Самуил Арансон

Ещё раз о 4-й проблеме Гильберта

Часть I. История решения 4-й проблемы Гильберта

До сих пор не утихают споры о решении 23 математических проблем, сформулированных выдающимся математиком Давидом Гильбертом в докладе «Математические проблемы», прочитанном 8 августа 1900 г. на 2-м Международном Конгрессе математиков в Париже.

Не подлежит сомнению, что «**Проблемы Гильберта**» оказали исключительное влияние на все развитие современной математики. Эти проблемы охватывают почти все направления математической мысли; это объясняется тем, что Гильберт был математиком, в котором сила математической мысли соединялась с редкой широтой и разносторонностью.

Разносторонность эта была, если так можно выразиться, вполне сознательной: Гильберт постоянно делает упор на то, что математика едина, что различные ее части находятся в постоянном взаимодействии между собой и с науками о природе и что в этом взаимодействии не только ключ к пониманию самой сущности математики, но и лучшее средство против расщепления математики на отдельные, не связанные друг с другом части,- опасности, которая в наше время огромного количественного роста и устрашающей специализации математических исследований постоянно заставляет о себе думать.

Если обратиться к Википедии (статья: «**Проблемы Гильберта**», последнее обновление **21 сентября 2009**), то можно узнать следующее: «***Проблемы Гильберта*** — *список из 23 кардинальных проблем математики, представленный Давидом Гильбертом на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Тогда эти проблемы (охватывающие основания математики, алгебру, теорию чисел, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, группы Ли, вещественный и комплексный анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и теорию вероятностей, а также вариационное исчисление) не были решены*».

Там же мы находим следующий список «**Проблем Гильберта**»

1	нет консенсуса	Проблема Кантора о мощности континуума (Континуум-гипотеза)
2	нет консенсуса	Непротиворечивость аксиом арифметики.
3	решена	Равносоставность равновеликих многогранников
4	слишком расплывчатая	**Перечислить метрики, в которых прямые являются геодезическими**
5	решена	Все ли непрерывные группы являются группами Ли?
6	не математическая	Математическое изложение аксиом физики
7	решена	Доказать, что число $2^{\sqrt{2}}$ является трансцендентным (или хотя бы иррациональным).
8	открыта	Проблема простых чисел (гипотеза Римана и проблема Гольдбаха)
9	частично решена	Доказательство наиболее общего закона взаимности в любом числовом поле
10	решена	Задача о разрешимости диофантовых уравнений
11	решена	Исследование квадратичных форм с произвольными алгебраическими числовыми коэффициентами

12	открыта	Распространение теоремы Кронекера об абелевых полях на произвольную алгебраическую область рациональности
13	решена	Невозможность решения общего уравнения седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух переменных
14	решена	Доказательство конечной порождённости алгебры инвариантов алгебраической группы
15	частично решена	Строгое обоснование исчислительной геометрии Шуберта
16	частично решена	Топология алгебраических кривых и поверхностей
17	решена	Представление определённых форм в виде суммы квадратов (см. Семнадцатая проблема Гильберта)
18	решена	Конечность числа кристаллографических групп; нерегулярные заполнения пространства конгруэнтными многогранниками; наиболее плотная упаковка шаров(решена???)
19	решена	Всегда ли решения регулярной вариационной задачи Лагранжа являются аналитическими?
20	решена	Общая задача о граничных условиях
21	решена	Доказательство существования линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии
22	решена	Униформизация аналитических зависимостей с помощью автоморфных функций
23	решена	Развитие методов вариационного исчисления

Анализ этой таблицы показывает, что на данный момент решены **16 проблем из 23**. По 1-й и 2-й проблемам у математиков нет консенсуса, **4-я проблема сформулирована слишком расплывчато и нечётко поставлена, чтобы судить о том**, **решена она или нет**, 6-я проблема не является математической, 8-я проблема открыта, 9-я проблема решена только частично, 12-я проблема открыта, 15-я и 16-я проблемы решены только частично.Аналогичное мнение, согласно вышеуказанной статьи в Википедии, высказали также математики Рови (**Rowe**) и Грей (**Gray**).

Такое же мнение о решённых и нерешённых проблемах Гильберта можно найти также в недавней статье «**Не совсем элементарная геометрия Алексея Погорелова**», посвящённой 90-летию со дня рождения выдающегося математика XX столетия Алексея Васильевича Погорелова , опубликованной в «**Технической украинской газете**» (**Киев**, **26 марта 2009 года, №13**).

В этой статье слова: «*Алексей Васильевич решил четвёртую проблему Гильберта*» сопровождены следующими комментариями (дословно): «*На данный момент решены всего 16 проблем из 23. Ещё 2 не являются корректными математическими* (***одна сформулирована слишком расплывчато, чтобы понять, решена она или нет***, *другая, далёкая от решения,-физическая, а не математическая). Из оставшихся 5 проблем две не решены никак, а три-только для некоторых случаев*».

В нашей статье мы будем интересоваться только решением **4-й проблемы Гильберта**. Так в чем же суть этой проблемы?

Сначала процитируем слова самого **Давида Гильберта** об этой проблеме, названной им «**Проблемой о прямой как кратчайшем соединении двух точек**»:

«*Так проблема о кратчайшей линии играет важную историческую и принципиальную роль одновременно в основаниях геометрии, в теории кривых на поверхностях, в механике и в вариационном исчислении....*

Более общий вопрос, возникающий при этом заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии...»

Под ближайшими к **евклидовой геометрии Гильберт** указал **геометрию Лобачевского** (гиперболической геометрии), **геометрию Римана** (эллиптическую геометрию), **неархимедовы геометрии и геометрию Минковского.**

Необходимо отметить, что решением этой проблемы занимались многие математики. История вопроса о научных результатах, относящихся к **4-ой проблеме Гильберта** на русском языке подробно изложена как в самом докладе **Гильберта,** так и в комментариях к этому докладу, сделанных **И.М. Ягломом**«**К четвёртой проблеме Гильберта**» в сборнике «**Проблемы Гильберта**» (под редакцией **П.С.Александрова**),Москва:Наука,**1969,** 240 с. (эта книга в дальнейшем была также переиздана), а также в статье американского геометра **Г. Буземана «О четвёртой проблеме Гильберта**»,Успехи математических наук,**1966,** Т.21, вып.1,(127) с.155-164.

В частности, **Г.Буземан** считает, что «*даже постановка четвёртой проблемы Гильберта является неоправданно широкой, достаточный простор остаётся здесь ещё и при наложении на рассматриваемую геометрию тех или иных дополнительных условий*». В то же время, как отмечает **Г.Буземан**, «*Гильберт рассматривает анализ понятия расстояния как часть проблемы*»

Первым вкладом в решение этой проблемы является диссертация немецкого математика **Гамеля**, защищённая в 1901 г. под руководством **Гильберта (**на русском языке результаты **Гамеля** и комментарии к нему читатель может найти в вышеуказанных статьях **Г.Буземана** и **И.М. Яглома).** Как указано в этих статьях, «*работа **Гамеля**, разумеется не исчерпала всего, что можно сказать о четвёртой проблеме Гильберта, другие подходы к которой неоднакратно предлагались и позже*».

Остановимся более подробно на важном вкладе в решение этой проблемы, сделанным выдающимся советским математиком **А.В. Погореловым**, автором книги «**Четвертая проблема Гильберта**», Москва:Наука, **1974,** 80 с.

По мнению американского геометра **Г. Буземана**, «***А.В. Погорелов** получил исключительно изящный результат, позволяющий находить все такие двумерные пространства с симметричной метрикой посредством некоторой единой конструкции, восходящей к интегральной геометрии*»**.**

Аннотация к этой книге гласит следующее:

«*Книга содержит решение известной проблемы Гильберта об определении всех с точностью до изоморфизма реализаций систем аксиом классических геометрий (Евклида, Лобачевского, эллиптической), если в них опустить аксиомы конгруэнтности, содержащие понятие угла, и пополнить эти системы аксиомой «неравенство треугольника».Книга рассчитана на студентов-геометров старших курсов, аспирантов и научных работников*»**.**

Почему же в таком случае в упомянутой выше таблице «**Проблемы Гильберта**» в Википедии (**сентябрь 2009 года**) отсутствует указание на решение этой проблемы **А.В. Погореловым**, а также в украинской газете «**Техническая украинская газета**» (**Киев, март 2009 года**) в специальной статье, посвящённой 90-летию **А.В.. Погорелова**, относительно **4-ой проблемы Гильберта**, решённой **А.В. Погореловым,** сказано, что «*она сформулирована слишком расплывчато, чтобы понять, решена она или нет*».

С нашей точки зрения, ответ на этот далеко не простой вопрос состоит в следующем. Как следует из книги **А.В. Погорелова** «**Четвёртая проблема Гильберта**», у него подход к построению геометрий Евклида, Лобачевского и Римана аксиоматический, как, впрочем, и у Евклида, Лобачевского и Римана.

А именно, **Погорелов** выполняет следующие операции.

1.Он берёт для каждой из этих геометрий соответствующую ранее этим геометриям известную систему аксиом, удовлетворяющую условиям *независимости, непротиворечивости и полноты*, что уже сделано до него усилиями Евклида (геометрия Евклида), Пуанкаре, Бельтрами, Лобачевского (геометрия Лобачевского), Римана (геометрия Римана) и других авторов. Реализация этих геометрий с этим набором аксиом уже давно была известна до Погорелова. Таких реализаций было известно конечное число.

2.Среди этих аксиом для каждой из этих трёх геометрий встречаются две аксиомы конгруэнтности (в смысле равенства)

Аксиома конгруэнтности отрезков

Если два отрезка конгруэнты (равны) третьему отрезку, то они конгруэнты между собой

Аксиома конгруэнтности углов

Если два угла конгруэнтны (равны) третьему, то они конгруэнтны между собой.

3.Погорелов выбрасывает аксиому конгуэнтности углов, заменяя её аксиомой неравенства треугольника: *«длина любой стороны треугольника всегда не превосходит сумму длин двух его других сторон»*.

В случае такой замены для каждой из этих геометрий аксиома конгруэнтности углов становится ТЕОРЕМОЙ, если реализовывать геометрии Евклида, Лобачевского или Римана. В противном случае, система аксиом Погорелова не может удовлетворять трём условиям: *независимости, непротиворечивости и полноты*.

После фактического доказательства этой теоремы, каким бы изящным методом она не получена, состоящей в реализации этих аксиом, автоматически восстанавливаются все прежние системы аксиом для геометрий Евклида, Лобачевского и Римана.

В этом, как нам кажется, и состоит **вклад Погорелова в четвёртую пробл**ему **Гильберта,** и, следовательно, то что он сделал, **не есть полное решение четвёртой проблемы Гильберта.**

4. Вот когда **Н.И.Лобачевский** вместо аксиомы Евклида (пятый постулат Евклида) (Аксиома параллельных прямых. «*Через любую точку, лежащую вне прямой, можно провести другую прямую, параллельную данной, и притом только одну*» **предложил свою аксиому** «*Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её*», сохранив при этом все остальные аксиомы, то это действительно была революция в геометрии.

В геометрии Римана (эллиптическая геометрия) аксиома о параллельных звучит так.*«Каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую. Эта аксиома противоречит системе аксиом евклидовой геометрии , если не исключить аксиому о параллельных Евклида..*

5. Ведь вместо аксиомы параллельных прямых мы могли бы использовать в качестве аксиомы свойство углов треугольника («сумма углов треугольника равна 180^o для геометрии Евклида, меньше 180^o для геометрии Лобачевского и больше 180^o для геометрии Римана»). Но тогда необходимо доказывать аксиому о параллельных прямых в ситуации для Евклида, Лобачевского и Римана, которая в этом случае становится ТЕОРЕМОЙ.

Эта теорема доказывалась у нас в университете для студентов, когда нам читался курс «Основания геометрии». Но никто же никогда не говорил тогда да и теперь, что это есть решение четвёртой проблемы Гильберта.

6. Именно поэтому в Википедии, последнее обновление которой было 21 сентября 2009 года, для четвёртой проблемы Гильберта говорится, что *«она слишком расплывчатая*» (чтобы говорить о её полном решении). И при этом не упоминаются ни фамилии Гамеля, ни фамилии Погорелова. Те же слова о «*расплывчатости четвёртой проблемы Гильберта*» (чтобы говорить о её окончательном

решении) приводятся и в недавней украинской газете «Техническая украинская газета» (Киев, март 2009 года) в статье, посвящённой 90-летию со дня рождения **А.В. Погорелова**.

7. В заключение к части I мне хочется также привести некоторые интересные мысли об **аксиоматическом подходе** и **проблемах Гильберта,** прочитанной лауреатом Государственной премии СССР академиком РАН **Д.В. Аносовым 5 декабря 1999 г.** для участников III Международного математического турнира старшеклассников "Кубок памяти А.Н. Колмогорова" - школьников 8-11 классов.

Текст данной брошюры, вышедшей в серии "Библиотека "Математическое просвещение", представляет собой обработку записи этой лекции.

Д. В. Аносов. Взгляд на математику и нечто из нее

О дедуктивном построении математики

Спустя две тысячи лет один молодой человек, скорее даже юноша, читал "Начала" ***Евклида.*** *Он читал формулировку теоремы, на секунду задумывался, представляя себе, о чем идет речь, ему становилось ясно, что она верна, и он, не читая доказательства, переходил к следующему утверждению. Паренек* ***не понимал сути дедуктивного построения геометрии*** *и* ***зачем оно нужно.*** *Что ж, он был не первым и не последним в этом отношении. Только это был* ***Ньютон.***

Так как это был ***Ньютон,*** *то впоследствии он это понял. Для своего времени он как раз в наибольшей степени следовал нормам* ***дедуктивного*** *построения научной теории.*

В школе обычно нет возможности полностью развернуть ***дедуктивное построение геометрии***. ***И не потому, что это сложно*** *(вспомните,* ***Ньютону*** *первые предложения Евклида вообще казались очевидными), а потому, что* ***это скучно и непонятно, зачем это нужно*** *(вспомните о нем же),* ***и требует времени***.

И надо следить, как бы ненароком не использовать что-нибудь совершенно нам ясное, но чего мы пока что еще не доказали. ***Предпринимались героические усилия, чтобы разработать сравнительно простую, легко обозримую аксиоматику*** *и чтобы строго логическое построение геометрии на ее основе было по возможности коротким и прозрачным…*

Внутренние математические проблемы

Вы, вероятно, знаете, что уже 100 лет регулярно проводятся Международные математические конгрессы. Так вот, при самом их начале, на первом и втором конгрессах, состоялись доклады крупнейших математиков того времени –

А. Пуанкаре и Д. Гильберта, *- посвященные двум первым компонентам развития математики - вопросам, связанным с физикой (в то время значение других приложений для развития самой математики было значительно меньше, чем значение физики, да и сейчас она в этом отношении лидирует, хотя и не в такой степени), и проблемам, возникающим в самой математике….*

Несколько слов в связи с докладом ***Гильберта***. *Сперва исторический нюанс: он был как бы спровоцирован докладом Пуанкаре:* ***Гильберт захотел показать, что важнейшие стимулы для развития математики имеются внутри ее самой.***

Доклад ***Гильберта*** *содержит сравнительно небольшую <u>первую часть</u>, где Гильберт в общих чертах говорил о значении конкретных проблем для развития математики, и наиболее знаменитую <u>вторую часть</u>, где он привел ряд таких проблем с небольшими комментариями.*

Переходя к формулировке конкретных проблем, ***Гильберт*** *сказал: "Разрешите мне в дальнейшем, как бы на пробу, назвать несколько определенных проблем из различных математических дисциплин, проблем, исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки".*

А заканчивая, он сказал, что "названные проблемы - это только образцы ***проблем****"… Они оказали большое стимулирующее влияние на развитие математики в XX веке.*

*Надо оговориться, что некоторые из проблем Гильберта относились скорее к разработке систематических теорий, они звучали примерно так****: "Исследовать такие-то вопросы с такой-то точки зрения".*** *Но большинство проблем - это были вполне конкретные вопросы, на которые требовалось ответить "да" или "нет"…****Почти все задачи Гильберта теперь решены, правда, некоторые - не полностью****.*

Особенно мало я сказал о ***приложениях****. Что вы, вероятно, знаете хуже - это как и в какой степени* ***приложения, причем они бывают очень различными, поныне стимулируют развитие самой математики****.*

Но раз уж я начал с цитаты из литературного классика, цитатой и кончу:

"Никто необъятного объять не может".

Часть 2. Решение 4-й проблемы Гильберта, основанное на «золотой» фибоначчивой гониометрии[1]

Давайте еще раз проанализируем цитату из статьи о кафедре геометрии Харьковского университета, в которой утверждается*: "В 1974 году в книге «Четвертая проблема Гильберта»* ***Алексей Васильевич решил эту проблему в следующем смысле:*** *он определил с точностью до изоморфизма все реализации тех систем классических геометрий (Евклида, Лобачевского и эллиптической), в которых опущены аксиомы конгруэнтности, содержащее понятие угла, и которые дополнены аксиомой «неравенство треугольника»*.

Таким образом, здесь утверждается, что **Погорелов** решил проблему в "**определенном смысле**".То есть, если даже согласиться, что **Погорелов решил** **4-ую проблему Гильберта,** то речь идет лишь о решении **не в полном** , а в **"определенном смысле",** то есть, **частном решении этой проблемы,** откуда вытекает, что **вполне возможны решения 4-й проблемы Гильберта и в "других смыслах",** поскольку сама проблема считается **"весьма расплывчатой",** то есть 4-я проблема Гильберта является, несомненно, одной из самых сложных.

Именно поэтому решение проблемы, изложенное в следующих статьях:

1). **Стахов А.П., Арансон С.Х.** *Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта* // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm

2). **Stakhov, A.P. Aranson, S.Kh.** "*Golden" Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert's Fourth Problem.* Congressus Numerantium, 193 (2008), 119-156,

является нашим **оригинальным решением 4-й проблемы Гильберта**, которое радикальным образом отличается от решения, изложенного в книге **Погорелова.**

Мы же нигде не говорим о том, что у нас получено **абсолютно полное и законченное** решение этой проблемы, хотя эти слова в разных вариациях иногда приписывают **А.В. Погорелову** его доброжелатели, **но сам Алексей Васильевич,** который в жизни был чрезвычайно скромным человеком, нигде это не утверждает.

В основе нашего решения лежит так называемая **«золотая» фибоначчиевая гониометрия**, изложенная в статье **Стахов А.П.** *Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи*

[1] Гониометрия - часть тригонометрии, определяющая тригонометрические функции и соотношения между ними (см. стб. 1076) в «Математической энциклопедии» (под редакцией И.М. Виноградова), Москва: Советская энциклопедия, 1977 , Том 1. А-Г, 1152 стб. , а не только часть геометрии, в которой рассматриваются лишь способы измерения углов.

и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, **21.12.2006.**

Эта гониометрия основана на так называемых «металлических пропорциях», введенных **Верой Шпинадель**.

Развивая идею **метрической формы плоскости Лобачевского,** задаваемой выражением

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2 \qquad (1)$$

в упомянутых выше работах **Стахова** и **Арансона** предложено бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \quad cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \qquad (2)$$

где

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \qquad (3)$$

«металлические пропорции», задаваемые для любого действительного числа $\lambda > 0$.

Новые метрические формы Лобаческого задаются в координатах $(u,v), 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$, имеют при <u>**любых вещественных**</u> $\lambda > 0$ <u>***гауссову кривизну***</u> $K = -1$ и представляются в виде

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \qquad (4)$$

где $\Phi_\lambda = \dfrac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - *металлическая пропорция* и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи. Формы (4) названы *метрическими λ-формами плоскости Лобачевского.*

Отметим, что <u>**вопрос нахождения**</u> метрических квадратичных форм

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2 \bullet F(u,v)\, dudv + G(u,v)dv^2,$$

при <u>**заданной**</u> **гауссовой кривизне** *K* (в нашем случае *K*=-1 при любом λ>0) сводится к решению уравнения в **частных производных**

$$K = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} + \frac{1}{W}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{F_v - G_u}{W} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{F_u - E_v}{W}\right\},$$

где

$$W^2 = EG - F^2.$$

Существуют и другие формы записи вышеуказанного уравнения в частных производных для нахождения коэффициентов метрических форм .

Рассмотрим частные случаи метрических λ-форм плоскости Лобачевского, задаваемых (4).

1) «**Золотая» метрическая форма плоскости Лобачевского**

Для случая $\lambda = 1$ мы имеем $\Phi_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ – *золотая пропорция*, и, следовательно, метрическая форма (4) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}\left[sFs(u)\right]^2 (dv)^2, \qquad (5)$$

где $\ln^2(\Phi_1) = \ln^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.231565$ и $sFs(u) = \frac{\Phi_1^u - \Phi_1^{-u}}{\sqrt{5}}$ - симметричный гиперболический синус Фибоначчи, задаваемый (2).

Будем называть метрическую форму (5) *«золотой» метрической формой плоскости Лобачевского*.

2) «Серебряная» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 2$ мы имеем $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2.1421$ - *серебряная пропорция,* и, следовательно, метрическая форма (4) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2\left[sF_2(u)\right]^2 (dv)^2, \qquad (6)$$

где $\ln^2(\Phi_2) \approx 0.776819$ и $sF_2(u) = \frac{\Phi_2^u - \Phi_2^{-u}}{2\sqrt{2}}$ - симметричный гиперболический 2-синус Фибоначчи (2).

Будем называть метрическую форму (6) *«серебряной» метрической формой плоскости Лобачевского*.

3) «Бронзовая» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 3$ мы имеем $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$ - *бронзовая пропорция* и, следовательно, форма (4) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}\left[sF_3(u)\right]^2 (dv)^2 \qquad (7)$$

где $\ln^2(\Phi_3) \approx 1.42746$ и $sF_3(u) = \frac{\Phi_3^u - \Phi_3^{-u}}{\sqrt{13}}$ - симметричный гиперболический 3-синус Фибоначчи, задаваемый (2).

Будем называть метрическую форму (7) *«бронзовой» метрической формой плоскости Лобачевского*.

4) «Медная» метрическая форма плоскости Лобачевского

Для случая $\lambda = 4$ мы имеем $\Phi_4 = 2 + \sqrt{5} \approx 4.23607$ - *медная пропорция* и, следовательно, форма (4) сводится к следующему:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5\left[sF_4(u)\right]^2 (dv)^2, \qquad (8)$$

где $\ln^2(\Phi_4) \approx 2.08408$ и $sF_4(u) = \frac{\Phi_4^u - \Phi_4^{-u}}{2\sqrt{5}}$ - симметричный гиперболический 4-синус Фибоначчи, задаваемый (2).

Будем называть метрическую форму (8) *«медной» метрической формой плоскости Лобачевского*

5) **Классическая метрическая форма плоскости Лобачевского**

Для случая $\lambda = \lambda_e = 2sh(1) \approx 2.350402$ мы имеем $\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$ - *число Непера* и, следовательно, форма (4) сводится к выражению (1), то есть, к известной *классической метрической форме плоскости Лобачевского,* задаваемой в *псевдогеодезических* координатах (u,v), где $0<u<+\infty$, $-\infty <v<+\infty$.

При любом $\lambda > 0$ каждая из метрических форм (4) **изометрична** классической метрической форме Лобачевского (1).

В Таблице ниже сведены выражения для всех рассмотренных выше частных случаев метрических λ-форм плоскости Лобачевского.

Таблица. Метрические λ – формы Лобачевского

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая λ – форма Лобачевского	$\lambda > 0$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}[sF_\lambda(u)]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda = 1$	$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}[sFs(u)]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda = 2$	$\Phi_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.1421$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2[sF_2(u)]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda = 3$	$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}[sF_3(u)]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda = 4$	$\Phi_4 = 2+\sqrt{5} \approx 4.23607$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5[sF_4(u)]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e \approx 2.350402$	$\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$	$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2$

Общий итог исследования, выполненного в упомянутых работах Стахова и Арансона, состоит в том, что получено бесконечное множество метрических λ – форм плоскости Лобачевского ($\lambda > 0$-заданное положительное число), задаваемых выражением (4). Все эти формы имеют гауссову кривизну *K*= -1 и изометричны классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (1).

А это означает, что полученные в этих работах новые *модели плоскости Лобачевского,* основанные на «металлических пропорциях» (3), вместе с классическими геометриями Лобачевского, Римана и Минковского *"могут рассматриваться как ближайшие геометрии к обыкновенной геометрии Евклида"* (**Давид Гильберт**).

Таким образом, результаты, полученные **Алексеем Стаховым** и **Самуилом Арансоном**, являются **определенным вкладом** в решение 4-й проблемы Гильберта. Ничего подобного в работах выдающегося геометра А.В. Погрелова, к которому я отношусь с глубоким уважением, нет.

В заключение я хотел бы сделать замечание в адрес некоторых дилетантских статей, публикуемых на сайте Академии Тринитаризма. Я не против критики, если она поступает от серьезных исследователей, специалистов в этой области. Но я против пустых и непрофессиональных статей, которые в последнее время заполняют страницы этого замечательного сайта. Полемики по существу нет, потому что не с кем полемизировать, а рейтинг сайта от таких публикаций при этом резко снижается.

Я представляю, какие громы и молнии я привлеку этой статьёй на свою голову. Но, господа, грустно и скучно тратить драгоценное время на бесконечные дискуссии, смысл которых – упражнения в острословии, когда открываются такие перспективы в развитии настоящей науки и фундаментальных исследований !

Дерзайте, господа!

С уважением,

доктор физ-мат наук, профессор, Заслуженный деятель науки России, академик РАЕ, С.Х. Арансон.