Ю. Д. Григорьев, Г. Я. Мартыненко

Об одном классе алгебраических уравнений с фибоначчиевыми коэффициентами

Для представления последовательности Фибоначчи и его «дочерних» и «внучатых» вариантов могут использоваться различные варианты визуализации: треугольник Паскаля, диаграммы Венна, матрицы Стахова, треугольники Мартыненко, фигурные числа (Стахов, 2003; Газале, 2002; Абачиев, 2009; Мартыненко, 2009 а–в) и др. В докладе приводится математическое обоснование *треугольника Мартыненко*, в котором упорядочены трехчленные алгебраические уравнения, корнем которых является золотое число $\varphi = 1{,}618$. Попутно обсуждается обобщение формулы Кассини, возникающее при матричном анализе треугольника Мартыненко.

1. Математическое обоснование

В работе (Мартыненко, 2010) рассмотрен класс Ω многочленов

$$F_j x^{i+1} - F_{i+1} x^j + (-1)^j F_{i+1-j},\ \ i \ge j \ge 1,\ \ (1)$$

Относительно которых высказана гипотеза, что в качестве наибольшего общего делителя все они имеют *многочлен Фибоначчи* $d(x) = x^2 - x - 1$. Другими словами, все многочлены $f \in \Omega$ имеет два общих корня с уравнением Фибоначчи $d(x) = 0$, равных $x_1 = \Phi$ и $x_2 = -\Phi^{-1}$. Если расположить многочлен (1) в виде треугольной матрицы (в табл. 1 i и j – номера строк и столбцов соответственно), то получим *золотой треугольник Фибоначчи.*

Таблица 1

Многочлены $F_j x^{i+1} - F_{i+1} x^j + (-1)^j F_{i+1-j}$, $i \ge j \ge 1$

i/j	1	2	3	4	5
1	$x^2 - x - 1 = 0$				
2	$x^3 - 2x - 1 = 0$	$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$			
3	$x^4 - 3x - 2 = 0$	$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$	$2x^4 - 3x^3 - 1 = 0$		
4	$x^5 - 5x - 3 = 0$	$x^5 - 5x^2 + 2 = 0$	$2x^5 - 5x^3 - 1 = 0$	$3x^5 - 5x^4 + 1 = 0$	
5	$x^6 - 8x - 5 = 0$	$x^6 - 8x^2 + 3 = 0$	$2x^6 - 8x^3 - 2 = 0$	$3x^6 - 8x^4 + 1 = 0$	$5x^6 - 8x^5 - 1 = 0$
6	$x^7 - 13x - 8 = 0$	$x^7 - 13x^2 + 5 = 0$	$2x^7 - 13x^3 - 3 = 0$	$3x^7 - 13x^4 + 2 = 0$	$5x^7 - 8x^6 - 1 = 0$

Положив в данном треугольнике $i = 2k - 1$, мы выделим в Ω подкласс многочленов

$$g(x) = F_j x^{2k} - F_{2k} x^j + (-1) F_{2k-j}.$$

Эти многочлены четной степени интересны тем, что входящий в них коэффициент $F_{2k} = F_k L_k$.

Далее нам понадобится рассмотрение результанта $R(f,d)$ многочлена Мартыненко $f \in \Omega$ и многочлена Фибоначчи $d(x)$. Поэтому сначала для наглядности последующих выводов рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть в $f \in \Omega$, $i = 4, j = 2$. Тогда $f = x^5 - 5x^2 + 2$, а $R(f,d)$ – определитель 7-го порядка вида

$$R(f,d)=\left|\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right|$$

В общем случае $R(f,d)$ записывается в блочном виде

$$R(f,d)=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|, \qquad (2)$$

где $A=(a_{ij})$ – верхняя треугольная матрица порядка $i+1$ с элементами

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ -1, & j=i+1, i+2 \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases} \qquad (3)$$

Матрица $B=(0 \quad H)^T$ составлена из нулевой $((i-1)\times 2)$-матрицы и матрицы $H=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D=(-1)^j\begin{pmatrix} F_{i+1-j} & 0 \\ 0 & F_{i+1-j} \end{pmatrix}$. Наконец, матрица C размерности $2\times(i+1)$ содержит коэффициенты многочлена f и имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} F_j & 0 & \ldots & -F_{i+1} & 0 & \ldots \\ 0 & F_j & \ldots & 0 & -F_{i+1} & \ldots \end{pmatrix},$$

где символом … помечены нулевые элементы. Размерность нулевых блоков в матрице C усматривается из значений индексов i и j. Далее при вычислении результанта $R(f,d)$ нам понадобится следующая

Лемма 1. *Матрица* $A^{-1}=(a^{ij})$, *обратная к A, имеет вид*

$$a^{ij}=\begin{cases} F_{j+1-i}, & i\le j \\ 0 & \textit{иначе} \end{cases} \qquad (4)$$

Пример 2. Согласно (4) получаем

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат (4) перекликается с еще одним известным матричным представлением чисел Фибоначчи (Stakhov, 1999). Рассмотрим простейшую квадратную матрицу второго порядка следующего вида

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Определитель этой матрицы равен $\Delta_Q=-1$.

Возведем эту матрицу в степень n. В результате получим

$$Q_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где F_n – числа Фибоначчи. Если теперь вычислить определитель матрицы Q^n, то придем к *тождеству Кассини*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n = (-1)^n. \qquad (7)$$

Поскольку $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$, то характеристическое уравнение матрицы $Q_n = Q^n$ принимает вид

$$\lambda^2 - L_n\lambda + (-1)^n = 0.$$

Отсюда находим, что собственные числа $\lambda_{1,2}$ матрицы (6) являются степенями золотого сечения φ:

$$\lambda_{1,2} = \frac{L_n \pm \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2} = \varphi^{\pm n}. \qquad (8)$$

Теорема 1. *Для любых k и n справедливо тождество*

$$F_{k+j}F_{k+(n-j)} - F_kF_{k+n} = (-1)^k F_jF_{n-j},\ j < n. \qquad (9)$$

Доказательство теоремы проводится двойной индукцией по индексам *n* и *j*. Оно достаточно громоздко, и мы его опускаем.

Из теоремы 1 вытекает, что *тождество Кассини* (7) *является частным случаем тождества* (9). Действительно, из (9), положив $n = 2,\ j = 1$ и сделав в дополнение к этому замену переменной $r = k + 1$, получим требуемый результат, т. е. (7).

Пример 3. Пусть $n = 6,\ j = 4,\ k = 2$. Тогда согласно (9) приходим к равенству

$$F_6F_4 - F_2F_8 = (-1)^2 F_4F_2,$$

которое легко проверить с помощью чисел Фибоначчи – см табл. 2.

Из (10) видно, что произведения в левой части тождества образуют симметрийную структуру, в которой F_2 и F_8 – обрамляющие члены, а F_2 и F_4 – центральные, а правая часть представляет собой произведение двух левых членов четверки. Такая или приблизительно такая картина получается и при других значениях коэффициентов (Мартыненко, 2009 г). В этом читатель может убедиться самостоятельно. Впрочем, эта проблема заслуживает отдельного обсуждения.

Таблица 2

Числа Фибоначчи

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Теорема 2. *Многочлен Фибоначчи* $d(x) = x^2 - x - 1$ *является наибольшим общим делителем многочленов, представленных в табл. 1.*

Доказательство. Пусть $f \in \Omega$ – произвольный многочлен. Покажем, что $R(f,d) = 0$. Будем записывать результант $R(f,d)$ следующим образом: в первых $i+1$ строках размещаем коэффициенты многочленов *d*, в оставшихся двух строках – коэффициенты многочлена *f*.

Согласно представлению (2), учитывая что $|A|=1$, необходимо доказать равенство $|D-CA^{-1}B|=0$. На самом деле имеет место матричное равенство $D=CA^{-1}B$, из которого следует требуемое равенство для определителей. Действительно, прямым перемножением получаем

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix} F_{i+2} & F_{i+2} & \dots & F_3 & F_2 \\ F_{i+1} & F_i & \dots & F_2 & F_1 \end{pmatrix}^T.$$

Отсюда, применяя равенство (5) для вычисления произведения $CA^{-1}B$ (для этого последовательно полагаем в (1) $j=i, i-1, i-2, i\geq 2$ и т. д.), убеждаемся в справедливости равенства $D=CA^{-1}B$. Этим способом мы перебираем все многочлены треугольной табл. 2 по диагоналям: сначала на главной $(i=j)$, затем на ближайшей к ней поддиагонали $(j=i-1)$ и т. д. Теорема доказана.

2. Симметрийные свойства золотого треугольника

Теперь, когда золотой треугольник строго обоснован, остановимся на его симметрийных свойствах (Мартыненко, 2009 в). Треугольник представляет собой пространственную систематику уравнений (1), корнем которых является золотое число φ =1,618. Классификация имеет вид треугольника, «вершиной» которого является уравнение Фибоначчи $x^2-x-1=0$, а боковыми «сторонами» – цепочки уравнений М. Газале и А. Стахова (Газале, 2002; Стахов, 2002), также ставшие классическими. Пространство между сторонами заполняют другие теоретически возможные варианты уравнений.

В данной работе, несколько изменена ориентация треугольника, а также подвергнут преобразованию внешний облик уравнений. Этим достигнута большая наглядность, картинность и информативность золотого треугольника. При таком способе более откровенно проглядывают симметрийные свойства пространственно-числовых структур.

Итак, новая версия треугольника выглядит так:

$x-\frac{1}{x}=1$						
$x^2-\frac{1}{x}=2$	$x+\frac{1}{x^2}=2$					
$x^3-\frac{2}{x}=3$	$x^2+\frac{1}{x^2}=3$	$2x-\frac{1}{x^3}=3$				
$x^4-\frac{3}{x}=5$	$x^3-\frac{2}{x^2}=5$	$2x^2-\frac{1}{x^3}=5$	$3x+\frac{1}{x^4}=5$			
$x^5-\frac{5}{x}=8$	$x^4-\frac{3}{x^2}=8$	$2x^3-\frac{2}{x^3}=8$	$3x^2+\frac{1}{x^4}=8$	$5x-\frac{1}{x^5}=8$		
$x^6-\frac{8}{x}=13$	$x^5-\frac{5}{x^2}=13$	$2x^4-\frac{3}{x^3}=13$	$3x^3+\frac{2}{x^4}=13$	$5x^2-\frac{1}{x^5}=13$	$8x+\frac{1}{x^6}=13$	
$x^7-\frac{13}{x}=21$	$x^6-\frac{8}{x^2}=21$	$2x^5-\frac{5}{x^3}=21$	$3x^4+\frac{3}{x^4}=21$	$5x^3-\frac{2}{x^5}=21$	$8x^2+\frac{1}{x^6}=21$	$13x-\frac{1}{x^7}=21$

Каждое уравнение в таблице представлено в виде степеней прямых и обратных чисел, сумма или разность которых дает целое число. При таком представлении «фибоначчиевая сущность» треугольника в разных направлениях выглядит просто вызывающе, но такой вызов для фибоначчиста отраден. Еще более наглядно симметрийные свойства данного треугольника проявляются в трех частных мини-треугольниках, приведенных ниже:

Треугольник свободного члена

1
2 2
3 3 3
5 5 5 5
8 8 8 8 8
13 13 13 13 13 13

Треугольник старшего члена

1
1 1
1 1 2
1 1 2 3
1 1 2 3 5
1 1 2 3 5 8

Треугольник среднего члена

1
1 1
2 1 1
3 2 1 1
5 3 2 1 1
8 5 3 2 1 1

Представляется, что комментарии здесь излишни. Определенные регулярности наблюдаются также и в чередовании положительных и отрицательных значений во втором члене уравнений, расположенных в правой половине основного треугольника.

Заключение.

1. В докладе приводится математическое обоснование треугольника Мартыненко, в котором упорядочены трехчленные алгебраические уравнения, корнем которых является золотое число $\varphi = 1{,}618$.
2. Получено обобщенное уравнение, частным случаем которого является тождество Кассини.
3. Построен золотой треугольник трехчленных алгебраических уравнений произвольных степеней, в котором уравнение золотого сечения, уравнения Стахова, Газале и другие уравнения упорядочены в соответствии с числами Фибоначчи.

Литература

Абачиев С. К. Радужная фрактальность треугольника Паскаля.
http://spkurdyumov.narod.ru/Mat100.htm#Ma344 .
Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.
Мартыненко Г. Я. (2009 а) Золотой треугольник Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15408, 16.07.2009.
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321139.htm

Мартыненко Г. Я. (2009 б) Классификационный треугольник уравнений, связанных с золотым сечением // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15306, 27.05.2009. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322072.htm
Мартыненко Г. Я. (2009 в) Симметрийные свойства Золотого Треугольника // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15521, 09.09.2009. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321157.htm
Мартыненко Г. Я. (2009 г) Обобщение формулы Кассини для последовательностей Фибоначчи и Люка. «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15160, 14.03.2009. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322015.htm
Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Советское радио, 1977. – 288 с.
Стахов А. П. Сакральная геометрия и математика гармонии // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та містецтві. Вінниця: Вінницький державний аграрний університет, 2003. С. 8–26.