С.Л. Василенко

Базовые тождества гармонии

В любой науке столько истины, сколько в ней математики. *И. Кант*

Дискуссия как инструмент познания. Первые мысли о написании данной статьи возникли по мотивам публичной дискуссии [1, 2] в ее позитивном проявлении и не очень…

Вообще полезность конструктивных споров определяется многими составляющими.

Среди основных моментов можно выделить возможность апробации (в классическом понимании этого слова) собственных результатов исследований, и что не мене важно, – взаимообогащение знаниями в процессе общения.

Обычно они отшлифовывают и выкристаллизовывают уже известные положения, раскладывая их, что, называя, по полочкам, но часто становятся катализатором новых идей.

Например, могут возникать достаточно неожиданные переходы от чисто математических конструкций или мыслительных процессов к несоизмеримо отдаленным уровням обобщения в целом на природных системах.

Дискуссия, полемика или конструктивная критика не только привлекают внимание к работам "критикуемого", но и дают ему новое поле для исследований, возможность лучше отточить свои мысли, более аргументировано изложить полученные новые знания и т.п.

Отсутствие критики и дискуссий – застой.

Лишь бы они не раскручивались каруселью взаимных обвинений.

Общие сведения о тождествах. Вряд ли возможно "проверить алгеброй гармонию" /А.С. Пушкин о Сальери/. Но если мы хотя бы частично разделяем точку зрения И. Канта, приведенную в эпиграфе, то безопасность и развитие общества в гармонии с природой могут надежно обеспечиваться, опираясь на объективные закономерности, которые подтверждаются и достижениями математики. – И особенно ее базовыми конструкциями в виде основополагающих тождеств.

Тождество в математике – равенство, которое справедливо для любых допустимых значений входящих в него переменных. В этом случае его называют также формулой.

К тождествам относят и равенства, не содержащие букв, например, $2 \cdot 2 = 4$.

Равенство $x + 2 = 5$ имеет место только при $x = 3$, поэтому называется уравнением.

Математические тождества несут в себе полезную информацию и часто иллюстрируют довольно неожиданные соотношения между различными математическими объектами и величинами. Но тождество – это не только математическое понятие.

> В целом любые «высказывания тождества, истинные и имеющие применение, состоят из неподобных единичных терминов, обозначающих одну и ту же вещь».
>
> Составление тождеств – сложный умственный процесс, а настоящие «предложения тождества, соединяющие простые термины, не имеют применения до тех пор, пока не освоена схема физических объектов …
>
> Построенное предложение истинно тогда и только тогда, когда составляющие его термины указывают на один и тот же объект …
>
> Хотя понятие тождества такое простое, оно не редко вызывает путаницу. Один пример обнаруживается во фрагменте из Гераклита, согласно которому нельзя ступить в одну и ту же реку дважды из-за течения воды. Трудность разрешается, если обратиться к принципу разделения референции общего термина "река". Считать кого-то ступающим в одну и ту же реку оба раза

типично как раз для того, что отличает реки как от фаз реки, так и от воды, разделенной сохраняющими вещество способами …

Тождество, очевидно, располагает к тому, чтобы люди, которые не перепутали бы знак и предмет в других контекстах, путали их в этом контексте. Среди таких людей – большинство математиков, предпочитающих смотреть на уравнения как на установления отношений между числами, которые каким-то образом равны, но различны» [3].

Единичное тождество – есть равенство объекта самому себе, которое позволяет утверждать, что объект – тот самый искомый объект, признаки которого нам известны.

Обратим внимание на то, что у нас не так уж и много единичных математических тождеств или формул.

Уравнений или равенств, обращающихся в ноль, в достатке.

А на единичные выражения существует явный дефицит, хотя единица – это правомерный символ любой цельной структуры естественного или абстрактного содержания, который имеет полное право на формализацию понятия гармонии.

Довольно странно иметь такое необозримое количество целостных образований, и одновременно такой узкий набор средств по их интерпретации.

Конечно, любое выражение типа $a = b$ может быть преобразовано к виду $a / b = 1$.

Но, как правило, подобные искусственные преобразования не приводят к новым знаниям и больше подходят для трактовки физических единиц измерения.

Поэтому такие соотношения нами не рассматриваются, во всяком случае, пока.

В целом определяющим здесь является не приобретение новейших знаний, а их формирование и структуризация на базе уже известных под новым углом зрения, что в конечном итоге позволяет получить весьма любопытные и полезные результаты.

1. Основное *уравнение тригонометрии*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

Можно определенно сказать, что это базовое уравнение гармонии, описывающее окружность единичного радиуса и основанное на числе π. Хотя многие исследователи почему-то об этом забывают, зациклившись исключительно на "золотом" сечении.

Круг (окружность) обладает абсолютной симметрией с идеальным соотношением его многочисленных элементов (секторов, сегментов, хорд, радиусов и диаметров разных направлений и проч.) между собой и с целым.

ЗС просто не угадывается на фоне такой идеальной гармонии как окружность.

В развитие (1) похожая форма предусмотрена и для гиперболических функций

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \tag{2}$$

где $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Гиперболические функции квадратного уравнения задаются соотношениями [4]

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{c}\\ \mathrm{s}\end{matrix}\right\rangle \mathrm{h}_\lambda x = \frac{\lambda^x \pm \lambda^{-x}}{2} \quad \text{или} \quad \mathrm{ch}_\lambda x = \frac{\lambda^x + \lambda^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}_\lambda x = \frac{\lambda^x - \lambda^{-x}}{2},$$

где λ – корень квадратного уравнения, $\mathrm{ch}_\lambda^2 x - \mathrm{sh}_\lambda^2 x = 1$.

В частном случае, приходим к "золотым" гиперболическим функциям (О. Боднар, С. Василенко, С. Ясинский):

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{c} \\ \mathrm{s} \end{matrix}\right\rangle \mathrm{h}_{\Phi} x = \frac{\Phi^{x} \pm \Phi^{-x}}{2} \qquad \text{или} \qquad \mathrm{ch}_{\Phi} x = \frac{\Phi^{x} + \Phi^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}_{\Phi} x = \frac{\Phi^{x} - \Phi^{-x}}{2},$$

$$\mathrm{ch}_{\Phi}^{2} x - \mathrm{sh}_{\Phi}^{2} x = 1, \tag{3}$$

где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Заметим, что так называемые «гиперболические функции Фибоначчи и Люка» не обладают приведенными свойствами из-за отсутствия в них соответствующей нормировки (в частности, косинус нулевого аргумента не равен 1), а потому автоматически не попадают в базовые тождества общей теории гармонии систем.

2. *Теорема Пифагора* для гипотенузы единичной длины

$$a^{2} + b^{2} = 1. \tag{4}$$

Заметим, что классическое онтологическое представление (квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов) здесь записано в обратном порядке для единообразия базовых уравнений гармонии.

В определенной мере уравнения (1) и (4) взаимосвязаны, в частности в прямоугольной декартовой системе отсчета. Но в целом они характеризуют разные математические представления.

3. *Числа Фибоначчи*

Многие соотношения для чисел Фибоначчи не имеют четкой привязки к начальным условиям (НУ). Так, можно выбрать в качестве НУ любые два соседних числа, выстроить от них ряд чисел (что равносильно сдвигу), и для всех последующих элементов ряда будут выполняться те или иные закономерности.

Однако есть формулы, для которых увязка с затравочными числами принципиальна.

Легко убедиться, что формула (6) в работе [2] для чисел Фибоначчи с начальными условиями $(F_0, F_1) = (0, 1)$, а именно так она представлена в статье, записана некорректно, поскольку

$$F_{n+1}\phi^{n-1} + F_{n}\phi^{n} = \Phi \neq 1,$$

где $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, $\phi = \Phi^{-1}$.

Данное выражение тождественно превращается в единицу при $(F_0, F_1) = (1, 0)$.

В принципе, это практически повторяющиеся (со сдвигом по n) ряды, но в символьной записи – разные математические структуры.

В этом контексте, например в работе С. Алферова [5], формула записана не только точно для $(F_0, F_1) = (0, 1)$

$$F_{n}\phi^{n+1} + F_{n+1}\phi^{n} = 1, \tag{5}$$

но и приобретает красивую дуально-инвариантную форму с перекрестно-симметричной нумерацией $(n, n+1) \leftrightarrow (n+1, n)$.

Можно было, конечно, просто записать формулу (5) и все. Боле подробное изложение приведено как факт для логического завершения недавнего спора среди членов клуба АТ.

Дабы не отвлекаться далее от магистральной линии, дополнительные замечания, позволяющие лучше уяснить сущность упомянутого диалога, приведены в приложении.

4. "*Золотое*" *сечение* применительно к гармонии носит достаточно фундаментальный характер, хотя и не исключено, что его роль в мироздании сильно преувеличена, поэтому ограничимся представлением базовых соотношений:

$$\Phi^2 - \Phi = 1, \qquad \phi^2 + \phi = 1. \tag{6}$$

Помимо квадратичного представления (6), выполняется также $2m$-мерное единичное тождество, вытекающее из *обобщенного уравнения гармонической пропорции* [6],

$$\Phi^{2m} - \sum_{j=1}^{m} \Phi^{2j-1} = 1. \tag{7}$$

Его отличительная особенность: независимо от количества исходных элементов (не только двух), конечный объект на всех этапах своего становления воссоздается по алгоритму многомерного разностного уравнения ЗС (m – натуральное число):

$$x_{n+2m} = \sum_{j=1}^{m} x_{n+2j-1} + x_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \Phi .$$

С числами золотого сечения возможны самые разные комбинации, среди которых особый интерес представляет тождество "первоосновы" И. Шевелева [7]

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Phi^{-(2j-1)} = 1, \tag{8}$$

которое он ошибочно назвал уравнением.

5. *Бином Ньютона* (частный случай применительно к гармонии).

Например, запись формального тождества

$$\Phi^2 - \Phi = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \equiv 1,$$

кроме того, что «в огороде бузина, а в Киеве – дядька», новой информации не дает.

Ни золотая пропорция не расширяет тригонометрические особенности, ни тригонометрия от этого не расширяет или объясняет свойства ЗС.

Иначе обстоит дело с биномом Ньютона.

Его комбинаторика дает основу для проведения количественно анализа при исследовании отдельных сторон (элементов) целого в их гармонии.

Единично-тождественное представление по биному Ньютона дано в работах [2, 8] в виде следующей формулы

$$1 \equiv \left(\phi^2 + \phi\right)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \phi^{n+j} . \tag{9}$$

Рассмотрим данный вопрос несколько подробнее.

Как отмечается в статье [2] тождество (9) «означает, что разбиение целого на части в природе происходит равновесным (гармоничным) образом по "золотой пропорции"».

Думается, многие сочли бы за честь не просто продекламировать, а именно доказать это утверждение, но увы, из самой формулы это никак следует.

Впрочем, и само понятие «разбиение целого на части в природе происходит ...» не выражает общие тенденции. Такое разбиение чаще происходит в умозаключениях человека при анализе естественных объектов.

Природе больше свойственно структурирование, что подпадает под категорию синтеза. Дробление тоже присутствует (тот же радиоактивный распад, деление клеток и т.д.), но там другие закономерности, в которых ЗС слабо просматривается, хотя и могут присутствовать некоторые закономерности, связанные с последовательностями Фибоначчи.

Само же тождество (9) только показывает, как с помощью бинома можно продемонстрировать довольно необычные комбинаторные свойства Ф.

Есть, на наш взгляд и другая трактовка.

Возможно, благодаря этому ЗС может себя проявлять в природе не в явном (легко узнаваемом) виде, а в скрытых формах через различные комбинации, которые на практике с трудом поддаются идентификации.

То есть ЗС присутствует, структурирует объект, но мы этого просто не видим.

Так или иначе, но и в виде (9) оно может быть представлено в контексте базовых соотношений гармонии систем.

Поступая аналогичным образом, а именно представляя слева единичную сумму двух слагаемых, возводя ее в произвольную степень и расписывая далее через бином Ньютона, можно получить дополнительные тождества, например,

$$\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j (\sin\alpha)^{2(n-j)}(\cos\alpha)^{2j} \equiv 1$$

или подобный ряд эквивалентных представлений тождеств "золотого" сечения (табл. 1)

Кстати, подобных выражений на основе бинома Ньютона можно составить огромное множество без особых претензий на оригинальность.

Таблица 1

Примеры разложений единичных тождеств по биному Ньютона

	Базовое тождество	Эквивалентные значения последовательности $\psi_{n,j}$ в элементарном разложении $1^n = (a+b)^n$ по формуле бинома Ньютона $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^{n-j} b^j = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \psi_{n,j}$ с переменой мест слагаемых a и b	
1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\equiv 1$	2^{-n}	2^{-n}
2	$\Phi^2-\Phi\equiv 1$	$(-1)^j\,\Phi^{2n-j}$	$(-1)^{n-j}\,\Phi^{n+j}$
3	$\Phi-\Phi^{-1}\equiv 1$	$(-1)^j\,\Phi^{n-2j}$	$(-1)^{n-j}\,\Phi^{2j-n}$
4	$\Phi^{-1}+\Phi^{-2}\equiv 1$	Φ^{-n-j}	Φ^{j-2n}
5	$\Phi^3-2\Phi\equiv 1$	$(-2)^j\,\Phi^{3n-2j}$	$(-2)^{n-j}\,\Phi^{2j+n}$
6	$2\Phi^2-\Phi^3\equiv 1$	$(-1)^j\,2^{n-j}\,\Phi^{2n+j}$	$(-1)^{n-j}\,2^j\,\Phi^{3n-j}$

Знак минуса нас нисколько не должен смущать, поскольку многие природные явления и закономерности имеют сходные схемы в своих балансовых проявлениях: различные законы сохранения и др.

6. *Геометрическая прогрессия*

Выбрав "единицу" в качестве символа "целостности" всего сущего, И. Шевелев выражает [7] ее в виде суммы простейших элементов на основе динамической модели суммирования бесконечных рядов.

Для равновеликой (симметричной) дихотомии или бисегментации она выглядит так

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} = 1 .$$

Заметим, что исходя из общепринятых научных и философских представлений, дихотомия подразумевает в общем случае произвольное (общее) деление целого на две составные части. То есть равенство частей не является ее необходимым атрибутом

Однако на практике часто под дихотомией понимают ее частный случай деления на две равные части. Здесь нет никакого противоречия, и вовсе не обязательно дихотомию переиначивать в бисегментацию. Кому как удобно. Просто априори оговаривают, какая именно дихотомия имеется в виду, и в последующем на этом не заостряют внимания.

Продолжая начатую мысль, в общем случае можно записать аналогичную сумму ряда бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q^{-1}, для которого $|q| > 1$

$$(q-1)\sum_{s=1}^{\infty} q^{-s} = 1 . \tag{10}$$

7. *Взаимосвязь чисел* Φ и π.

Всегда изумляли и продолжают удивлять разного рода поиски аналитической связи между двумя уникальными математическим константами, которая давно лежит буквально под ногами, выражается простой формулой [10, с. 47]

$$\Phi - 1 = \phi = 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

и имеет четкое геометрическое толкование: радиус окружности, описанной вокруг правильного десятиугольника с единичной длиной стороны, равен ровно Ф.

Какая здесь еще нужна связь?

Отсюда непосредственно следует и ряд единичных тождеств, записанных в разных адекватных интерпретациях:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \phi = 2\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) - \phi \equiv 1 ,$$

$$\Phi - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \Phi - 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \Phi \equiv 1 .$$

Заключение.

Конечно, это не полный перечень ключевых единичных тождеств.

Но было весьма неплохо составить, более обстоятельный список и оформить его в виде некоторой таблицы (как в химии у Менделеева).

Не исключено, что некоторые клеточки останутся незаполненными, и кто-то предложит свое видение по их оформлению.

Во всяком случае, на наш взгляд, вырисовывается довольно интересная и продуктивная идея, как в теоретическом, так и практическом плане.

Такая структура станет прототипом таблицы умножения для математизации (формализации) гармонии, если исходить из ее представления как связанности и соразмерности частей целого.

В целом базовые тождества гармонии могут стать прообразом аксиоматики для формирования (разработки) «математических начал (основ) гармонии» в терминологии М. Марутаева[1].

Автор будет рад любой публикации на тему единичных тождеств, за исключением тривиальных выражений вида $a/b=1$, которые образуются из равенства $a=b$.

Если кому-то покажется необязательным оформлять свои результаты в виде отдельной статьи, можно переслать свои соображения на наш электронный адрес texvater@rambler.ru с пометкой «Единичное тождество гармонии». Авторство гарантируется.

Наконец, в общей теории гармонии систем нужно еще раз продумать роль и место уравнений (операторов) вида $\Psi(\bar{z})=0$. Подобные статические и динамические системы характеризуются балансом сил и вполне подходят под категорию гармонии, в общем случае независимо от конкретного соотношения между элементами $\bar{z}$ внутри самой системы.

Здесь уже выкристаллизовывается другое философское содержание гармонии, которое ближе к физике с ее физическими величинами, такими как масса, сила, энергия и т.д.

Но это тоже часть мироздания, а, следовательно, и его гармонии.

Литература.

1. *Алферов С.А.* Простота или воровство: что выбрать? // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15290, 15.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161506.htm.

2. *Харитонов А.С.* Народ и власть: гармония интересов // Академия Тринитаризма. – М.: – Эл. № 77-6567, публ.15065, 02.02.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321100.htm.

3. *Куайн Уиллард Ван Орман.* Слово и объект: Пер. с англ. – М.: Логос, Праксис, 2000. – 386 с. – http://quine-ocr.narod.ru/.

4. *Василенко С.Л.* Гиперболические функции «золотого» сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14931 от 05.12.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321092.htm.

5. *Алферов С.А.* О "серебрянности" и не только (открытое письмо с комментариями А.П. Стахова) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13021, 24.02.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320021.htm.

6. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения. – Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

7. *Шевелев И.Ш.* Метаязык живой природы. – Кострома: Воскресенье, 2000. – 352 с.

8. *Харитонов А.С.* «Код да Винчи» и важные следствия из него // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13319, 16.05.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321015.htm.

9. *Саврухин А.П.* Природа элементарных частиц и золотое сечение. – Мытищи: МГУЛ, 2004. – 204 с. – http://savrukhin.narod.ru/links.html.

10. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

[1] *Марутаев М.* Аннотация новой книги, подготавливаемой мною к публикации. – http://www.marutaev.ru/book.htm.

Приложение

Данное приложение носит вспомогательный характер, больше касаясь обращения участников дискуссии, и составлено в виде подборки кратких замечаний по авторским работам А. Харитонова [2, 8], которая, возможно, окажется полезной для молодых ученых.

1. Соотношение $\frac{\phi + \phi^2}{2} = \frac{1}{2}$, названное автором как усреднение «золотого сечения», в математике обычно называется тождеством. В определенной мере это и усреднение, но только не самого "золотого" сечения (ЗС), поскольку ЗС – константа.

2. Соотношение (7) (в работе [2] формула 5) – это не статистические, а скорее комбинаторные закономерности. Какая-либо статистика в них просматривается слабо.

3. Как отмечается в статье [2] тождество (8) «означает, что разбиение целого на части в природе происходит равновесным (гармоничным) образом по "золотой пропорции"». На самом деле такого разбиения целого на части в природе нет (кроме деления клеток и т.п.), а оно только воспроизводится мыслительными усилиями человека в процессе анализа.

4. В целом вольное отношение к устоявшемуся в математике термину "статистический" в результате приводит к неразумностям, например, «Отечественные статистические модели дихотомны …», «В отечественной статистике … игнорируется положение, что в основе равновесных распределений лежит математика гармонии» и т.п.

5. Если речь идет о неких отечественных моделях, то термин «математика гармонии» в отечественной (надо полагать российской и русскоязычной) математике отсутствует. Есть математическая физика, но отсутствует «математика физики». Есть математические основы кибернетики, но никто не говорит «математика кибернетики». Существует понятие математических методов в биологии, но никогда ученый не скажет «математика биологии» и т.д. и.т.п.

По-моему, «математика <чего-то>», в том числе и «математика гармонии» – нонсенс. Математика, как и философия, "не обслуживает" отдельные науки или области человеческой деятельности, будь то химия или астрономия, архитектура или космология.

6. Формула (4) в работе [8] /она же формула (8) в [2]/ для описания энтропии как суммы хаоса и порядка

$$LnK = -\sum_{i=1}^{K} f_i Lnf_i + \sum_{i=1}^{K} f_i Ln(Kf_i)$$

достаточно хорошо известна.

Именно в такой записи и даже с такими же обозначениями она приведена, например, в работе А. Саврухина [9, с. 40], которая давно и свободно размещена в Интернете http://savrukhin.narod.ru/links.html:

$$S = \ln K = -\sum_{i=1}^{K} f_i \ln f_i + \sum_{i=1}^{K} f_i \ln Kf_i = -\sum_{i=1}^{K} f_i \ln f_i + \sum_{i=1}^{K} f_i \ln f_i + \sum_{i=1}^{K} f_i \ln K = \ln K \sum_{i=1}^{K} f_i = \ln K .$$

Сравнение и выводы читатель может сделать сам.