А.П. Стахов

Заметка по поводу гиперболических функций Боднара, Стахова, Ткаченко и Розина и решения 4-й проблемы Гильберта (Стахов, Арансон)

И последнее замечание, касающееся названия нового класса гиперболических функций. Великие математики Фибоначчи и Люка, которые ввели в рассмотрение числа Фибоначчи и Люка, строго говоря, никакого отношения к этим функциям не имеют. И мне кажется, что наука (и особенно украинская математика) только выиграли бы, если бы эти функции были названы гиперболическими функциями Стахова и Ткаченко, то есть, названы именами тех украинских ученых, которым принадлежит честь введения в математику нового класса функций. То же самое касается и новой геометрической теории филлотаксиса, созданной украинским ученым Олегом Боднаром. Мы имеем полное право назвать новую теорию филлотаксиса «геометрией Боднара».

Академик Ю.А. Митропольский

1. История научного открытия

В конце 80-х годов 20 в. украинскими учеными **Алексеем Стаховым** и **Иваном Ткаченко** [1-3] и **Олегом Боднаром** [4-6] независимо друг от друга был введен новый класс гиперболических функций. Особенность этих функций состояла в том, что их основанием было не «не число Эйлера» *e,* а знаменитое иррациональное число, известное в современной науке под названием «золотое сечение» или «золотая пропорция». Боднар назвал эти функции *«золотыми» гиперболическими функциями*, Стахов и Ткаченко – *гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка.* Это научное открытие было поддержано выдающимся украинским математиком академиком **Ю.А. Митропольским**. Согласно его рекомендации статья Олега Боднара «*Геометрия филлотаксиса*» в 1992 г. была опубликована в академическом журнале «Доклады Академии наук Украины» [5]. В этом же журнале годом позже согласно рекомендации Ю.А. Митропольского была опубликована статья Стахова и Ткаченко «*Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи*» [2]. Академик Митропольский написал предисловие к книге [3], в которой предложил назвать новый класс гиперболических функций, введенных в [2], *гиперболическими функциями Стахова-Ткаченко,* а новую геометрическую теорию филлотаксиса, описанную в статье [5], *геометрией Боднара.*

Дальнейшее развитие теории *гиперболических функций Фибоначчи и Люка* дано в работах **Алексея Стахова и Бориса Розина** [7,8]. В этих работах введен еще один важный класс функций, так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка*, которые обладают важными симметрическими свойствами и сближают эти функции с классическими гиперболическими функциями. Еще один неожиданный поворот в развитии теории *гиперболические функции Фибоначчи и Люка* связан с созданием так называемой *«золотой» фибоначчиевой гониометрии* – общей теории гиперболических функций, основанной на так называемых *металлических пропорциях,* которые являются обобщением *«золотой пропорции»*. Это название введено аргентинским математиком **Верой Шпинадель** [9]. Справедливости ради, необходимо отметить, что к этому математическому открытию независимо друг от друга пришли французский математик египетского происхождения

Мидхат Газале [10], российский исследователь **Александр Татаренко** и американский математик **Джей Каппрафф**.

Под «металлическими пропорциями» понимаются математические константы, задаваемые следующей формулой:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$ - заданное действительное число.

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ формула (1) сводится к «золотой пропорции»:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{2}$$

Уже этот факт может привлечь наше внимание к формуле (1), которая является ни чем иным, как обобщением формулы (2) для «золотой пропорции».

Вера Шпинадель [9] назвала математические константы, задаваемые выражением (1), *металлическими пропорциями*. Если в (1) мы примем λ =1, 2, 3, 4, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие, согласно Шпинадель, следующие названия:

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\text{золотая пропорция}, \lambda = 1\right); \quad \Phi_2 = 1+\sqrt{2}\left(\text{серебряная пропорция}, \lambda = 2\right);$$

$$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}\left(\text{бронзовая пропорция}, \lambda = 3\right); \quad \Phi_4 = 2+\sqrt{5}\left(\text{медная пропорция}, \lambda = 4\right).$$

Остальные *металлические пропорции* ($\lambda \geq 5$) не имеют специальных названий:

$$\Phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6 = 3+2\sqrt{10}; \quad \Phi_7 = \frac{7+2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8 = 4+\sqrt{17}..$$

Ясно, что количество «металлических пропорций», задаваемых (1), теоретически бесконечно, так каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответствует своя «металлическая пропорция» типа (1). И самое интересное, что формула для «металлических пропорций» (1) является обобщением формулы для «золотой пропорции» (2) ($\lambda = 1$). Это дает нам основание выдвинуть гипотезу, что «металлические пропорции» (1) представляют собой новый класс математических констант, которые могут сыграть важную роль в развитии математики и теоретического естствознания.

«Металлические пропорции» (1) обладают следующими алгебраическими свойствами:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+...}}}} \quad ; \quad \Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + ...}}}, \tag{3}$$

которые являются обобщением следующих широко известных свойств «золотой пропорции»:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{...}}}} \; ; \quad \Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}} \tag{4}$$

В работе [11], основываясь на *металлических пропорциях* Веры Шпинадель и *формулах Газале* [10], Алексей Стахов ввел широкий класс гиперболических функций следующего вида:

<u>Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи</u>

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{5}$$

$$cF_{\lambda}(x)=\frac{\Phi_{\lambda}^{x}+\Phi_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{x}+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{-x}\right]. \qquad (6)$$

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка

$$sL_{\lambda}(x)=\Phi_{\lambda}^{x}-\Phi_{\lambda}^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{x}-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{-x}, \qquad (7)$$

$$cL_{\lambda}(x)=\Phi_{\lambda}^{x}+\Phi_{\lambda}^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{x}+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{-x}, \qquad (8)$$

Заметим, что частным случаем гиперболических функций (5)-(8), соответствующим случаю $\lambda=1$, являются *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка*, введенные Стаховым и Розиным в работах [7, 8]:

Симметричный гиперболический синус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^{x} - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \qquad (9)$$

Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи

$$cFs(x) = \frac{\Phi^{x} + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \qquad (10)$$

Симметричный гиперболический синус Люка

$$sLs(x) = \Phi^{x} - \Phi^{-x} \qquad (11)$$

Симметричный гиперболический косинус Люка

$$cLs(x) = \Phi^{x} + \Phi^{-x} \qquad (12)$$

2. Геометрия Боднара

Мы не будем углубляться в детальный анализ научного открытия **Олега Боднара,** отсылая читателей к его замечательной книге [6]. Сформулируем только ключевые идеи явления динамической симметрии, лежащего в основе ботанического явления *филлотаксиса*:

1. Боднар доказывает, что основным принципом, лежащим в основе филлотаксиса, является *гиперболический поворот*. В соответствии с этим принципом рост филлотаксисного объекта, сопровождающийся изменением динамической симметрии, может быть смоделирован как последовательный переход от объекта с меньшим порядком симметрии к объекту с большим порядком симметрии, осуществляемый с помощью *гиперболического поворота плоскости*. **Этими рассуждениями Боднар доказал гиперболический характер ботанического явления филлотаксиса!**

2. Для описания математических соотношений в геометрической модели филлотаксиса Боднар использует специальный класс гиперболических функций - *«золотые» гиперболические функции*, которые с точностью до постоянного коэффициента совпадают с *гиперболическими функциями Фибоначчи* (9), (10). **Такое решение позволяет ему доказать тот широко известный факт, почему числа Фибоначчи появляются на поверхности филлотаксисных форм!**

В своем классическом труде «Аналитическая теория тепла» (1822) Фурье высказал следующую интересную мысль:

«Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо намеченной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать

наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке. ***Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы ...»***

«Геометрия Боднара» является крупным научным открытием, которое раскрывает механизм роста филлотаксисных объектов (сосновых шишек, кактусов, ананасов и т.д.). В основе этой геометрии лежат *гиперболические функции Фибоначчи,* без использования которых невозможно объяснить, почему на поверхности филлотаксисных объектов появляются фибоначчиевые спирали. Но это значит, что введенные выше гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются «естественными функциями Природы», которые существуют в Природе с момента возникновения филлотаксисных объектов независимо от Боднара, Стахова, Ткаченко и Розина. **Заслуга этих ученых состоит в том, что они раскрыли один из секретов Природы!** И именно поэтому *гиперболические функции Фибоначчи и Люка,* используемые Природой в ботаническом явлении филлотаксиса, согласно Фурье, могут быть отнесены к числу **«фундаментальных научных идей»** и в таком качестве им суждено навсегда сохраниться в науке.

3. Решение четвертой проблемы Гильберта

В докладе *«Математические проблемы»*, сделанном на II Международном Конгрессе математиков, происходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, Давид Гильберт (1862-1943) сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики 20-го века. Этот доклад, охватывающий проблемы математики в целом, был несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах и является уникальным явлением в истории математики и в математической литературе. На данный момент решены **16 проблем из 23**. К разряду нерешенных относится 4-я проблема Гильберта, связанная с гиперболической геометрией. Она относится к разряду фундаментальных проблем геометрии. Суть этой проблемы состоит в нахождении геометрий, чьи аксиомы наиболее близки к Евклидовой геометрии. В течение 20-го века предпринимались многочисленные попытки решения этой проблемы, но в конечном итоге математики пришли к заключению, что **4-я проблема Гильберта сформулирована слишком расплывчато и нечётко поставлена, чтобы судить о том, решена она или нет,** то есть математики возложили ответственность за решение 4-й проблемы на самого Гильберта, который, по их мнению, ее «нечетко сформулировал»**.**

В статье [12] предложено следующее оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта. Развивая идею метрической формы плоскости Лобачевского, задаваемой выражением

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2, \tag{13}$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус, в работе [12] предложено бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи (5), (6). Доказано [12], что эти метрические формы, задаваемые в координатах $(u,v), 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$, имеют *гауссову кривизну* $K = -1$ и представляются в виде

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \tag{14}$$

где $\Phi_\lambda = \dfrac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - *металлическая пропорция* и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи (5). Формы (14) названы в [12] *метрическими λ-формами плоскости Лобачевского*.

В таблице приведены различные *метрические λ-формы плоскости Лобачевского,* соответствующие различным значениям $\lambda = 1,2,3,4$.

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая $\lambda -$форма Лобачевского	$\lambda > 0$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}[sF_\lambda(u)]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda = 1$	$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}[sFs(u)]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda = 2$	$\Phi_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.1421$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2[sF_2(u)]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda = 3$	$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}[sF_3(u)]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda = 4$	$\Phi_4 = 2+\sqrt{5} \approx 4.23607$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5[sF_4(u)]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e \approx 2.350402$	$\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$	$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2$

Общий итог исследования, выполненного в работе [12], состоит в том, что получено бесконечное множество метрических $\lambda -$форм плоскости Лобачевского ($\lambda > 0$ -заданное действительное число), задаваемых выражением (14). Все эти формы изометричны классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (13). А это означает, что полученные в работе [12] новые *модели плоскости Лобачевского*, основанные на «металлических пропорциях» (52), вместе с классическими геометриями Лобачевского и Римана *"могут рассматриваться как ближайшие геометрии к обыкновенной геометрии Евклида"* (Давид Гильберт).

Таким образом, результаты, полученные в работе [12], являются важным вкладом в решение 4-й проблемы Гильберта, которая считается одной из сложнейших проблем Гильберта. Ясно, что это решение не может рассматриваться как окончательное решение этой важной математической проблемы. Но оно, несомненно, будет стимулировать математиков в поисках полного решения 4-й проблемы Гильберта.

Публикация статьи [12] в известном математическом сборнике *Congressus Numerantium* вызвала большой интерес к этой тематике со стороны международного журнала *Applied Mathematics.* По предложению редакции журнала **Алексей Стахов** и **Самуил Арансон** написали большую статью **Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem,** которая разбита на 3 части: **1. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and "Golden" Fibonacci Goniometry, 2. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar's Geometry), 3. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem.** Статья прошла рецензирование, принята к публикации и будет опубликована в в первых трех номерах журнала за 2011 г. Авторы надеются, что после публикации этой статьи последует официальное признание со стороны западной науки следующих научных открытий: *гиперболические функции Фибоначчи и Люка, «золотая» фибоначчиевая гониометрия, новая геометрическеая теория филлотаксиса (геометрия Боднара), решение 4-й проблемы Гильберта.*

4. Заключение

Боднаром показано, что «мир филлотаксиса» является «гиперболическим миром», основанным на гиперболических функциях Фибоначчи (9), (10), основанием которых является классическая «золотая пропорция». При этом к этому гиперболическому миру относится огромное количество ботанических объектов (сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника и корзинки цветов). Таким образом, в ботаническом явлении филлотаксиса «гиперболичность» проявляет себя в «золоте». Эта гипотеза, выдвинутая Боднаром, оказалась весьма плодотворной и привела к созданию новой геометрической теории филлотаксиса.

В этой связи у нас есть все основания высказать предположение, что и другие типы гиперболических функций, задаваемых (5)-(8), могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что современной науке была неизвестна «золотая» фибоначчиевая гониометрия, описанная в работе [12]. Но тогда мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (5)-(8).

Таким образом, в настоящей статье, как нам кажется, приведено достаточно доказательств того факта, что группой исследователей (Боднар, Стахов, Ткаченко, Розин, Арансон) в последние десятилетия сделано ряд математических открытий (*гиперболические функции Фибоначчи и Люка, гометрия Боднара, «золотая» фибоначчиевая гониометрия, решение 4-й проблемы Гильберта*), которые являются существенным вкладом в развитите гиперболической геометрии и могут быть отнесены к разряду фундаментальных открытий современной науки. Эти результаты высоко оценены **академиком Митропольским** и редакциями международных журналов математического и физического профилей (*Chaos, Solitons and Fractals, Visual Mathematics, Congressus Numerantium, Applied Mathematics*). Официальное признание приоритета Алексея Стахова и Ивана Ткаченко в открытии нового класса гиперболических функций дано Международным математическим справочником *WolframMathWorld* [13].

Новый класс гиперболических функций вызвал большой интерес в западной науке. Недавно я получил письмо от сербского математика **Ильи Танакова** следующего содержания:

Dear Sir Alexey Stakhov

I found the manuscript: Alexey Stakhov and Boris Rozin. *On a new class of hyperbolic functions* and *Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature*. Exactly what I needed.

Specifically, Golden ratio is a new concept for me. I found it by fortune in queueing systems, 30 days ago. In the meantime I found important role in constant 1.618 in queueing systems. Constant has equilibrium importance of customer service, generally the close relationship between Markovian (exponential distribution with natural logarithm base *e*) process and the concept of Golden ratio. Constant off transformation is **ln(1.618)** (links in hyperbolic functions and Lucas numbers in your manuscripts with Rozin).
I hope - to have a ready manuscript by mid-January 2011. After that I will send manuscript to you, to manuscript "enrich" process.

King regard wiht great respect
and Happy New Year

Ilija Tanackov

В этой связи вызывают недоумение ряд публикаций, появившихся в последнее время на сайте «Академия Тринитаризма», в которых делается попытка любыми путями принизить значение этого научного направления для развития современной науки и «перетащить одеяло» на себя, то есть, приписать себе приоритет в этом открытии.

Литература:

1. **Стахов А. П., Ткаченко И. С. и др.** Об определении фибоначчиевых и люковых функций. Винницкий политехнический институт – Винница, 1988. – Деп. в УкрНИИНТИ, 10.08.1988.
2. **Стахов А. П., Ткаченко И. С.** Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук УССР, № 7, 1993.
3. **Стахов А.**П. Новая математика для живой природы. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Винница, ITI, 2003. ISBN 966-8432-06-1

4. Боднар О.Я. Геометрическая модель однообразного роста. Деп. 19.06.1989, №54, ТЭ-89, М. 1989
5. Боднар О.Я. Геометрия филлотаксиса. Доклады Академии наук УССР, №9, 1992.
6. **Боднар О.Я.** Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994.
7. **Stakhov A, Rozin B.** On a new class of hyperbolic function // Chaos, Solitons & Fractals 2004, 23(2): 379-389.
8. **Stakhov A. Rozin B**. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006. (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
9. **Vera W. de Spinadel.** From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
10. **Gazale Midhat J.** Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002).
11. **Стахов А.П.** Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
12. **Stakhov A.P. Aranson S. Kh.** "Golden" Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert's Fourth Problem. Congressus Numerantium, 193 (2008), 119-156.
13. Fibonacci Hyperbolic Functions. From WolframMathWorld

http://mathworld.wolfram.com/FibonacciHyperbolicFunctions.html