Г.Я.Мартыненко

Формула Де Муавра-Бине

Тема, обозначенная в заголовке данной статьи, частично обсуждалась в моей статье (Мартыненко, 2010), однако в пространном тексте она могла оказаться незамеченной. Это побудило меня обратить на нее особое, заостренное внимание.

Формула Бине является одним из краеугольных камней математики гармонии. Жак Филиппа Мари Бине (1786–1856) – французский математик, астроном и механик. Его формула связывает числа Фибоначчи с золотым сечением. Бине был одним из основателей матричной алгебры и первым (1812 г.) опубликовал правило умножения матриц. Определенный вклад он внес и в теорию чисел, открыв ранее неизвестные свойства алгоритма Эвклида. Ему принадлежит также ряд теорем в механике вращающихся тел.

Бине мы обязаны также и тем, что он открыл знаменитую бета-функцию и дал ей имя. Он показал также, что бета-функцию можно выразить через другие специальные функции, например, через гамма-функцию Лежандра:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Подобно тому, как гамма-функция для целых чисел является обобщением факториала, бета-функция является обобщением биномиальных коэффициентов, напрямую – через треугольник Паскаля связанных с числами Фибоначчи.

Что касается формулы Бине, которая играет в математике гармонии важную роль, то ее настоящим автором является выдающийся математик Де Муавр, предложивший эту формулу за 100 лет до Бине, причем в более широком математическом контексте.

Перечень математических достижений Де Муавра впечатляет:

1. Он первым ввел классическое определение вероятности, которое используется и по настоящее время.

2. Он является автором нормального закона, осуществив аппроксимацию дискретного биномиального распределения непрерывным. Этот закон вслед за Муавром был переоткрыт Гауссом и Лапласом. Термин «нормальный закон» ввел Карл Пирсон

3. Для приближенного вычисления факториала он предлагает формулу Стирлинга. Под именем последнего она входит в историю.

4. Вводит в научный оборот формулу, позволяющую оценить, насколько хорошо реальная выборка отражает свойства генеральной совокупности (эта формула носит имя Де Муавра – на нее никто не рискнул претендовать).

5. Вслед за Бернулли разрабатывает исчисление конечных разностей и теорию рекуррентных последовательностей. Предлагает формулу, вошедшую

в историю математики как формула Бине. Связывает исчисление конечных разностей с исчислением бесконечно малых.

6. Является одним из основоположников математического анализа опубликовав в 1697 г. работу «Метод флюксий»

Ознакомившись с перечнем, мы видим, что, будучи часто первоотрывателем важных математических закономерностей, Де Муавр «уступал» свое авторство другим ученым. Что это? – скромность Муавра или бесцеремонность других ученых? Например, Лаплас никогда не ссылался на работы коллег. Или это объясняется тем, что Де Муавр публиковался в малоизвестных изданиях? Или причина в том, что языком науки в те времена был по преимуществу французский язык?

А теперь вернемся к проблеме приоритета Муавра и Бине.

В «Замечаниях о рекуррентных последовательностях» Д. Бернулли впервые (1728) дает название классу последовательностей, которые следуют такому определению: последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ называется рекуррентной, если ее общий член выражается рекуррентной формулой

$$a_n = m_1 \cdot a_{n-1} + m_2 \cdot a_{n-2} + ... + m_k \cdot a_{n-k}$$

Рекуррентные последовательности несколько ранее рассматривал и де Муавр (1722). Таковыми он считал арифметическую и геометрическую прогрессии, а также последовательность Фибоначчи, в которой действует рекуррентное правило:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Еще Кеплер обратил внимание на то, что отношение a_n / a_{n-1} в этой последовательности стремится к корню $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Эту последовательность использовал и Николай I Бернулли при решении квадратных уравнений (Юшкевич, с. 79). Позднее де Муавр, а за ним и Эйлер связали последовательность Фибоначчи с характеристическим уравнением.

Алгоритм образования последовательности Фибоначчи очень простой. Однако, несмотря на это, долгое время не было явной формулы для n-го члена. Такая формула была открыта лишь спустя 500 лет (1730) де Муавром. Для этого де Муавр использовал метод производящих функций, который играет большую роль в комбинаторике, теории вероятностей и теории чисел.

Формула де Муавра имеет вид:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Из этой формулы при различных целочисленных значениях n мы получаем целочисленные значения последовательности Фибоначчи, несмотря на то, что $\sqrt{5}$ – число иррациональное, т. е. эта формула связывает целочисленные значения последовательности Фибоначчи с иррациональным числом φ, являющегося одним из корней квадратного уравнения.

Формула де Муавра определяет последовательность Фибоначчи на основании последовательности в целом и ее поведения в бесконечности. В этой формуле определение F_n *становится явным (не рекурсивным)*, будучи выраженным через $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (Стилвел, с. 183–184). Иными словами, в данном случае мы имеем пример того, как алгебраические иррациональные числа помогают пролить свет на поведение целых чисел.

Исследование функций при прерывном изменении аргумента велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей, в котором специально изучаются функции с дискретно меняющимся аргументом, выделилось только в XVIII в. В этом исчислении оперируют приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента, а роль дифференциалов играют конечные разности функции $f(x)$, как-либо заданной в точках $x_k\left(k=1,2,3,\ldots,n\right)$: разности первого порядка $\Delta f(x)=f_{k+1}-f_k$, разности второго порядка $\Delta^2 f(x)=\Delta^2\left(f_{k+1}-f_k\right)$ и т. д. Алгоритм вычисления конечных разностей аналогичен алгоритму дифференцирования, а интегрированию соответствует суммирование разностей. Слово «конечные» в термине «конечные разности» используется в том смысле, что эти разности «не бесконечно малые», т. е. не связаны с предельными переходами. Поскольку дифференциальное исчисление занимается изучением пределов разностей, а исчисление конечных разностей – самими разностями, то естественно, что между этими двумя теориями существуют много параллелей.

Исчисление конечных разностей связано с изучением свойств и применений разностей между соседними членами какой-нибудь последовательности или между значениями функции в точках, расположенных с постоянным интервалом в некотором пространстве. Исчисления конечных разностей используются при интерполяции в математических таблицах, при суммировании числовых рядов, при вычислении интегралов и дифференцировании функций. Разности встречаются также в любой ситуации, когда надо описать поведение объекта, который испытывает воздействие меняющихся условий на определенном расстоянии (во времени и в пространстве).

Суммирование рекуррентных последовательностей, подобных последовательностям Фибоначчи, является одной из простых задач исчисления конечных разностей. Однако это исчисление приобрело статус самостоятельной математической дисциплины только в начале XVIII в. в трудах Ньютона («Метод разностей», 1811) и особенно его последователей и младших современников: Тэйлора, де Муавра и Стирлинга.

Сказанное означает, что *теория рекуррентных последовательностей, в частности, последовательности Фибоначчи, является частью исчисления конечных разностей, которая в свою очередь является разделом математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений* *и дифференциальных уравнений) для целочисленных аргументов*. Таким образом, математика гармонии с ее сочетанием целых и иррациональных чисел, органически влилась в новейшие математические теории, характерные для эпохи первой промышленной революции.

В дальнейшем исчисление конечных разностей разрабатывалась многими учеными: А.А. Марковым (Марков, 1910), Маркушевичем А.И. (Маркушевич, т. XXII), Гельфондом (Гельфонд, 1967), Соловьевым (Соловьев, 1987) и др.

Принято считать, что математика гармонии по преимуществу элементарная математика. Однако, это не совсем так. Ведь частью серьезных математических теорий она стала именно в период расцвета высшей математики в ее современном понимании.

Представляется также, что математика гармонии является одним из мостов, связывающих математику дискретного и математику непрерывного.

Литература

Гельфонд О. Г. Исчисление конечных разностей. М., 1967

Марков А. А. Исчисление конечных разностей. Одесса, 1910

Маркушевич А.И. Исчисление конечных разностей / Собрание сочинений, т. XXII, с. 376-379

Мартыненко Г.Я. Математика гармонии: Эпоха Просвещения — XVIII в. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ. 16071, 12.09.2010

Соловьев С.Д., Петрова С.С. Исчисление конечных разностей / *«Математика XIX века*. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей». Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1987, с. 240—285. Англ. перевод: Theory of finite differences. // Mathematics in XIX century. / Kolmogorov A.N., Youshkevitch A.P. (Eds.). Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 1998.

Стилвел Д. Математика и ее история. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

Юшкевич А. П. История математики. Математика XVIII столетия. М.: АНСССР. Институт естествознания и математики, 1972.