схватывает лучшее! Можете быть уверены, что именно в использовании этого метода кроется разгадка того, почему некоторые картины обладают неизъяснимой прелестью, навевая лёгкую грусть.

Я не предлагаю часами сидеть за математическими расчётами, отдавая им время, которое вы могли бы посвятить работе над картиной, поэтому открою вам мой сорок седьмой секрет. В нём говорится о циркуле, при помощи которого можно с лёгкостью отыскать столько золотых сечений, сколько вам нужно, не прибегая к сложным математическим операциям, а также отложив в сторону огромный циркуль, который понадобился бы, чтобы охватить всю поверхность картины. Манипуляции эти были бы столь сложны, что ваша леность в конце концов заставила бы вас обходиться без золотого сечения.

Самый простой и надёжный способ вычислить его состоит в следующем. Начертите пятиугольник, а затем проведите от точек, лежащих в его основании, две линии к вершинам фигуры, так чтобы они образовывали равнобедренный треугольник. Пересечение горизонтальной линии звезды пятиугольника с любой из сторон треугольника и отметит искомое золотое сечение

Возьмите маленький деревянный циркуль, изготовленный из старого оливкового дерева, и концами его точно измерьте одну из сторон треугольника. Теперь вам остаётся только прочно закрепить две новые ветви, которые соединяются в точке пересечения, отмечающей золотое сечение. Поскольку точка эта окажется закреплена, то, как бы вы ни раздвигали циркуль, он всё равно определит золотое сечение. Тот факт, что подобный циркуль не найти в лавках торговцев красками и всякими принадлежностями для художников, свидетельствует о пренебрежении, с которым художественные училища и современные художники относятся к геометрии.

Символично, что циркуль золотого сечения, подобный тому, который Дали предлагает изготавливать из старого оливкового дерева, был найден при раскопках Помпеи и ныне хранится в музее Неаполя.



Циркуль Дали для вычисления золотого сечения и античный циркуль золотой пропорции

Случайно или нет, но равнобедренный золотой треугольник, о котором говорится в отрывке, довольно часто замелькал сейчас при анализе различных картин, с целью доказать их соотнесённость золотому сечению. Поучая других, Дали использует, надо полагать, в своём богатом творчестве свои же золотые секреты, хотя, как водится в таких случаях, прямых указаний на этот счёт не найдено. Каноническим и почти всеми признанным примером применения принципа золотого сечения считается картина *Тайная вечеря*. Особых сомнений здесь нет, поскольку лишь самую малость, менее трёх сантиметров в ширину и менее двух в высоту не дотягивает их отношение (267 см/166,7 см $\approx$1,602) до золотого идеала ϕ. *Тайная вечеря* по Сальвадору Дали проходит под сводом гигантского додекаэдра, охватываемого разведёнными в стороны руками то ли Бога, то ли Святого духа. Это один из подлинных шедевров Дали. Здесь можно видеть и связь с числом учеников Христа, и прямое указание на сакральный смысл собрания, тем более что художник, как полагают, рассадил его участников по золотому правилу, см. например [Livio].

Тайная вечеря по Сальвадору Дали

Не случаен и додекаэдр (двенадцатигранник),

Который ... является символом макрокосмоса,

составленным к тому же из пятиугольников, что перекликается уже с отношением Дали к числу 5 [Там же, 247–248].

Итак, оглядитесь внимательно вокруг и исключите из своего мира всё, что не связано с цифрой “пять”. Вы вдохнёте душу в свою работу, используя только тела правильной формы; таких тел пять, и у них равные основания, пространственные углы, равные поверхности и стороны, другими словами, речь идёт о четырёхграннике, кубе, восьмиграннике, двенадцатиграннике и двадцатиграннике. Запомните, в сферу может быть вписано каждое из этих пяти тел, но куб может быть вписан только в двенадцатигранник, четырёхгранник – в куб и в двенадцатигранник, а они, в свою очередь, – единственные тела, которые, будучи вписанными одно в другое, могут быть вписаны в сферу. А потому вам следует пользоваться только этими геометрическими телами и их производными.

10. Николай Воробьёв

Даже одна небольшая работа может стать детонатором широкого интереса к научной теме. К числу таких работ относится книга математика Николая Николаевича Воробьёва (1925–1995), изданная вначале в 1961 г., несколько раз переиздаваемая в расширенном варианте и позже переведённая на английский. В предисловии к четвёртому (1978 г.) изданию автор пишет:

Числа Фибоначчи проявили себя ещё в нескольких математических вопросах, среди которых в первую очередь следует назвать решение Ю. В. Матиясевичем десятой проблемы Гильберта и далеко не столь глубокую, но приобретшую широкую известность теорию поиска экстремума унимодальной функции, построенную впервые, по-видимому, Р. Беллманом.

Наконец, было установлено довольно большое количество ранее неизвестных свойств чисел Фибоначчи, а к самим числам существенно возрос интерес. Значительное число связанных с математикой людей в различных странах приобщились к благородному хобби «фибоначчизма». Наиболее убедительным свидетельством этому может служить журнал The Fibonacci Quarterly, издаваемый в США с 1963 г.

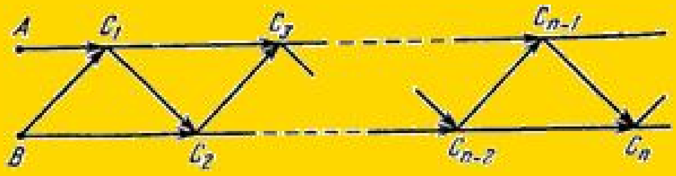
В книге, в соотнесённости с золотой константой, представлена элементарная теория чисел Фибоначчи, включая их простейшие и более сложные теоретико-числовые свойства, геометрические построения, тригонометрические формулы. Рассматриваются также задачи из теории игр, теории поиска, задачи на нахождение экстремума и некоторые другие, связанные с числами F_n вопросы. Отмечая практическую целесообразность и удобство вещей, имеющих *золотую* форму, Воробьёв предостерегает от чрезмерного увлечения золотой константой, её подходящими дробями и их сакрализации.

Прямоугольники золотого сечения выглядят "пропорционально" и приятны на вид. Вещами, имеющими такую форму, оказывается удобным пользоваться. Поэтому многим "прямоугольным" предметам нашего обихода (книгам, спичечным коробкам, чемоданам и т. п.) часто придаётся именно такая форма. Например, данная книга имеет форму прямоугольника с отношением сторон 1,62, а заполненная текстом часть её страницы — форму прямоугольника с отношением сторон 1,64.

Различными философами-идеалистами древности и средневековья внешняя красота прямоугольников золотого сечения и других фигур, в которых наблюдается деление в среднем и крайнем отношении, возводилась в эстетический и даже философский принцип. Золотым сечением и ещё некоторыми числовыми отношениями пытались не только описать, но и объяснить явления природы и даже общественной жизни, а с самим числом ϕ и с его подходящими дробями производились разного рода мистические "операции". Разумеется, подобные "теории" ничего общего с наукой не имеют.

А простейшим примером, когда решение приводит к рекуррентной последовательности для чисел Фибоначчи, может служить простая задача из теории графов [Воробьёв, 101, 102].

Числа Фибоначчи появляются также в вопросах, связанных с исследованием путей в различных



геометрических конфигурациях. Рассмотрим, например, сеть путей, изображённую на рис. (такие сети в математике принято называть ориентированными графами), и подсчитаем число путей, которыми можно, двигаясь вдоль стрелок, перейти из вершины A или вершины B в вершину C_n.

Обозначим числа таких путей соответственно через a_n и b_n. Ясно, что при начале движения, как из точки A, так и из точки B, в вершину C_n можно попасть двумя способами: через вершину C_{n-1} с последующим шагом вдоль наклонного ребра и через вершину C_{n-2} с последующим шагом вдоль горизонтального ребра.

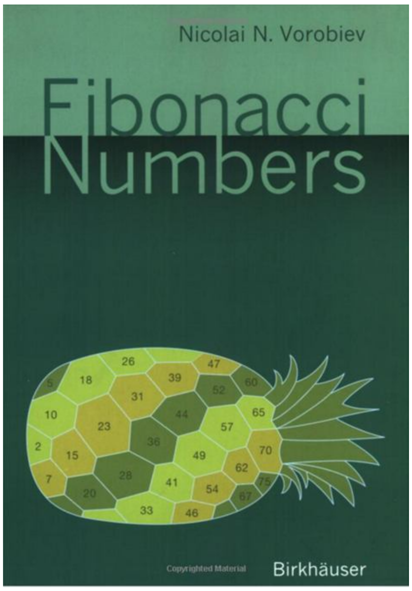
Значит,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Нам остаётся заметить, что $a_1 = a_2 = 1$, и $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, откуда сразу следует, что $a_n = u_n$ и $b_n = u_{n+1}$.

Можно сказать, что именно эти, почти совпавшие по времени события – издание книги Воробьёва и основание журнала *The Fibonacci Quarterly* – как бы ознаменовали окончание *серебряного* и начало *золотого века* ЗС. С начала 1960-х годов интерес к нему неуклонно возрастал, но это, как отмечалось выше, уже не тема настоящих исторических зарисовок, завершаемых началом 1970-х годов.



Книга Н. Н. Воробьёва и её перевод на английский

В названии книги Воробьёва, американского журнала и одноимённой математической ассоциации обращает на себя внимание заметный дрейф от *Divina Proportione* к *числам Фибоначчи*. Разумеется, там, где они, там и число ϕ как константа линейной реккурентной последовательности второго порядка, частным случаем которой является классический ряд Фибоначчи. И всё же это не одно и то же, а некоторое смещение акцентов, заметное со времён Цейзинга, считать случайным нельзя. В античную эпоху, в средние века и даже в новое время принцип золотого сечения относился к геометрии и реализовывался в построениях различных фигур и тел, которым приписывался сакральный смысл или космологическая значимость. А ряд Фибоначчи, значительно позже открытый для европейской математики, до поры до времении существовал как бы сам по себе. Пока, то ли благодаря Кеплеру, то ли кому-то ещё, не была установлена его тесная аналитическая связь с золотым сечением и его константой ϕ, так или иначе, хотя бы в неявном виде, наличествующая в различных геометрических конструкциях. По мере того как числовая математика стала вытеснять геометрию с математического пьедестала, неуклонно росла роль чисел Фибоначчи. Причём не только как последовательности математических величин, которую с той или иной степенью достоверности можно обнаружить при рассмотрении различных явлений природы и искусства, но прежде всего как инструментария для решения различных задач, в частности на отыскание экстремумов и из теории поиска. Это важный раздел чистой математики с прямыми и полезными выходами в теоретическое естествознание, прежде всего в физическую теорию.

Следует вообще сказать, что тот, кто попытается поднять ПЗС на недосягаемую высоту, ссылаясь на многочисленные факты эмпирического происхождения, может натолкнуться на жёсткую критику надёжности подавляющего большинства этих фактов. Но, с другой стороны, тот, кто попытается сильно принизить значение этого принципа, рассматривая его как малоценную забаву для праздных умов, окажется перед незавидной необходимостью отрицания возможностей метода, используемого при решении непростых задач на экстремум, оптимум, задач из теории чисел, теории поиска, теории игр и т. п. Некоторые из этих задач приведены в книге Воробьёва, что безусловно повышает её научную и эвристическую ценность, поскольку каждая такая задача есть “фигура высшего пилотажа” для любой математической конструкции.

11. Бергман, Цекендорф и юпана инков

Язык современной математики – результат тысячелетних усилий, сопровождаемых такими радикальными новациями, как позиционная система счисления, введение арабских цифр, последовательные расширения числовых множеств путём узаконивания чисел новой природы, компактная символическая запись громоздких математических конструкций. Форма представления математической величины, в частности константы, не только важна для понимания её природы и теоретической значимости, но также создаёт дополнительные возможности для применения каких-то других методов математического анализа, помимо уже используемых. Об этом достаточно подробно сказано в первой главе настоящей работы, а здесь нас интересует лишь исторический аспект вопроса. Запись произвольного действительного числа M в позиционной системе счисления зависит от взятого в качестве основания системы числа r, которое может быть целым, дробным или иррациональным. Общая форма для произвольного числа M при любом выборе r такова:

$$M = \pm \sum_n l_n r^n$$

Здесь n пробегает конечный или бесконечный ряд значений 0, ±1, ±2, …, а l_n для каждого из слагаемых принимает одно из значений 0, 1, 2, …, k, причём k не должно превышать r. Поскольку $1 < \phi < 2$, в системе с основанием $r = \phi$ число l_n может принимать лишь значение 0 или 1. Такая система впервые была предложена в 1957 г. Джорджем Бергманом (George Bergman, 1945) в двенадцатилетнем возрасте [Bergman]. В ней любое действительное число представляется конечной или бесконечной суммой положительных и отрицательных степеней константы ϕ, а в позиционной записи двоичным кодом как последовательность чисел 0 и 1. Само число ϕ запишется как 10, а запись первых десяти натуральных чисел в системе “золотого мальчика” показана ниже.

Таблица
Первые десять натуральных чисел в системе Бергмана

Число	Степени ϕ	Бинарный код
1	ϕ^0	1
2	$\phi^1 + \phi^{-2}$	10,01
3	$\phi^2 + \phi^{-2}$	100,01
4	$\phi^2 + \phi^0 + \phi^{-2}$	101,01
5	$\phi^3 + \phi^{-1} + \phi^{-4}$	1000,1001
6	$\phi^3 + \phi^1 + \phi^{-4}$	1010,0001
7	$\phi^4 + \phi^{-4}$	10000,0001
8	$\phi^4 + \phi^0 + \phi^{-4}$	10001,0001
9	$\phi^4 + \phi^1 + \phi^{-2} + \phi^{-4}$	10010,0101
10	$\phi^4 + \phi^2 + \phi^{-2} + \phi^{-4}$	10100,0101

Можно также потребовать, чтобы не было двух рядом стоящих единиц либо нулей; целое число n запишется тогда двумя различными способами. Например, для числа 24 имеем следующие формы записи:

$$24 = \phi^6 + \phi^3 + \phi^1 + \phi^{-4} + \phi^{-6} \qquad 24_\phi = 1001000{,}000101$$

$$24 = \phi^5 + \phi^4 + \phi^2 + \phi^1 + \phi^0 + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-5} + \phi^{-6} + \phi^{-7} + \phi^{-8} \qquad 24_\phi = 110111{,}01101111$$

Чтобы быть чем-то большим, чем математической забавой, придуманной необычайно развитым для своего возраста ребёнком, надо обладать какими-то преимуществами по отношению к всевозможным системам счисления. Универсальных систем счисления, пригодных *на все случаи жизни*, точнее, в быту, науке и технике, нет и быть не может: существуют десятки систем и каждая из них имеет ограниченную теоретическими и практическими соображениями, потребностями и удобствами сферу своей применимости. В чём тогда целесообразность использования системы с основанием ϕ и где она может применяться, если в её применении есть вообще резон? Ответ в какой-то мере уже содержится в самом вопросе: ясно, что вся *соль* в формальных особенностях золотого числа. Это прежде всего отмеченное Бергманом [Bergman, 98] аддитивное свойство

$$\phi^n + \phi^{n+1} = \phi^{n+2}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

и возможность представления любого целого числа в виде *конечной* суммы степеней ϕ. Если теперь в первом выражении для числа 24 произвести замены $\phi^n \to F_n$, $\phi^{-n} \to F_{-n}$, то сумма пяти положительных и отрицательных чисел Фибоначчи окажется равной нулю. Сумма как положительных, так и отрицательных степеней ϕ в этом примере равна 10, и может показаться, что именно с этим связан нулевой результат. Но во втором выражении для числа 24, где в записи бинарным кодом нет двух соседних нулей, сумма положительных степеней равна 12, а отрицательных 31, но легко проверить, что при той же замене степеней ϕ числами F_n с соответствующими номерами n общая сумма и здесь равна 0. Это одна из важных особенностей системы Бергмана, установленная в работе [С[6]] (см. также [С[13]] с подробным анализом системы Бергмана) и названная А.П. Стаховым *Z-свойством натуральных чисел*.

Заметим, что перечисленные свойства уникальными не являются; как мы знаем из Части I, ими обладают и остальные члены семейства ϕ_{m2}, в частности константа да Винчи $\phi_2 = 1 + \sqrt{2}$. Однако, за исключением ϕ, все члены этого семейства больше 2, а значит, только золотая константа может быть записана минимальным бинарным кодом. Такое преимущество нередко является решающим при выборе наилучшего варианта среди имеющихся альтернативных возможностей, поскольку принцип минимума играет исключительную роль как в теории, так и в её важнейших приложениях.

Основанием системы счисления может служить не только определённое число, но и бесконечная последовательность чисел. В 1972 г. бельгийский военнослужащий, доктор и математик Эдуард Цекендорф (Edouard Zeckendorf, 1901–1983) на склоне лет доказал носящую его имя теорему, по которой любое положительное целое число может быть единственным образом представлено в виде конечной суммы чисел Фибоначчи так, чтобы не содержать пары соседних чисел F_n и F_{n+1} [Zeckendorf[1,2]]. С учётом рекуррентного равенства $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ теорему нетрудно доказать по индукции. Понятно также, что бинарная запись чисел в такой системе не может содержать комбинацию 11. Переписав цифры в обратном порядке и добавляя 1 в конце записи, получают показанный в таблице код Фибоначчи, используемый в вычислительной технике.

Таблица

Запись чисел в системе Цекендорфа, бинарным кодом и кодом Фибоначчи

Число	**Запись числами F_n**	**Бинарный код**	**Код Фибоначчи**
1	F_2	1	11
2	F_3	10	011
3	F_4	100	0011
4	$F_2 + F_4$	101	1011
5	F_5	1000	00011
6	$F_2 + F_5$	1001	10011
7	$F_3 + F_5$	1010	01011
8	F_6	10000	000011
9	$F_2 + F_6$	10001	100011
10	$F_3 + F_6$	10010	010011
11	$F_4 + F_6$	10100	001011
12	$F_2 + F_4 + F_6$	10101	101011
13	F_7	100000	0000011
14	$F_2 + F_7$	100001	1000011
…			
F_{n-1}		101010…	…0101011
F_n		10……00	00……011
F_{n+1}		10……01	10……011

Полагают также, что задолго до Цекендорфа фибоначчиева система счисления использовалось в некоторых, основанных на числе 40 разновидностях абака инков (юпане) [Aimi, Pasquale].


Юпана инков

Некоторые исследователи считают, что для своего времени уровень математической культуры в Империи инков был достаточно высок. Помимо широкого применения счётно-вычислительного устройства – юпаны, инки изобрели позиционную систему счисления, использовали двоичную, пятеричную и десятичную системы, включая нуль, могли производить различные арифметические действия, имели некое универсальное средство измерения любой вещи и т. д. Если они пришли к пониманию и того, что последовательность Фибоначчи даёт возможность минимизировать число шагов, необходимых для вычислений определённого типа, это ещё один аргумент в пользу неординарности исчезнувшей цивилизации инков.

12. Вернер Хоггатт и Альфред Бруссо

Американский математик Вернер Хоггатт более всего известен своими многочисленными работами по числам Фибоначчи, Люка и смежным вопросам. Его небольшая книга [Hoggatt[1]] считается одной из лучших работ по данной теме. В 1963 г. Хоггатт вместе с религиозным деятелем, педагогом и математиком Альфредом Бруссо выпустил первый номер специализированного математического ежеквартального журнала *The Fibonacci Quarterly* и в том же году они основали ассоциацию *The Fibonacci Association* (FA). За полстолетия существования *The Fibonacci Quarterly* издано порядка полсотни томов по четыре номера в каждом, общим объёмом приблизительно в 20 000 страниц. За исключением большинства работ последних пяти томов все остальные – в свободном доступе, а полный список публикаций можно найти в [Official Publications of the FA].

Благодаря инициативе Хоггата и Бруссо предметом исследования, в основном профессиональных математиков, стал широкой круг вопросов, связанных с последовательностью Фибоначчи. Это безусловное свидетельство возросшего интереса к важнейшему фрагменту математической теории золотого сечения, ставшего ещё более заметным в 1970-е годы, которые выше мы с некоторой долей условности обозначили как конец *серебряного* и начало *золотого* века теории ЗС. Хоггатт и Бруссо – исследователи преимущественно века *золотого*, не охватываемого настоящей работой, поэтому останавливаться на их работах не будем. Отметим только, что благодаря их энтузиазму и организаторской деятельности указанная ассоциация и её журнал являются сегодня, помимо прочего, генераторами новых идей и оригинальных работ по ТЗС.

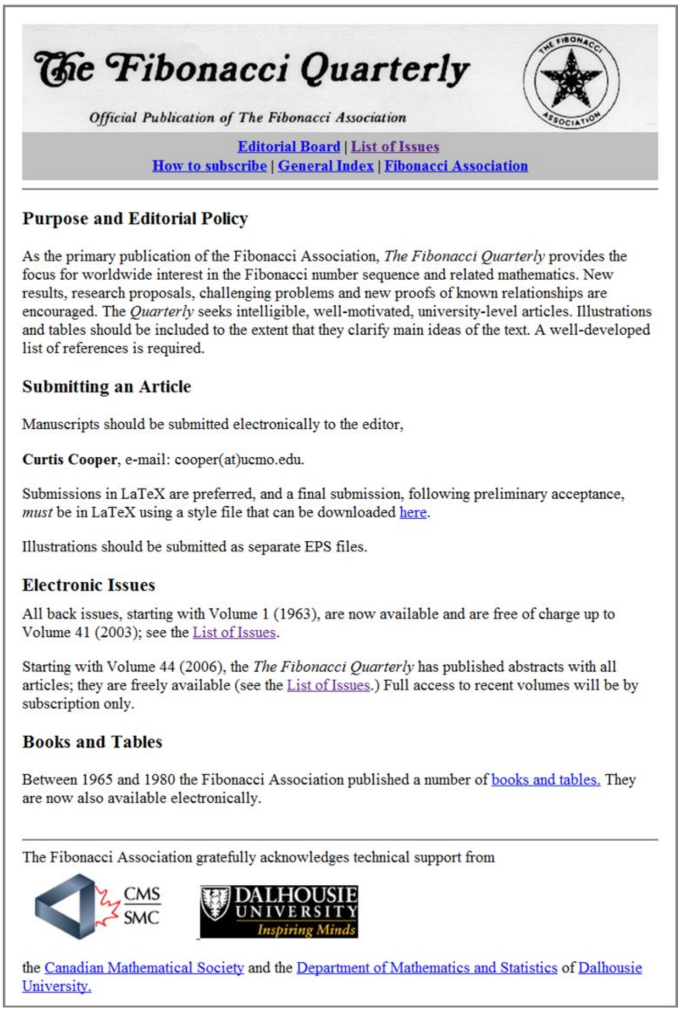
The Fibonacci Quarterly

Official Publication of The Fibonacci Association

Journal Home | Editorial Board | List of Issues
How to Subscribe | General Index | Fibonacci Association

Volume 1 Number 1 February 1963

CONTENTS



The Fibonacci Quarterly

Official Publication of The Fibonacci Association

Editorial Board | List of Issues
How to subscribe | General Index | Fibonacci Association

Purpose and Editorial Policy

As the primary publication of the Fibonacci Association, *The Fibonacci Quarterly* provides the focus for worldwide interest in the Fibonacci number sequence and related mathematics. New results, research proposals, challenging problems and new proofs of known relationships are encouraged. The *Quarterly* seeks intelligible, well-motivated, university-level articles. Illustrations and tables should be included to the extent that they clarify main ideas of the text. A well-developed list of references is required.

Submitting an Article

Manuscripts should be submitted electronically to the editor,

Curtis Cooper, e-mail: cooper(at)ucmo.edu.

Submissions in LaTeX are preferred, and a final submission, following preliminary acceptance, *must* be in LaTeX using a style file that can be downloaded here.

Illustrations should be submitted as separate EPS files.

Electronic Issues

All back issues, starting with Volume 1 (1963), are now available and are free of charge up to Volume 41 (2003); see the List of Issues.

Starting with Volume 44 (2006), the *The Fibonacci Quarterly* has published abstracts with all articles; they are freely available (see the List of Issues.) Full access to recent volumes will be by subscription only.

Books and Tables

Between 1965 and 1980 the Fibonacci Association published a number of books and tables. They are now also available electronically.

The Fibonacci Association gratefully acknowledges technical support from

CMS SMC DALHOUSIE UNIVERSITY Inspiring Minds

the Canadian Mathematical Society and the Department of Mathematics and Statistics of Dalhousie University.

Содержание первого номера журнала *The Fibonacci Quarterly* и его нынешняя *Home page.* В верхнем углу – логотип FA

13. Матиясевич и 10-я проблема Гильберта

В 1900 г. ведущие математики мира собрались в Париже на свой *Второй Международный Конгресс*, который стал эпохальным событием в мире науки. Выступивший на конгрессе с докладом один из наиболее выдающихся математиков всех времён Давид Гильберт (David Hilbert, 1862–1943) дал перечень важнейших нерешённых проблем математики, касающихся различных её областей. Позже был опубликован полный список из 23 проблем, в том числе проблема под номером 10, относящаяся к определению разрешимости диофантового уравнения. Гильберт сформулировал её очень коротко и следующим образом, см. [Проблемы Гильберта].

Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах

Диафантово уравнение, названное так в честь древнегреческого математика Диофанта Александрийского (Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς, III век н. э.),

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

где P – целочисленная функция, а переменные x_i принимают целые значения. Наиболее известный пример – уравнение $x^n + y^n = z^n$, решениями которого при $n = 2$ являются тройки целых чисел $\{x, y, z\}$, удовлетворяющие теореме Пифагора. Задачей разрешимости диофантовых уравнений занимались многие математики, и сейчас она считается одной из шестнадцати гильбертовских проблем, которые удалось решить за сто с лишним лет. Серьёзный вклад в решение задачи внесли американские математики Мартин Дэвис (Martin Davis, 1928), Хилари Путнэм (Hilary Putnam, 1926) и Джулия Робинзон (Julia Robinson, 1919–1985), а окончательную точку в общем решении задачи в 1970 г. (обозначающем, напомним, верхнюю хронологическую границу наших исторических заметок) поставил советский и русский математик Юрий Владимирович Матиясевич (1947). Вот как об этом пишет он сам, (Цит. по [C^{16}]).

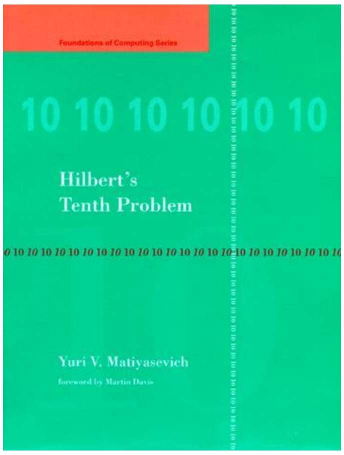
Мой следующий шаг состоял в том, чтобы рассмотреть широкий класс уравнений для двоичных слов с дополнительными условиями. Так как конечной целью всегда была 10-я проблема Гильберта, я мог бы рассматривать только такие условия, которые (при подходящем кодировании) были бы представлены Диофантовыми уравнениями. Таким путём я пришел к таким уравнениями, которые я назвал “equations in words and length” (уравнениями с ограниченными длинами серий). Приведение к таким уравнениям было основано на знаменитых числах Фибоначчи. Хорошо известно, что каждое натуральное число может быть представлено единственным образом как сумма различных чисел Фибоначчи, в которой нет двух соседних чисел Фибоначчи (так называемое представление Цекендорфа). Таким образом, мы можем рассматривать натуральные числа как двоичные слова с дополнительным условием, что в таких двоичных словах две 1 рядом не встречаются. Я изловчился показать, что при таком представлении чисел двоичными словами как последовательности слов, так и уравнения, равные длине двух слов, могут быть выражены Диофантовыми уравнениями.

Благодаря моей предыдущей работе, я понимал важность чисел Фибоначчи для решения 10-й проблемы Гильберта. Вот почему в течение лета 1969 года я читал с огромным интересом третье расширенное издание популярной книги по числам Фибоначчи, написанной Н.Н. Ворбьёвым из Ленинграда. Кажется невероятным, что в 20-м столетии можно было найти что-то новое о числах, введённых Фибоначчи ещё в 13-м столетии в связи с размножением кроликов. Однако новое издание книги содержало, кроме традиционного материала, некоторые оригинальные результаты автора. На самом деле Воробьёв получил их на четверть столетия раньше, но он никогда их не публиковал. Его результаты привлекли моё внимание сразу же, но я был ещё не способен использовать их непосредственно для построения Диофантовых представлений экспоненциального типа.

… Удивительно, для того, чтобы сконструировать Диофантово представление, я нуждался в доказательстве уже нового чисто теоретико-числового результата, касающегося чисел Фибоначчи, а именно, что k-е число Фибоначчи делится квадратом l-го числа Фибоначчи, тогда и только тогда, когда k делится l-м числом Фибоначчи. Это свойство нетрудно доказать; однако поразительно то, что этот замечательный факт не был открыт даже экспериментально со времени Фибоначчи.

… Моё оригинальное доказательство … основывалось на теореме, доказанной в 1942 г. советским математиком Николаем Воробьёвым, но опубликованной только в третьем расширенном издании его популярной книги.

…. После того как я прочитал статью Джулии Робинзон, я сразу же увидел, что теорема Воробьёва может быть очень полезной. Джулия Робинзон не видела 3-го издания книги Воробьёва до тех пор, пока она не получила копию от меня в 1970 г. Кто мог сказать, что бы случилось, если бы Воробьёв включил свою теорему в первое издание своей книги? Возможно, что 10-я проблема Гильберта была решена на десять лет раньше!



Гильберт в 1900 г., книга с анализом предложенных им проблем и английское издание книги Ю.В. Матиясевича

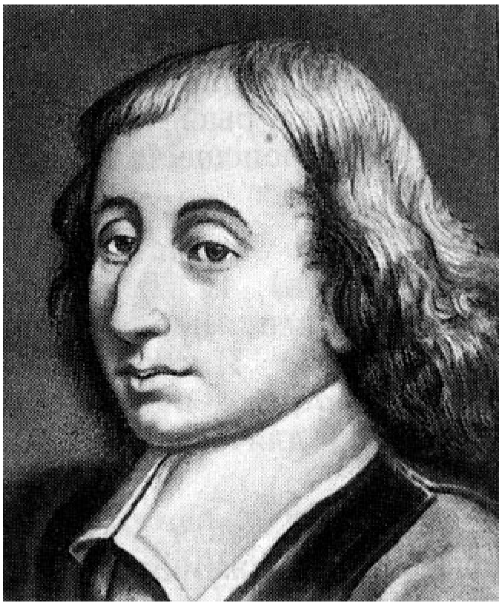
Исследователь, чем бы он ни занимался, всегда как бы стоит на плечах своих предшественников. В данном случае это главным образом Эдуард Цекендорф, Джулия Робинзон и Николай Воробьёв. Точнее, речь идёт об уже упомянутой теореме Цекендорфа о том, что любое положительное целое число может быть единственным образом представлено в виде конечной суммы чисел Фибоначчи, не содержащей пары соседних чисел F_n и F_{n+1}, об исследованиях Джулии Робинзон по диофантовым уравнениям. Но в решающей степени это *теорема Воробьёва* из второй главы его книги *Числа Фибоначчи*. Многие свойства чисел F_n и F_m, как известно, определяются через их номера n и m. В частности, отношение $(F_k/F_l)^2$ будет целым числом только в том случае, если отношение k/l выражается неким числом Фибоначчи F_m. Используя этот и другие результаты, Юрий Матиясевич довёл до завершения доказательство алгоритмической неразрешимости десятой проблемы Гильберта, то есть было окончательно доказано несуществование универсального метода целочисленного решения произвольного диофантова уравнения.

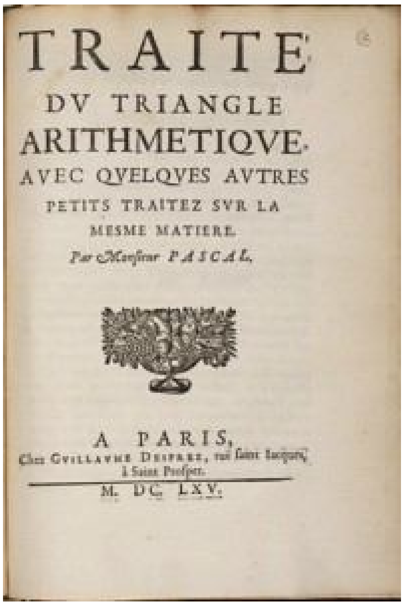
14. Золотоискатели

В эту группу включены исследователи, так или иначе занимающиеся вопросами, относящимися к теории золотого сечения, хотя их вклад кажется менее значителен, чем у упомянутых выше лиц, или же просто данных об их деятельности слишком мало. С оценками здесь, конечно, легко ошибиться, подобные списки всегда неполны и субъективны, что может быть следствием недостаточной информированности, незнанием некоторых важных документов и обстоятельств. В любом случае речь идёт о достаточно известных деятелях науки и культуры, заслуживающих по крайней мере краткого упоминания в контексте настоящей работы.

В списке, естественно, отсутствуют некоторые вкратце упомянутые выше авторы и такие выдающиеся личности, как Фидий, Антонио Страдивари (Antonio Stradivari, 1644 – 1737), Яков Бернулли. Вполне возможно, что Фидий, чьим именем иногда называют золотую константу, обозначаемую к тому же первой буквой его имени, действительно использовал ЗС в своём несравненном творчестве, в частности в пропорциях Парфенона. Не исключено, что чарующее звучание скрипок Страдивари не в последнюю очередь обусловлено их золотосеченной конструкцией. Яков Бернулли, представитель известной династии швейцарских математиков, изучал логарифмическую спираль, но неизвестно, была ли эта спираль золотой. Хотя эти и другие имена нередко ассоциируются с золотым сечением, но без должного документального подтверждения, которое здесь необходимо, во избежание обвинений в распространении ложных мифов и непроверенных слухов.

Блез Паскаль (Blaise Pascal, 1623 – 1662), французский математик, физик, механик и философ. Его именем назван треугольник, рассмотренный в связи с имплицитным определением константы ϕ в разделе 10 первой главы. Треугольник Паскаля связан с золотой константой ϕ через числа Фибоначчи, получаемые при диагональном рассмотрении образующих треугольную форму биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля может, конечно, считаться конструкцией золотого сечения, однако причастность к её истории самого Паскаля весьма опосредована, условна и правомерна лишь с большой натяжкой. Тем не менее, данная числовая структура играет слишком значительную роль в понимании ЗС, чтобы можно было обойтись хотя бы без краткого упоминания связанных с ней исторических фактов.

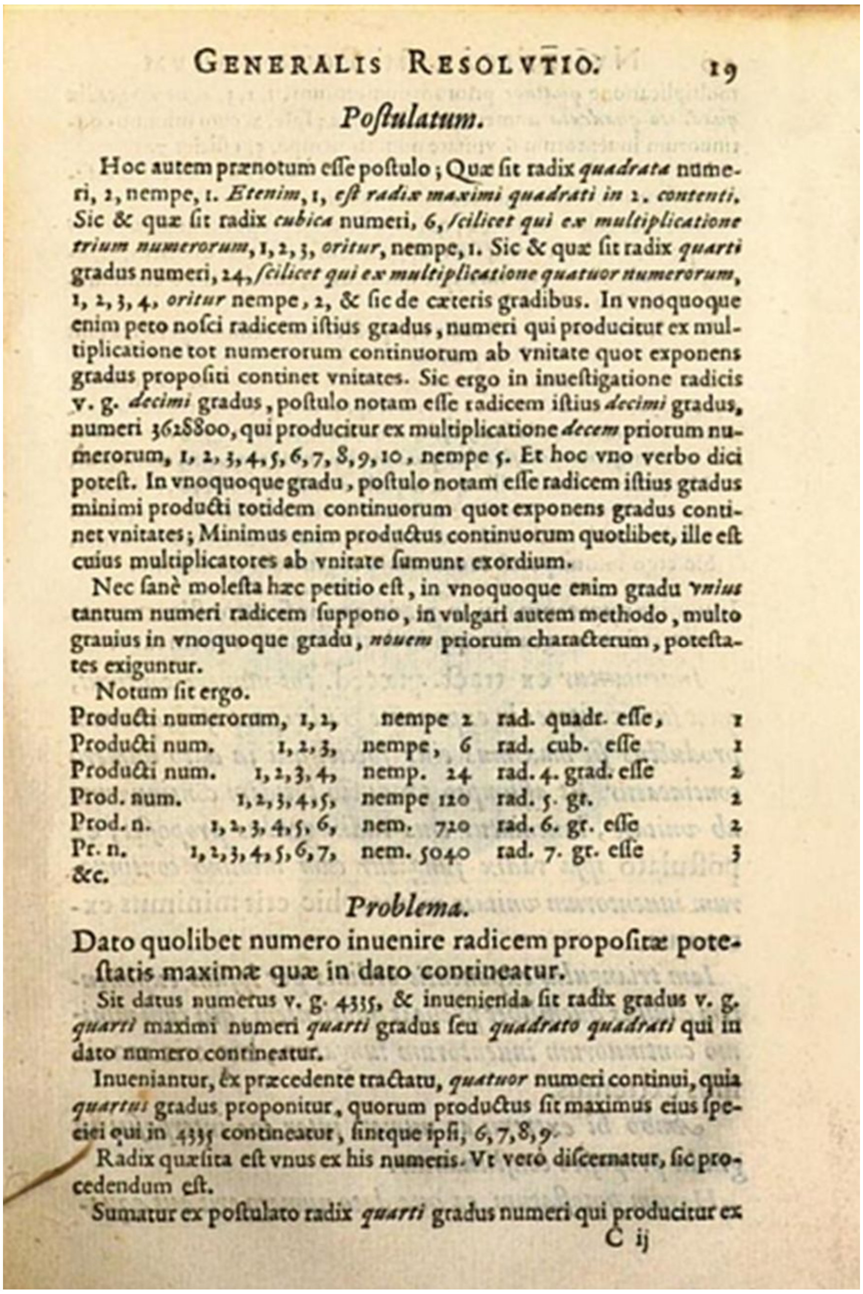




TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE.
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.

A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, rue saint Iacques,
à Saint Prosper.
M. DC. LXV.

Блез Паскаль и его книга, изданная в 1653 г.


GENERALIS RESOLVTIO. 19

Postulatum.

Hoc autem prænotum esse postulo; Quæ sit radix *quadrata* numeri, 2, nempe, 1. *Etenim*, 1, *est radix maximi quadrati in* 2. *contenti*. Sic & quæ sit radix *cubica* numeri, 6, *scilicet qui ex multiplicatione trium numerorum*, 1, 2, 3, *oritur*, nempe, 1. Sic & quæ sit radix *quarti* gradus numeri, 24, *scilicet qui ex multiplicatione quatuor numerorum*, 1, 2, 3, 4, *oritur* nempe, 2, & sic de cæteris gradibus. In vnoquoque enim peto nosci radicem istius gradus, numeri qui producitur ex multiplicatione tot numerorum continuorum ab vnitate quot exponens gradus propositi continet vnitates. Sic ergo in inuestigatione radicis v. g. *decimi* gradus, postulo notam esse radicem istius *decimi* gradus, numeri 3628800, qui producitur ex multiplicatione *decem* priorum numerorum, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, nempe 5. Et hoc vno verbo dici potest. In vnoquoque gradu, postulo notam esse radicem istius gradus minimi producti totidem continuorum quot exponens gradus continet vnitates; Minimus enim productus continuorum quotlibet, ille est cuius multiplicatores ab vnitate sumunt exordium.

Nec sanè molesta hæc petitio est, in vnoquoque enim gradu *vnius* tantum numeri radicem suppono, in vulgari autem methodo, multo grauius in vnoquoque gradu, *nouem* priorum characterum, potestates exiguntur.

Notum sit ergo.

Producti numerorum,	1, 2,	nempe 2	rad. quadr. esse,	1
Producti num.	1, 2, 3,	nempe, 6	rad. cub. esse	1
Producti num.	1, 2, 3, 4,	nemp. 24	rad. 4. grad. esse	2
Prod. num.	1, 2, 3, 4, 5,	nempe 120	rad. 5. gr.	2
Prod. n.	1, 2, 3, 4, 5, 6,	nem. 720	rad. 6. gr. esse	2
Pr. n.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,	nem. 5040	rad. 7. gr. esse	3
&c.				

Problema.

Dato quolibet numero inuenire radicem propositæ potestatis maximæ quæ in dato contineatur.

Sit datus numerus v. g. 4335, & inuenienda sit radix gradus v. g. *quarti* maximi numeri *quarti* gradus seu *quadrato quadrati* qui in dato numero contineatur.

Inueniantur, ex præcedente tractatu, *quatuor* numeri continui, quia *quartus* gradus proponitur, quorum productus sit maximus eius speciei qui in 4335 contineatur, sintque ipsi, 6, 7, 8, 9.

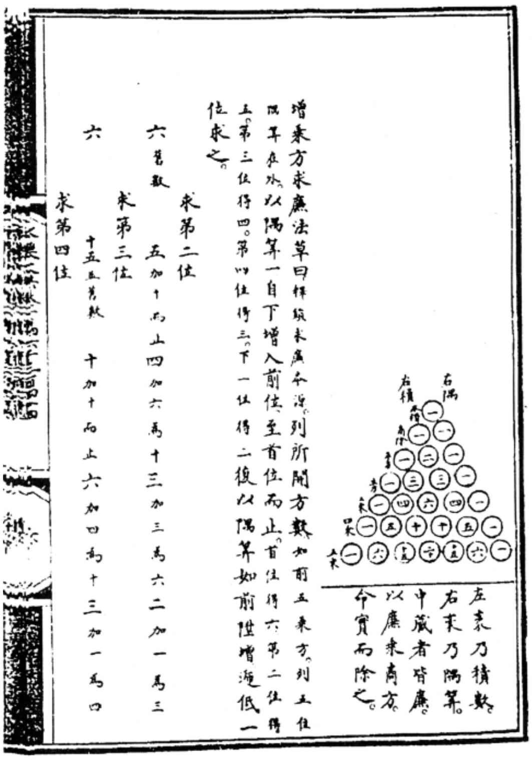
Radix quæsita est vnus ex his numeris. Vt verò discernatur, sic procedendum est.

Sumatur ex postulato radix *quarti* gradus numeri qui producitur ex

C ij

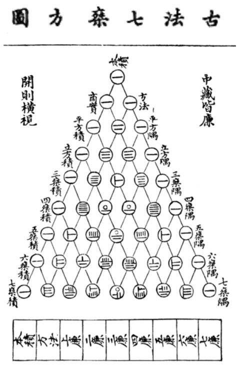
Страница из книги Паскаля *Traité du triangle arithmétique*

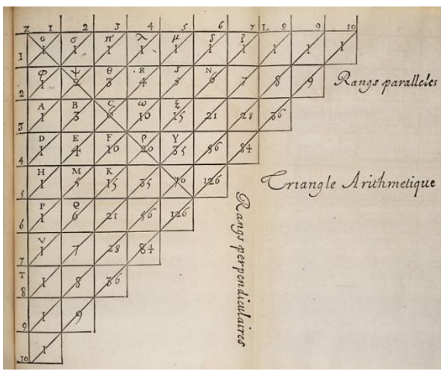
Составленный из биномиальных коэффициентов треугольник задолго до Паскаля был известен в Индии, Греции, Иране, Китае, Германии и Италии [Pascal's triangle; Edwards]. А первооткрывателем, как и в случае с числами F_n, следует, очевидно, считать индийского математика **Пингалу**, автора трактата на санскрите “Чандас-шастра” или “Чандас-сутра” о стихосложении. И только в 975 г., в комментарии индийского математика **Халаюдхи** (Halayudha; хинд. हलायुध, X в.) к трудам Пингалы появилось упоминание о треугольной схеме биномиальных коэффициентов под названием *meru-prastaara*, причём с осознанием равенства диагональных элементов треугольника числам Фибоначчи. Спустя столетие исследованием треугольника занимался другой индийский математик – **Бхаттотпала** (Bhattotpala, XI в.). Треугольные числа были известны в античную эпоху и греческим математикам. В X веке они исследовались вначале персидским математиком **ал-Караджи** (Фахр ад-Дин Абу Бакр Мухаммад ибн ал-Хусайн ал-Караджи; перс. ابوبکر محمد بن حسین کرجی, 953–1029), позже персидским математиком, астрономом, философом и поэтом **Омар Хайямом** (Гиясаддин Абу-ль-Фатх Омар ибн Ибрахим аль-Хайям Нишапури; перс. غياث الدين ابوالفتح عمر بن ابراهيم خيام نيشابورى, 1048–1131). Они знали ряд относящихся к треугольнику теорем, умели разлагать на слагаемые сумму двух переменных степени n (бином Ньютона) и находить биномиальные коэффициенты. Отсюда и принятое сейчас в Иране название *треугольник Хайяма–Паскаля*, а чаще просто *треугольник Хайяма*. Не осталась в стороне и китайская математика. В выпущенной в 1303 году книге *Яшмовое зеркало четырёх элементов* китайского математика **Чжу Шицзе** (朱世杰, 1249–1314) на одной из страниц изображён треугольник, который ранее был получен математиком по имени **Ян Хуэй** (杨辉, 1010–1070); сегодня в Китае это *треугольник Яна Хуэя*.

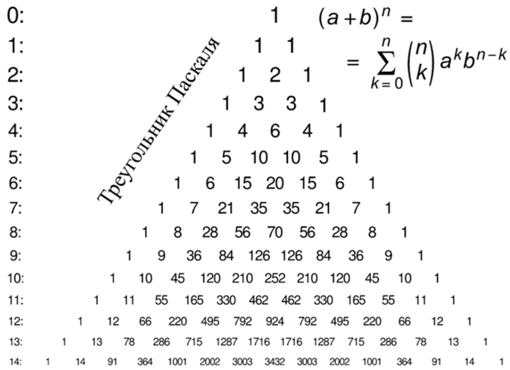


Треугольник Яна Хуэя в книге Чжу Шицзе и треугольник на титульном листе книги Петра Апиана

В Европе замечательный треугольник впервые появился в 1527 году на титульном листе трактата немецкого математика, механика и астронома **Петера Апиана** (лат. Petrus Apianus, 1495–1552). В Италии же он ассоциируется с именем математика **Никколо Тарталья** (Niccolò Fontana Tartaglia, 1499–1557) и называется *треугольником Тарталья*. Наконец, в 1654 году **Паскаль** написал книгу *Трактат об арифметическом треугольнике* (*Traité du triangle arithmétique*), изданную посмертно в 1665 году. В ней даётся наиболее полное к тому времени, с применением при решении задач теории вероятностей, изложение свойств треугольника, но без всякой связи с числами Фибоначчи. Спустя несколько десятилетий Абрахам де Муавр назвал треугольник именем своего соотечественника (лат. *Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM*), которое и закрепилось в качестве официального названия во многих странах, хотя, как видим, не во всех. Даже столь обширный список авторов, в большинстве своём, по-видимому, независимо от других рассматривающих треугольник с биномиальными коэффициентами, едва ли полон. Такой треугольник, как бы его ни называли, является характерным и, быть может, наиболее значительным примером того, как определённая геометрическая конфигурация системы чисел позволяет обнаружить такие *скрытые* их свойства, которые без этого непросто заметить.







Треугольник с биномиальными коэффициентами у Яна Хуэйа, Паскаля и сегодня

Джованни Доменико Кассини (итал. Giovanni Domenico Cassini, фр. Jean-Dominique Cassini, 1625–1712), итальянский и французский математик, астроном и инженер. С именем Кассини связано открытое им в 1680 г. тождество (identity) для трёх последовательных чисел Фибоначчи, в 1753 г. независимо доказанное Робертом Симсоном. В том же 1680 году Кассини исследовал названные позже его именем овалы, полагая даже, что планеты движутся вокруг Солнца не по эллиптическим траекториям Кеплера, а по овалам, см. [Taton]. Напомним, что тождество Кассини, называемое также *формулой Кассини*, относящаяся к нему головоломка Кэрролла Льюиса и овалы Кассини рассмотрены в Части I.

Джованни Кассини

Абрахам де Муавр (фр. и англ. Abraham de Moivre, 1667–1754), английский математик французского происхождения. Ещё в 1722 г. открыл формулу [De Moivre]

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \phi = -\frac{1}{\phi} = -\,0{,}61803\,39887\ldots,$$

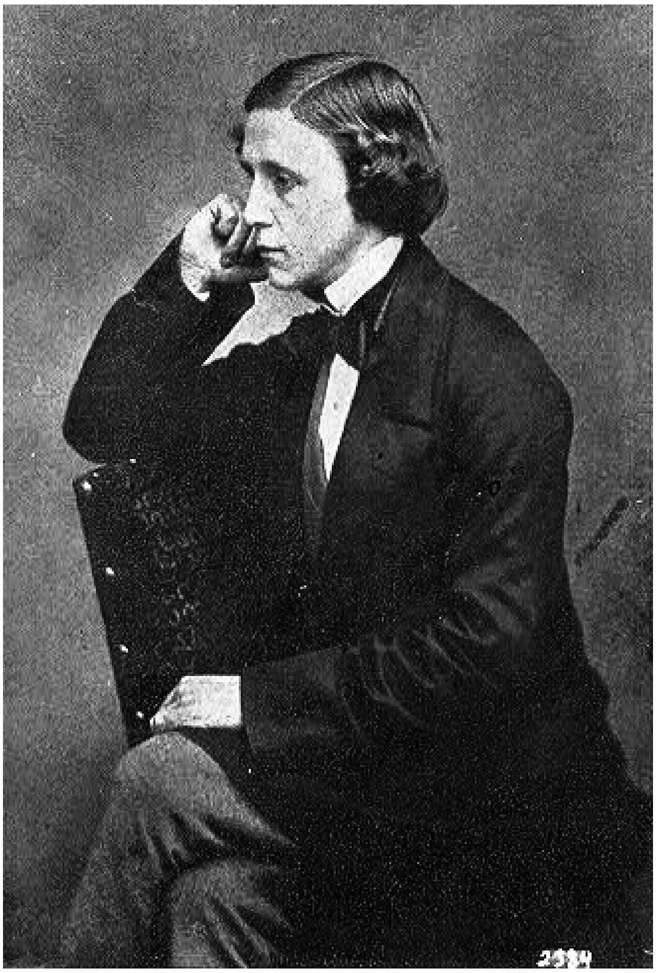
ныне носящую имя **Жака Бине**. У этой, ключевой для понимания связи между золотой константой и числами Фибоначчи, формулы есть и другие независимые авторы. Швейцарский математик **Даниил Бернулли** (Daniel Bernoulli, 1700–1782) открыл и доказал её в 1726 г. [Bernoulli], а двумя годами позже швейцарский, немецкий и российский математик **Леонард Эйлер** указал в письме к Бернулли, хотя полученный им результат был опубликован лишь в 1765 г. [Euler], см. также [Livio].

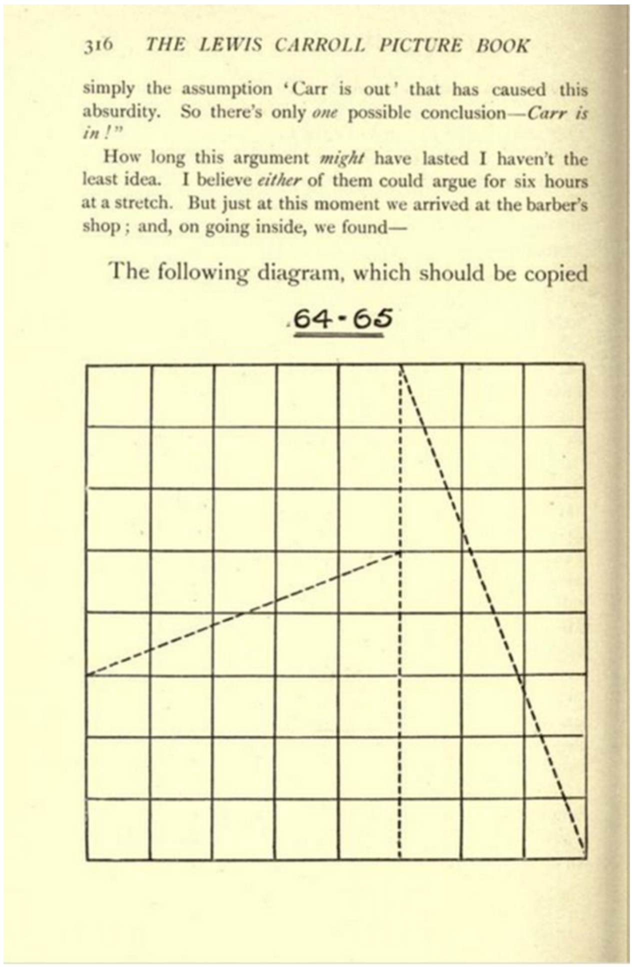
Габриель Ламе (Gabriel Léon Jean Baptiste Lamé, 1795–1870), французский математик, именем которого иногда называют последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ламе в 1844 г. впервые нашёл практическое применение числам Фибоначчи для решения задачи из теории чисел [Lamé] и тем самым заложил основу *теории сложности вычислений*, являющейся сегодня разделом теории алгоритмов. Задача относится к алгоритму Евклида – методу нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел $a > b > 0$ – и решается *теоремой Ламе*. С помощью чисел Фибоначчи доказывается, что число шагов по алгоритму Евклида не превышает $5k$, где k – количество десятичных знаков числа b. На первый взгляд чисел Фибоначчи F_n в решении задачи нет. Но если для произвольно взятого $n \geq 1$ потребовать, чтобы для n шагов по алгоритму Евклида число a было минимальным, тогда

$$a = F_{n+2} \;\text{ и }\; b = F_{n+1}$$

Если, например, $a = F_{24}$ и $b = F_{23}$, то требуется *в точности* 22 шага. Если же $a < F_{n+2}$, число шагов *не превышает n*. Другими словами, последовательность Фибоначчи – верхняя граница для числа шагов в алгоритме Евклида. Более того, в уточнённом варианте вместо множителя 5 получено выражение $\ln 10/\ln \phi \approx 4{,}785$. Теорему Ламе можно считать исторически первым случаем использования последовательности Фибоначчи для решения чисто теоретической проблемы, которая фактически свелась к задаче на экстремум, в решении которой в конечном итоге появилась золотая константа.

Льюис Кэрролл (наст. имя Чарльз Лютвидж Доджсон; Lewis Carroll, Charles Lutwidge Dodgson, 1823–1898), английский писатель, математик и логик. Его непростые, с многочисленными шутками, логическими парадоксами и ловушками сказки в жанре абсурда *Алиса с стране чудес* и *Алиса в Зазеркалье* переведены на многие языки и популярны среди детей и взрослых. Как учёный Льюис занимался проблемами математической логики, геометрии и матричной алгебры, но наибольшей, пожалуй, известностью пользуются его логические и математические курьёзы и головоломки, среди них связанная с тождеством Кассини и рассмотренная в третьей главе головоломка “64 = 65?” [Lewis, 316].





316 *THE LEWIS CARROLL PICTURE BOOK*

simply the assumption 'Carr is out' that has caused this absurdity. So there's only *one* possible conclusion—*Carr is in!*"

How long this argument *might* have lasted I haven't the least idea. I believe *either* of them could argue for six hours at a stretch. But just at this moment we arrived at the barber's shop; and, on going inside, we found—

The following diagram, which should be copied

Льюис Кэрролл и страница из сборника его неопубликованных при жизни работ с головоломкой "64 = 65?"

Абрахам Витгоф (Willem Abraham Wythoff, 1865–1939), голландский математик. В теории игр есть игры, где победителя можно определить заранее, не приступая к самой игре. При этом результат находится в прямой зависимости от начальных условий. Они могут быть такими, что начинающий игру обречён на поражение. В сущности это математические задачи на оптимум, оформляемые как игры, в которые можно и не играть, если знать теорию. Среди подобных задач есть и такие, что связаны с золотой константой и числами Фибоначчи. Одна из них – *игра Витгофа*, являющаяся как бы европейским клоном древней китайской игры 捡石子 (*цзяньшицзы* – собирание камней). Разумеется, усовершенствованным, доведённым Витгофом в начале XX века до уровня строгой математической модели, где камни заменены произвольными целыми положительными числами [Wythoff].

Собирание камней китайскими детьми

В игровом варианте двое играющих поочередно берут камни из двух кучек, с произвольным количеством камней, которые в теории заменяются целыми числами. Если не трогать одну кучку, то из другой можно брать любое количество камней и даже всю кучку целиком, если же камни берутся сразу из двух кучек, то только по равному количеству из каждой. Выигрывает тот, кому удаётся взять последний камень. Выигрыш в этой игре требует знания констант золотого сечения и теории ряда Фибоначчи. Математический анализ игры показал, что существуют такие комбинации для количества камней в кучках, когда проигрыш для начинающего неизбежен, если только его противник придерживается правильной стратегии. В принципе достаточно подсчитать количество камней в кучках, чтобы не приступая к игре выявить потенциального победителя. Эти комбинации определяются с помощью чисел ϕ и ϕ^2. Из формул

$$a_n = n\phi, \quad b_n = n\phi^2$$

придавая n значения 1, 2, 3, … и отбрасывая в числах a_n и b_n их дробные части, получим множество $\{a_n, b_n\}$ камней в кучках:

$$(1, 2),\ (3, 5),\ (4, 7),\ (6, 10),\ (8, 13),\ (9, 15),\ (11, 18),\ \ldots,$$

с которым начинающий игру теоретически неизбежно проиграет. Во всех остальных случаях выигрыш на его стороне.

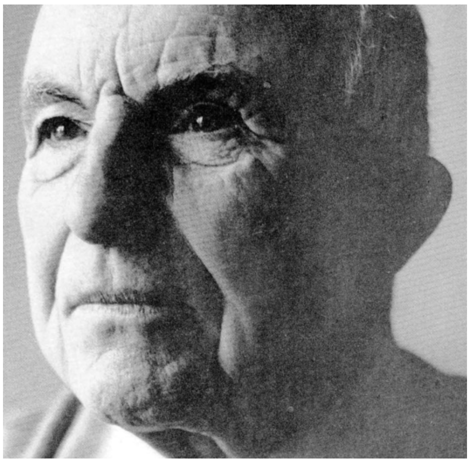
В принципе игра Витгофа (*цзяньшинцзы*) не особенно сложна для математического анализа и вклад Витгофа в теорию золотого сечения трудно считать значительным. Здесь скорее важен сам факт появления константы ϕ и чисел Фибоначчи в игре, которую можно без всяких камней сформулировать как числовую задачу на оптимум. Мы никогда не упускаем возможности отметить, что именно благодаря причастности к подобным задачам приобретают солидный теоретический вес математическая константа и связанная с ней теория, конструкция или модель. В противном случае, если репутация держится лишь на умозаключениях, формальных построениях и неоднозначно толкуемых измерениях, то научная, онтологическая значимость неизбежно становится предметом спекуляций и бесплодных споров. И тогда всегда найдётся скептик, который без обиняков заявит, что *король голый*.

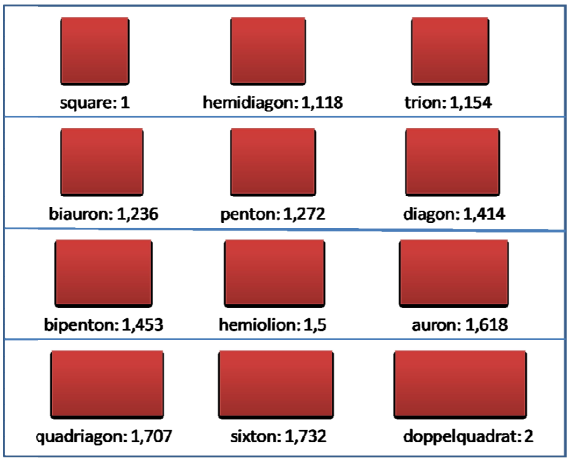
Иван Владиславович Жолтовский (1867–1959), русский, белорусский и советский архитектор и просветитель. Жолтовский занимался исследованием пропорций в архитектуре и искусстве, особенно итальянского Ренессанса. Возможно, это способствовало его интересу к золотому сечению, которое, однако, занимает относительно скромное место в его творчестве. Здесь с его именем связано отношение 528/472, называемое *функцией Жолтовского*. Кстати, после сокращения числителя и знаменателя на общий множитель 8 получается несократимая дробь 66/59; фактически предложено рациональное приближение к величине $\phi - 1/2 = \sqrt{5}/2$, которое больше последней лишь на шесть десятитысячных. Жолтовский утверждал, что дробью 528/472 выражается, например, отношение нижней части дворца Дожей в Венеции к верхней.

Матила Гика (Matila Costiesco Ghyka, 1881–1965), румынский писатель, математик и дипломат. В 1927 г. он опубликовал на французском языке книгу *Эстетика пропорций в природе и искусстве*, переведённую затем на итальянский, испанский и русский [Гика]. Впоследствии Гика опубликовал ряд других трудов, связанных с золотым сечением, но наибольший успех выпал на книгу 1927 г., на которую до сих пор нередко ссылаются в разных работах, включая энциклопедические справочники. Книга начинается с панегирика изданному в 1509 г. трактату Пачоли, ставшему мощным стимулятором интереса Гика к *божественной пропорции*, а в качестве эпиграфа к первой главе взят известный отрывок из *Тимея* Платона о *природе пропорции*. Не обойдены вниманием и другие античные авторы, а также Леонардо да Винчи, Кеплер и другие исследователи, в том числе и новейшего времени: Цейзинг, Кук, Тимердинг, Хэмбидж… В книге вообще представлен достаточно большой и разнообразный для своего времени материал. В ней много рисунков в духе Цейзинга, призванных иллюстрировать широкую распространённость принципа золотого сечения в изобразительном искусстве и архитектуре. Есть и ботаника и в немалой степени математика, включая формулы связи золотого сечения с числами Фибоначчи. Обсуждая прямоугольники динамической симметрии Хэмбиджа, Гика считает, что с их помощью достаточно просто достигается большое разнообразие и наиболее благоприятное, с точки зрения гармонии, соразмерности и симметрии, деление композиции на части [Ghyka, 126–127].

Не все, однако, в восторге от книги Гика. Почти сразу после её издания в 1936 г. на русском появилась отрицательная рецензия [Зубов], где автору ставится на вид излишнее эстетство, компилятивность работы, недостаточно критическое отношение к имеющимся фактам. Схожие оценки работы Гика, особенно в части, касающейся его переходящей в легковерие эстетической восторженности, когда спорные мнения и теоретические построения выдаются за бесспорные и хорошо известные факты, встречаются и позже. Тем не менее, читательский рейтинг книги Гика достаточно высок; она, как и некоторые менее известные его работы по золотой тематике, больше рассчитана на почитателей золотой пропорции, чем на читателей критического настроя.

Вольфганг фон Версин (Wolfgang von Wersin, 1882–1976), родившийся в Чехии, в Праге немецкий художник и архитектор.





Вольфганг фон Версин и его ортогоны

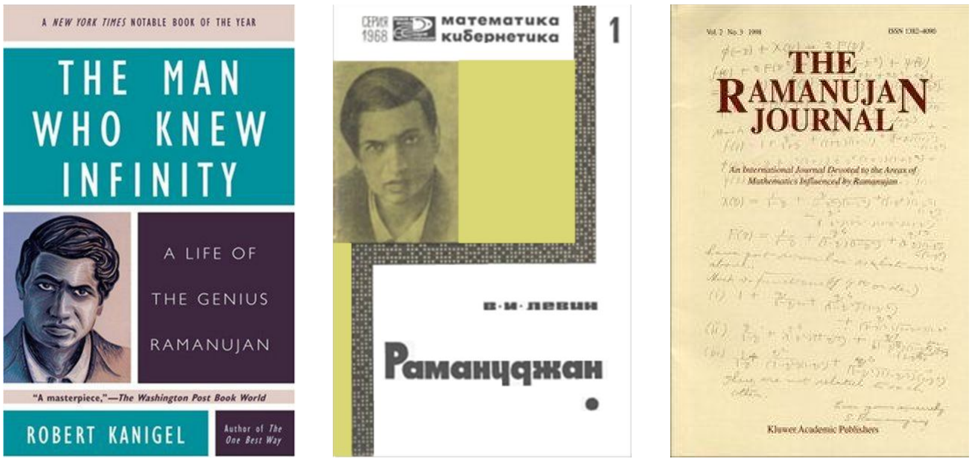
В своей опубликованной в 1956 г. книге он рассматривает двенадцать прямоугольных четырёхугольников и треугольников – “ортогонов”, широко применяемых в истории искусства художниками, архитекторами и каллиграфами для достижения оптимальной взаимосвязи и упорядоченности элементов композиции. При этом Версин ссылается и на текст старинного манускрипта 1558 года, где даны 7 из 12 подобных фигур [Wersin, 36, 83]. Все ортогоны показаны в таблице.

Таблица
Ортогоны по Вольфгангу Версину

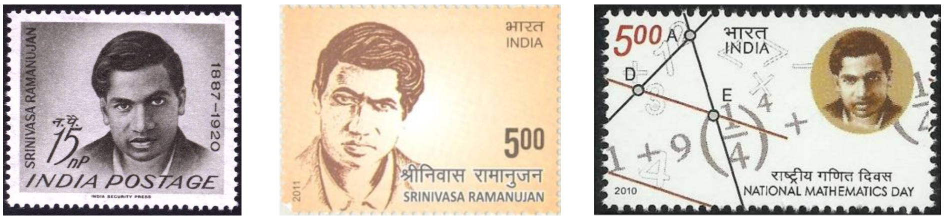
Название	Отношение сторон	Значение
Quadrat	$1:1$	$1:1$
Hemidiagon	$1:\phi - 1/2 = \sqrt{5}/2$	$1:1{,}118\ldots$
Trion	$1:\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$1:1{,}154\ldots$
Quadriagon	$1:\phi_{11}/2 = 1:\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$	$1:1{,}207\ldots$
Biauron	$1:2(\phi - 1) = \sqrt{5} - 1$	$1:1{,}236\ldots$
Penton	$1:\sqrt{\phi}$	$1:1{,}272\ldots$
Diagon	$1:\sqrt{2}$	$1:1{,}414\ldots$
Bipenton	$1:2\sqrt{\phi/3}$	$1:1{,}46\ldots$
Hemiolion	$1:3/2$	$1:1{,}5$
Auron	$1:\phi$	$1:1{,}618\ldots$
Sixton	$1:\sqrt{3}$	$1:1{,}732\ldots$
Doppelquadrat	$1:\sqrt{4} = 1:2$	$1:2$

Перед нами любопытная коллекция числовых отношений в интервале от 1 до 2, в которой представлены первые пять натуральных чисел и все квадратные корни динамической симметрии, за исключением $\sqrt{5}$. Это решение проблемы оптимальности художественной композиции в духе концепции Хэмбиджа и в традициях, как отмечает сам автор, пифагореизма [Там же, 80]. Заметим, что здесь три рациональные дроби, пять отношений для золотой константы, по одному для констант Пифагора и да Винчи и три с участием квадратного корня из трёх. Версин уверен, что нет ничего лучше этих пропорций, являющихся “объектами чистой абстракции” [Там же, 36], см. также [Wolfgang von Wersin].

Сриниваса Рамануджан – индийский математик. Формулы Эйлера, выражающие функции синуса и косинуса через экспоненту и фактически заложившие в начале XVIII в. основу нового этапа развития математики, были в начале XX в. самостоятельно открыты одним учеником пятого класса средней школы. Этим учеником был математик-самоучка Сриниваса Рамануджан, не сумевший поступить в колледж, который, отвергнув единственного за свою историю выдающегося абитуриента, упустил шанс называться *Alma mater* математического гения. Позже, удививший ведущих английских математиков своими необыкновенными числовыми соотношениями, он был приглашен в Англию, где в содружестве с ними был получен ряд интересных и важных результатов в области теории чисел [Questions by Srinivasa Ramanujan], см. также [Левин].



Некоторые из книг о жизни и творчестве Рамануджана, один из трёх связанных с его именем журналов

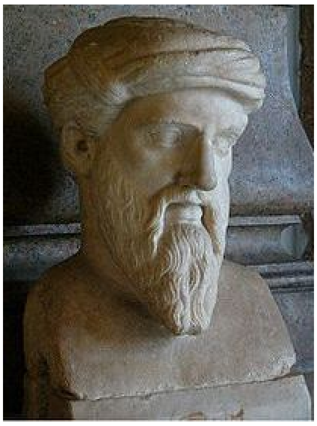


Индийские марки разных лет, посвящённые Рамануджану

Для творчества виртуоза числовой математики Рамануджана, прозванного *математическим Паганини*, характерно *константное видение числового множества*, отразившееся во многих его удивительных соотношениях между натуральными числами и комбинациями математических констант. Среди них, наряду с другими, и константа ϕ, а также $\sqrt{5} = 2\phi - 1$. Хотя золотым сечением Рамануджан, насколько известно, никогда не интересовался, но знаменательно, что золотая константа фигурирует в нескольких соотношениях, притом из группы самых известных числовых жемчужин Рамануджана (см. формулы (3.286) – (3.288) из третьей главы). Это один из показателей того, что число ϕ входит в узкий круг наиболее значительных математических констант.

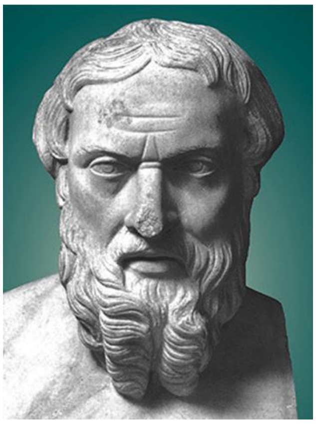
15. Портретная галерея

Составление портретной галереи наиболее видных авторов, причастных к истории золотого сечения, – задача непростая и однозначно не решаемая, как, впрочем, любая антология, к какой бы области человеческой деятельности она не относилась. В настоящей работе охвачен, напомним, исторический период с древнейших времен до начала 70-х годов прошлого столетия, поэтому представлены лишь деятели этого периода. Трудность составления галереи *избранных* не только в сложности отбора наиболее достойных среди более чем сотни исследователей, упоминаемых в наши дни и оставивших свой след в истории ЗС. В отдельныхых случаях (например, Пингала и Цейзинг) нет, насколько можно судить, даже приблизительных портретных данных, а качество некоторых, имеющихся в наличии рисунков и фотографий, в особенности Абрахама Витгофа, оставляет желать лучшего. Следует также отметить, что за два с половиной тысячелетия число работ, целиком или преимущественно посвящённых понимаемой в широком смысле теории золотого сечения, можно пересчитать по пальцам. Это сейчас рынок научной и научно-популярной литературы, заполненный работами по ЗС самого разного толка, стал почти необозримым; раньше этим занимались лишь редкие одиночки, вроде брата Луки Пачоли и Адольфа Цейзинга. У подавляющего большинства исследователей, включённых нами в список (составленный в хронологической последовательности, по дате рождения) сорока восьми избранных, всё то, что мы сегодня причисляем к теории золотого сечения, занимало довольно скромное, порой почти незаметное место в их творчестве. Не говоря уже о тех авторах, причастность которых к ЗС не очевидна и носит предположительный характер. В любом случае, это портретная галерея замечательных личностей, известных и безотносительно к величине исторического вклада в исследование золотого сечения.

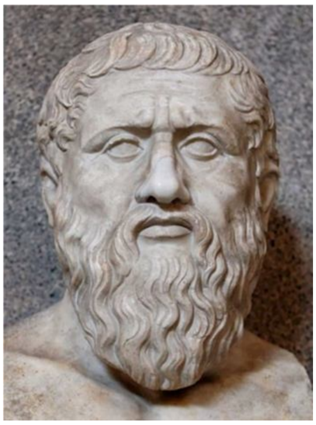


Пифагор Самосский
ок. 570 до н. э. – ок. 490 до н. э.

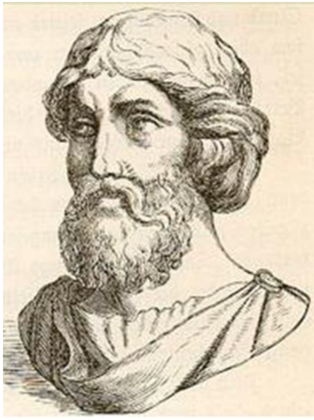
Фидий
ок. 490 до н.э.– ок. 430 до н.э.



Геродот Галикарнасский
484 – 425 до н. э.



Платон
428/427 – 348/347 до н. э

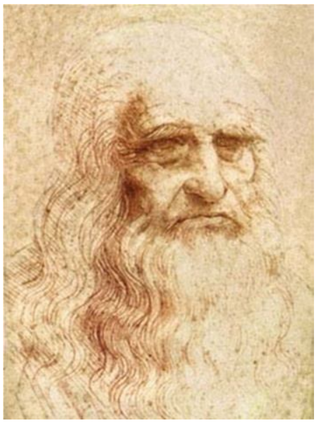


Гиппас из Метапонта
V в. до н. э.

Евклид Александрийский
ок. 300 до н. э.

Леонардо Пизанский
(**Фибоначчи**) ок. 1170 – ок. 1250

Лука Пачоли
1445 – 1517



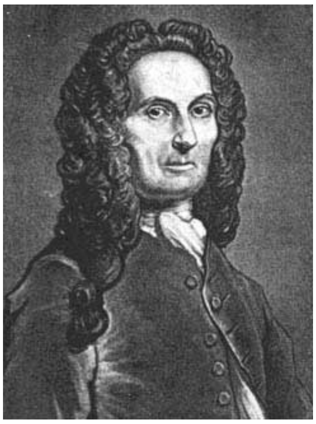
Леонардо да Винчи
1452 – 1519

Альбрехт Дюрер
1471 – 1528

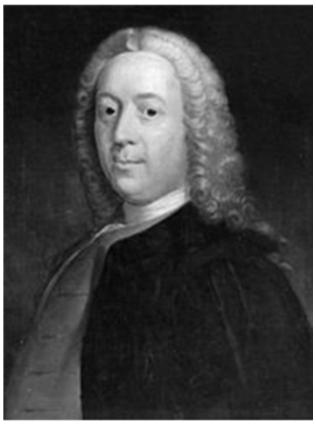
Михаэль Местлин
1550 – 1631

Иоганн Кеплер
1571–1630

Антонио Страдивари
1644–1737



Абрахам де Муавр
1667–1754

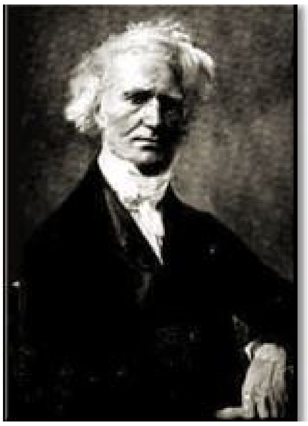


Роберт Симсон
1687–1768

Даниил Бернулли
1700–1782

Леонард Эйлер
1707–1783

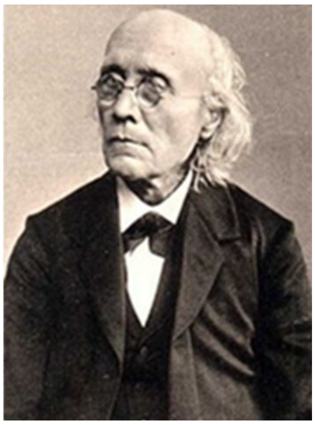
Шарль Бонне
1720–1793



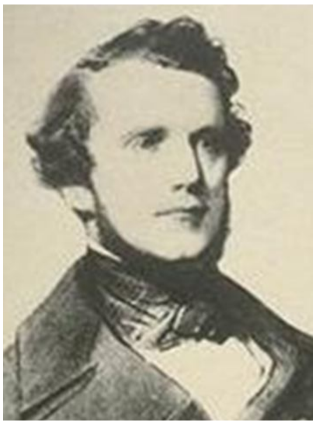
Жак Филипп Мари Бине
1786–1856

Габриель Ламе
1795–1870

Мартин Ом
1792–1872



Густав Теодор Фехнер
1801–1887



Огюст Браве
1811–1863

Вильгельм Гофмейстер
1824–1877

Франсуа Эдуард Люка
1842–1891

Феликс Христиан Клейн
1849–1925

Д'Арси Томпсон
1860–1948

Абрахам Витгоф
1865–1939

Герман Гримм
1865–1942

Теодор Андреа Кук
1867–1928

Джей Хэмбидж
1867–1948

Иван Жолтовский
1867–1959

Ральф Эллиотт
1871–1948

Матила Гика
1881–1965

Леонид Сабанеев
1881–1968

Павел Флоренский
1882–1937

Герман Вейль
1885–1955

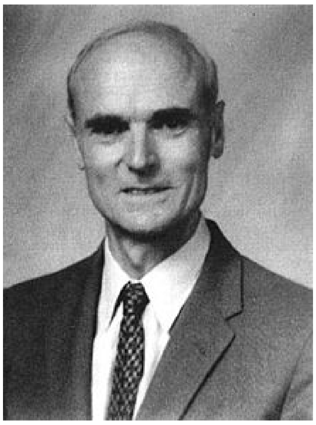
Ле Корбюзье
1887–1965

Алексей Лосев
1893–1988

Сергей Эйзенштейн
1898–1948

Эдуард Цекендорф
1901–1983

Сальвадор Дали
1904–1989



Гарольд Коксетер
1907–2003

Альфред Бруссо
1907–1988

Вернер Хоггатт
1921–1980

Николай Воробьёв
1925–1995

Джордж Бергман
1945

Юрий Матиясевич
1947

Заключение

В завершение работы, общие контуры которой обозначены в предисловии, представим в виде сотни кратких тезисов квинтэссенцию всего содержания монографии. Отметим вначале, что потенции отдельно взятой числовой величины ограничены тем кругом задач теоретического и прикладного характера, в которых данная величина реально востребована. Если иметь в виду фундаментальные константы математики и физики, круг подобных задач может быть очень широким и постоянно расширяться новыми сферами применения, но даже в этом случае константа может "работать" исключительно в рамках определённого формализма в качестве его "аттрактора" – центрального числового элемента. Лишь система чисел, пусть неодинаковой значимости и с единственным фундаментальным аттрактором, но формально более или менее равноправных, способна достаточно полно представить количественный каркас теории, модели, области исследования. Наивно в частности полагать, будто константа ϕ, даже с многочисленной "свитой" вторичных величин, в состоянии отразить, например, все "наилучшие" пропорции в архитектуре, или, если брать шире, быть единственным важным элементом того, что принято называть математической гармонией мира. Помимо принадлежности к континууму всякое число имеет в соответствии с принятой нами в [A[6, b], *п.* 2.12] *классификацией определённый ранг, относится к тому или иному типу, является членом различных семейств и т. п. Константа ϕ и принцип золотого сечения определяются совокупностью рассмотренных ранее формальных характеристик и свойств, связей и отношений с другими константами, в первую очередь с ФМК и в сопоставлении с родственными величинами, прежде всего константой да Винчи. Используя имеющиеся результаты, можно теперь приступить к краткому, без комментариев и ссылок, подведению итогов, изложению узловых моментов содержания и полученных выводов, которые даны в главах, не всегда при этом строго придерживаясь последовательности изложения материала в тексте книги.*

1. Принцип золотого сечения чётко обозначен в *Тимее* при изложении пифагорейско-платоновской космологической модели космоса, идеи взаимосвязи и единства четырёх первоэлементов. Теория золотого сечения, как феномен истории математики, берёт начало с геометрических построений золотой пропорции, в основе которых лежит *деление отрезка в крайнем и среднем отношении*. Нет других исторических свидетельств на этот счёт, как нет и достаточно убедительных фактов, говорящих в пользу сознательного или неосознанного применения второго золотого сечения в античном мире, в частности при строительстве пирамиды Хеопса. Древнейшая, со времен шумеров, история золотой пентаграммы – это преимущественно история её магии, эзотерических толкований, а не математических исследований.

2. Исторически первичное и непосредственно приводящее к квадратному уравнению деление производится по принципу *целое к большему, как большее к меньшему.* В трёхчленной связке величин *сумма большего и меньшего равна целому*, и в этом вся суть. Ведь существует бесконечно много вариантов деления на две неравные части, но лишь в одном случае продолжение процесса деления не меняет начальную конфигурацию величин. В противном случае имели бы "целое к большему, как большее *n раз* к меньшему" с неравным единице *n*, а здесь уже при втором делении целое не равно сумме своих частей. Арифметически, при золотом делении соответствующая убывающая или возрастающая геометрическая прогрессия является одновременно простейшей рекурсией второго порядка – аддитивное свойство ЗС.

3. Особенность золотого деления на неравные части положена в основу *метода золотого сечения*, который используется для нахождения значений функций и особенно полезен при поиске минимума или максимума функций определённого типа. Это метод неизменно содержащих искомое значение и уменьшающихся по ряду Люка интервалов, со значительно более медленной сходимостью к пределу, чем в методе касательных Ньютона. Однако метод золотого сечения прост, не связан с дифференцированием, а заменой золотой константы отношением чисел Фибоначчи трансформируется в *метод Фибоначчи.*

4. Существуют и другие принципы, которые могут быть положены в основу теории, и они приводят к иным формам математической записи исходного формализма, хотя с теми же числовыми фундаменталиями. Научная практика вообще подсказывает, что в зависимости от выбора начала возможны различные способы *эксплицитного* – явного и *имплицитного* – неявного определения практически любой значимой математической величины. В первом случае она выражается в конечной или бесконечной форме через другие числовые величины или числовые конструкции со связанными переменными, вроде определённого интеграла, во втором случае имеет место неявное определение величины посредством аксиом, постулатов, принципов, уравнений, правил, рекурсии и т. п. Граница между двумя типами определения не всегда чётко различима.

5. Центральным элементом ТЗС, как и всех её обобщений и расширений, является *константа* ϕ, которая может быть задана геометрическим построением либо определяться как конкретное число. В геометрическом варианте это точка, производящая золотое деление, либо отношение между линейными размерами двумерных фигур или же параметрами трёхмерных тел. Числа как такового, в привычном понимании этого понятия, здесь нет, но налицо одинаковая во всех случаях пропорция, и в этом смысле можно говорить о *неявном определении константы*.

6. Золотая геометрия наглядна и достаточно многообразна. Наряду с простейшими отрезками золотого и второго золотого сечения она включает в себя множество *фигур и тел*. Двумерным символом ЗС, наиболее богатым золотыми пропорциями, считается *пентаграмма*, которая легко получается соединением вершин правильного пятиугольника через одну. Среди других двумерных фигур наиболее интересна золотая *логарифмическая спираль*, реализующая идею сохранения первичной формы вне зависимости от различных преобразований. Среди золотых треугольников наиболее известен *треугольник Кеплера*, отношения длин катетов и гипотенузы которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным числу второго золотого сечения. Из других прямоугольных и равнобедренных *треугольников*, как простейших двумерных фигур, могут быть составлены пентаграмма, десятиугольник, золотые ромбы и эллипсы. Есть и другие фигуры золотого сечения, включая прямоугольный четырёхугольник как частный случай ромба.

7. Квадратное уравнение золотого сечения геометрически представляет собой *параболу*, незамкнутую кривую, пересекающую ось абсцисс в двух золотых точках. Одно из трёх основных конических сечений, плоская евклидова кривая под названием *парабола* определяется как геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы). В основу такого определения положен закон сохранения по отношению к точке и прямой, следовательно, уравнение ЗС может считаться частным проявлением этого закона, а действительные числа ϕ и $-\phi^{-1}$ – её константами. Как точки на числовой оси они находятся на одинаковом расстоянии $5^{1/2}/2$ от фокуса и директрисы параболы.

8. В отличие от пентаграммы и додекаэдра, считаться фигурой золотого сечения *парабола* не может. С другой стороны, в отличие от великого множества геометрических объектов, она связана с ЗС не просто частными значениями золотых параметров, но также своей аналитической формой, квадратным уравнением, что означает более высокий уровень причастности к ЗС. С той или иной степенью точности параболическая форма реализуется в природе и используется на практике. С позиций “параболического закона сохранения” ПЗС может рассматриваться как конкретное, хотя ничем особо не выделенное проявление данного закона.

9. Вращением параболы вокруг проходящей через её вершину вертикальной оси получается незамкнутое трёхмерное тело, называемое *параболоидом вращения*. Анализ его основных характеристик с точки зрения принципа минимума, или закона сохранения в форме равенства отношений, определяющих конфигурацию тела, приводит к интересному результату. Параболоид любого размера является золотым при условии равенства его радиуса и высоты, точнее, через золотую константу и числа Фибоначчи выражаются *площадь поверхности S* и *средняя кривизна* параболоида вращения.

10. Спираль Ферма, называемая также *параболической спиралью*, относится к семейству Архимедовых спиралей, которые в полярной системе координат выражаются уравнением зависимости радиуса от степеней переменного угла. В формальной структуре такой спирали не видно ничего золотого, однако начатое ещё в античную эпоху и завершённое в наши дни исследование явления филлотаксиса, в частности расположения семян в головке подсолнечника, привело к математической модели, в которой семянки одинаковой длины упорядочены именно спиралью Ферма, причём с золотым углом $2\pi\phi^{-2} \approx 137{,}508°$.

11. Другая незамкнутая кривая из числа конических сечений – *гипербола* связана с *гиперболическими функциями*, играющими немалую роль в ТЗС. Это функции для комбинаций показательной функции, по форме идентичные формуле Бине, устанавливающей фундаментальную связь между числами Фибоначчи и золотой константой. Разница в том, что в одном случае основанием показательной степени является ФМК *e*, в другом – константа ϕ. “Гиперболичность” формулы Бине является серьёзным основанием для признания причастности гиперболы к числу золотых фигур пусть не первого, а второго дивизиона.

12. Менее значительно, хотя и не лишено интереса золотое содержание *овалов Кассини*, в частности *лемнискаты Бернулли*, которая определяет границу между одиночными и парными замкнутыми фигурами, является предельным значением для тех и других. Прямой аналитической связи с ЗС здесь нет, если не считать содержащее функцию косинуса уравнение лемнискаты в полярных координатах, со множеством золотых значений полярного радиуса для золотых углов. Не исключена, однако, связь лемнискаты с ЗС посредством других геометрических фигур, таких как эллипс, ромб, шестиугольник.

13. Кривые, названные в своё время *синусоидальными спиралями*, в полярных координатах выражаются уравнением, трижды содержащим переменную n: как показатели степени радиуса и постоянного параметра и как множитель угла, стоящего под знаком косинуса. В обширном классе синусоидальных спиралей, включающем параболу, гиперболу, лемнискату Бернулли и необозримое множество других кривых, золотыми

являются соотносящиеся с правильными пяти- и десятиугольниками семейства пяти- и десятилепестковых кривых для значений $n = \pm 5/m$ и $n = \pm 10/m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

14. С формальной точки зрения лишь очень немногие геометрические объекты могут с достаточным основанием считаться золотыми, а все остальные содержат крупицы золота лишь постольку, поскольку, наряду с бесконечным множеством значений их параметров, всегда найдутся и золотые. Например, золотая логарифмическая спираль – это всего лишь определённый постоянный угол между полярным радиусом и касательной к точке и если в природе действительно, как полагают, нередко реализуется спираль именно с таким углом, надо искать причину в области приложения фундаментальных принципов к явлениям физической реальности.

15. Особую группу двумерных геометрических фигур образуют *золотые фракталы* – самоподобные структуры с нецелочисленной размерностью Хаусдорфа, выражаемой через логарифм константы ϕ или её производных. В работе приведены несколько таких фракталов: золотой дракон (с равной в точности ϕ размерностью Хаусдорфа), асимметричное канторово множество, пятиугольные хлопья, фракталы додекаэдра, икосаэдра, Фибоначчиева слова, Фибоначчиева слова 60°. Возможны, разумеется, и другие золотые фракталы, число которых потенциально не ограничено.

16. Другая группа двумерных золотоносных фигур специфического типа – *плитки Пенроуза* "воздушный змей" (kite) и "дротик" (dart), допускающие плотное, без пробелов и наложений, заполнение плоскости. Они могут быть получены особым делением на две части золотого ромба с углами 72° и 108°. С увеличением замощённой плитками Пенроуза площади отношение змей к дротикам приближается к числу ϕ, которое является константой и в других случаях *паркета*, то есть плотной мозаичной упаковки плоскости, или его достаточно большой, для выявления числовых закономерностей, части.

17. Наиболее интересными и сложными, с точки зрения неочевидности и многообразия связей с золотым числом и его гомологами, могут считаться *трёхмерные тела*. Их принадлежность золотому семейству обычно, хотя и не всегда, выявляется довольно просто: надо совместить центр тела с началом декартовой системы и определить, есть ли среди координат вершин числа, выражаемые через константу ϕ. Выдающуюся роль в золотой геометрии играет дуальная пара платоновых тел *додекаэдр–икосаэдр*. Менее значительна, но также достаточно интересна шестёрка *архимедовых тел* с шестью дуальными им *каталановыми телами*. Немало и других золотых тел, среди которых можно выделить трёхмерную логарифмическую спираль, призму, пирамиду с треугольником Кеплера в сечении, ромбоэдр и эллипсоид. Помимо двух *правильных* и двенадцати *полуправильных* многоугольников носителями золотой константы являются *квазиправильные* и многие другие, в том числе весьма экзотичные, трёхмерные тела.

18. Античная математика времён Пифагора, Платона и Евклида, в силу ряда причин была заметно геометризована. Не случайно пифагорейско-платоновская космология, как учение о математический гармонии космоса, имеет дело с геометрическими образами. В *Тимее* Платона, в построении математически совершенной модели мира фактически дважды используется именуемый *пропорцией* принцип золотого сечения, а геометрическим символом Вселенной является додекаэдр. Концепция *математического совершенства Вселенной*, при всей её недоказуемости, всегда служила и служит чем-то вроде маяка, руководящего принципа и творческого стимула для наиболее выдающихся естествоиспытателей, придавая особый смысл, мотивированность и общую направленность их творческим исканиям.

19. Конкретное понимании философских, гносеологических и методологических основ фундаментальной науки у каждого серьёзного исследователя своё, но при любом толковании вера в гармонию, единство, соразмерность мира означает возможность его *адекватного описания посредством универсального языка математики*. В более категоричном, близком к платоновскому толковании совершенная математическая модель и есть *высший уровень реальности*. Здесь мы имеем уже не просто мир, о котором можно говорить на прекрасно приспособленном для этого языке математики, а мир, изначально созданный по безупречному математическому сценарию, который лишь требуется выявить и адекватно представить единственно возможным способом.

20. Один из основных итогов тысячелетнего развития знания можно видеть в том, что естественнонаучная теория только тогда способна претендовать на серьёзное к себе отношение и признание, когда положенные в её основу общие идеи и постулаты облекаются в форму верифицируемой числовой модели со своими выделенными числами. Потому и столь высок (выше не бывает) научный статус фундаментальных математических и физических констант, потому и можно, хотя бы в неполном, возможно даже грубом, но выделяющем "краеугольные камни" системы, приближении назвать ТЗС *теорией константы ϕ и чисел Фибоначчи*.

21. Золотая константа как узловой элемент, "краеугольный камень" ТЗС может по-разному определяться в зависимости от выбора исходного начала теории. Постулаты теории могут быть разными, но в любом случае неизбежно приводят к константе ϕ, тем самым имплицитно её определяя. Помимо традиционного

деления в крайнем и среднем отношении, которое фактически является неявным геометрическим определением золотой константы в виде точки, производящей искомое деление, есть и другие *принципы*, непосредственно приводящие к числу ϕ.

22. Это прежде всего перевод изначального геометрического построения на язык теории чисел, то есть его запись в виде *квадратного уравнения*. К константе ϕ приводят в бесконечном пределе *ряды Фибоначчи и Люка* – строящиеся по правилу третьего члена рекуррентные последовательности второго порядка, являющиеся частными случаями последовательностей Люка. В рамках теории ЛМФ золотая константа получается в *экспоненциально-логарифмической форме*, а в виде *одинарного кода* – в теории цепных дробей. Во всех этих случаях появление ϕ прямо или косвенно обусловлено применением "принципа наименьшего действия", минимизирующего соответствующий формализм и обеспечивающее самое простое формальное построение среди всех имеющихся возможностей.

23. Менее универсален не связанный с постулатами теории способ определения константы посредством той или иной системы записи чисел или определённой математический структуры. Наиболее известны запись числа $\phi = 1{,}61803\ldots$ бесконечной непериодической дробью в *десятичной системе счисления* с точностью в триллион знаков и компактное, в конечном виде представление посредством *квадратного корня*. Особо значима запись ϕ в *двоичной системе* и в основанном на числах Фибоначчи минимально-битовом *представлении Цекендорфа*. Весьма популярна запись посредством *гиперболических функций*, а с помощью *тригонометрических функций* перекидывается мостик между теорией чисел и золотой геометрией.

24. Любопытен способ неявного определения ϕ через *треугольник Паскаля*, представляющий собой таблицу биномиальных коэффициентов, расположенных в форме "равностороннего" треугольника. Сумма диагональных элементов такого треугольника образует ряд Фибоначчи, а следовательно, в пределе и константу ϕ. Другими способами её предельного определения могут считаться *определённый интеграл* с квадратным корнем в знаменателе подынтегрального выражения, *детерминанты*, различные формулы из *комбинаторики*, *бесконечные произведения* и великое множество *бесконечных рядов*.

25. Непосредственная связь между золотой константой и числами Фибоначчи даётся формулой Бине, схожей с формулами для гиперболических косинуса и синуса. Сопоставление классической формулы Бине с приводящей к последовательности Фибоначчи линейной рекуррентной последовательностью второго порядка показывает, что все подобные последовательности растут по закону асимптотического приближения к показательному закону a^x ($a > 1$). В самом общем случае произвольного комплексного показателя степени ρ, как и в более частном случае любого действительного r, знаменатель формулы Бине содержит тригонометрический косинус, который при целых значениях $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ "исчезает", обращаясь в ± 1. С увеличением r асимптотический характер приближения к a^x сохраняется. Формулы, аналогичные формулам Бине, справедливы и для чисел Люка.

26. Числа Фибоначчи и Люка с константой ϕ – поистине "райский уголок" для всех любителей числовой математики, включая профессиональных математиков, имеющих свой специализированный журнал *The Fibonacci Quarterly*, отмечающий 50-летний юбилей как раз в нынешнем, 2013 году. Трудно даже просто перечислить все основные свойства указанных числовых последовательностей, основные типы их связей с различными математическими конструктами.

27. Известно, что простыми могут быть только числа Фибоначчи и Люка с простыми номерами n, за исключением F_4. Множества $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$, как и множества натуральных и простых чисел, бесконечны, но к настоящему времени выявлено всего 33 доказанных и 15 предполагаемых простых чисел Фибоначчи и соответственно 43 и 21 число Люка. Наибольшее среди предполагаемых простых F_n – огромное число с 411 439 десятичными знаками, а для чисел Люка это число с 219 824 знаками. Вопрос о конечности или бесконечности множеств простых чисел Фибоначчи и Люка остаётся открытым и относится к категории наиболее трудноразрешимых, если вообще доступных решению, математических проблем.

28. К указанным выше характеристикам чисел F_n и L_n можно добавить следующие их особенности, свойства и отношения: *признаки делимости* чисел Фибоначчи; *повторяемость через определённые периоды* последнего, последних двух, трёх и т.д. знаков десятичного представления чисел F_n; особенности *квазифибоначчиевых последовательностей*; *теорема Гурвица*, определяющая особый статус числа $5^{1/2}$ в континууме иррациональных чисел; способы определения *принадлежности* целого числа *к множеству* $\{F_n\}$; закономерности, касающиеся связи *приведённых чисел* F_n с *числом 24*; соотношения для чисел Фибоначчи и Люка *разных степеней*; свойства чисел F_n и L_n, такие как *тождество Кассини*, в зависимости от *значений индексов*; *закон Бенфорда*, или логарифмический закон распределения первого знака; *производящие функции*, соответствующие характеристические уравнения, их корни и числовые последовательности для различных модификаций и комбинаций последовательностей F_n и L_n; золотые p*-сечения*; *фибономиальные коэффициенты*; *полиномы Фибоначчи, Люка и Чебышева*, отношения между

ними и связь с числами Фибоначчи и Люка; *золотые подмножества* квадратных уравнений; ряд *экзотических свойств* чисел F_n и L_n, …

29. Особого внимания заслуживает связь константы ϕ, чисел Фибоначчи и Люка с фундаментальными математическими константами, с *проточислами* e, π, i, 2. Существует множество связей подобного рода, осуществляемых посредством экспоненты, логарифмической, тригонометрических и гиперболических функций, дзета функции Римана, с помощью радикалов, факториалов, бесконечных рядов, произведений и т.д. Интересны в этом плане известные соотношения, полученные в своё время Рамануджаном. Ряд вторичных констант порядка единицы получается при суммировании величин, обратных числам Фибоначчи и Люка с различными индексами. Все эти и указанные выше соотношения, формулы и уравнения являются составными частями ТЗС, или "золотого домена", как системы математических конструкций, объединяемых на основе общей идеи, исходных понятий, определений и принципов.

30. Доминантных определений сложных, неоднозначно оцениваемых научных концепций, наверное, не бывает. В нашем случае на переднем плане *принцип золотого сечения*, являющийся конкретным отражением таких постулатов общенаучной значимости, как *сохранение*, *минимальность*, *оптимальность*, *наименьшее действие*, применением которых и обусловлено появление золотой константы со всей её многочисленной числовой "свитой". Без реальной связи с "могучей кучкой" взаимосвязанных фундаментальных принципов золотое сечение со всем своим окружением немногого бы стоило, оставаясь на уровне любопытного геометрического построения и экзотической числовой величины, место которым – в кунсткамере математических диковинок.

31. Обусловленность ПЗС *принципом наименьшего действия*, а лучше сказать *принципом минимума*, во избежание увязки с известной физической величиной, явно проявляется при рассмотрении возвратных последовательностей, строящихся по правилу $n + k$-го члена:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n$$

Применение принципа минимума приводит здесь к *правилу третьего члена* ($k = 2$) с множителями $a_1 = a_2 = 1$, а им соответствует характеристическое уравнение, являющееся квадратным уравнением для константы ϕ. Но и независимое применение правила третьего члена в самом общем случае двух произвольных комплексных чисел даёт, начиная с некоторого номера, четыре отдельных ряда F_n. Следовательно, к принципу золотого сечения приводит минимизация как в случае цепных дробей, так и в случае возвратных последовательностей и правила третьего члена

32. Между тем, современная ТЗС, подхватив эстафету своей античной предшественницы и моделей более позднего периода, претендует на роль основного компонента *математической теории мировой гармонии*, метафорически называемой *математикой гармонии*. Подобная заявка далеко не всем по нраву, но своё право на существование она заработала не столько бесплодностью других подходов и не проявляемым к ней со стороны многих выдающихся авторов интересом, а тем более не множеством сомнительных "обнаружений" ПЗС в природе и искусстве и восторженным хором армии любителей ЗС. Главное здесь – соотнесённость ПЗС с указанными принципами, доказавшими свою фундаментальную значимость в разных областях науки, особенно в физической теории.

33. Порой препятствием к признанию достойного теоретического статуса самой ТЗС служит простота её исходного формализма, в частности квадратного уравнения с единичными множителями. Однако, во-первых, есть, как указывалось, и другие *эквивалентные формы* математической записи исходных положений ТЗС, отличные от исторически первичного и непосредственно приводящего к квадратному уравнению деления в крайнем и среднем отношении. Во-вторых, простота оснований теории – скорее её *достоинство*, чем *недостаток*; такие, к примеру, физические теории, как специальная теория относительности и квантовая механика в своей основе достаточно просты, а теории с мудрёными, излишне усложнёнными исходными положениями невысоко котируются в науке, оказываются, как правило, нежизнеспособными и быстро сходят с арены. В-третьих, простота оснований не означает простоту теории в целом: в периферийных областях ТЗС используются достаточно *сложные математические конструкты*.

34. Большинство математических систем допускает *обобщения и расширения*, выстраивающиеся в цепочку последовательно возрастающих по степени общности формальных структур, и ТЗС не составляет исключения. Однако её статус теории прикладного значения налагает серьёзные ограничения на допустимые пределы обобщений, во избежание потери формальной и содержательной связи с золотой первоосновой, в частности с константой ϕ и числами Фибоначчи. В работе рассматриваются *три* возможных *уровня обобщения*, связанных с ТЗС принципом соответствия и удовлетворяющих данным требованиям.

35. Общие правила обобщения теоретической конструкции формулируются в виде *трёх правил*, касающихся принципа соответствия между старой и новой теорией, появления в обобщённой теории новых объектов и констант и сохранения в ней фундаментальных особенностей исходной теории. Сохранение по отношению

ко всякому расширению неких коренных свойств и характеристик изначальной модели является необходимым условием обобщения практически любой модели прикладного характера.

36. В качестве *родового признака* для ТЗС на первом уровне её обобщения берётся *правило сохранения мантиссы* (ПСМ), как коренное свойство чисел определённого типа, объединяющее их в единое золотое семейство. ПСМ приводит к уравнению

$$x^2 - mx - 1 = 0$$

с положительными целочисленными значениями множителя m, минимальное значение которого равно 1. Тем самым, золотая константа ϕ оказывается выделенной в бесконечном семействе чисел ϕ_m, (m = 1, 2, … k, …), обладающих целым набором одинаковых свойств, иногда неверно приписываемых лишь константе ϕ.

37. Переход от квадратного уравнения к *цепной дроби*

$$\phi_m = [m\,;\, m, \ldots] \equiv m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \ddots}}$$

даёт решающий аргумент для признания уникальности числа ϕ. В простейшем случае m = 1 имеем составленную из одних единиц цепную дробь, сходящуюся к числу ϕ, и это единственное иррациональное число, которое может быть записано с использованием лишь одного графического знака – единицы. Такая запись будет одинаковой во всех системах счисления, включая двоичную с минимальной кодировкой посредством знаков 0, 1; это наиболее медленно сходящаяся к своему пределу цепная дробь, а потому ϕ – число наиболее сильно сопротивляющееся “рационализации”, то есть приближённой записи в виде отношения двух целых чисел. Обычно говорят, что это *самое иррациональное число* континуума. Содержательно данное свойство можно толковать как *предельную сопротивляемость изменению*, как *максимальную сохраняемость, устойчивость, стабильность*.

38. На данном уровне, как и во всех допустимых случаях обобщения ТЗС, имеет место вовсе не обобщение конкретного числа – константы ϕ, лишённое всякого смысла, а обобщение *принципа*, связанного с её удивительными, хотя и не уникальными особенностями. ПСМ, или сохранение дробной части числа, непосредственно касается понятия обратной величины, относящегося к узкому кругу основных в теории чисел, хотя бы потому, что оно необходимо для сведения операции деления к операции умножения на обратную величину.

39. Многие формулы, справедливые для золотой константы, чисел Фибоначчи и Люка, *остаются справедливыми* для чисел семейства ϕ_m и соответствующих числовых последовательностей $\{F_{mn}\}$, которые по-прежнему могут строиться по правилу третьего члена, но уже с множителем m:

$$u_{n+2} = mu_{n+1} + u_n$$

Важной, второй по значимости после ПСМ особенностью данного семейства можно считать возможность выражения любого целого числа в виде *конечной* суммы степеней иррациональных чисел ϕ_m. В силу этого основанием системы счисления может служить бесконечная последовательность чисел $\{F_{mn}\}$. Однако лишь в случае порождаемой константой ϕ последовательности Фибоначчи, для которой параметр m = 1 и правило третьего члена имеет максимально упрощённую форму, возможна такая запись числа в виде суммы, куда каждый член последовательности входит не более одного раза.

40. Преимущества случая m = 1 обнаруживаются при рассмотрении логарифмической спирали, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r = a\mathrm{e}^{k\theta}$, или $\ln(r/a) = k\theta$. При любом значении параметра k спираль представляет собой соединение свойств функций экспоненты и логарифма, ФМК, арифметической и геометрической прогрессий, законов сохранения, в частности угла φ между радиусом-вектором и касательной, однако отмеченность золотой спирали (φ ≈ 73°) видна не сразу. Дело в том, что она не только равноугольная, как любая другая логарифмическая спираль, но и *равносторонняя*. Этому соответствует легко обнаруживаемое при построении спирали известными способами равенство $\phi - 1/\phi = 1$, другими словами, ПСМ для минимального значения m = 1.

41. Следующий уровень обобщения связан с пониманием ТЗС как приложения *теории ЛМФ* (логика & математика + физика). С точки зрения этой теории число ϕ – математическая константа второго ранга, непосредственно выражаемая посредством материнских функций экспоненты и логарифма через ФМК формулами

$$\phi = e^{\operatorname{arsh}(1/2)},\ \ln \phi = \operatorname{arsh}(1/2)$$

Это форма представления золотого числа, утверждающая её принадлежность к множеству чисел типа $\{e^{\operatorname{arsh} z}\}$, где z любое число. Если ограничиться положительными или отрицательными рациональными значениями $z = m/k$, получим семейство "золотых" в более узком смысле чисел типа $\{\phi_{mk}\} = \{e^{\operatorname{arsh}(m/k)}\}$. Последовательное раскрытие свойств и характеристик экспоненты такого типа равнозначно построению обобщённой (до уровня рациональных чисел) теории золотого сечения, частным случаем которой является теория константы ϕ, соответствующая значениям $m = 1$, $k = 2$.

42. Константа

$\tau = \ln \phi = \operatorname{arsh}(1/2) = 0{,}48121\ 18250\ldots$

появляется при решении некоторых неопределённых, определённых, включая несобственные, интегралов, содержащих или не содержащих под знаком интеграла константу ϕ. Это имеет место и для определённых значений параметров z и m обратных эллиптических функций Якоби $sc^{-1}(z, m)$ и $sd^{-1}(z, m)$.

43. Перевод экспоненты в алгебраическую форму приводит в действительных переменных к *квадратному уравнению* типа

$x^2 - ax - 1 = 0$,

где $a = 2m/k$ произвольное рациональное число. В частном случае целочисленного a, то есть когда $2/k = 1$, имеем семейство чисел $\{\phi_m\}$ как подмножество семейства $\{\phi_{mk}\}$. В экспоненциальной форме это числа типа $\phi_{m2} = e^{\operatorname{arsh}(m/2)}$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, для которых выполняется ПСМ, которое может быть записано в виде

$\phi_{m2} - 1/\phi_{m2} = m$.

44. Запись экспоненты $e^{\operatorname{arsh}(m/k)}$ в виде *непрерывной дроби* позволяет генерировать бесконечное множество последовательностей, включая ряд Фибоначчи, соотносящихся с различными целочисленными значениями переменных m и k. Для всех подобных последовательностей и их комбинаций с исключительно высокой точностью и во всех системах счисления с основанием $a \geq 2$ соблюдается логарифмический закон распределения первого знака – *обобщённый закон Бенфорда*. Этот закон свидетельствует о том, что между материнскими функциями и целыми числами существуют тонкие связи, формальная структура которых инвариантна относительно перехода от одной системы счисления к другой.

45. Для разных последовательностей, обусловленных экспонентой типа $e^{\operatorname{arsh}(m/2)}$, а также многих их комбинаций строгое выполнение *обобщённого закона Бенфорда* обеспечивается определённой *периодичностью* в расположении знаков n-ичной, в частности десятичной, системы счисления. Благодаря малым периодам закон первого знака выполняется уже для очень малых, состоящих всего из нескольких десятков членов отрезков бесконечной числовой последовательности, а наличие больших квазипериодов даёт, помимо прочего, знание первого знака даже для очень далеко отстоящих от начала ряда членов.

46. Числа семейства ϕ_{mk} относятся к классу величин, чья мера множества нуль, потому формула Леви из первой главы не приводит для них к константе Хинчина–Леви $\dfrac{\pi^2}{12\ln 2}$. Константа для любого числа, в точности принадлежащего множеству $e^{\pm n \operatorname{arsh}(m/2)}$ (n и m целые положительные числа), это число семейства ϕ_{mk} либо его степень. При этом различаются три основных случая: $n = \pm 1, \pm 2$; $n > 2$ и чётно; $n > 2$ и нечётно. Константой же для любого числа типа $-\phi_{m2}$ является число $\phi_{(m+1)2}$, отсюда предел Леви для золотого числа есть константа да Винчи.

47. Периодичность, известная для приведённого к однозначному виду ряда Фибоначчи, наблюдается и для других генерируемых экспонентой $e^{\operatorname{arsh}(m/2)}$ рядов и их произвольных комбинаций. Это своеобразный синтез некоторых свойств экспоненты и особенностей позиционной n-ичной системы счисления. В десятичной системе наименьший приведённый период состоит из одного, а наибольший из 24 элементов, сумма которых неизменно равна 117; период из 24 членов строится по (приведённому) правилу третьего члена. С десятичной системой связана и *периодичность периода*, то есть повторяемость одного и того же приведённого периода через каждые 9 номеров параметра m.

48. Как правило, в любой строящейся по определённому алгоритму последовательности констант по-настоящему значимы лишь начальные члены ряда. В обоих семействах ϕ_m и ϕ_{mk} второй по теоретической и практической важности константой вправе считаться число $\phi_2 = 1 + \sqrt{2} \equiv \phi_{2/2} = e^{\operatorname{arsh}(2/2)} \equiv e^{\operatorname{arsh} 1}$, называемое нами *константой да Винчи*. Её двумерным геометрическим символом служит восьмиугольная звезда, вписываемая в правильный восьмиугольник, досконально исследованный, с использованием в архитектуре, Леонардо да Винчи. Аналогом последовательности Фибоначчи является строящаяся по модифицированному правилу третьего члена *последовательность Пелля*.

49. Через константу ϕ_2 выражаются основные параметры трёх архимедовых и трёх дуальных им каталановых тел, в какой-то степени трёх из пяти платоновых тел, а также различных двумерных фигур и трёхмерных тел. Есть и фракталы с выражаемой через логарифм ϕ_2 размерностью Хаусдорфа и возможность заполнения плоскости двумя различными способами посредством восьмиугольников и квадратов. Для логарифмической спирали с константой да Винчи постоянный угол между радиусом-вектором и касательной $\varphi_2 \approx 60{,}70322°$, что меньше аналогичного угла $\varphi \approx 73°$ для константы ϕ, а значит, она закручена меньше золотой.

50. Константа да Винчи и её “спутник” константа Пифагора $\sqrt{2}$ имеют множество применений в математике и её приложениях, появляются при решении задач теоретического и прикладного значения. Кроме формул и соотношений, полученных различными авторами, в том числе Рамануджаном, немало примеров тонких, нетривиальных отношений между золотым числом и константой да Винчи. Особенно интересны примеры, в которых константы ϕ, ϕ_2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ фигурируют в одной связке с ФМК, объединяемые в одно решение посредством материнских функций экспоненты и логарифма или производных от них прямых и обратных тригонометрических и гиперболических функций.

51. Третий и последний в настоящей работе уровень обобщения ТЗС основан на теории последовательностей Люка $\{U_n(P, Q)\}$ и $\{V_n(P, Q)\}$, частными случаями которой являются ряды и полиномы Фибоначчи и Люка. В характеристическом уравнении

$$x^2 - Px + Q = 0$$

для U_n и V_n начальными множителями P и Q могут быть как целые числа, так и переменные. В первом случае рекурсия приводит к числовым последовательностям, в частности Фибоначчи, Люка и Пелля, во втором – полиномам Фибоначчи и Люка.

52. Обозначаемая через $T(\phi_{PQ})$ теория последовательностей Люка является математической моделью более высокого уровня общности, чем ТЗС – “золотой домен” и основанная на ПСМ теория семейства констант ϕ_m. Что же касается теории семейства констант ϕ_{mk}, в ней нет полиномов, а множитель Q равен 1, но в то же время множитель P не обязательно целое число. Как и в случае двух других обобщений, большинство формул $T(\phi_{PQ})$ формально отличаются от формул ТЗС лишь индексами, относящимися к значениям переменных параметров, хотя охватываемая ими числовая область намного шире.

53. Достаточно точным ориентиром для поиска бесконечных множеств ϕ_{PQ} для заданной пары параметров P и Q служит квадратный корень из дискриминанта характеристического уравнения последовательностей Люка U_n и V_n. Для золотой константы ($P = 1$, $Q = -1$) он равен $\sqrt{5} = 2\phi - 1$, для константы да Винчи ($P = 2$, $Q = -1$) это $\sqrt{2} = \phi_2 - 1$, а если, допустим, $P = 11$, $Q = 26$, тогда имеем $\sqrt{17} = 2\phi_{11,26} - 11$. Согласно полученным формулам, любой член семейства ϕ_{PQ} обобщённой модели $T(\phi_{PQ})$ существует в бесконечном множестве модификаций и в бесконечных подмножествах.

54. Хотя и принято искать истоки ЗС в глубокой древности, первое, не вполне, впрочем, надёжное, свидетельство Геродота о применении принципа золотого сечения в форме прямоугольного треугольника в сечении пирамиды Хеопса относится к середине V века до н.э. Несколько позже ПЗС под именем “пропорция” встречается в *Тимее*, при изложении пифагорейско-платоновской космологии. В построении согласованного с абсолютной точностью математического каркаса мироздания демиург Платона использует золотые *икосаэдр* и *додекаэдр*, причём последний понимается как геометрический символ Вселенной.

55. В тринадцати книгах *Начал* Евклида *деление в крайнем и среднем отношении* не выделено в качестве особого метода построения геометрических объектов, но применяется десятки раз в различных книгах. Определение 3 в Книге 6 (целое к большему, как большее к меньшему) это классика ЗС, которая, с одной стороны, даёт ёмкое, понятное всем и каждому определение золотой пропорции, с другой – ограничивает понимание ЗС геометрическими образами. Золотой константы, как числовой величины, в *Началах* нет; неявно, как точка деления отрезка, она присутствует в различных построениях, используемых, помимо прочего, при построении платоновых тел, включая золотые икосаэдр и додекаэдр. Есть мнение (“гипотеза Прокла”), что именно построение пяти составленных из однотипных многоугольников тел и есть конечная цель, “сверхзадача” всего энциклопедического трактата Евклида, фактически написанного в виде всеобъемлющего учебника геометрии.

56. С закатом греко-римской цивилизации интерес к ЗС упал до минимума и стал медленно возрождаться в Европе уже в эпоху позднего средневековья. В наши дни золотая пропорция, константа ϕ, её известное уже с точностью до триллиона десятичных знаков численное значение и дающая в пределе это число последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … воспринимаются как нечто единое, связанное одно с другим неразрывными узами. Однако так было не всегда. Греческая математика имела дело с золотым делением

отрезков, а числа, известные сейчас как числа Фибоначчи, впервые появились в Европе в задаче о размножении кроликов лишь в начале XIII века в трактате *Liber abaci Леонардо Пизанского* по прозвищу *Фибоначчи*. Между тем, за тысячу с лишним лет до этого они уже были частично открыты в трактате о стихосложении индийским математиком *Пингала*, а в XII в. исследовались индийскими математиками *Гопала* и *Хемачандра*.

57. Первое в истории произведение, целиком посвящённое *Божественной пропорции* (*De divina proportione*), издано в начале XVI века в Венеции. В основу трактата, написанного францисканским монахом и математиком *Лукой Пачоли*, легли *Начала* Евклида, *Книга Абака* Леонардо Пизанского, *Тимей* Платона, а также *Книжица о пяти правильных телах* математика Пьеро делла Франческа. В иллюстрированной рисунками Леонардо да Винчи книге Пачоли рассматривается множество геометрических объектов, в том числе платоновы и архимедовы тела. В этой работе о *величайшей гармонии*, понимаемой в духе платоновской космологии, пифагорейского учения о гармонии и математического совершенства космоса, *божественной пропорции* приписывается тринадцать, по числу Иисуса Христа и двенадцати апостолов, замечательных свойств.

58. Вклад Леонардо да Винчи в историю ЗС рисунками для трактата Луки Пачоли едва ли исчерпывается, хотя абсолютно достоверных источников на этот счёт не найдено. Полагают, что именно он впервые использовал латинское *Sectio aurea*, хотя другие считают, что термин *Goldener Schnitt* впервые употребил в 1835 году немецкий математик Мартин Ом. Знаменитый рисунок идеальных пропорций мужчины сделан Леонардо по мотивам трактата *Десять книг об архитектуре* Витрувия, где о ЗС нет ни слова, однако совершенный человек Витрувия−Леонардо слишком хорошо вписывается в фигуры золотого сечения, чтобы считать такое соответствие случайным. Леонардо досконально исследовал, с применением в архитектуре, правильный восьмиугольник и вписанную в него восьмиугольную звезду, что даёт достаточно веские основания называть константу $\phi_2 = \phi_{11} = 1 + \sqrt{2}$ его именем.

59. Широко распространённое мнение об использовании ПЗС *Альбрехтом Дюрером* базируется на нескольких фактах его творческий биографии. Дюрер является приверженцем идеи Витрувия об идеальной гармонии и соразмерности, воплощаемой в пропорциях хорошо сложенного человека. В поисках такой гармонии он расчленяет человеческую фигуру на множество фрагментов, а современный анализ сделанных им рисунков выявляет, хотя и не бесспорно, константы ϕ и ϕ_{11} в *пропорциях отдельных частей фигуры*. Дюрер, наряду с другими мастерами его времени, является автором близкого к современному классического шрифта, который косвенно связан с использованием констант ϕ, ϕ_{11} и с некоторой натяжкой может считаться серебряно-золотым. Наконец, Дюрер проявлял большой интерес к платоновым телам и полуправильным многогранникам; один из них, по-видимому, усечённый ромбоэдр с золотыми пропорциями, изображён на известной гравюре *Меланхолия*.

60. *Иоганну Кеплеру* принадлежит крылатая фраза о двух сокровищах геометрии – теореме Пифагора и делении отрезка в крайнем и среднем отношении. Будучи, как и многие другие известные исследователи, сторонником античной греческой космологии, Кеплер строит картину Солнечной системы в духе пифагорейской гармонии сфер, с использованием платоновых тел. Орбиты шести планет располагаются на сферах, которые вписываются и описываются вокруг пяти правильных многогранников. При этом додекаэдр платоновского демиурга относится уже не к Вселенной в целом, а к Земле и Марсу.

61. *Кеплер* – одна из немногих культовых фигур в истории ЗС. Его именем назван золотой прямоугольный треугольник, стороны которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{\phi}$, хотя в случае справедливости *гипотезы Геродота* его следовало бы назвать *треугольником Хемиуна*. В 1608 г. Кеплер выявил сходимость последовательности Фибоначчи к золотому числу, хотя есть не вполне бесспорное сведение о том, что впервые такая связь была обнаружена неизвестным автором ещё в начале XVI в. А первое *десятичное приближение* 0,6180340 величины обратной золотой константе, полученное вычислением её составленной из единиц цепной дроби, обнаружено в письме, адресованном Кеплеру его бывшим учителем Михаэлем Местлином. Кеплер фактически сделал серьёзный шаг к *объединению* различных компонентов ТЗС: в его трактате 1611 г. последовательность Фибоначчи фигурирует в одном контексте с божественной пропорцией, золотыми додекаэдром, икосаэдром и пятиугольником.

62. *Пентаграмма*, или вписываемая в правильный пятиугольник звезда, является основным двумерным символом ЗС, исключительно богатым золотыми пропорциями. Вместе с тем, на протяжении всего доступного обозрению исторического периода пентаграмма служила и продолжает служить в качестве одного из наиболее узнаваемых магических знаков, а кроме того, в различных модификациях, она использовалась и широко используется в наши дни в геральдике, в национальной символике самых разных государств. История пентаграммы это прежде всего важнейший фрагмент истории магии и оккультизма, лишь с незначительным математическим и естественнонаучным уклоном, ощущаемым как раз в соотнесённости с золотым сечением.

63. *Магия пентаграммы* зародилась, как считают, пять с половиной тысячелетий назад в Месопотамии и в других частях Древнего мира. Она, возможно, возникла в результате астрономических наблюдений за движением Утренней и Вечерней звезды – планеты Венера и была очень распространена в таких странах, как Египет и Вавилон, где использовалась как оберег от всякого зла, как символ верховной власти и тому подобное. Концы пятиконечной звезды могли обозначать пять направлений в пространстве, астрологически они были связаны с пятью планетами солнечной системы, служили для евреев символом их священного писания – Торы, или Пятикнижия. В Китае пентаграмма ассоциировалась с пятью первоэлементами: Землёй, Металлом, Водой, Деревом и Огнём, пять концов звезды ассоциировались с пятичленной структурой философского учения *У-син*, задающей параметры мироздания. Аналогом китайской пентаграммы является *го-бо-сэй* как символ пяти стихий из древнеяпонской эзотерической космологии *оммёдо*, приверженцем которой был средневековый японский мистик *Абэ-но Сэймэй*.

64. С особым пиететом относились к пентаграмме *пифагорейцы*. Для них это отличительный знак принадлежности к ордену и отражение мировой гармонии, математического совершенства Вселенной, совершенная геометрическая фигура, исследуемая в связи с делением в крайнем и среднем отношении, и символ здоровья. Пентаграмму пифагорейцы называли также *пентальфой* (“пять букв альфа”), а связанное с пятью вершинами пятиконечной звезды число 5 соотносилось, как и в китайском У-син, с пятью первоэлементами. Изображения пентаграммы нередко встречаются на монетах древней Греции и Македонии, в том числе на монетах эпохи Александра Македонского.

65. В христианской традиции пентаграмма символизирует *пять ран Иисуса*, сама же пятёрка представляет собой *сумму Троицы* (Отец, Сын и Святой Дух) и *двойственной природы Христа* (божественной и человеческой). *Повёрнутую пентаграмму* включил в свою печать Константин Великий, при котором христианство стало господствующей религией Римский империи, а *перевёрнутая пентаграмма*, обычно символизирующая связь божественного с земным, использовалась и в раннем христианстве, и позже. Перевёрнутая звезда встречается в русской церковной архитектуре и иконографии, в частности она изображена на известной иконе *Преображение Господне* Андрея Рублёва. Во времена рыцарства концы звезды символизировали пять рыцарских достоинств; большими любителями пентаграммы были тамплиеры и один из рыцарей круглого стола – племянник короля Артура, сэр Гавейн.

66. Как отличительный знак либо широко применяемый в оккультной практике символ, как обладающий мистической силой амулет, как магический талисман пентаграмма, её модификация – пятиконечная звезда использовались многими религиозными организациями, тайными братствами, орденами и оккультными сообществами. Среди них *розенкрейцеры*, *масоны*, *мартинисты*, *орден Восточной звезды*, *мормоны*, *шрайнеры*, *Герметический Орден Золотой Зари,* орден *Избранных Коэнов Вселенной, телемиты, Орден восточных тамплиеров, Философское общество последователей Розенкрейца, Международная Школа Золотого Розенкрейца,* последователи *Веры Бахаи, виккане* и другие, менее известные объединения преимущественно эзотерического толка. В используемух для гадания *картах Таро* пентаграммы, *пентакли* составляют четвёртую часть младших аркан и по крайней мере шестую часть всей колоды. Пятиконечная звезда встречается и в старших арканах под номером 15, изредка под первым номером, а в отдельных случаях под номером 7.

67. Пентаграмма, обычно в форме *пятиконечной звезды*, нашла широкое применение в символике различных государств, в геральдике, нумизматике, в форме орденов, медалей, знаков отличия, ювелирных изделий, амулетов, талисманов, в бижутерии, одежде, детских игрушках, как элемент украшения архитектурных сооружений, интерьеров зданий, новогодних ёлок, в оформлении художественных изделий, предметов быта и тому подобное. Пентаграммы в разных модификациях, в том числе стилизованные под розу, нередко встречаются в геральдике, например на гербах английских королевских домов Йорков, Ланкастеров и Тюдоров, влиятельного графского рода Розенбергов, дворянского рода Вашингтонов. И сегодня примерно каждый четвёртый среди двух с половиной сотен государственных флагов, каждый четвёртый государственный герб (или эмблема) содержит в себе по крайней мере одну пятиконечную звезду. Звезда или звёзды на различных флагах и других носителях государственной символики могут быть разных цветов, размеров и по-разному толковаться.

68. Известно, возможно, ещё со времен шумеров, что планета Венера “чертит” на небе пентаграмму, с чем не в последнюю очередь, очевидно, связаны распространённый в древнем мире культ *Утренней звезды* и возникновение магии пентаграммы. Но пентаграммы ищут и на земной поверхности: надо просто соединить прямыми линиями пять расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга точек окружности. Требуется только, чтобы в вершинах образованной таким образом пентаграммы располагались памятники особой значимости, культовые сооружения или же явно выделенные в каком-то другом отношении точки земной поверхности. Среди претендентов на подобную роль наиболее популярны пентаграммы *Вашингтона*, *Лангедока*, *Карлсруэ*, *Тампере*, *нацистских концлагерей*, а также пентаграммы, связанные с *прецессиями земной оси* и *северного магнитного полюса*.

69. Перевёрнутая пентаграмма, которая на протяжении нескольких тысячелетий была символом доброго начала, с середины XIX века, с подачи известного мага Элифаса Леви стала приобретать зловещий сатанинский оттенок. В перевёрнутую пентаграмму стал вписываться уже не витрувианский человек Леонардо, а чаще всего похожая на козлиную голова демона. В *печати Бафомета* – таинственного языческого божества, которому якобы поклонялись тамплиеры, в перевёрнутую пентаграмму вписана козлиная голова античного божества Пана. Именно эта, лишь слегка изменённая печать позже стала логотипом официально зарегистрированной *Церкви сатаны*, упорно отрицающей всякую связь с дьяволопоклонничеством.

70. В те самые время, когда Элифас Леви предложил своё ставшее со временем почти общепринятым понимание перевёрнутой пентаграммы, в Европе стал возрождаться полузабытый культ золотого сечения. Адольфом Цейзингом была опубликована фактически вторая в истории книга, целиком посвященная ЗС. Предпочитая *Goldener Schnitt* Мартина Ома *De divina proportione* Луки Пачоли, философ, математик и психолог Цейзинг рассматривает ПЗС как *универсальное эстетическое начало*. Либо в форме последовательности Фибоначчи, либо непосредственно как деление в крайнем и среднем отношении под действие *Goldener Schnitt* подпадают мужские и женские фигуры, животные, птичьи яйца, растения, греческие статуи, архитектурные сооружения разных эпох, планеты и астероиды, геометрические фигуры, платоновы тела и другие многогранники, минералы, звуковые аккорды, стихотворные размеры. В работе Цейзинга много философских рассуждений, измерений, расчётов, отражённых в рисунках и таблицах.

71. Под понимание ЗС как универсальной пропорции, основного морфологического закона природы и искусства немецкий психолог *Густав Фехнер* попытался подвести *психофизическую основу*. Он измерял картинные рамы, книги, окна, игральные карты, другие предметы прямоугольной формы и даже могильные кресты и каждый раз статистически обнаруживал близость отношений измеряемых длин сторон к золотой пропорции. Фехнер также проводил опыты с прямоугольниками и эллипсами, предлагая людям разного возраста и пола выбрать фигуры, которые их в наибольшей степени удовлетворяют и не удовлетворяют. Однако доказать опытами Фехнера некую изначальную природную склонность человека к золотому сечению, судя по всему, не удалось, и вопрос остаётся открытым.

72. Более продуктивным оказалось исследование *филлотаксиса* – одного из немногих достоверных случаев обнаружения ПЗС в природе. Явление филлотаксиса как упорядоченное определённым образом расположение листьев растений, известное ещё в древней Греции и Риме, исследовалось многими и в разные периоды истории. Но лишь относительно недавно была создана достаточно убедительная математическая модель этого природного явления. Универсальным законом природы филлотаксис считаться не может, но там, где он наблюдается, адекватное математическое описание спирального расположения листьев достигается использованием *принципа минимума*, *закона сохранения формы* и *последовательности Фибоначчи*.

73. В достаточно простых на вид геометрических объектах могут быть сокрыты очень непростые числовые закономерности, и одним из характерных примеров подобного рода является правильный *икосаэдр*. Наряду с другими правильными многогранниками, он почти всегда был в поле зрения многих авторов, и уже в конце XIX века могло показаться, что его числовые особенности исследованы вдоль и поперёк и ничего принципиально нового открыть не удастся. Однако в математике всегда есть место сюрпризам. Сторонник *гипотезы Прокла* немецкий математик *Феликс Клейн*, проявляя большой интерес к платоновым телам, рассматривал икосаэдр как узловой математический объект, лежащий в основе целого ряда математических теорий. Используя особенности золотой конструкции икосаэдра, он решил задачу о корнях уравнения пятой степени.

74. Помимо правильных икосаэдра и додекаэдра, имеется немало их производных, в частности *усечённый икосаэдр*, поверхность которого содержит 12 пятиугольников и 20 шестиугольников, 32 грани, 90 рёбер и 60 вершин. Это золотое архимедово тело, реализуемое в природе в форме состоящей из 60 атомов молекулы C_{60}, являющейся одной из аллотропных модификацией углерода. Молекула C_{60}, называемая также бакминстерфуллереном – в честь американского архитектора Бакминстера Фуллера, применявшего правильные пяти- и шестиугольники для постройки куполов зданий, считается одним из немногих, с высокой степенью надёжности установленных фактов реализации ПЗС в природе.

75. *Икосаэдр* и *додекаэдр* значимы не только в космологии пифагорейцев и Платона, модели Солнечной системы Кеплера и математике Клейна, но и в теоретических построениях более позднего периода. В виде деформированного додекаэдра представлял себе Землю Пуанкаре, а выдвинутая ещё в начале XIX в. икосаэдро-додекаэдрическая модель Земли имеет немало сторонников и в наши дни. Схожая модель, наряду с золотой константой и числами Фибоначчи, используется в объяснении явлений живой природы, в частности, строения и структуры молекулы ДНК и некоторых вирусов. Математический анализ данных, полученных посредством космического зонда, привёл некоторых исследователей к выводу о том, что Вселенная имеет форму додекаэдрического пространства Пуанкаре.

76. Не обошла вниманием платоновы тела, включая додекаэдр и икосаэдр, и *сакральная геометрия*, определяемая как совокупность религиозных и мифологических представлений об упорядоченности, гармонии и пропорциональности геометрических форм, лежащих в основе жизни. Выдавая желаемое за действительное, адепты сакральной геометрии пытаются, например, в линиях куба Метатрона разглядеть золотые тела, что не подтверждается конкретным анализом этих геометрических объектов.

77. Российский архитектор *Герман Гримм* был одним из тех, кто считал, что основанную на золотом делении теорию пропорциональности следует признать основой архитектурной пропорциональности вообще. В подтверждение этого, далеко не всеми признаваемого тезиса он перечисляет четырнадцать удивительных свойств золотой пропорции. В основе рассуждений Гримма фактически лежит идея уникальности золотого деления целого на неравные части, поскольку только при таком делении процесс может быть продолжен с сохранением первоначальных характеристик. В качестве примеров использования ПЗС в архитектуре Гримм приводит анализ пропорций известных сооружений, в том числе Парфенона, собора Святого Петра в Риме, Смольного собора в Петербурге.

78. Золотая константа и её обратная величина, после “воссоединения” с последовательностью Фибоначчи и обретения десятичных значений, были обозначены в начале XX века символами Φ и φ, которые до сих пор в обороте, хотя сейчас чаще пользуются символами ϕ и ϕ^{-1}. Обозначения Φ и φ введены английским искусствоведом и писателем *Теодором Куком*, издавшим книгу, в которой *золотое сечение* (*golden section*) впервые соотносится с константой Φ = 1,618…, а не её обратной величиной φ = 0,61803…, как это было принято до него. В капитальной, с множеством иллюстраций монографии Кука рассматриваются всевозможные спирали в природе и искусстве. Золотая логарифмическая спираль у Кука на первом месте, причём исследованный им моллюск *наутилус*, которого принято считать живым воплощением золотой спирали и вообще символом применения ПЗС в природе, изображён на переплёте более поздних изданий книги Кука.

79. Изображение спирали встречается и в изданиях капитальной монографии *О форме и росте* шотландского биолога и математика *Д’Арси Томпсона*, сторонника применения математических методов для описания формы природных явлений. Математика, по мнению Томпсона, не может вывести формулу для описания сложных организмов, но язык математики может быть использован для описания *формы* раковины улитки, контура листа, структуры скелета и тому подобного. Математический анализ спиралей, по которым происходит естественный рост природных организмов, занимает центральное место в его работе. ЗС, числа Фибоначчи, додекаэдр и икосаэдр в книге редко упоминаются, в большом разделе о логарифмических спиралях золотой спирали нет совсем, а отношение автора к существующим в то время математическим моделям филлотаксиса более чем скептическое. Тем не менее, книга Томпсона нередко упоминается среди работ по ЗС, что, очевидно, связано с сохранением общей направленности исследования его последователями, но с усовершенствованием математических методов исследования, уточнением базы эмпирических данных, а в итоге – с изменёнными конечными результатами и выводами, касающимися и ЗС.

80. Изучая различные памятники греческой архитектуры, американский художник и искусствовед *Джей Хэмбидж* сформулировал теорию *Динамической симметрии*, в которой особая роль принадлежит золотой константе, её многочисленным производным и сходящейся к ней последовательности чисел, отличных от чисел Фибоначчи. Принципы динамической симметрии, характерные для искусства древнего Египта позднего периода и перекочевавшие затем в Грецию, Хэмбидж обнаруживает в строении человека и растений. Динамическую симметрию он отличает от симметрии статической, являющейся её частным случаем, характерным для искусства Египта раннего периода и искусства многих стран. Помимо непосредственной связи с золотой константой и её производными, динамическая симметрия, начиная с $\sqrt{2}$, относится и к некоторым квадратным корням, которые могут быть построены внутри и вне квадрата, причём $\sqrt{5}$ выделен и здесь. Реализацию принципов динамической симметрии Хэмбидж, а позже убеждённый сторонник его идей, хранитель Музея искусств в Бостоне *Лейси Каски*, показывают на множестве произведений египетского и греческого искусства.

81. Умение строить математические модели явлений природы и общества, позволяющие делать правильные числовые прогнозы, относится к числу высших достижений человеческого разума. Такие модели легче удаются и более продуктивны в науках о природе, чем в общественных науках, где слишком много изменчивых параметров и трудноуловимых факторов, существенно влияющих на общую картину. Тем не менее, поиск доведённых до уровня числовых прогнозов закономерностей общественного развития характерен для научного познания, и одной из попыток подобного рода является *Волновой принцип* американского финансиста *Ральфа Эллиотта*. Исследуя поведение рынка, графики колебаний цен на фондовых рынках, он пришёл к убеждению, что открыл неизвестную ранее закономерность в поведении цен, основанную на числах Фибоначчи. Имелся в виду вселенский закон цикличности фрактального типа, которому подчинена и человеческая деятельность и на основе которого можно делать экономические предсказания, даже если причина происходящих процессов неясна. Теорию Эллиотта можно расценивать

как попытку применения ПЗС, в форме последовательности Фибоначчи и с использованием константы ϕ, в сфере экономики. Делать, однако, сбывающиеся с достаточной точностью краткосрочные и долгосрочные экономические прогнозы на основе *Волнового принципа*, похоже, не удаётся.

82. Книга, написанная в 1919 г. немецким математиком *Генрихом Тимердингом*, до сих пор популярна и нередко цитируется. Эту небольшую по объёму книгу можно считать чем-то вроде введения в элементарную теорию ЗС, но с авторским словом, в частности рассуждениями об основаниях ЗС, которые рассматриваются с точки эстетики и психологии. Сетуя на то, что железная логика *Начал* Евклида принизила роль золотого деления в геометрии, Тимердинг использует пентаграмму для фактического построения ТЗС. В книге пересказывается та часть космологии Платона, которая связана с ЗС; избегая категорических суждений и однозначных оценок, автор обсуждает целый ряд интересных и современному читателю вопросов. Компактное изложение, изящное построение элементарной теории ЗС на основе пентаграммы, а более всего анализ приложений ЗС в эстетике и в природе, в пропорциях человеческого тела, растениях, психологии и изобразительном искусстве предопределил успех книги Тимердинга.

83. Теория модулора известного архитектора *Ле Корбюзье* является своеобразным продолжением поисков идеальных пропорций таких авторов, как Витрувий, Леонардо да Винчи и Дюрер. Будучи горячим любителем ЗС и придерживаясь взглядов на его роль в искусстве и природе, близких к позиции Цейзинга, ле Корбюзье не случайно остановил свой выбор на принципе золотого сечения в форме правила *третьего члена*. Именно по этому правилу строятся красная и синяя шкалы его *Модулора II*, где в явном виде нет ни золотой константы, ни чисел Фибоначчи. Но поскольку, независимо от выбора начальных членов, любая последовательность, в которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, приводит к последовательности чисел Фибоначчи, числа F_n и константа ϕ здесь всё же неявно присутствуют. Можно, следовательно, говорить о теории модулора Корбюзье как о небесспорной попытке применения ПЗС за пределами математики.

84. Музыковед и пианист *Эмилий Карлович Розенов* считается одним из зачинателей “золотого” *анализа музыкальных и литературных произведений*. Он полагал, что ЗС должно устанавливать в музыкальном произведении изящное, соразмерное отношение между целым и его частями, совмещаться с кульминационными эффектами и направлять внимание слушателя на наиболее важные для автора мысли. По мнению Розенова, математический анализ выдающихся музыкальных произведений не только свидетельствует о наличии в них ЗС, но позволяет проникнуть в творческую лабораторию композитора и судить о характерных особенностях его музыкального гения. Розенов анализирует также литературные произведения многих известных авторов, придерживаясь идеи о заложенной в человеке природной предрасположенности к золотому сечению.

85. Идея применимости ЗС как к пространственным, так и временным явлениям близка композитору и учёному *Леониду Леонидовичу Сабанееву*. Продолжая линию Э.К. Розенова, он исследовал 1770 музыкальных произведений и обнаружил ЗС примерно в ¾ из них, а всего наблюдалось 3275 случаев применения ЗС, присутствующего почти во всех произведениях великих композиторов. При этом Сабанеев считал, что в музыкальных произведениях обычно имеется по меньшей мере два ЗС – одно от начала, другое от конца. В отношении литературных работ Сабанеев утверждает, что при чтении стиха интонационный “кульминационный пункт” попадает именно на ЗС. Исходя из распространённости ПЗС, он полагал, что следует ожидать проявления этого принципа и в человеческой жизни, и для доказательства выбрал для исследования несколько биографий великих людей из разных областей. Со ссылкой на Авенариуса и Маха он говорит о том, что золотым сечением количество созерцаемых и наблюдаемых отношений сводится к минимуму и тем самым обеспечивается наибольшая лёгкость восприятия.

86. Не обошёл вниманием золотое сечение и *Павел Александрович Флоренский*. Глубокие, обширные знания и острый аналитический ум побуждают его к поиску “общей формулы единства” посредством чистого мышления, с элементами дедуктивного вывода. Ставя вопрос о расчленении целого в пространстве и времени на части, Флоренский считает, что части не могут быть равны, поскольку тогда они неразличимы и взаимозаменяемы. А универсальная формула расчленения рождается из *сравнения неравных частей*, при котором возможно *измерение одной части другой*. Следуя идее поиска свободного от всякого произвола деления целого на неравные части, Флоренский цепочкой рассуждений приходит к выводу о безальтернативности золотого деления. Развивая и дополняя концепцию Цейзинга, он полагает, что закон ЗС есть *закон красоты*, который справедлив не только для искусства, но и для природы, а потому это закон *онтологический* и *априорный*. Его нельзя жёстко увязывать с показаниями опыта, поскольку отступления от опыта не свидетельство против закона, а только повод искать причину этих отступлений, признавая их лишь кажущимися. Введение *временного*, наряду с пространственным, *фактора* в понимание ЗС Флоренский использует при анализе трагедий Софокла и для расчленения литургии золотыми делениями.

87. Философ *Алексей Фёдорович Лосев* интересовался ЗС лишь с точки зрения эстетики. Для защиты античной пифагорейско-платоновской космологии, подчиняющейся закону гармонического деления, он привлекает диалектико-материалистическое представление о культуре, полагая, что закон золотого деления должен

быть диалектической необходимостью. Применение этого закона у Платона является, по Лосеву, не столько сознательным и намеренным, сколько интуитивным и непосредственно-эстетическим и вытекает из всей его философской теории. Сохранение воплощаемой в материю идеи означает, что при переходе от большего воплощения к меньшему целое будет так относиться к своей большей части, как большая часть к меньшей. Рассуждая в связи с ЗС о *каноне Поликлета*, использованном в статуе Дорифора, и о вписываемом в пентаграмму своими крайними конечностями Витрувианском человеке, Лосев отмечает почти очевидную огромную эстетическую значимость этого золотого канона.

88. Горячий приверженец ЗС, известный режиссёр театра и кино *Сергей Михайлович Эйзенштейн* с “золотых” позиций анализирует “взятые наугад” отрывки из поэзии Пушкина, картину В.И. Сурикова *Боярыня Морозова* и собственную кинокартину *Броненосец “Потёмкин”*. Анализ всех рассмотренных Эйзенштейном произведений поэзии, живописи и киноискусства даёт ему основание утверждать, что золотое деление в точках кульминационного взлёта, в особых точках композиционного строя – не отвлечённая “игра ума”, а нечто глубоко связанное с содержанием произведения.

89. Явно неравнодушен к золотому сечению, платоновским телам, пятиугольнику и числу 5 художник и писатель *Сальвадор Дали*. Из пятидесяти “магических секретов мастерства”, которыми Дали щедро делится с юными ходужниками, два секрета относятся к золотому сечению. Один из них касается использования ЗС в *перспективе*, и Дали уверяет, что именно в использовании этого метода кроется разгадка того, почему некоторые картины обладают неизъяснимой прелестью, навевая лёгкую грусть. В другом секрете говорится о *циркуле*, при помощи которого, не прибегая к сложным математическим операциям, можно отыскать столько золотых сечений, сколько нужно. Интерес Дали к золотому сечению, вероятно, обусловлен его преклонением перед художниками Ренессанса, перед книгой Пачоли *О сумме арифметики, геометрии, пропорциях и пропорциональности*, которую он считает наиглавнейшей из всех известных трактатов по эстетике. Классическим и наиболее бесспорным примером использования ПЗС Сальвадором Дали считается его полотно *Тайная вечеря*.

90. Большую роль в популяризации чисел Фибоначчи и золотого сечения сыграл математик *Николай Николаевич Воробьёв*. Его небольшая по объёму книга о числах Фибоначчи может и сегодня служить чем-то вроде учебного пособия по элементарной теории ЗС. Появление этой работы, наряду с некоторыми другими событиями 1960-х годов, знаменует очередной всплеск интереса к ЗС и смежным вопросам, который продолжается по сей день. Помимо краткого и доступного изложения ТЗС, в книге Воробьёва рассматривается ряд задач на оптимум из теорий поиска, графов и игр, решение которых неизменно приводит к числам Фибоначчи и константе ϕ.

91. Золотая константа и числа Фибоначчи, обычно записываемые в десятичной или двоичной системах, сами могут служить основанием позиционной системы счисления. В предложенной *Джорджем Бергманом* системе любое действительное число записывается в виде конечной или бесконечной суммы положительных и отрицательных степеней константы ϕ. Особенностью такой системы является возможность представления всякого целого числа в виде *конечной* суммы степеней ϕ. Эта особенность, названная *Z-свойством натуральных чисел*, имеет место и для всех членов семейства чисел ϕ_m, получаемого применением правила сохранения мантиссы, в частности для константы да Винчи.

92. Согласно доказанной в 1972 г. бельгийским математиком *Эдуардом Цекендорфом* теореме, любое положительное целое число может быть единственным образом представлено в виде конечной суммы чисел Фибоначчи так, чтобы не содержать пары соседних чисел F_n и F_{n+1}. Система счисления, основанием которой служит не определённое число, а бесконечная последовательность чисел Фибоначчи, носит имя Цекендорфа и наряду с системой Бергмана используется в вычислительной технике. Полагают, что инки, имеющие развитую для своего времени математику, пришли к пониманию того, что последовательность чисел, носящая сейчас имя Фибоначчи, даёт возможность минимизировать число шагов, необходимых для вычислений определённого типа, и задолго до Цекендорфа фибоначчиева система счисления использовалось ими в некоторых разновидностях абака (юпане).

93. Почти одновременно с появлением книги Н.Н. Воробьёва американский математик *Вернер Хоггатт*, известный своими работами по числам Фибоначчи, Люка и смежным вопросам, вместе с религиозным деятелем и математиком *Альфредом Бруссо* стали выпускать специализированный математический журнал *The Fibonacci Quarterly*, а затем основали ассоциацию *The Fibonacci Association* (FA). Числа Фибоначчи и ЗС стали предметом исследования широкого круга в основном профессиональных математиков, и к сегодняшнему дню в указанном журнале уже издано более 50 томов по четыре номера в каждом, общим объёмом приблизительно в 20 000 страниц.

94. Числа Фибоначчи использовались в решении *десятой проблемы Гильберта*, касающейся нахождения способа, посредством которого возможно установить конечным числом операций разрешимость диофантова уравнения с произвольными и целыми рациональными коэффициентами. Вклад в решение этой задачи внесли несколько американских математиков, а окончательную точку в общем решении задачи в 1970 г.

поставил советский и русский математик *Юрий Владимирович Матиясевич*. При этом он использовал теорему Цекендорфа, исследования *Джулии Робинзон* по диофантовым уравнениям и теорему Воробьёва из его книги, по которой отношение $(F_k/F_l)^2$ будет целым числом только в том случае, если отношение k/l выражается неким числом Фибоначчи F_m.

95. Больший или меньший вклад в исследования, имеющие отношение к ТЗС, внесли многие авторы разных эпох и разных стран. Предположительно, это *Фидий, Страдивари* и *Якоб Бернулли*. Именем Фидия иногда называют золотую константу, обозначаемую к тому же первой буквой его имени, однако нет достоверных сведений об использовании ПЗС в творчестве Фидия, в частности в пропорциях Парфенона. Не вполне надёжны и данные о золотосеченной конструкции скрипок Страдивари. Якоб Бернулли исследовал логарифмические спирали, но неясно, была ли среди них и золотая спираль.

96. Треугольник, составленный из биномиальных коэффициентов и в связи с числами 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, ещё до *Паскаля* изучался математиками многих стран: *Халаюдхи* и *Бхаттотпала* (Индия), ал-Караджи и *Омар Хайям* (Персия), *Чжу Шицзе* и *Ян Хуэй* (Китай), *Петер Апиан* (Германия), *Никколо Тарталья* (Италия). Поэтому в Иране принято название *треугольник Хайяма–Паскаля*, а чаще просто *треугольник Хайяма*, в Китае это *треугольник Яна Хуэя*, в Италии – *треугольник Тарталья*.

97. С именем итальянского и французского математика *Джованни Кассини* связано тождество для трёх последовательных чисел Фибоначчи, позже независимо доказанное шотландцем *Робертом Симсоном*. С формулой Кассини связана головоломка, предложенная англичанином *Льюисом Кэрроллом*. Английский математик французского происхождения *Абрахам де Муавр* открыл формулу, носящую сейчас имя *Жака Бине*, причём у этой, ключевой для понимания связи между константой ϕ и числами Фибоначчи формулы есть и другие независимые авторы: *Даниил Бернулли* и *Леонард Эйлер*. Французский математик *Габриель Ламе* впервые нашёл практическое применение числам Фибоначчи для решения задачи из теории чисел и заложил основу *теории сложности вычислений*, являющейся сегодня разделом теории алгоритмов.

98. Весьма значителен вклад французского математика *Эдуарда Люка*, который впервые употребил выражение *последовательность*, или *ряд*, *Фибоначчи* и впервые обратил внимание на числа, задаваемые рекуррентной последовательностью второго порядка $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, с начальными членами $u_0 = 2$, $u_1 = 1$. Сходящийся к константе ϕ числовой ряд 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, … может считаться гомологом ряда Фибоначчи. Люка пошёл и дальше по пути обобщений, введя линейные рекуррентные последовательности второго порядка $u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1}$, называемые сейчас *последовательностями Люка*, на основе которых было получено обобщение третьего уровня, обозначенное нами символом $T(\phi_{PQ})$.

99. Среди задач на оптимум есть и такие, что приводят к золотой константе и числам Фибоначчи. Одна из них, *игра Витгофа*, известная ещё в древнем Китае как *цзяньшицзы* – собирание камней, исследована в усовершенствованном варианте голландским математиком *Абрахамом Витгофом*. С именем русского и белорусского архитектора *Ивана Владиславовича Жолтовского* связано отношение 528/472, называемое *функцией Жолтовского*. Оно фактически является рациональным приближением к величине $\phi - 1/2 = \sqrt{5}/2$, и Жолтовский утверждал, что дробью 528/472 выражается, например, отношение нижней части дворца Дожей в Венеции к верхней. Ряд работ по ЗС, в том числе книгу *Эстетика пропорций в природе и искусстве* опубликовал румынский математик и дипломат *Матила Гика*. В этой популярной и сегодня книге представлен достаточно большой и разнообразный для своего времени материал. Немецкий художник и архитектор *Вольфганг фон Версин* рассматривал 12 прямоугольных четырёхугольников и треугольников – “ортогонов”, широко применяемых в истории искусства для достижения оптимальной взаимосвязи и упорядоченности элементов композиции. Из них пять представляют собой отношения для золотой константы, по одному – для констант Пифагора и да Винчи. Версин считал, что нет ничего лучше этих пропорций, являющихся “объектами чистой абстракции”.

100. Список лиц, так или иначе причастных к истории золотого сечения с древнейших времён до семидесятых годов XX века, практически необозрим, и очень трудно, чтобы не сказать невозможно, составить безупречную антологию наиболее достойных авторов. Есть, конечно, такие бесспорные кандидатуры, как, например, Кеплер, Цейзинг, Флоренский, но немало и таких культовых фигур, как, скажем, Фидий, чей вклад в историю ЗС традиционно оценивается высоко, но в должной степени не подкреплён надёжными историческими документами. В любом случае, все подобные списки, как бы их составители ни пытались говорить о своей непредвзятости и объективности, достаточно субъективны, как и вообще субъективно всякое суждение об истории, которую каждое новое поколение переписывает на свой лад, а каждый исследователь вносит своё собственное видение, оценку и толкование исторических фактов.

*   *
*

Теорию золотого сечения можно полушутя определить как область математики, в которой непосредственно занято немало профессиональных исследователей, которой забавляется армия энтузиастов занимательной математики и значимость которой не признаётся убеждёнными скептиками. Если же попытаться, хотя бы и субъективно, выделить относящиеся к ТЗС, её истории и возможным обобщениям основные постулаты, ключевые положения, позиции и оценки, то складывается приблизительно такая картина.

Надёжные исторические первоисточники – *Тимей* Платона и деление отрезка в крайнем и среднем отношении в *Началах* Евклида.

Сомнительный первоисточник – заложенный в конструкцию пирамиды Хеопса прямоугольный треугольник с отношением длин сторон, образующих геометрическую прогрессию.

Философско-методологическая предпосылка – закон сохранения.

Теоретическая первооснова – принцип минимума (оптимума, экстремума, наименьшего действия).

Вывод посредством чистого умозрения – идея последовательного деления целого на неравные части, с сохранением первоначальных характеристик и отношений на всех этапах деления.

Место в системе знания – составная часть идеи математической теории мировой гармонии, метафорически называемой *математикой гармонии*.

Конструктивное теоретико-числовое начало – рекурсия, экспонента, алгебраическое уравнение, непрерывная дробь, другие, менее важные правила построения математических моделей и алгоритмов.

Центральный числовой элемент ТЗС – константа ϕ с её гомологами.

Явные признаки уникальности константы ϕ – составленная из единиц цепная дробь, теорема Гурвица, начальный член в семействах констант всех обобщённых моделей.

Основные постулаты трёх возможных уровней обобщения – правило сохранения мантиссы, экспоненциальное представление золотой константы, последовательности Люка.

Основные константы обобщённых моделей – золотое число ϕ и константа да Винчи ϕ_{11}.

Наиболее плодотворная сфера исследования – числовые последовательности, частным случаем которых является классический ряд Фибоначчи.

"Высший пилотаж" – связь с фундаментальными математическими константами чисел ϕ и ϕ_{11} и их появление в задачах поиска и на нахождение экстремума.

Наглядная иллюстрация ЗС – геометрические фигуры и тела, включая пентаграмму, золотую логарифмическую спираль, платоновы, архимедовы, каталановы и десятки других менее известных тел, а также золотые фракталы.

Основные геометрические объекты – отрезок золотого сечения, золотые треугольники и четырёхугольник, пятиугольник, пентаграмма, золотая спираль, додекаэдр и икосаэдр.

Узнаваемые символы – витрувианский человек Леонардо да Винчи, раковина наутилуса и головка подсолнечника.

Наиболее достоверные случаи проявления в природе – филлотаксис, квазикристаллы и фуллерены.

Эзотерическая составляющая – магическая история прямой, повёрнутой и перевёрнутой пентаграмм и их модификаций, икосаэдр и додекаэдр в сакральной геометрии.

Именной указатель

Литература

Аракелян Г. [1]*О доказательстве в математике (Методологический анализ)*. Ереван: Изд. АН, 1979

– [2]*Фундаментальные безразмерные величины (Их роль и значение для методологии науки)*. Ереван: Изд. АН, 1981

– [3]*Числа и величины в современной физике*. Ереван: Изд. АН, 1989 http://www.any-book.ru/book/show/id/1364375

– [4]*Числа и величины в современной физике*. Автореф. докт. дисс., СПб., 1992. Библиотека диссертаций http://www.dissers.net/abstract_498729.html

– [5]*О доминанте внутринаучной эволюции физического знания (Физические величины в эволюции физики)*. Synopsys, вып. 4. Ереван: Ноян тапан, 1994, с. 39–52

– [6]*Основания физической теории*. Ереван: Давид, 1997

– [7]*Фундаментальная теория ЛМФ*. Ереван: Лусабац, 2007 http://www.hrantara.com/Monograph.pdf

– – [a]*Предисловие. Введение. В поисках оснований* http://www.hrantara.com/Monograph.Preface.pdf

– – [b]*Глава 1. Логика и формальная математика* www.hrantara.com/Monograph.Ch1.LogMat.pdf

– – [c]*Глава 2. Физическая математика* www.hrantara.com/Monograph.Ch2.PhysMath.pdf

– – [d]*Глава 3. Основания физической теории* www.hrantara.com/Monograph.Ch3.Foundations.pdf

– – [e]*Глава 4. Принцип золотого сечения* www.hrantara.com/Monograph.Ch4.GoldenMean1.pdf

– – [f]*Глава 5. Принцип золотого сечения (продолжение)* www.hrantara.com/Monograph.Ch5.GoldenMean2.pdf

– – [g]*Глава 6. Обобщённая теория золотой пропорции* www.hrantara.com/Monograph.Ch6.GoldenMean3.pdf

– – [h]*Глава 7. Великая константа физики* www.hrantara.com/Monograph.Ch7.Alfa1.pdf

– – [i]*Глава 8. Великая константа физики (окончание)* www.hrantara.com/Monograph.Ch8.Alfa2.pdf

– – [j]*Глава 9. Экстремальные величины. Обобщённые физические законы* www.hrantara.com/Monograph.Ch9.Laws.pdf

– – [k]*Заключение. Теория ЛМФ и её приложения (в тезисной форме)* www.hrantara.com/Monograph.Conclusion.pdf

– – [l]*Дополнение 1. Почему 2? Об изяществе и простоте физических уравнений и формул* www.hrantara.com/Monograph.Addendum1.pdf

– – [m]*Дополнение 2. Четыре беседы с читателем* www.hrantara.com/Monograph.Addendum2.pdf

– – [n]*Приложение Словарь-указатель терминов, условных обозначений и сокращений* www.hrantara.com/Monograph.Vocabulary.pdf

– – [o]*Abstract* www.hrantara.com/Monograph.Abstract.pdf

– [8]*От логических атомов к физическим законам*. Ереван: Лусабац, 2007 http://www.hrantara.com/Book.pdf

– – [a]*Введение* www.hrantara.com/Book.Introduction.pdf

– – [b]*Глава 1. От логических атомов к математическим константам* http://hrantara.com/Book.Chapter1.pdf

– – [c]*Глава 2. От математических констант к основным физическим уравнениям* http://hrantara.com/Book.Chapter2.pdf

– – [d]*Глава 3. От основных уравнений к обобщённым законам* http://hrantara.com/Book.Chapter3.pdf

– [9]*Число 24 в физической теории* http://hrantara.com/Number24.pdf Независимо от автора статья помещена на нескольких российских сайтах под другими названиями:

24 − число природы http://www.info-mica.com/blogs-science/newsnew-3784.html;
http://www.numbernautics.ru/content/category/4/25/62/;

24 как число природы http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161597.htm

– [10]*Новая фундаментальная математическая константа (с точностью до 6 400 000 знаков после запятой)* http://www.hrantara.com/NewConstant2.pdf

– [11]*Об основаниях физической теории*. Вестник Российско-Армянского Университета (серия: гуманитарные и общественные науки). (**7**), №1, 2009, с. 20–34

– [12]*Фундаментальные математические константы как начало всех чисел и новая ФМК*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.16330, 03.02.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161779.htm

– [13]*Границы физического мира*. *Наибольшее число в природе*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.16340, 06.02.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161784.htm

– [14]*Пик "острова стабильности" и принцип золотого сечения*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 16388, 23.02.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161801.htm

– [15]*Теория ЛМФ и принцип золотого сечения*. ***Часть I. Теория ЛМФ***. [a]*Введение*. *Глава 1*. *Логика и формальная математика*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.16694, 30.07.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321208.htm

– – [b]*Глава 2. Физическая математика* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321210.htm

– – [c]*Глава 3. Основания физической теории* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321211.htm

– – [d]*Глава 4. Границы физического мира. Обобщённые физические законы* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321213.htm

– – [e] ***Часть II. Принцип золотого сечения***. *Глава 5. Принцип золотого сечения и числа Фибоначчи* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321227.htm
– – [f] *Глава 6. Принцип золотого сечения в природе и искусстве* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321228.htm
– – [g] *Глава 7. “Золотая” смесь* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321230.htm
– – [h] *Глава 8. Обобщённая теория золотого сечения* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321231.htm
– – [i] *Заключение. Теория ЛМФ и ОТЗС: основные положения, формулы, графики* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321234.htm
– [16] *О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 17064, 06.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/2065-ar.pdf
– [17] *Фундаментальная константа* “ɯ” *в основаниях математики*. В сб: Общественная мысль в современную эпоху, Ереван, Институт философии, социологии и права АН Армении. Изд-во: Европринт, 2011, с. 30–60
– [18] *В поисках фундаментальной теории*. Там же, 2012, с. 55–65

Аристотель. *О небе*. В кн.: Аристотель. Соч. в 4 т., т. 3. М.: Мысль, 1981, с. 263–378

Бафомет. Энциклопедия знаков и символов http://sigils.ru/symbols/baphomet.html

Бекетов А. *Листорасположение*. Энцикл. словарь Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона. СПб.: Брокгауз-Ефрон, 1890–1907 http://dic.academic.ru/dic.nsf/brokgauz_efron/61714/

Библия. Книги священного писания Ветхого и Нового завета. М.: Изд. Московской патриархии, 1992

Блаватская Е.П. *Теософский словарь*. Пер. Е. Инге, С. Белковский. М.: Сфера, 2009

Боднар О. [1] *Динамическая симметрия*. Ин-т прикл. проблем. механики и математики, Львов, 1990
– [2] *Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве*. Львов: Свит, 1994
– [3] *Динамическа я симметрия в природе и архитектуре*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 13656, 14.08.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321053.htm
– [4] *Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 17259, 26.01.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322135.htm

Браун, Дэн. *Утраченный символ*. Пер. Е. Романова, М. Десятова. Изд-во: АСТ, АСТ Москва, Харвест, 2010

Браун М.Б. *Перевёрнутые звёзды на храмах СПД* http://warrax.net/78/pentagramma.html

Бухштаб А.А. *Теория чисел*. М.: Просвещение, 1966

Василенко С.Л. [1] *Математика золотого сечения глазами философа*. Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве, 24.08.2011 http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=38&sm=2
– [2] *Позолоченные балахоны*. Академия Тринитаризма, М.: Эл. № 77-6567, публ. 17121, 19.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322093.htm

Вейль Г. *Симметрия*. М.: Наука, 1968

Вилейтнер Г. *История математики от Декарта до середины XIX столетия*. М.: Наука, 1966

Виленкин Н.Я. *Популярная комбинаторика*. М.: Наука, 1975 http://www.alleng.ru/d/math/math176.htm

Витрувий Поллион Марк. *Десять книг об архитектуре*. М.: Изд. Акад. архитектуры, 1936; (переизд. в серии “Из истории архитектурной мысли”, М.: Едиториал УРСС, 2003)

Владимиров В.Л. *О “родовых признаках” обобщённого и классического уравнений золотого сечения для рекурсий 2-го порядка и 2-й степени*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.17537, 20.06.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321263.htm

Воробьёв Н.Н. *Числа Фибоначчи*. М.: Наука, 1978

Галилей Галилео. *Пробирных дел мастер*. Пер. Ю.А. Данилова, М.: Наука, 1987 http://platonanet.org.ua/load/knigi_po_filosofii/istorija_vozrozhdenie/galileo_galilej_probirnykh_del_master_perev_ju_a_danilova_1987/9-1-0-839

Гарднер М. *Математические новеллы*. Пер. с англ. Ю.А. Данилова под ред. Я.А. Смородинского. М.: Мир, 1974

Геометрия Вашингтона. Вперёд в прошлое. Объективная история человечества http://geolines.ru/publications/HISTORICAL-GEODESY/HISTORICAL-GEODESY_16.html

Геродот. *История. Книга II. Евтерпа*. Пер. и прим. Г.А. Стратановского. Л.: Наука, *п*. **124**, 1972 http://ancientrome.ru/antlitr/t.htm?a=1284916103

Гёте И.В. *Фауст* (Библиотека всемирной литературы, т. 50). М.: Худ. лит., 1969

Гика М. *Эстетика пропорций в природе и искусстве*. М.: Изд. Акад. архитектуры, 1936

Главные масонские символы. Официальный Сайт Великой Ложи России http://www.freemasonry.ru/library/main-masonic-symbols/

Гончаров Н.Ф., Макаров В.А. и **Морозов В.С.** *Карта ИДСЗ и точные координаты узлов* http://www.lachugin.ru/science/idsz1_15.htm

Гржедзельский Ян. *Энергетично-геометрический код природы*. Варшава, 1986

Гросс Д. *Держу пари, что суперсимметрия будет открыта*. Элементы большой науки http://elementy.ru/lib/430285

Дали Сальвадор. *50 секретов магического мастерства*. BookReader http://bookre.org/reader?file=623354

Датировка Рождества Христова http://www.st-nikolas.orthodoxy.ru/news/rozhdestvo_date.html

Девис П. *Случайная Вселенная*. М.: Мир, 1985

Дэникен Эрих фон. *По следам всемогущих богов* http://lib.rus.ec/b/349579/read

Дюрер А. Из трактата “*Руководство к измерению*”. В кн.: А. Дюрер. Дневники, письма, трактаты. Л.; М.: Искусство, 1957, т. 2, с. 41–96 http://www.dkpk.com.ua/1/niov/3/4

Евгения. *Императорский экзорцист* http://zajcev-ushastyj.livejournal.com/272856.html

Евклид. *Начала*. Перевод с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И.Н. Веселовского и М.Я. Выгодского. М.–Л.: ГТТИ, 1948–1950 http://www.math.ru/lib/book/djvu/klassik/euclid48-1.djvu; *Книга XIV*. Там же. М.-Л.: ГТТИ, 1949–51. (Комментарий к книге XIII, с. 297–299) http://www.math.ru/lib/i/395/index.djvu?djvuopts&page=326

Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, т. 1–2. М.: Мир, 1965

Зубов В.П. *Рецензия на книгу М. Гика* “Эстетика пропорций в природе и искусстве”. Архитектура СССР, №5. с. 66–67, 1937. См. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 12965, 15.02.2006 http://trinitas.ru/rus/doc/0232/006a/02320010.htm#ptr-cm1

История использования Символа Бафомета в Церкви Сатаны http://warrax.net/49/baph_history.html

Казаченок Т.Г. *Крылатые латинские изречения*. Минск: Вышэйшая школа, 1993

Картер Б. *Совпадения больших чисел и антропологический принцип в космологии*. В кн.: Космология. Теория и наблюдения. М.: Мир, 1978, с. 369–379

Кац Е.А. *Бенедикт Спиноза и правильный икосаэдр*. Энергия: экономика, техника, экология **1**, 64–66 (2011)
http://www.bgu.ac.il/~keugene/Publications/Popular%20paper/Spinoza%20and%20Platonic%20icosahedron_energia2010.pdf

Кеплер И. *О шестиугольных снежинках*. М.: Наука, 1982

Кисличенко Е. *Розенкрейцеры*. Сб. Петербургское язычество. СПб.: изд-во Апостольский город, 1999
http://anomalniy-mir.ru/absolyutnoe-zlo/rozenkrejcery.html

Клейн Ф. [1]*Лекции о развитии математики в XIX столетии*, т. I. М.: Наука, 1989

– [2]*Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени*. М.: Наука, 1989

Кнут Д. [1]*Искусство программирования, том 1. Основные алгоритмы*. М.: “Вильямс”, 2006 http://padabum.com/d.php?id=2277

– [2]*Искусство программирования,* т. 4, вып. 4 . Генерация всех деревьев. История комбинаторной генерации. М.: “Вильямс”, 2007 http://padabum.com/d.php?id=15279

Коваль А.П., **Коптілов В.В.** *Крилаті вислови в українській літературній мові*. Кіев: Вища школа, 1975

Коксетер Г.С.М. *Введение в геометрию*. М.: Наука, 1966

Колоды Таро http://bros-s.narod.ru/Koloda.html

Косинов Н.В. *Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm

Костенко А. *Таро Освальда Вирта (1860–1943)* http://www.green-door.narod.ru/wirtvers.html

Кроули Алистер. *Книга Закона*. Пер. А. Чернова http://angel.org.ru/3/plaw.html

Лачугин К. *Земля – большой кристалл?* http://www.lachugin.ru/work1.php

Ле Корбюзье. [1]*Модулор*. М.: Стройиздат, 1976

– [2]*Архитектура* XX *века*. М.: Прогресс, 1977 http://dfiles.ru/files/754v1vnzc

Левин В.И. *Рамануджан – математический гений Индии*. М.: Знание, 1968

Леонардо да Винчи. *Избранные естественнонаучные произведения*. Классики науки. Редакция, перевод, статья и комментарии В.П. Зубова. М.: Изд. АН СССР, 1955 http://dfiles.ru/files/y8bavwehf

Лосев А.Ф. [1]*История философии как школа мысли*. Коммунист, 1981, №11

– [2]*Античный космос и современная наука*. М., 1927

– [3]*Музыка как предмет логики*. Из ранних произведений. М.: Директ-Медиа, 2008
http://astrologos.su/astrologos_library/Losev/Losev1_MainFrame.htm

– [4]*История античной эстетики. Т. II, Часть Вторая. Ранняя классика*. М.: Искусство, 1969
http://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Culture/Losev_HistEst/Est2_1_2.php

– [5]*Там же* http://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Culture/Losev2_HistEst/2Los_hud_03.php

– [6]*Там же* http://www.gumer.info/bibliotek_Buks/Culture/Losev_HistEst/Est2_1_4.php

Макаров В.А. *Строение земной коры как результат функционирования силовых каркасов Геокристалла*
http://www.rusphysics.ru/files/Makarov.Stroenie_semnoy_kory.pdf

Мандельброт Б. *Фрактальная геометрия природы*. М.: Институт комп. исслед., 2002 http://www.sernam.ru/book_fract.php

Мартинизм, Учение и Традиция Ордена. Древний Орден Мартинистов–Мартинезистов http://www.martinist.ru/index.php

Международный клуб золотого сечения http://goldensectionclub.blogspot.com/

Мельхиседек Д. *Древняя тайна Цветка Жизни*, тт. 1 и 2 http://depositfiles.com/ru/files/yl5p0imw1

Михайлов В. Компьютерный вестник РИА-Новости. “Терра-Инкогнита” **32** (209), 1997

Музей Гармонии http://www.goldenmuseum.com/index_rus.html

Нессельштраус Ц.Г. *Альбрехт Дюрер*. 1471 – 1528. Л. – М.: Искусство, 1961

Никомах Геразский. *Введение в арифметику*, пер. А.И. Щетникова. ΣΧΟΛΗ. Философское антиковедение и классическая традиция, **3** (1), 2009 http://cyberleninka.ru/article/n/nikomah-iz-gerasy-vvedenie-v-arifmetiku

Пайк А. *28. Рыцарь солнца, или князь адепт*. Мораль и Догма Древнего и Принятого Шотландского Устава вольного каменщичества, том III http://martinist.nuina.net/drmartens/wp-content/uploads/2012/05/mas28.pdf

Пентагон. Теопедия http://ru.teopedia.org/hpb/Пентагон

Пентаграмма и её тайны http://www.magicbay.ru/articles/koren/Pentagramma_i_ee_tayny/

Пидоу Д. *Геометрия и искусство*. М.: Мир, 1979

Платон. *Тимей*. В кн.: Платон. Соч. в 3 т., т. 3, ч. 1. М.: Мысль, 1971, с. 455 – 541

Пойа Д. *Математическое открытие*. *Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание*. М.: Наука, 1970

Попов В.С. *Квантовая электродинамика сверхсильных полей*. В кн.: Современная теория элементарных частиц. М.: Наука, 1984, с. 127 – 144

Практическая чёрная магия http://www.blackwarlock.com/t17198-topic

Проблемы Гильберта. Сб. статей под редакцией П.С. Александрова. М.: Наука, 1969 http://depositfiles.com/files/9d2p1ppvz

Ритуал пентаграммы http://oto.ru/cgi-bin/article.pl?articles/magic_basics/theory/4-pentagramgd.txt Изложено по книге Israel Regardie. *The Complete Golden Dawn System of Magic*. New Falcon Publications Tempe, Arizona U.S.A.

Розенов Э.К. [1]*Закон золотого сечения в поэзии и музыке*. Статьи о музыке. Избранное. М.: Музыка, 1982, с. 119 – 157

– [2]*Динамика музыки и речи*. М.: Искусство, 1927

Сабанеев Л.Л. [1]*Золотое сечение в природе, в искусстве и в жизни человека*. В кн.: Воспоминание о России http://www.e-reading.org.ua/bookreader.php/93162/Sabaneev_-_Vospominanie_o_Rossii.html

– [2]*Этюды Шопена в освещении закона золотого сечения*. Опыт позитивного обоснования законов формы. Искусство, 1925, № 2, с. 133 – 145

Сакральная геометрия. Википедия http://ru.wikipedia.org/wiki/Сакральная_геометрия

Сан-Витале http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B0%D0%BD-%D0%92%D0%B8%D1%82%D0%B0%D0%BB%D0%B5

Семенюта Н.Ф. *Частное сообщение*

Серебряное сечение http://ru.wikipedia.org/wiki/

Словарь масонских терминов. Википедия http://ru.wikipedia.org/wiki/

Снова о большом кристалле. *Из писем в редакцию*. Химия и жизнь, № 04, 1976, с. 64 – 65 http://publ.lib.ru/ARCHIVES/H/"Himiya_i_jizn"/_"Himiya_i_jizn"_1976_.html

Сороко Э.М. *Структурная гармония систем*. Минск: Наука и техника, 1984

Стахов А.П. [1]*Введение в алгоритмическую теорию измерения*. М.: Советское Радио, 1977

– [2]*Задачи и основные направления деятельности института золотого сечения*. Академия Тринитаризма http://www.trinitas.ru/rus/002/a0232001.htm

– [3]*Обобщённые золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа*. Украинский математический журнал **56**, 1143 – 1150 (2004)

– [4]*Под знаком “Золотого Сечения”: Исповедь сына студбатовца*. *Глава 4. Золотое сечение в истории культуры*. *4.13. “Этюды Шопена в освещении золотого сечения”*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 13632, 04.08.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/100a/02320039.htm

– [5]*Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод “золотой” криптографии*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm

– [6]*Система счисления Бергмана и новые свойства натуральных чисел*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 14298, 20.03.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321068.htm

– [7]*Заметка по поводу гиперболических функций Боднара, Стахова, Ткаченко и Розина и решения 4-й проблемы Гильберта (Стахов, Арансон)*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.16266, 03.01.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321195.htm

– [8]*К обоснованию “золотой” теории чисел: F- и L-коды натуральных чисел*. Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16792, 29.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321221.htm

– [9]*Советские математики и исследователи, внесшие существенный вклад в развитие “математики гармонии” и её приложений*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 17369, 18.03.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321111.htm

– [10]*Гармония Мироздания и Золотое Сечение: древнейшая научная парадигма и её роль в современной науке, математике и образовании* (в трёх частях) http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320036.htm
– [11]*Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/2026-sth.pdf
– [12]*Пропорциональная схема золотого сечения* http://www.goldenmuseum.com/0801Proportion_rus.html
– [13]*Математика гармонии: от Евклида до современной математики и компьютерной науки. Статья первая*. Математика гармонии: инновации в информационных технологиях, в основаниях математики, в образовании http://naukovedenie.ru/PDF/33tvn412.pdf
– [14]*Овалы Кассини, лемниската Бернулли, "золотой" прямоугольный треугольник, "золотой" эллипс и другие "золотые" идеи Яна Грежздельского*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.17318, 16.02.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321109.htm
– [15]*Квазикристаллы Дана Шехтмана: еще одно научное открытие, основанное на "золотом сечении", удостоено Нобелевской Премии*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.16874, 07.10.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321233.htm
– [16]*Проблемы Гильберта*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 18043, 25.05.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321271.htm

Стахов А.П., Ткаченко И.С. и др. [1]*Об определении фибоначчиевых и люковых функций*. Винницкий политех. институт – Винница, 1988. – Деп. В УкрНИИНТИ, 10.08.1988
– [2]*Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи*. Доклады АН УССР, № 7, 1993

Страницы авторов http://www.trinitas.ru/rus/000/a0000004.htm

Татаренко А.А. [1]*Золотой T_m – канон антропокосмоса – гармония Золотых T_m – Гармоний Мира*. Рериховский вестник Дона, №11, 1999
– [2]*"T_m — принцип" – всемирный закон гармонии*. Доклад на Четвертой Международной научной конференции "Этика и наука будущего – феномен времени" http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320002.htm

Тимердинг Г.Е. *Золотое сечение*. Петроград.: Научн. изд., 1924; (несколько современных переизданий)

Уайт А.Э. *Новая энциклопедия масонства*. Пер. С. Квиткин, В. Кирющенко, М. Колопотин, А. Гузман. СПб.: Лань, 2003

Удивительные рисунки на полях http://www.liveinternet.ru/users/3422645/post197438248/

У-син. Википедия http://ru.wikipedia.org/wiki/

Фейгенбаум М. *Универсальность в поведении нелинейных систем*. Успехи Физических Наук, 1983, т. 141, с. 343

Фигурные числа. Википедия http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B3%D1%83%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0

Флаг Европы. Википедия http://ru.wikipedia.org/wiki/

Флоренский П.А. *У водоразделов мысли*. Соч. в 4 т., т. **3**(1). Философское наследие, том 128. М.: Мысль, 2000

Фрост А.Дж., Пректер А. *Волновой принцип Эллиотта – ключ к пониманию рынка*. М.: Альпина Бизнес Букс, 2009 http://biblioteka.cc/index.php?newsid=71694

Хризма. Википедия http://ru.wikipedia.org/wiki/

Чик и Сандра Табата Цицеро. *История Ордена Золотой Зари* http://teurgia.org/index.php?option=com_content&view=article&id=234:2010-01-30-03-54-49&catid=42:2010-01-14-19-50-34&Itemid=63

Шенягин В. П. "*Пифагор, или Каждый создаёт свой миф*" *– четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых s-пропорциях*. Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ. 17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm

Щетников А.И. *Лука Пачоли и его трактат "О божественной пропорции"* http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pacioli.pdf

Эйзенштейн С.М. *Сергей Эйзенштейн о "золотом сечении"* (Отрывок из книги "Неравнодушная природа") http://vzms.org/zolotoesechenie/Eisensnein.htm

Эйнштейн А. *Эпилог. Сократовский диалог*. Соч. в 4 т., т. IV. М.: Наука, 1967, с. 156–166

Экспонента. Википедия http://ru.wikipedia.org/wiki/Экспонента

Элифас Леви. [1]*Учение и ритуал Высшей Магии Часть I: Ритуал трансцендентальной магии*. Пер. А. Александрова, СПб., 1910 http://www.magister.msk.ru/library/occult/levie001.htm
– [2]*Учение и ритуал Высшей Магии, Часть II: Ритуал трансцендентальной магии*. Пер. Raull Lemniskatus, Хабаровск, 2005–2007 г. http://podelise.ru/tw_files/24242/d-24241133/7z-docs/1.pdf

Эллиотт Р.Н. *Закон волн*. Пер. Д. Возный http://awfx.narod.ru/Download/The_Wave_Principle_by_Elliott_discoverer_1938_rus.pdf

A Brief History of Phyllotaxis http://www.math.smith.edu/phyllo/OldFiles/History/historynoroll.html

Abe no Seimei. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Abe_no_Seimei

Adler I., Barabe D., and Jean R.V. *A History of the Study of Phyllotaxis*. Annals of Botany **80**, 231–244 (1997) http://aob.oxfordjournals.org/content/80/3/231.full.pdf

Aimi A., De Pasquale N. *Andean calculators* http://www.quipus.it/english/Andean%20Calculators.pdf

Almost integer. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Almost_integer

Andrews G.E., Askey R., and **Roy R.** *Special Functions*. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **71** Cambridge: Camb. Univ. Press, 1999

Alternative Religions http://altreligion.about.com/od/westernocculttradition/ig/Sigillum-Dei-Aemeth-Codes/Sigillum-Dei-Aemeth_color.htm

Ancient Egyptian royal titular. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Ancient_Egyptian_royal_titulary

Andrews G.E., Askey R., and **Roy R.** *Special Functions*. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **71** Cambridge: Camb. Univ. Press, 1999

Arakelian H. [1] *On the Dominant of Intra-Scientific Evolution of the Physical Knowledge: Physical Values in the Evolution of Physics*. Synopsys, Yerevan, **2**, 39–52 (1994)

– [2] *The New Fundamental Constant of Mathematics*. Pan-Armenian Scientific Rev., London, **3**, 18–21 (1995)

– [3] *New Fundamental Mathematical Constant: History, Present State and Prospects*. Nonlinear Sci. Lett. **B**, **1**(4), 183–193 (2011) http://www.nonlinearscience.com/paper.php?pid=0000000113

– [4] *LMP Fundamental Theory*. Yerevan: Sarvard, 2010 http://314159.ru/arakelian/arakelian1.pdf

Bahá'í symbols. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Bah%C3%A1%27%C3%AD_symbols

Barlow J.L. and **Bareiss E.H.** *On Roundoff Error Distributions in Floating Point and Logarithmic Arithmetic*. Computing **34**, 325–347 (1985)

Battistero di San Giovanni (Firenze) http://it.wikipedia.org/wiki/Battistero_di_San_Giovanni_(Firenze)

Benford F. *The Law of Anomalous Numbers*. Proc. Amer. Phil. Soc. **78**, 551–572 (1938)

Benford's law. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_law

Benjamin A.T., Quinn J.J. *Proofs That Really Count*: *The Art of Combinatorial Proof*. Mathematical Association of America, 2003 http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0883853337/fibonacnumbersan#reader_0883853337

Benjamin A.T., Walton D. *Counting on Chebyshev Polynomials*. Draft **82** (2), 2009 http://www.math.hmc.edu/~benjamin/papers/CountChebMag.pdf

Bergman G.A. *A Number System with an Irrational Base*. Math. Magazine **31**, 98 (1957)

Bernoulli D. *Comment*. Acad. Sci. Petrop. **3**, 85–100 (1728)

Bicknell M. and **Hoggatt V.E.Jr.** *A Primer For the Fibonacci Numbers: Part IX*. The Fib. Quart. **9**, 529–536 (1971)

Björner A. and **Lutz F.H.** *A 16-Vertex Triangulation of the Poincaré Homology 3-Sphere and Non-PL Spheres with Few Vertices*. Electronic Geometry Model No. 2003.04.001 http://www.eg-models.de/models/Simplicial_Manifolds/2003.04.001/_preview.html

Bogomolny A. [1] *Golden Ratio in Geometry* http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml#Hofstetter2

– [2] *Bisection of Yin and Yang* http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/YinYangBisection.shtml#golden

Boyle J. *An Application of the Fourier Series to the Most Significant Digit Problem*. Amer. Math. Monthly 101, 879 (1994)

Brooks R. *GoDNA: The Geometry of DNA* http://www.brooksdesign-cg.com/Code/Html/godna2.htm

Brown F.C. *Letters & Lettering. A Treatise with 200 Examples* http://www.gutenberg.org/files/20590/20590-h/20590-h.htm#page132

Buckminsterfullerene. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Buckminsterfullerene

Buseck P.R., Tsipursky S.J., Hettich R. *Fullerenes from the Geological Environment*. Science **257** (5067), 215–217 (1992)

Camerota F. *Parabolic compasses* http://redi.imss.fi.it/inventions/index.php/Parabolic_Compasses?PHPSESSID=n9fjiits2pujkikq37eanvh8v7

Capsid. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Capsid

Carroll Lewis. *The Lewis Carroll picture book. A selection from the unpublished writings and drawings of Lewis Carroll, together with reprints from scarce and unacknowledged work*. Edited by Stuart Dodgson Collingwood (1899) http://archive.org/stream/lewiscarrollpict00carruoft#page/n7/mode/2up

Caskey L.D. *Geometry of Greek Vases*. Boston MCMXXII http://archive.org/details/cu31924030679280

Cassini J. *Une nouvelle progression de nombres*. Histoire de l'Acaémie Royale des Sciences, v. 1, Paris, 1733

Cassini oval. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Cassini_oval

Cattedrale di Santa Maria del Fiore. Wikipedia http://it.wikipedia.org/wiki/Cattedrale_di_Santa_Maria_del_Fiore

Chebyshev polynomials. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials

Christmas http://www.britannica.com/EBchecked/topic/115686/Christmas

Chronology of computation of π. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_%CF%80

Church A.H. *The Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws*. London: Williams and Norgate, 1904

Clark D. *Solution to Problem 10262*. Amer. Math. Monthly **102**, 467 (1995)

Coat of arms of George Washington. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Coat_of_arms_of_George_Washington

Community.middlebury.edu http://community.middlebury.edu/~slides/HA220/views/aoc079_view.html

Conic section. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

Cook T.A. *The Curves of Life*. London, 1914 (reprinted in 1959 in New York: Dover)

Coxeter H.S.M., Du Val P., Flather H.T., and Petrie J.F. *The Fifty-Nine Icosahedra*, 3rd Edition. Stradbroke, England: Tarquin Publications, 1999

Damanik D., Embree M., Gorodetski A., and **Tcheremchantsev S.** *The Fractal Dimension of the Spectrum of the Fibonacci Hamiltonian* www.ruf.rice.edu/~dtd3/DEGT-FD.pdf

De Moivre A. Philos. Trans., **32**, 162–178 (1722)

Die Erdpräzession – The Earth Precession http://alien-homepage.de/weather_start/additional/earth_precession.html

Dodecahedron. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Dodecahedron

Dodekaederstern. Wikipedia http://de.wikipedia.org/wiki/Dodekaederstern

Dubner H. and **Keller W.** *New Fibonacci and Lucas Primes*. Math. Comp. **68**(225), 417–427 (1999)

Dumé Belle. *Is the Universe a Dodecahedron?* IOP. A website from the Institute of Physics, 2003 http://physicsworld.com/cws/article/news/2003/oct/08/is-the-universe-a-dodecahedron

Dunlap R. A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific Press, 1997 http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/9810232640/fibonacnumbersan#reader_9810232640

Duquette L.M. *The Magick of Aleister Crowley: A Handbook of the Rituals of Thelema*. Weiser Books, 2003 http://www.amazon.com/Magick-Aleister-Crowley-Handbook-Rituals/dp/1578632994

Dürer A. *Of the just shaping of letters: from the Applied geometry of Albrecht Durer, Book 3* (translated by R.T.Nichol from the Latin text of the edition of 1535), New York: Dover Publications, 1965

Dürer graph. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/D%C3%BCrer_graph

Earth in Dodecahedron Crystal http://pen-dragon.deviantart.com/art/Earth-in-Dodecahedron-Crystal-165858147

Edwards A.W.F. *Pascal's arithmetical triangle: the story of a mathematical idea*. JHU Press, 2002

Elie de Beaumont L. *Notice Sur les SystÈmes des montagnes*. French Academy of Sciences, Paris 1829

Embree M. and **Trefethen L.N.** *Growth and Decay of Random Fibonacci Sequences*. Proc. Roy. Soc. Lond. **A 455**, 2471–2485 (1999), preprint http://www.jstor.org/discover/10.2307/53482?uid=2&uid=4&sid=21102425922411

Encyclopedia of Creation Science. Perez, Jean-Claude http://creationwiki.org/Jean-claude_Perez

Euler L. *Observationes analyticae*. Novi commentarii ascaemiae scientiarum imperialis Petropolitanae, **11**, 124–143 (1765)

Falcon S., Plaza A. *On the Fibonacci k-numbers*. Chaos, Solitons & Fractals, vol. 32, issue 5, June 2007, p. 1615–1624

Fechner G.T. *Zur experimentalen Aesthetik*. Leipzig: S. Hirzel, 1871

Ferreol R. *Spirale sinusoïdale* http://www.mathcurve.com/courbes2d/spiralesinusoidale/spiralesinusoidale.shtml

Fibonacci polynomials. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_polynomials

Finch Steven. [1]*Mathematical Constants*. Cambridge Univ. Press, 2003
– [2]*Mathematical constants*, vol. 94, p. 68

Fink K., Beman W.W., and **Smith D.E.** *A Brief History of Mathematics: An Authorized Translation of Dr. Karl Fink's Geschichte der Elementar-Mathematik* Chicago: Open Court Publishing Co, 2nd ed., 1903

Flehinger B.J. *On the Probability that a Random Integer Has Initial Digit A*. Amer. Math. Monthly **73**, 1056–1061 (1966)

Fletcher Banister. *Plan of Florence Cathedral* http://instructional1.calstatela.edu/bevans/Art101/Art101B-9-Gothic/WebPage-Full.00087.html

Fraenkel A.S., Levitt J., and **Shimshoni M.** *Characterization of the Set of values f (n) = [n alpha], n = 1, 2*. Discrete Mathematics **2**, 332–345 (1972)

Freitag H. *Solution to Problem B-772*. *An Integral Ratio*. Fib. Quart. **34**, 82 (1996)

Gazale M.J. *Gnomon*. *From Pharaohs to Fractals*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (Рус. пер.: **Мидхат Газале**. Гномон. *От фараонов до фракталов*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002 http://lib100.com/book/Gnomon/

Gessel I. *Problem H*-187*: n Is A Fibonacci Number if and Only if* $5n^2 + 4$ *or* $5n^2 - 4$ *Is A Square*. The Fib. Quart. **10**, 417 (1972)

Ghyka M. *The Geometry of Art and Life*. Courier Dover Publications, 1977

Gill V. *Stars reveal carbon "spaceballs"* http://www.bbc.co.uk/news/science-environment-10730280

Glaister P. *Fibonacci power series*. The Mathematical Gazette **79**, 521–525 (1995)

Goff B.L. *Symbols of Prehistoric Mesopotamia*. New Haven and London: Yale University Press, 1963

GoldenNumber.Net http://www.goldennumber.net/index.htm

Goonatilake Susantha. *Toward a Global Science*. Indiana University Press, 1998, p. 126 http://books.google.am/books?id=SI5ip95BbgEC&pg=PA126&dq=Virahanka+Fibonacci&hl=ru#v=onepage&q&f=false

Gourdon X. and **Sebah P.** *Numbers, Constants and Computation*. *Constants and Records of Computation,* 2003 http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/Records.html

Gradshteyn L.S. and **Ryzhik I.M.** *Tables and Integrals, Series and Products*. N.Y: Academic Press, 1980

Graham L. *The Seven Seals of Judeo-Islamic Magic: Possible Origins of the Symbols* http://independent.academia.edu/LloydGraham/Papers/1568268/The_Seven_Seals_of_Judeo-Islamic_Magic_Possible_Origins_of_the_Symbols

Gratias D., Quiquandon M., Katz A. *Introduction to icosahedral quasicrystals*. Submitted to World Scientifc, 2002 http://lem.onera.fr/pages_perso/Denis_GRATIAS/aussois99.pdf

Gray J.J. *The Hilbert Challenge*. Oxford: Oxford University Press, 2000

Green J. & Ingram N. *Still*. Chapter twenty http://www.songsouponsea.com/Promenade/Still2A1.html

Große Dodekaeder. Wikipedia http://de.wikipedia.org/wiki/Gro%C3%9Fes_Dodekaeder

Großes Ikosaeder. Wikipedia http://de.wikipedia.org/wiki/Gro%C3%9Fes_Ikosaeder

Grünbaum B. and **Shephard G.C.** *Tilings and Patterns*. New York: W.H.Freeman & Co., 1987

Guy R.K. *The Second Strong Law of Small Numbers*. The Math. Magazine **63** (examples 3, 45, 46), p. 3–21 (1990)

Hambidge J. [1]*Dynamic Symmetry*. *The Greek Vase*. London, 1920 http://archive.org/stream/cu31924019526882#page/n197/mode/2up

– [2]*The Elements of Dynamic Symmetry*. Dover Publications, Inc. New York, 1967

Hayes B. *The Fibonacci Numbers*. Amer. Sci. **87**, 296–301 (1999)

Hermetic Order of the Golden Dawn. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Hermetic_Order_of_the_Golden_Dawn

Herz-Fischler R. [1]*A Mathematical History of the Golden Number*. Courier Dover Publications, 2013 http://www.amazon.com/Mathematical-History-Golden-Number-Mathematics/dp/0486400077

– [2]*Letter to the editor* http://www.fq.math.ca/Scanned/24-4/letter2.pdf

Hideko I. *Another Solution to the Polyhedron in Durer's Melencolia: A Visual Demonstration of the Delian Problem*. Aesthetics, **13** 179–194 (2009)

Hill T.P. [1]*Base-Invariance Implies Benford's Law*. Proc. Amer. Math. Soc. **123**, 887–895 (1995)

– [2]*A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law*. Stat. Sci. **10**, 354–363 (1996)

– [3]*The First Digit Phenomenon*. Amer. Sci. **86**, 358–363 (1998) http://www.math.gatech.edu/~hill/publications/cv.dir/1st-dig.pdf

Hofstetter K. *A Simple Construction of the Golden Section*. Forum Geometricorum, v. 2, 65–66 (2002)

Hoggatt V.E.Jr. [1]*Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969 http://www.fq.math.ca/fibonacci-lucas.html

– [2]*Number Theory: The Fibonacci Sequence*. In: 1977 Yearbook of Science and the Future, Encycl. Britannica, p. 178–191 (1977)

Honkshu http://honkshu.tumblr.com/post/1137975756/dressrehearsalrag-seimei-i-well-with-pentagram

Honsberger R.A. *Second Look at the Fibonacci and Lucas Numbers*, *Ch. 8*. In: Mathematical Gets III. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 1985

Horadam A.F. *Pythagorean Triples*. The Fib. Quart. **20**, 121–122 (1982)

Hornung E. *The Egyptian Amduat: The Book of the Hidden Chamber* http://www.maat.sofiatopia.org/hidden_chamber01.htm

Icosahedron. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedron

Implosion Group's website about Dan Winter- Sacred Geometry & Coherent Emotion, & HeartTuner + BlissTuner http://www.goldenmean.info/

Johnson B. *Fibonacci Identities by Matrix Methods and Generalisation to Related Sequences*. March 25, 2003 http://maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/PED/fib.pdf

Juno Ludovisi. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Juno_Ludovisi

Kaplan D.R, Cooke T.J. *The genius of Wilhelm Hofmeister: the origin of causal-analytical research in plant development*, American Journal of Botany **83** (12), 1647–1660 (1996)

Kappraff Jay. [1]*Connections*. *The geometric bridge between Art and Science*. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001

– [2]*Beyond Measure*. *A Guided Tour Through Nature, Myth and Number*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2002

Keppleri Ioannis. *Harmonices mundi* http://ia701205.us.archive.org/1/items/ioanniskepplerih00kepl/ioanniskepplerih00kepl.pdf

Khinchin A.Ya. *Continued Fractions*. New York: Dover Publications, 1997

Kleinert H. and **Maki K.** *Lattice Textures in Cholesteric Liquid Crystals*. Fortschritte der Physik **29**, 219–259 (1981) http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/75/75.pdf

Knopp K. *Theory and Application of Infinite Series*. New York: Hafner, 1951

Knott R. [1]*Fibonacci Numbers and the Golden Section* http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html

– [2]*The Golden String of 0s and 1s*. Ibid http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibrab.html

– [3]*Fibonacci and Golden Ratio Formulae*. Ibid http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibFormulae.html

– [4]*Fibonacci Numbers and Nature*. Ibid http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html

– [5]*Fibonacci Forgeries*. Ibid http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibforgery.html

Köhler G. *Generating functions of Fibonacci-like sequences and decimal expansions of some fractions*. *The Fib. Quart.* **23**(1), 29–35 (1985). Retrieved 2011 http://www.fq.math.ca/Scanned/23-1/kohler.pdf

Koshy T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Wiley-Interscience, 2001 http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0471399698/fibonacnumbersan#reader_0471399698

Kroto H.W., Heath J.R., O'Brien S.C., Curl R.F. and **Smalley R.E.** *C60:Buckminsterfullerene*. Nature **318**, 162–163 (1985)

Labat R. *Manuel d'Épigraphie Akkadienne: Signes, Syllabaire, Idéogrammes*. Librairie Orientaliste Paul Geuthner, 1976

Lambert W Function. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function

Lamé G. *Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers*. *Comptes Rendus Acad. Sci.* **19**, 867–870 (1844)

Languedoc Pentagram http://www.unexplained-mysteries.com/gallery/images/6529/languedoc-pentagram

Lectorium Rosicrucianum. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Lectorium_Rosicrucianum#cite_note-13

Lévy P. *Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard*. Compositio Math. **3**, 286–303 (1936). Переиздано: Œuvres de Paul Lévy, v.6. Paris: Gauthier-Villars, p. 285–302 (1980)

Ley E. *On the Peculiar Distribution of the U.S. Stock Indices Digits*. Amer. Stat. **50**, 311–313 (1996)

Lifchitz H. and **Lifchitz R.** *PRP Top Records, Search for : F(n)* http://www.primenumbers.net/prptop/searchform.php?form=F(n)

Lindgren C.E. *The Rose Cross. A Historical and Philosophical View*. Journ. of Religion and Psychical Research, **18**(3), 141–148 (1995) http://users.panola.com/lindgren/rosecross.html

Liungman C.G. *Dictionary of Symbols*. Denver, Colorado: ABC-CLIO, 1991

List of fractals by Hausdorff dimension. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension

Livio M. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books, 2002

Lucas Édouard. [1]*Recherches Sur Plusieurs Ouvrages De Léonard De Pise Et Sur Diverses Questions D'Arithmétique Supérieure*. Rome, 1877

– [2]*The Theory of Simply Periodic Numerical Functions*. American Journal of Mathematics, **1**, 184–240, 289–321 (1878)

Lucas sequence. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Lucas_sequence

Luminet J.-P. *et al.*[1]Nature **425**, 593–595 (2003)

Luminet J.-P., Weeks J., Riazuelo A., Lehoucq R., and **Uzan J.-P.**[2]*Dodecahedral Space Topology as an Explanation for Weak Wide-Angle Temperature Correlations in the Cosmic Microwave Background* http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0310253.pdf

McKeever B. *The Nauvoo Pentagrams* http://www.mrm.org/nauvoo-pentagrams

Melham R.S. *On Product Difference Fibonacci Identities*. Article A10, Integers, v. 11 http://www.westga.edu/~integers/cgi-bin/get.cgi

MetPhys – Electrons and Mythologies http://www.greatdreams.com/grace/99/99UUelectrons.html

Moorman C.M. and **Goff J.E.** *Golden ratio in a coupled-oscillator problem*. European Journal of Physics **28**, 897–902 (2007) http://goff-j.web.lynchburg.edu/Moorman_Goff_EJP_2007.pdf

Morgado J. [1]*Note on some results of A.F. Horadam and A.G. Shannon concerning Catalan's Identity on Fibonacci Numbers*. Portugaliae Math. **44**, 243–252 (1987) http://purl.pt/3095/1/j-5293-b-vol44-fasc3-art2_PDF/j-5293-b-vol44-fasc3-art2_PDF_01-B-R0300/j-5293-b-vol44-fasc3-art2_0000_capa1-252_t01-B-R0300.pdf

– [2]*Note on the Chebyshev Polynomials and Applications to the Fibonacci Numbers*. Portugaliae Mathematica, **52**(3), 1995 http://www.emis.de/journals/PM/52f3/pm52f311.pdf

Möbius M. *Wie erkennt man eine Fibonacci Zahl?* Math. Semesterber, (1998) **45**, 243–246

Muir H. *Tantalising Evidence Hints Universe Is Finite*. Special Report from New Scientist Print Edition. The World's No 1 Science and Technology News Service, 2003

Nakamura Sh. *Some Fibonacci & Lucas identities via the Chebyshev polynomials*. Tokyo University of Marine Science and Technology http://oacis.lib.kaiyodai.ac.jp/dspace/bitstream/123456789/331/1/AN00161244-47-53.pdf

Newcomb S. *Note on the Frequency of the Use of Digits in Natural Numbers*. Amer. Journ. Math. **4**, 39–40 (1881)

Nigrini M. *A Taxpayer Compliance Application of Benford's Law*. Journ. Amer. Tax. Assoc., **18**, 72–91 (1996)

O'Connor J.J. and Robertson E.F. *The Golden ratio* http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Golden_ratio.html

Official Publications of the Fibonacci Association. The Fibonacci Quarterly http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html

Oswald G. *Lexikon der Heraldik*. VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1984

Pacioli Luca. *De Divina Proportione* http://issuu.com/s.c.williams-library/docs/de_divina_proportione

Papyrus Oxyrhynchus 29. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Oxyrhynchus_29

Parabola. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Parabola

Parmanand Singh. *The so-called fibonacci numbers in ancient and medieval India***.** Historia Mathematica **12**(3), 229–244 (1985) http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086085900217

Pascal's triangle. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_triangle

Penrose R. [1]*Role of aesthetics in pure and applied research*. Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications **10**: 266ff (1974)

– [2]*U.S. Patent 4133152 "Set of tiles for covering a surface"*, patent issued Jan 9 (1979)

Pentacles & Pentagrams http://witchcraft-supplies.com/Pentagrams.html

Pentagrams, Pentacles, 5 pointed stars http://www.whale.to/b/pentagram_h.html

Perez J.-C. [1]*Chaos DNA and Neuro-computers: a golden link/The hidden language of genes, global language and order in the human genome*. Speculations in Science and Technology **14**(4) (1991)

– [2]*Codon populations in single-stranded whole human genome DNA are fractal and fine-tuned by the Golden Ratio 1.618*. Interdisciplinary Sciences: Computational Life Science **2**(3), 228–240 (2010)

Peters G.H. *The Sacred Pentagram* http://www.freemasons-freemasonry.com/pentagram_freemasonry.html

Peterson I. *Fibonacci at Random: Uncovering a New Mathematical Constant*. Sci. News, **155**, 376 (1999)

Pfeifer F.X. *Der Goldene Schnitt*. Augsburg, 1885

Phi and Mathematics http://www.goldennumber.net/math.htm

Pics that don't make you laugh but are still cool http://www.neogaf.com/forum/showthread.php?t=425526&page=58

Polygonal number. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number

Proclus. *A commentary on the first book of Euclid's Elements*. Translated by G.R.Morrow. Princeton Univ Press, Princeton, 1970

Quadratic equation. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_equation

Questions by Srinivasa Ramanujan. (Published by in the Journal of the Indian Mathematical Socity) http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm

Raimi R.A. [1]*The Peculiar Distribution of First Digits*. Sci. Amer. **221**, 109–119 (1969)

– [2]*The First Digit Phenomenon*. Amer. Math. Monthly **83**, 521–538 (1976)

Ram R. [1]*Fibonacci Numbers Formulae* http://users.tellurian.net/hsejar/maths/fibonacci/

– [2]*Pell Numbers Formulae* http://users.tellurian.net/hsejar/maths/pell/

Ramanathan K.G. *On Ramanujan's Continued Fraction*. *Acta*. Arith. **43**, 209–226, 1984

Reynolds M.A. *The Octagon in Leonardo's Drawings* http://markareynolds.com/?p=89

Roselle B. *Golden Mean Series* https://sites.google.com/site/goldenmeanseries/

Rosenberg (Adelsfamilie) http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Rosenberg_(Adelsfamilie)

Roukema B.F., Bulinski Z., Szaniewska A., Gaudin N.E. *The optimal phase of the generalised Poincare dodecahedral space hypothesis implied by the spatial cross-correlation function of the WMAP sky maps*. Astronomy and Astrophysics **486**(1), 55–72 (2008) arXiv:0801.0006v1 [astro-ph]

Salov V. *Inevitable Dottie Number*. *Iterals of cosine and sine*. arXiv:1212.1027v1 [math.HO] 1 Dec 2012 http://arxiv.org/pdf/1212.1027.pdf

Schatte P. *On Mantissa Distributions in Computing and Benford's Law*. Journ. Inform. Process. Cybernet. **24**, 443–455 (1988)

Schreiber P. *A New Hypothesis on Durer's Enigmatic Polyhedron in His Copper Engraving "Melencholia I"*. Historia Mathematica, **26**, 369–377 (1999) http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/duerer/lu/schreiber.pdf

Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J.W. *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*. Phys. Rev. Lett. **53**, 1951–1953 (1984)

Shriners. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Shriners

Šiber Antonio. *Leonard's temple, part one*. Construction of a particular reality. Documenting creation of one of possible worlds, 2009 http://asiber.ifs.hr/leonardo_temple_1_en.html

Sigillum Dei. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Sigillum_Dei

Sigillum Dei Aemeth http://flyingdoll.net/tag/sigillum-dei-aemeth/

Sir Gawain and the Green Knight. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Sir_Gawain_and_the_Green_Knight

Sloane N.J.A. [1]*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Welcome* http://oeis.org/wiki/Welcome
- [2]*Decimal expansion of natural logarithm of golden ratio*. Ibid http://oeis.org/A002390
- [3]*Sequence* A008310. Ibid http://oeis.org/A008310
- [4]*Sequence* A053117. Ibid http://oeis.org/A053117
- [5]*Sequence* A010048. Ibid http://oeis.org/A010048
- [6]*Sequence* A096650. Ibid http://oeis.org/A096650

Spinadel V.W. [1]*From the Golden Mean to Chaos*. Editorial Nueva Librería, Buenos Aires, Argentina, 1998.
- [2]*La familia de números metálicos en Diseño*. Primer Seminario Nacional de Gráfica Digital, Sesión de Morfología y Matemática, FADU, UBA, 11–13 Junio de 1997. Volumen II.
- [3]*The Family of Metallic Means* http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/spinadel/index.html

Spirale sinusoïdale http://www.mathcurve.com/courbes2d/spiralesinusoidale/spiralesinusoidale.shtml

Stakhov A.P., assisted by **Olsen S.A.** *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science* http://books.google.ca/books?id=K6fac9RxXREC&lpg=PP1&dq=mathematics%20of%20harmony&pg=PP1#v

Stakhov A.P., Aranson S.Kh. [1]*"Golden" Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert's Fourth Problem*. Congressus Numerantium, **193**, 119–156 (2008)
- [2]*Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem*. Applied Mathematics **2**(3), March 2011 http://www.scirp.org/Journal/PaperInformation.aspx?paperID=4387

Stakhov A., Rozin B. [1]*On a new class of hyperbolic function*. Chaos, Solitons & Fractals, **23**(2), 379–389 (2004)
- [2]*The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature*. Visual Mathematics, **8**(3), 2006 http://members.tripod.com/vismath/pap.htm

Staudt G. K. C. von. *Beiträge zur Geometrie der Lage*, vol. 3. Verlag von Bauer und Raspe (Julius Merz), Nürnberg, 1856

Stern F. *Fibonacci in Trigonometric Form, Problem B-374*. The Fib. Quart. **17**, 93 (1979)

Stewart I. *Daisy, Daisy, Give Me Your Answer, Do*. Sci. Amer., Jan 1995

Taton R. *Giovanni Domenico Cassini*. Complete Dictionary of Scientific Biography http://www.encyclopedia.com/topic/Giovanni_Domenico_Cassini.aspx#1-1G2:2830900805-full

The Fibonacci Association Official Website http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/

The Fibonacci Quarterly http://www.engineering.sdstate.edu/~fib/

The number Five (5) and Phi http://www.goldennumber.net/five(5).htm

The thirteen books of Euclid's Elements[1]. Clay Mathematics Institute Historical Archive http://www.claymath.org/library/historical/euclid/index.html
- [2]*Book XIII, Proposition 17* http://www.claymath.org/library/historical/euclid/files/elem.13.17.html

Thomson D'Arcy. *On Growth and Form*. Cambridge: University Press, 1917 http://archive.org/stream/ongrowthform1917thom#page/n7/mode/2up

Transits of VENUS for the last 21 centuries 60 CE to 2012 CE http://strangeye.blogspot.com/2010/10/transits-of-venus-for-last-21-centuries.html

Triangle de Pascal. Wikipedia http://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_de_Pascal

Underwood P. *Dictionary of Occult and the Supernatural*. HarperCollins Publishers Ltd, 1979

Vajda S. *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*. Dover Publ. Inc.: Mineola, New York, 2008 http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/0486462765/fibonacnumbersan#reader_0486462765

Virus. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Virus#cite_note-69

Vishwanath D. *Random Fibonacci Sequences and the Number 1.13198825*. Preprint. Math. Comp. **69**, 1131–1155 (2000)

Visomtay G. *Albrecht Dürer's Capital Letters* http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/britannicus/durer-abc.html

Vogel H. *A better way to construct the sunflower head*. Mathematical Biosciences **44**(44), 179–189 (1979)

Wars of the Roses http://en.wikipedia.org/wiki/Wars_of_the_Roses#cite_note-0

Washington L.C. *Benford's Law for Fibonacci and Lucas Numbers*. The Fib. Quart. **19**(2), 175–177 (1981)

Weisstein E.W. [1]*Hyperbolic Sine*. Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicSine.html
- [2]*Fibonacci Number*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html
- [3]*Lucas Number*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/LucasNumber.html
- [4]*Fibonacci*. Ibid http://functions.wolfram.com/IntegerFunctions/Fibonacci/introductions/FibonacciLucasNumbers/ShowAll.html

– [5] *Goldenratio^(-x)*. WolframAlfa. Ibid http://www.wolframalpha.com/input/?i=goldenratio%5e(-x)
– [6] *Chebyshev polynomials of the first kind*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html
– [7] *Chebyshev polynomials of the second kind*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheSecondKind.html
– [8] *Pascal's Triangle*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/PascalsTriangle.html
– [9] *Catalan Solid*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/CatalanSolid.html
– [10] *Feigenbaum Constant*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html
– [11] *Paraboloid*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/Paraboloid.html
– [12] *Almost integer*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/AlmostInteger.html
– [13] *Pentagonal Triangular Number*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/PentagonalTriangularNumber.html
– [14] *Octagonal Triangular Number*. Ibid http://mathworld.wolfram.com/OctagonalTriangularNumber.html

Wells D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Middlesex, England: Penguin Books, 1986. p. 36–49

Wenninger M.J. *Polyhedron Models*. New York: Cambridge University Press, 1989

Wersin W. V. *The Book of Rectangles, Spatial Law and Gestures of The Orthogons Described*. *The Orthogons Described*., Ravensburg: Otto Maier Verlag Publishers, 1956

Wicca. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Wicca#Book_of_Shadows

Wiccan White Pentagram http://openclipart.org/detail/126829/wiccan-white-pentagram-by-kuba

Wildwinds http://www.wildwinds.com/coins/index.html

Williams D. *Château de Blanchefort* http://www.rlcresearch.com/2007/12/22/chateau-de-blanchefort/

Witmer L. *Zur experimentellen Aesthetik einfacher räumlicher Formverhältnisse*. Philosophische Studien **9**, 96–144, 209–263 (1894)

Wolfgang von Wersin. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Wolfgang_von_Wersin

World-Mysteries http://blog.world-mysteries.com/science/numbers-magick/

Wythoff W.A. *A Modification of the Game of Nim*. Nieuw Archief voor WisKunde, **7**(2), 199–202 (1907)

Yamagishi M.E.B., and **Shimabukuro A.I.** *Nucleotide Frequencies in Human Genome and Fibonacci Numbers*. In: Bulletin of Mathematical Biology **70**(3), 643-653 (2007)

Yee A.J. & Kondo S. *Round 2... 10 Trillion Digits of Pi* http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-10t/details.html

Your Dictionary com. http://images.yourdictionary.com/DNA

Zeckendorf E. [1] *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*. Bulletin Soc. Roy. Sci. Liège **41**, 179–182 (1972)
– [2] *A Generalized Fibonacci Numeration*. The Fib. Quart. **10**, 365–372 (1972)
http://www.wolframalpha.com/input/?i=goldenratio%5e(-x)

Zeising A. *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*. Leipzig: Rudolph Weigel, 1854
http://books.google.am/books?id=k8g6AAAAcAAJ&pg=PA282&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

Список рисунков, таблиц и графиков

Рисунки

Стр.

Глава 6.

Приложение к Главе 6

Глава 7.

Глава 8.

Таблицы

Графики

Примечание. Почти все графики и таблицы, а также несколько рисунков сделаны автором, остальное взято из доступных в Интернете источников. В рисунке на стр. 181 карикатура “Мыслитель” И.А.Смирнова использована с любезного согласия автора.