

Гиперболические уравнения Золотого Сечения

*Жить, не интересуясь законами жизни,
– всё равно, что нюхать яства, не пробуя их
(Неизвестный ученый – гурман)*

Содержание:

1. Постановка проблемы
 2. Нормализованное уравнение гармонической рекурсии
 3. Геометрический образ гармонической рекурсии – гипербола
 4. Выражение координат рабочей точки гиперболы через гиперболические функции
 5. Определение координат рабочей точки гармонической гиперболы для девиации $\delta=\pm 1$ и $\delta=0$
 6. Гиперболические уравнения Золотого Сечения
 7. О перспективах применения гиперболических уравнений Золотого Сечения
- Заключение
Литература

1. Постановка проблемы

Что общего между гиперболой и Золотым Сечением (ЗС)?

Во-первых, гипербола – это тоже сечение. Сечение конической поверхности.

Во-вторых, хотя ЗС – это определенное сечение всего лишь отрезка прямой линии, но оно тесно связано с числами Фибоначчи и Люка. А изучение последних привело одного из авторов данной статьи к открытию (вместе с Б. Розиным) в конце XX столетия симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка (ГФФЛ). Статья в журнале «Chaos, Solitons & Fractals» [1] на эту тему процитирована в различных работах 59 раз.

ГФФЛ отличаются от обычных гиперболических функций (ГФ) тем, что в их основе лежит другая константа. Вместо константы «е» у ГФ, в ГФФЛ применяется «золотая» константа «Фи» ($\Phi \approx 1,618$). Кроме того, если аргументы ГФФЛ целочисленны, то и сами ГФФЛ также равны целочисленным значениям – числам Фибоначчи и Люка.

Как известно, гипербола – это геометрическое место точек, координаты которых выражены значениями ГФ. Но есть ли среди этих точек та, которую следует называть точкой ЗС? Какими функциями выражаются её координаты?

Можно ли учесть «энтропийный» подход [2,3] при дальнейшем исследовании ГФФЛ и ГФ?

Существуют ли гиперболические уравнения, решения которых относятся только к режиму ЗС? Каковы перспективы применения таких уравнений?

Цель данной работы – попытаться ответить на поставленные вопросы.

2. Нормализованное уравнение гармонической рекурсии

В наших работах [2,3,4] показано, что известное еще с «допифагоровых» времен классическое ЗС с характеристическим уравнением $a^2=a+1$ не одиноко. Оказалось, что любое характеристическое уравнение вида

$$a^2=\lambda a+\lambda^2 \quad (1)$$

отвечает так называемому «гармоническому ЗС», для которого также соблюдается золотая пропорция и которому присущи все особенности классического ЗС с $\lambda=1$.

Невероятные ответы на невероятные вопросы - № 1 (из Интернета). «Как приготовить «салат Фибоначчи?» – «Нужно смешать вчерашний и позавчерашний салаты в равной пропорции, точно по уравнению рекурсии $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ ».

Невероятные ответы на невероятные вопросы - № 2. –Какой салат свежее, «салат Фибоначчи» или «Золотое Сечение?»

– Конечно, «салат Фибоначчи». Ведь его готовят по рецепту $f_{n+2}=f_{n+2}+f_n$, а «Золотое Сечение» – по рецепту $f_{n+2}=\lambda f_{n+1}+\lambda^2 f_n$.

Кратчайший вывод уравнения (1) несложен. Всё начинается с золотой пропорции, то есть с равенства отношений целого к большему и большего к меньшему: $(a+b)/b=b/a$. Ведь именно в золотой пропорции заключена многовековая мудрость. Используя основное свойство пропорции (произведения крайних и средних членов равны), получаем: $a=b^2/(a+b)=b-ab/(a+b)=b-0,5h$, где $h=2ab/(a+b)$ – это гармоническое среднее двух чисел – аттракторов «а» и «b», то есть частей целого. Подставив вместо «а» в правую часть золотой пропорции $(a+b)/b=b/a$ его новое значение $b-0,5h$, получаем «гармоническую» пропорцию $(a+b)/b=b/(b-0,5h)$, которая обращается в тождество при любых положительных значениях аттракторов «а» и «b».

А если в «гармоническую» пропорцию $(a+b):b=b:(b-0,5h)$ ввести подстановку и вместо разности «большого» и «меньшего» использовать параметр «d» ($d=b-a$), получаем общее характеристическое уравнение гармонической рекурсии 2-го порядка с переменными коэффициентами [2,3]:

$$a^2=(h-d)a+0,5hd. \quad (2)$$

Выше из золотой пропорции было получено: $a=b-0,5h$. С учетом $b-a=d$ отсюда получаем основное условие ЗС: $d=b-a=0,5h$. А подставив $d=0,5h$ в (2), располагаем равенством (1), в котором $\lambda=0,5h$. То есть (1) можно записать и так: $a^2=0,5ha+(0,5h)^2$. Вот и весь вывод характеристического уравнения гармонического ЗС.

Сколько же может быть Золотых Сечений? Судя по (1) – бесконечно много. Ведь каждому положительному (рациональному, иррациональному, даже комплексному) значению h соответствует «свое» ЗС! И действительно, если отрезок **заданной** длины разделить на две части в золотой пропорции, то такому сечению соответствует только одно характеристическое уравнение: $a^2=a+1$. Если же в золотой пропорции $b/a=\Phi$ делится отрезок **произвольной** длины, то такому сечению соответствует бесконечное множество характеристических уравнений $a^2=\lambda a+\lambda^2$ с произвольными значениями $\lambda=0,5h$.

Таким образом, (2) – это общее уравнение гармонической рекурсии 2-го порядка, а (1) – это уравнение для частного, но чрезвычайно важного и широко распространенного ее случая, случая Золотого Сечения. А нельзя ли соотношению (2) придать новую форму, максимально похожую на компактную форму уравнения (1)? Оказывается, можно.

Введем в (1) новый параметр Δ – «абсолютное отклонение (или абсолютную девиацию) от ЗС»:

$$a^2=\lambda a+(\lambda^2+\Delta). \quad (3)$$

Если в уравнении (1) назвать λ и λ^2 соответственно 1-м и 2-м коэффициентами, то Δ показывает абсолютное отклонение 2-го коэффициента от значения квадрата 1-го коэффициента. При этом не будем забывать, что соотношения (2) и (3) – это две формы одного и того же характеристического уравнения гармонической рекурсии. То есть коэффициенты в правых частях уравнений (2) и (3) должны быть соответственно равны:

$$h-d=\lambda; \quad 0,5hd=\lambda^2+\Delta.$$

Таким образом, из последних двух равенств следует:

$$\lambda=h-d; \quad \Delta=0,5h-\lambda^2=2,5hd-h^2-d^2. \quad (3A)$$

Нетрудно убедиться в том, что при подстановке условия ЗС $d=0,5h$ в (3A) получаем $\Delta=0$. Если $\Delta=0$, а $d=0,5h$, то и $\lambda=d=0,5h$ – это случай ЗС.

Благодаря «формулам перехода» (3A) ясно, что означают параметры Δ и λ в новой форме (3) характеристического уравнения гармонической рекурсии с девиацией. Но мы не использовали еще того обстоятельства, что уравнение (3) $a^2=\lambda a+(\lambda^2+\Delta)$ – это обычное

квадратное относительно аттрактора «а» уравнение, и его положительный (и наибольший по модулю!) корень равен:

$$a=0,5\lambda+0,5\cdot(5\lambda^2+4\Delta)^{0,5}. \quad (4)$$

При $\Delta=0$ из (4) получаем $a=\lambda\Phi$, то есть аттрактор «а» в $\lambda=0,5h$ раз больше золотой константы $\Phi\approx 1,618$. При классическом ЗС, когда $h=2$, аттрактор «а» равен золотой константе Φ . Чтобы не зависеть при гармоническом ЗС от значений гармонического среднего h , перейдем от аттрактора «а» в абсолютных единицах к аттрактору «а₀» в относительных единицах:

$$a_0=a/\lambda. \quad (5)$$

Для этого разделим левую и правую части соотношения (3) $a^2=\lambda a+(\lambda^2+\Delta)$ на λ^2 . Получим $a^2/\lambda^2=\lambda a/\lambda^2+(\lambda^2+\Delta)/\lambda^2$, или

$$a_0^2-a_0-(1+\delta)=0, \quad (6)$$

где $\delta=\Delta/\lambda^2$ – относительное отклонение (или относительная девиация) от ЗС.

Естественно, при $\delta=0$ уравнение (6) обращается в $a_0^2=a_0+1$ с аттрактором $a_0=\Phi$.

Теперь мы по праву можем назвать (6) **нормализованным** характеристическим уравнением гармонической рекурсии с девиацией, т.е. уравнением **в относительных единицах**.

Положительный (и наибольший по модулю) корень квадратного относительно «а₀» нормализованного уравнения (6) равен:

$$a_0=0,5+(0,25+(1+\delta))^{0,5}=0,5+((5/4)+\delta)^{0,5}=0,5+0,5\cdot(5+4\delta)^{0,5}=\mathbf{0,5(1+(5+4\delta)^{0,5})}. \quad (7)$$

Соотношение (7) можно получить и из (4), если разделить «а» на λ .

На Рис. 1 и в Табл. 1 показана зависимость безразмерного аттрактора a_0 от девиации δ , соответствующая соотношению (7).

Рис. 1. Зависимость безразмерного аттрактора a_0 от девиации δ

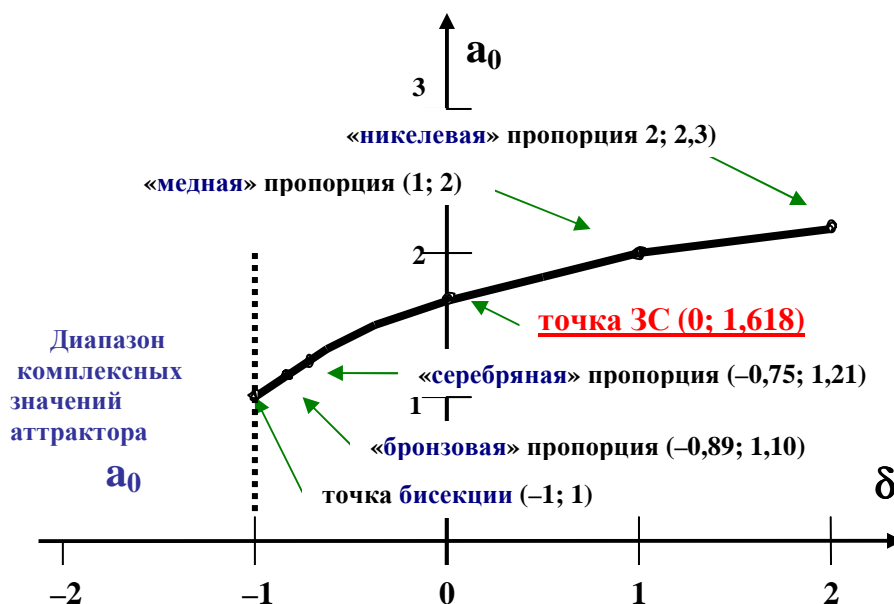


Табл. 1. Зависимость безразмерного аттрактора a_0 от девиации δ

δ	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5
a_0	0,5+i0,5	1,0	1,366	1,618	1,823	2,0	2,158

При отсутствии девиации ($\delta=0$) получаем точку ЗС со значением $a_0=\Phi\approx 1,618$. Рост положительной девиации (при $\delta>0$) приводит к возрастанию безразмерного аттрактора a_0 .

Область отрицательных значений $\delta<0$ заслуживает отдельного внимания. В этой области, по мере увеличения значения δ по модулю, аттрактор a_0 сначала уменьшается до значения $a_0=1$, что соответствует точке **бисекции** (равновеликой дихотомии). Действительно, при $\delta=-1$, согласно (5), имеем $\Delta=-\lambda^2$, и из приведенного выше равенства $0,5hd=\lambda^2+\Delta$, у которого правая часть становится равной нулю, следует: $d=0$; $a=b$.

А вот дальше, **при $\delta<-1$, аттрактор a_0 становится комплексной величиной**. Из выражения (7) видно, что при $\delta<-1$ под знаком радикала всегда будет отрицательное число. Например, при $\delta=-1,5$ (см. Табл. 1) $a_0=0,5(1+i)$, где i – мнимая единица.

Пример 1. Определим параметры λ , Δ , δ , a_0 для «серебряной» пропорции В.Шпинадель, найдем точку этой пропорции на Рис. 1, проверим в ней справедливость нормализованного характеристического уравнения (6). «Серебряная» пропорция имеет характеристическое уравнение в абсолютных единицах $a^2=2a+1$ и следующие значения параметров: $a=1+\sqrt{2}$; $b=3,146$; $d=0,732$; $h=2,732$; $N=0,839$ [3, Табл.1].

Из (3А) находим $\lambda=h-d=2$; $\Delta=2,5hd-h^2-d^2=-3$. Согласно (5), $a_0=a/\lambda=(1+\sqrt{2})/2\approx 1,2071$. Согласно пояснению к (6), $\delta=\Delta/\lambda^2=-0,75$. Итак, для «серебряной» пропорции уравнение (6) $a_0^2-a_0-(1+\delta)=0$ справедливо: $a_0^2-a_0-(1+\delta)=1,2071^2-1,2071-(1-0,75)=0$.

Пример 2. Определим параметры λ , Δ , δ , a_0 для «бронзовой» пропорции В.Шпинадель и проверим для этой пропорции справедливость характеристического уравнения гармонической рекурсии с девиацией в относительных единицах. «Бронзовая» пропорция имеет характеристическое уравнение в абсолютных единицах $a^2=3a+1$ и следующие значения параметров: $a=3,303$; $b=3,864$; $d=0,562$; $h=3,562$; $N=0,630$ [3, Табл.1].

Из (3А) находим $\lambda=h-d=3$; $\Delta=2,5hd-h^2-d^2=-8$. Согласно (5), $a_0\approx 1,101$. Согласно пояснению к (6), $\delta=\Delta/\lambda^2=-0,88879$. Итак, для «бронзовой» пропорции уравнение (6) $a_0^2-a_0-(1+\delta)=0$ справедливо: $a_0^2-a_0-(1+\delta)=1,101^2-1,101-(1-0,88879)=0$.

Пример 3. Определим параметры λ , Δ , δ , a_0 для «медной» пропорции В.Шпинадель и проверим для этой пропорции справедливость характеристического уравнения гармонической рекурсии с девиацией в относительных единицах. «Медная» пропорция имеет характеристическое уравнение в абсолютных единицах $a^2=a+2$ и следующие значения параметров: $a=2$; $b=3,562$; $d=1,562$; $h=2,562$; $N=0,965$ [3, Табл.1].

Из (3А) находим $\lambda=h-d=1$; $\Delta=2,5hd-h^2-d^2=1,0009$. Согласно (5), $a_0\approx 2,0003$. Согласно пояснению к (6), $\delta=\Delta/\lambda^2=1,0009$. Итак, для «медной» пропорции уравнение (6) $a_0^2-a_0-(1+\delta)=0$ справедливо: $a_0^2-a_0-(1+\delta)=2,0003^2-2,0003-(1+1,0009)=0$.

Пример 4. Определим параметры λ , Δ , δ , a_0 для «никелевой» пропорции В.Шпинадель и проверим для этой пропорции справедливость нормализованного уравнения (6). «Никелевая» пропорция имеет характеристическое уравнение в абсолютных единицах $a^2=a+3$ и следующие значения параметров: $a=2,303$; $b=4,303$; $d=2$; $h=3$; $N=0,918$ [3, Табл.1].

Из (3А) находим $\lambda=h-d=1$; $\Delta=2,5hd-h^2-d^2=2$. Согласно (5), $a_0\approx 2,303$. Согласно пояснению к (6), $\delta=\Delta/\lambda^2=2$. Итак, для «никелевой» пропорции уравнение (6) $a_0^2-a_0-(1+\delta)=0$ справедливо: $a_0^2-a_0-(1+\delta)=2,303^2-2,303-(1+2)=0$.

В приведенных выше примерах, результаты которых отражены на Рис. 1, относительная девиация $\delta>-1$, и поэтому безразмерный аттрактор a_0 выражается действительным числом, а нормализованное характеристическое уравнение $a_0^2-a_0-(1+\delta)=0$ гармонической рекурсии с

девиацией обращается в тождество. Для «серебряной» и «бронзовой» пропорций $\delta < 0$, а для «медной» и «никелевой» пропорций $\delta > 0$.

Отметим, что для чисел Мерсенна как абсолютная Δ , так и относительная δ девиация выражается комплексными числами, что соответствует результатам [3]. Такие случаи подлежат отдельному исследованию, выходящему за рамки данной работы.

Режим каждой из известных рекурсий отражается на зависимости a_0 от δ (Рис. 1) определенной точкой. Зависимость безразмерного аттрактора a_0 от девиации δ носит гиперболический характер.

3. Геометрический образ гармонической рекурсии – гипербола

Окружность, парабола, гипербола – каждая из этих кривых 2-го порядка является геометрическим образом определенного уравнения. Аналитическая геометрия, изучающая кривые и фигуры, позволяет использовать алгебраические средства в геометрии, а геометрические – в алгебре. Но основная задача аналитической геометрии заключается в изучении геометрических фигур с помощью алгебраического уравнения, связывающего координаты x и y каждой точки кривой или фигуры.

А ведь можно поставить и обратную задачу. У нас есть уравнение гармонической рекурсии, и мы хотим более подробно его изучить. Для этого находим геометрический образ этого уравнения. Из названия этого пункта понятно, что таким геометрическим образом является хорошо изученная равносторонняя гипербола. Используя известные геометрические средства, то есть соотношения, характерные для гиперболы, попытаемся выяснить о гармонических рекурсиях и ЗС то, чего мы ещё не знаем.

Вернемся к нормализованному уравнению (6) гармонической рекурсии 2-го порядка $a_0^2 - a_0 - (1 + \delta) = 0$. Разделим обе части этого уравнения на a_0 и полученную единицу перенесем в правую часть равенства:

$$a_0 - (1 + \delta)/a_0 = 1. \quad (8)$$

Вспомним, что равенство (8) напоминает каноническую форму уравнения гиперболы в прямоугольных координатах:

$$(X/A)^2 - (Y/B)^2 = 1, \quad (9)$$

где A – действительная, B – мнимая полуоси гиперболы, а X и Y – координаты рабочей точки гиперболы. И в (8), и в (9) слева имеем разность, справа – единицу.

Поскольку правые части (8) и (9) равны, можно принять, что

$$A=B=1; \quad X^2=a_0; \quad Y^2=(1+\delta)/a_0; \quad X^2 - Y^2=1. \quad (10)$$

Проверим, действительно ли можно считать, что $X^2 - Y^2 = 1$:

$$X^2 - Y^2 = a_0 - (1 + \delta)/a_0 = (a_0^2 - 1 - \delta)/a_0.$$

Последнее выражение равно единице только в том случае, если $a_0^2 - 1 - \delta = a_0$.

Но тогда $a_0^2 - a_0 - 1 - \delta = 0$, что соответствует уравнению (6). Следовательно, замена переменных привела нас к переходу от уравнения (6) $a_0^2 - a_0 - (1 + \delta) = 0$ к эквивалентному ему каноническому уравнению равносторонней (равнобочной) гиперболы (10) $X^2 - Y^2 = 1$.

Но равенство $X^2 - Y^2 = 1$ – это лишь одна из форм уравнения гиперболы. Если перемножить первые два равенства из (10), получим еще одну форму:

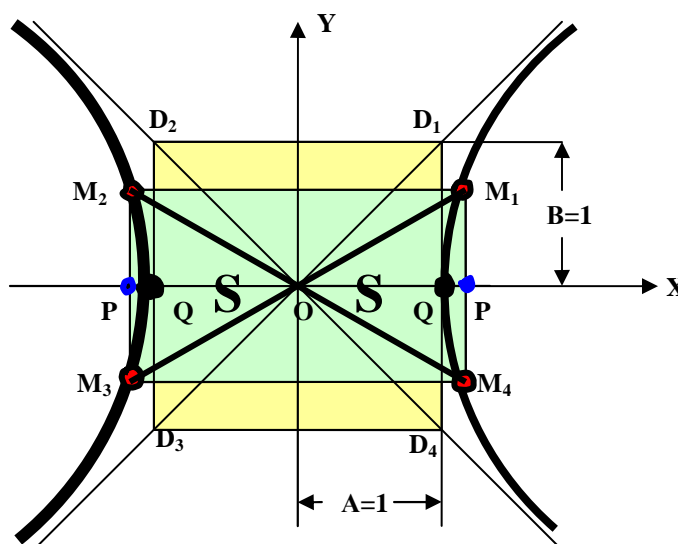
$$X^2 Y^2 = 1 + \delta; \quad XY = \pm \sqrt{1 + \delta}, \quad (11)$$

Обратная пропорциональная зависимость переменных X и Y из (11) соответствует типичному уравнению равносторонней гиперболы, у которой осями являются ее асимптоты.

Итак, геометрическим образом уравнения (8) является равносторонняя гипербола, у которой, согласно (10), $X = \pm \sqrt{a_0}$; $Y = \pm \sqrt{(1 + \delta)/a_0}$. Такую гиперболу, изображенную на Рис. 2,

мы будем называть **гармонической**, поскольку в основе ее лежит уравнение гармонической рекурсии, описывающей гармоническое сечение.

Рис. 2. Равносторонняя гармоническая гипербола – геометрический образ гармонического сечения



Здесь длины действительной полуоси A и мнимой полуоси B равны: $A=B=1$. Поэтому асимптоты гипербола перпендикулярны, а ее **основной прямоугольник** $D_1D_2D_3D_4$ (выделен желтым цветом) превратился в квадрат.

Строго говоря, на Рис. 2 должны были быть показаны не две, а четыре ветви гипербола, поскольку уравнения (10) и (11) описывают две сопряженные гипербола. Действительная ось одной гипербола является мнимой осью сопряженной с нею другой гипербола, и наоборот. Каждая из гипербола состоит из двух непересекающихся ветвей. Сопряженной гипербола отвечает знак «минус» в уравнении (11) $XY = \pm \sqrt{1+\delta}$.

Чтобы сделать рисунок более наглядным, мы показали только одну гипербола, у которой положительная, правая ветвь ($X>0$) проходит через I-й и IV-й квадранты, а отрицательная, левая ветвь ($X<0$) – через II-й и III-й квадранты. Верхняя и нижняя ветви сопряженной гипербола $XY = -\sqrt{1+\delta}$ не показаны.

Вследствие зеркальной симметрии левой и правой ветвей гипербола далее будем рассматривать только правую ветвь, при $X>0$.

Невероятные ответы на невероятные вопросы - № 3 (из Интернета). В английском алфавите буквы слова LOVE зеркально-симметричны. Поэтому будем писать только его левую ветвь – EL:

ABCDEF GHIJKL MNOPQRST UVWXYZ

4. Выражение координат рабочей точки гипербола через гиперболические функции

Теперь мы можем использовать известные соотношения, характерные для гипербола.

В [5] отмечено, что гиперболические функции выражаются через площади гиперболических секторов таким же точно образом, как тригонометрические функции

выражаются через площади круговых секторов. На Рис. 2 показан гиперболический сектор M_1OM_4Q для текущей рабочей точки M_1 . Площадь этого сектора обозначена буквой S .

С учетом уравнения (10) $X^2 - Y^2 = 1$ и вытекающего из него равенства $Y = (X^2 - 1)^{0,5}$, площадь гиперболического сектора S равна:

$$S = 2S_{OM_1Q} = 2(S_{OM_1P} - S_{QM_1P}); \quad S_{OM_1P} = 0,5XY;$$

$$S_{QM_1P} = \int_A^X Y dX = \int_A^X \sqrt{X^2 - 1} dX = 0,5X\sqrt{X^2 - 1} - 0,5\ln(X + \sqrt{X^2 - 1}) = 0,5XY - 0,5\ln(X + Y);$$

$$S = 2S_{OM_1Q} = 2 \cdot 0,5\ln(X + Y) = \ln(X + Y). \quad (12)$$

Равенство (12), содержащее **натуральный** логарифм, говорит о том, что константа «е» соотносится не только с логарифмической спиралью [6], но и с гиперболой и, следовательно, с гиперболическими функциями. На основании определения логарифма из (12) следует:

$$X + Y = e^S.$$

Но ведь выше было получено уравнение (10) гармонической гиперболы $X^2 - Y^2 = 1$, которое может быть представлено в виде

$$(X + Y)(X - Y) = 1.$$

Сумма $X + Y$ присутствует в обоих последних выделенных равенствах с двумя неизвестными X и Y . Следовательно, можно решить систему из двух уравнений, у которых левые части равны между собой:

$$X + Y = e^S;$$

$$X + Y = 1/(X - Y).$$

Из этих уравнений следует, что $X - Y = e^{-S}$. Мы получили новую систему из двух уравнений:

$$X + Y = e^S; \quad (13)$$

$$X - Y = e^{-S}. \quad (14)$$

Из суммы и разности (13) и (14) получаем решения в виде гиперболических функций:

$$X = 0,5(e^S + e^{-S}) = \text{ch } S; \quad (15)$$

$$Y = 0,5(e^S - e^{-S}) = \text{sh } S. \quad (16)$$

Действительно, полная аналогия с окружностью, у которой вместо ch и sh для координат X и Y рабочей точки используются соответственно функции \cos и \sin .

Итак, координаты X и Y рабочей точки гиперболы выражены через площадь гиперболического сектора S . А теперь вспомним, что, согласно (12), $S = \ln(X + Y)$. Какая интересная круговая связь у элементов триады $\{X, Y, S\}$, прямо «все за одного, один – за всех»!

Теперь можем подставить выражения для X и Y из (15) и (16) в левую часть уравнения (11) $XY = \sqrt{1 + \delta}$. С учетом известного равенства $\text{sh } S \cdot \text{ch } S = 0,5 \text{sh}(2S)$, получаем (умножив на 2 левую и правую части): $\text{sh}(2S) = 2\sqrt{1 + \delta}$, откуда $\delta = 0,25 \text{sh}^2(2S) - 1$.

Раскрывая значение гиперболического синуса и снова умножая на 2 обе части равенства, находим:

$$e^{2S} + e^{-2S} = 4\sqrt{1 + \delta}. \quad (17)$$

Из соотношения (17) можно получить выражение площади сектора S через девиацию δ . Для этого обозначим:

$$L = e^{2S}; \quad R = 2\sqrt{1 + \delta}.$$

Тогда (17) примет вид:

$$L-1/L=2R; \quad L^2-2LR-1=0. \quad (18)$$

Положительный корень квадратного уравнения (18) равен:

$$L=R+\sqrt{R^2+1}; \quad e^{2S}=2\sqrt{1+\delta}+\sqrt{5+4\delta}.$$

Отсюда $2S=\ln [2\sqrt{1+\delta}+\sqrt{5+4\delta}]$, и выражение площади сектора S через девиацию δ :

$$S = \ln [2\sqrt{1+\delta}+\sqrt{5+4\delta}]^{0,5}. \quad (19)$$

Из (19) видим, что при нулевой девиации $\delta=0$ (случай 3С)

$$S_0 = \ln \sqrt{1+2\Phi} \approx \ln 2,058 \approx 0,722. \quad (20)$$

Подставим значение площади S из (19) в (15) и (16):

$$X = \text{ch} \{ \ln [2\sqrt{1+\delta}+\sqrt{5+4\delta}]^{0,5} \}; \quad (21)$$

$$Y = \text{sh} \{ \ln [2\sqrt{1+\delta}+\sqrt{5+4\delta}]^{0,5} \}. \quad (22)$$

Имея равенства (21) и (22), мы можем однозначно связать координаты рабочей точки гиперболы на Рис. 2 через гиперболические функции со значением девиации δ . Каждому значению девиации должны отвечать координаты отдельной, «собственной» точки на гармонической гиперболы. Прямо по пословице: «Всяк сверчок знай свой шесток» (*англ.*: The cobbler should stick to his last).

При этом мы всегда можем проверить свои расчеты по более простым соотношениям, вытекающим из (7) и (10) и не содержащим гиперболических функций. Действительно, из (7) известно, что $a_0=0,5(1+(5+4\delta)^{0,5})$, а из (10) – что $X^2=a_0$. Следовательно, с учетом того, что $X^2-Y^2=1$, получаем, что координаты равны:

$$X = a_0^{0,5} = [0,5(\sqrt{5+4\delta}+1)]^{0,5}; \quad (23)$$

$$Y = (X^2-1)^{0,5} = [0,5(\sqrt{5+4\delta}-1)]^{0,5}. \quad (24)$$

5. Определение координат рабочей точки гармонической гиперболы для девиации $\delta=\pm 1$ и $\delta=0$

5.1. Режим бисекции

Пусть $\delta=-1$. Подставим это значение девиации в выражение (19) для площади гиперболического сектора: $S=\ln [2\sqrt{1+\delta}+\sqrt{5+4\delta}]^{0,5}=\ln 1=0$. Но площадь гиперболического сектора может быть нулевой лишь для одной её рабочей точки – для вершины гиперболы (точка Q на Рис. 2). Действительно, из равенств (21) и (22) получаем: $X=\text{ch}(0)=1$; $Y=\text{sh}(0)=0$. Такие же результаты дают формулы (23) и (24). Подстановка значений $X=1$, $Y=0$ и $\delta=-1$ для точки Q в (11) дает тождество: $0=0$.

Но из (8) для данного режима имеем: $a_0-(1-1)/a_0=1$, то есть $a_0=1$. Как отмечалось выше, режим $a_0=a/h=1$, при котором аттрактор «а» равен гармоническому среднему $h=h(a,b)$ – это и есть режим бисекции [2,3].

Итак, вершина гармонической гиперболы Q с координатами (1; 0) отображает режим бисекции.

5.2. Режим $\delta=+1$

Подставив это значение девиации в (23) и (24), получаем

$$X = [0,5(\sqrt{5+4\delta}+1)]^{0,5} = \sqrt{2}; \quad Y = (X^2-1)^{0,5} = [0,5(\sqrt{5+4\delta}-1)]^{0,5} = 1.$$

Действительно, координаты точки $(\sqrt{2}; 1)$ и значение $\delta=1$ обращают уравнение гармонической гиперболы (11) $XY = \sqrt{1+\delta}$ в тождество: $\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

Но мы можем ещё раз проверить правильность наших формальных соотношений, рассчитав по (12) площадь гиперболического сектора $S=\ln(X+Y)$, а затем вторично определив X и Y через площадь S с помощью (15) и (16). Получим ли те же значения $X=\sqrt{2}$; $Y=1$?

Итак, из (12) имеем:

$$X+Y=\sqrt{2}+1\approx 2,41; \quad S=\ln(X+Y)\approx 0,881.$$

Из (15) и (16) получаем:

$$X=\operatorname{ch} S=\operatorname{ch} 0,881\approx 1,41; \quad Y=\operatorname{sh} S=\operatorname{sh} 0,881=1.$$

Эти элементарные расчеты подтвердили правильность полученных выше формальных соотношений. Кроме того, мы ещё раз убедились в том, что каждое значение девиации δ отображается индивидуальной точкой на гармонической гиперболе (Рис. 2).

5.3. Точка Золотого Сечения

Рассмотрим режим $\delta=0$.

Из (7) находим $a_0=0,5(1+(5+4\cdot 0)^{0,5})=\Phi$, из (10) $X_0=a_0^{0,5}=\Phi^{0,5}\approx 1,272$. Тогда из (11) следует, что $Y_0=1/X_0=\Phi^{-0,5}\approx 0,786$ и $X_0+Y_0\approx 2,058$. Те же результаты дает подстановка $\delta=0$ в (23) и (24).

На основании (12) площадь гиперболического сектора в режиме ЗС равна:

$$S_0 = \ln(X+Y) = \ln(\Phi^{0,5} + \Phi^{-0,5}) = \ln(cLs(0,5)) \approx 0,722. \quad (25)$$

Этот результат заслуживает внимания: здесь, и только здесь, **сумма координат** $X+Y$ рабочей точки оказалась равной **симметричному гиперболическому косинусу Люка**.

Могла ли эта сравнительно «молодая» гиперболическая функция, используемая математикой лишь с конца XX века, возникнуть в выражении для площади S сектора, соответствующей другой рабочей точке, отличной от точки ЗС?

Допустим, что при $\delta \neq 0$ в этой «другой» точке $X+Y=cLs(z)$. Но $cLs(z)=\Phi^z+\Phi^{-z}$.

А абсцисса X в любом случае может быть выражена в виде степени Φ^α золотой константы. Следовательно, ордината Y , в соответствии с (11) $XY = \sqrt{1+\delta}$, равна:

$$Y = \sqrt{1+\delta} / X = \Phi^{-\alpha} \cdot \sqrt{1+\delta}.$$

Тогда $X+Y=\Phi^\alpha+\Phi^{-\alpha} \cdot \sqrt{1+\delta}=\Phi^z+\Phi^{-z}=cLs(z)$. Но последнее равенство реально только при $\delta=0$ и $z=\alpha$.

Таким образом, **сумма координат** равна $X_0+Y_0=cLs(z)$ только в точке ЗС. Однако, здесь следует отметить, что в любом режиме **каждая** из координат рабочей точки по отдельности также может выражаться через симметричные гиперболические функции. Например, для точки ЗС, подставив $S=\ln(cLs(0,5))$ в (15) и (16), получаем:

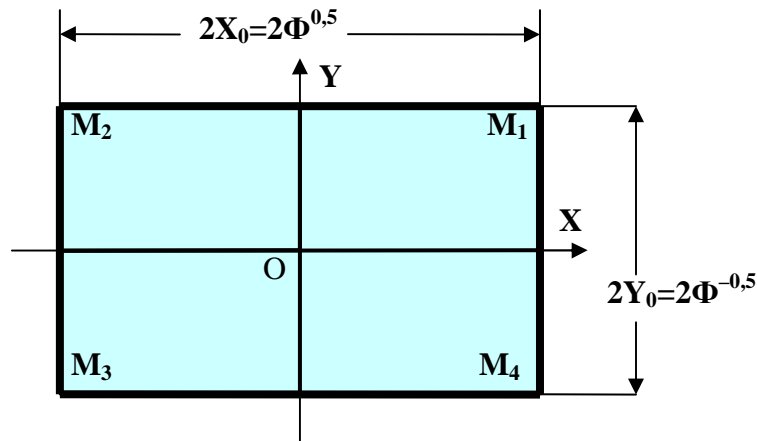
$$\begin{aligned} X_0 &= \operatorname{ch} S_0 = 0,5(e^S + e^{-S}) = 0,5(e^{\ln(cLs(0,5))} + e^{-\ln(cLs(0,5))}) = 0,5(cLs(0,5) + cLs^{-1}(0,5)); \\ Y_0 &= \operatorname{sh} S_0 = 0,5(e^S - e^{-S}) = 0,5(e^{\ln(cLs(0,5))} - e^{-\ln(cLs(0,5))}) = 0,5(cLs(0,5) - cLs^{-1}(0,5)). \end{aligned} \quad (26)$$

Кроме того, в отношении режима ЗС нам следует подчеркнуть еще одну его важную особенность, связанную с координатами рабочей точки

$$X_0 = \Phi^{0,5}; \quad Y_0 = \Phi^{-0,5}.$$

Пусть точка M_1 на Рис. 2 имеет именно такие координаты, то есть является точкой ЗС. Но на Рис. 2 показаны ещё три точки ЗС: M_2 , M_3 и M_4 . По две точки ЗС находятся на каждой из ветвей гармонической гиперболы. Соединив все четыре точки ЗС, получаем уникальный для гармонической гиперболы прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$, показанный на Рис. 2 и (отдельно) на Рис. 3 синим цветом.

Рис. 3. «Золотой» прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$ равносторонней гармонической гиперболы (Рис. 2), у которого длина действительной оси $2X_0$ в $\Phi \approx 1,618$ раз больше длины мнимой оси $2Y_0$



Уникальность этого прямоугольника заключается в том, что это единственный «рабочий» прямоугольник, **площадь которого равна площади основного квадрата $D_1D_2D_3D_4$** (показан на Рис. 2 желтым цветом) равносторонней гармонической гиперболы. Действительно, квадрат $D_1D_2D_3D_4$ построен на действительной оси длиной $2A=2$ и мнимой оси длиной $2B=2$; его площадь равна, следовательно, **четырем единицам площади.**

«Золотой» прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$ (Рис. 3) имеет длину действительной оси $2X_0=2\Phi^{0,5}$ и длину мнимой оси $2Y_0=2\Phi^{-0,5}$. Его площадь равна $2\Phi^{0,5} \cdot 2\Phi^{-0,5}=4$, то есть **тоже равна четырем единицам площади.**

Отметим также, что у «золотого» прямоугольника $M_1M_2M_3M_4$ длина действительной оси $2X_0$ в $\Phi \approx 1,618$ раз больше длины мнимой оси $2Y_0$, то есть, иными словами, у «золотого» прямоугольника (режим ЗС) длина больше высоты в Φ раз.

6. Гиперболические уравнения Золотого Сечения

6.1. Ещё раз о координатах X и Y в общем случае

Выразим координаты рабочей точки гиперболы на Рис. 2 для случая $\delta > -1$ через золотую константу Φ . Для этого примем, что

$$X+Y = \Phi^n; \quad n = \log_{\Phi}(X+Y), \quad (27)$$

где n – «золотой» логарифм от суммы координат, выражающийся произвольным числом.

Наш переход к «золотым» логарифмам порадует, очевидно, тех «золотоискателей», которые давно отстаивают преимущества подобных логарифмов. К ним, прежде всего, относятся Г.Я. Мартыненко [7] и С.А. Ясинский [8].

Итак, согласно (27) и (12), площадь гиперболического сектора $S = \ln(X+Y) = \ln \Phi^n$, и, в соответствии с (15) и (16):

$$X = \text{ch } S = \text{ch}(\ln \Phi^n) = 0,5(e^{\ln(\Phi^n)} + e^{-\ln(\Phi^n)}) = 0,5(\Phi^n + \Phi^{-n}) = 0,5 \text{ cLs}(n); \quad (28)$$

$$Y = \text{sh } S = \text{sh}(\ln \Phi^n) = 0,5(e^{\ln(\Phi^n)} - e^{-\ln(\Phi^n)}) = 0,5(\Phi^n - \Phi^{-n}) = 0,5 \text{ sLs}(n). \quad (29)$$

Сумма X и Y из (28) и (29) равна $X+Y=0,5(cLs(n)+sLs(n))=\Phi^n$, что соответствует исходному равенству (27). Таким образом, проверка показала, что каждую из координат рабочей точки гиперболы **по отдельности** всегда можно выразить через симметричную гиперболическую функцию Люка.

А теперь подставим выражения для X и Y из (28) и (29) в формулу гармонической гиперболы (11) $XY=\sqrt{1+\delta}$ и учтем, что $sLs(n)\cdot cLs(n)=sLs(2n)$:

$$0,5 cLs(n)\cdot 0,5 sLs(n)=0,25 sLs(2n)=\sqrt{1+\delta}; \quad sLs(2n)=4\sqrt{1+\delta}. \quad (30)$$

Из (30) можно получить явные функциональные зависимости девиации δ от $n=\log_{\Phi}(X+Y)$ из (27) и наоборот: $\delta=f_1(n)$ и $n=f_2(\delta)$.

Возведя равенство (30) в квадрат, получаем:

$$sLs^2(2n)=16(1+\delta); \quad \delta=(1/16)\cdot sLs^2(2n)-1; \quad \delta=(1/16)\cdot(\Phi^{2n}-\Phi^{-2n})^2-1. \quad (31)$$

Таким образом, мы получили зависимость $\delta=f_1(n)$, которая в числовом виде представлена в Табл. 2. Здесь можно выделить две уже знакомые нам точки: точку бисекции $(0; -1)$ и точку ЗС $(1,5; 0)$.

Табл. 2. Зависимость $\delta=f_1(n)$, где δ – девиация, $n = \log_{\Phi}(X+Y)$

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
δ	-1	-0,9375	-0,6875	0	1,81	6,56	19,0

Из (31), применив подстановку $\Phi^{2n}=\Theta$, нетрудно получить обратную зависимость $n=f_2(\delta)$:

$$n=0,5 \log_{\Phi}\{9+8\delta+\sqrt{64\delta^2-144\delta+80}\}^{0,5}. \quad (32)$$

Логарифмическая зависимость (32) позволяет увидеть, как медленно растет показатель степени « n » при увеличении девиации δ . Например, при $\delta=10$ имеем $n\approx 2,69$; при $\delta=100$ $n\approx 3,84$; при $\delta=1000$ $n\approx 5,03$.

6.2. Первое гиперболическое уравнение Золотого Сечения

Итак, из (25) мы знаем, что в режиме ЗС координаты рабочей точки таковы: $X=\Phi^{0,5}$; $Y=\Phi^{-0,5}$. Из (27) и Табл. 2 видно, что $X+Y=\Phi^n=\Phi^{1,5}$.

Таким образом, равенство $X+Y=\Phi^{1,5}$ можно заменить эквивалентным равенством $\Phi^{-0,5}+\Phi^{0,5}=\Phi^{1,5}$. Левую часть последнего выражения выразим через симметричный гиперболический косинус Люка: $\Phi^{-0,5}+\Phi^{0,5}=cLs(0,5)$. Следовательно, $\Phi^{1,5}=cLs(1,5-1)$, и, если применить для числа 1,5 его прежнее общее обозначение « n » (см. (27)), получаем:

$$\Phi^n - cLs(n-1)=0. \quad (33)$$

Это равенство мы и назовем первым гиперболическим уравнением Золотого Сечения.

В п. 5.3 было отмечено, что единственными точками на гиперболе Рис. 2, сумма координат которых выражается через симметричный гиперболический косинус Люка cLs , являются точки ЗС M_1, M_2, M_3 и M_4 . Подтвердим этот факт еще один раз следующими рассуждениями. Пусть, согласно аддитивным свойствам золотой константы Φ , имеем $\Phi^n=\Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}$. Если $\Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}=cLs(\alpha)$, то $n-1=\alpha$; $n-2=-\alpha$. Отнимем последнее равенство от равенства $n-1=\alpha$. Получим $2\alpha=1$; $\alpha=0,5$. Но $\Phi^{0,5}=X$ и $\Phi^{-0,5}=Y$ – это и есть координаты точки ЗС M_1 на Рис. 2.

Отсюда следует вывод, что уравнение (33) является описанием точки ЗС на гармонической гиперболе (Рис. 2) **через параметр $n=\log_{\Phi}(X+Y)$ – «золотой» логарифм от**

суммы координат точки ЗС. Только при $n=1,5$ в правой части (33) получаем нуль. При других значениях « n » возникает, как это видно из Табл. 3, невязка, свидетельствующая о **нечетной** симметрии зависимости (33) относительно значения $n=1,5$. Действительно, $\text{невязка}(1,5+x) = -\text{невязка}(1,5-x)$.

Табл. 3. Зависимость невязки от параметра $n=\log_{\Phi}(X+Y)$ для уравнения (33)

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Невязка	-1,236	-0,786	-0,382	0	0,382	0,786	1,236

6.3. Второе гиперболическое уравнение Золотого Сечения

ЗС можно характеризовать не только параметром « n », но и параметрами S (площадь гиперболического сектора при ЗС равна $S=\ln(cLs(0,5))\approx 0,722$) и δ ($\delta=0$ при ЗС).

Выразим через S слагаемые соотношения (33) $\Phi^n - cLs(n-1)=0$. Вместо Φ^n , согласно (27), подставим $X+Y$, выразив эту сумму через $\text{ch } S + \text{sh } S$ в соответствии с (15) и (16). Под знаком cLs в (33) стоит разность $n-1$. Выразим n через S . Из равенства $X+Y=\Phi^n$ следует, что $n=\log_{\Phi}(X+Y)$. Но из (12) известно, что $S=\ln(X+Y)$, откуда $X+Y=e^S$. Значит, $n=\log_{\Phi} e^S$; $n-1=\log_{\Phi} e^S - 1$ и, наконец,

$$\text{ch } S + \text{sh } S - cLs(\log_{\Phi} e^S - 1) = 0. \quad (34)$$

Итак, (34) – это **второе гиперболическое уравнение Золотого Сечения**, выраженное через площадь гиперболического сектора S . Это уравнение интересно тем, что в нем объединены константы « Φ » и « e », обычные гиперболические функции и симметричные гиперболические функции. В (34) применен «золотой» логарифм (по основанию $\Phi \approx 1,618$). В правой части (34) получаем нуль только в том случае, когда $S=\ln(cLs(0,5))\approx 0,722$, что соответствует ЗС. Иначе, как это видно из Табл. 4, возникает невязка, свидетельствующая о **нечетной** симметрии зависимости (34) относительно значения $S \approx 0,722$. Действительно, $\text{невязка}(S_0+x) = -\text{невязка}(S_0-x)$.

Табл. 4. Зависимость невязки от параметра S для уравнения (34)

S	0	$S_0-0,4$	$S_0-0,2$	$S_0 \approx 0,722$	$S_0+0,2$	$S_0+0,4$	$2S_0$
Невязка	-1,236	-0,646	-0,316	0	0,316	0,646	1,236

6.4. Третье гиперболическое уравнение Золотого Сечения

Выразим слагаемые соотношения (34) $\text{ch } S + \text{sh } S - cLs(\log_{\Phi} e^S - 1) = 0$ через девиацию δ . Функции $\text{ch } S$ и $\text{sh } S$ – это X и Y согласно (15) и (16). Они выражены через δ в (23) и (24). Осталось воспользоваться уже упомянутым при выводе (34) равенством $e^S = X+Y$ и вместо X и Y снова подставить их выражения через δ из (23) и (24). В итоге получаем **третье гиперболическое уравнение Золотого Сечения**:

$$[0,5(\sqrt{5+4\delta}+1)]^{0,5} + [0,5(\sqrt{5+4\delta}-1)]^{0,5} - cLs\{\log_{\Phi}([0,5(\sqrt{5+4\delta}+1)]^{0,5} + [0,5(\sqrt{5+4\delta}-1)]^{0,5}) - 1\} = 0. \quad (35)$$

Единственное решение уравнения (35) – это $\delta=0$ – точка Золотого Сечения. При девиации $\delta \neq 0$, как демонстрирует Табл. 5, возникает невязка. В отличие от Таблиц 3 и 4, симметрию относительно точки $\delta=0$ невязка не имеет: логарифмическая функция не симметрична относительно оси ординат Y .

Табл. 5. Зависимость невязки от параметра δ для уравнения (35)

δ	-1	-0,618	-0,5	0	0,5	0,618	1
Невязка	-1,236	-0,320	-0,235	0	0,145	0,173	0,252

Итак, нами получены три гиперболических уравнения Золотого Сечения: (33), (34) и (35). Параметрами в этих уравнениях являются n , S и δ . Решения этих трех уравнений однозначно определяют положение точки ЗС на гармонической гиперболе (10).

Напомним, что, как показано в п. 5.3, это положение точки ЗС уникально. На каждой из ветвей гармонической гиперболы находятся по две точки ЗС. Их соединение образует «золотой» прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$, площадь которого равна площади основного квадрата равнобочной гармонической гиперболы. Других таких точек на гиперболе (Рис. 2), подобных точке ЗС, нет и быть не может.

7.О перспективах применения гиперболических уравнений Золотого Сечения

Эта работа носит теоретический характер. Безусловно, трудно предусмотреть, каковы будут практические приложения полученных соотношений для гармонической рекурсии с девиацией и гиперболических уравнений режима Золотого Сечения. Однако, уже сейчас просматриваются интересные аналогии.

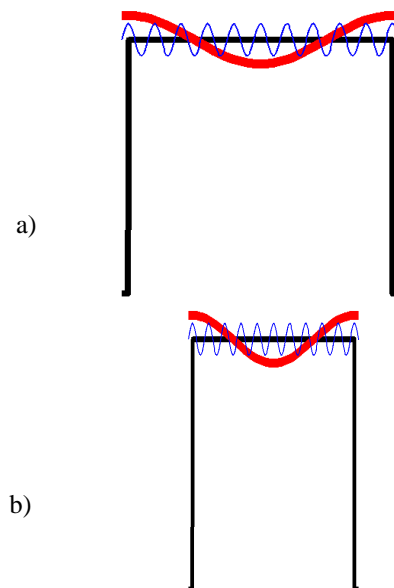
Ознакомимся с Рис. 4, а затем с двумя интересными цитатами.

Рис. 4. Разложение прямоугольных импульсов в ряд Фурье:

а) длительность импульса равна $X = \Phi^{0,5} \approx 1,272$; $X = \Phi \cdot Y$;

б) длительность импульса равна $Y = \Phi^{-0,5} \approx 0,786$.

Схематично показаны только две гармоники: **1-я** и **10-я**. Частоты (и периоды) первых (и, соответственно, десятых) гармоник отличаются в $\Phi \approx 1,618$ раз



Вот выдержка из недавно опубликованной статьи [9]:

"Воздействие магнитного поля под прямым углом к выровненным спинам магнитных цепей приводит к переходу вещества в новое состояние, называемое квантовым критическим состоянием, которое можно рассматривать как квантовую версию фрактальной модели.

Профессор Alan Tennant, лидер Берлинской группы в Берлине, объясняет: "Система достигает квантовой неопределенности - или шредингеровского состояния. Это то, что мы делали в наших экспериментах с ниобатом кобальта. Мы настроили систему именно для того, чтобы обратить ее в квантовое критическое состояние". Настраивая систему и искусственно вводя большую квантовую неопределенность, исследователи обнаружили, что цепочка атомов ведет себя подобно наноразмерной гитаре.

Доктор Radu Coldea из Оксфордского университета, который является главным автором этой статьи и возглавлял этот международный проект с самого начала (десять лет), объясняет: "Здесь напряженность возникает от взаимодействия между спинами, заставляя их магнитно резонировать. При этих взаимодействиях мы обнаружили ряд резонирующих нот: **первые две ноты обнаруживают идеальное взаимоотношение друг с другом. Их частоты находятся в отношении 1,618 ..., которое называется «золотым сечением», известным нам из искусства и архитектуры**".

Radu Coldea убежден, что «это – не случайное совпадение. Это отражение красивых свойств квантовой системы – её скрытой симметрии. На самом деле этот особый случай называется математиками E8, и это его первое наблюдение в материи». Наблюдаемые резонансные состояния кобальта ниобата являются драматической экспериментальной иллюстрацией пути, по которому развивается математическая теория применительно к физике элементарных частиц. Такие состояния могут найти применение в нано-науке и, в конечном счете, в технологии будущего. Проф Tennant отмечает совершенную гармонию, найденную в квантовой неопределенности вместо хаоса. **"Такие открытия приводят физиков к предположению, что квантовый атомный мир может иметь свой собственный, лежащий в его основе, порядок. Подобные сюрпризы могут ожидать исследователей и при изучении других веществ в квантовом критическом состоянии"**.

Вот еще одна цитата – из публикации [10]:

«Физики из Великобритании и Германии впервые наблюдали во время экспериментов в экзотических магнитных кристаллах необычный вид сложной симметрии под названием E8.

Руководитель экспериментов Раду Колдеа (Radu Coldea) из Оксфордского университета вместе с коллегами из Великобритании (the University of Bristol, Rutherford Appleton Laboratory) и Германии (the Helmholtz Zentrum Berlin – HZB) охладил кристаллы из ниобата кобальта (CoNb_2O_6) до 0,04 градуса выше абсолютного нуля. Атомы в таком квазиодномерном ферромагнетике выстроены в длинные цепочки, где каждый атом благодаря наличию электронов действует как крошечный магнит, спин которого направлен вверх или вниз.

Наложение поперечного (к направлению спинов) магнитного поля заставляет спины спонтанно переключать направление. Такие переключения или флуктуации распространяются по материалу, нарушая ферромагнитный порядок, и могут рассматриваться как квазичастицы. Причем флуктуации существуют даже при нулевой температуре, а ферромагнетизм разрушается при достаточно сильном магнитном поле. «Подобные фазовые переходы происходят между разными фазами вещества при нулевой температуре. Вблизи точки перехода возникают экзотические симметрии, которые управляют спектром возбуждения системы. Симметрия, описанная группой E8, которая была давно предсказана, появляется вблизи критической точки у модели цепочек Изинга. Мы обнаружили эту систему экспериментально», – рассказывают авторы.

С помощью нейтронного рассеяния ученые смогли определить энергию квазичастиц. В отсутствие магнитного поля они обнаружили пять квазичастиц, энергии которых описываются математической формулой Барри Мак-Коя и других (Barry McCoy, 1978).

Колдеа с коллегами затем повторили свои эксперименты в магнитном поле. Когда его значение достигло критической величины в 5,5 Тесла, соотношение энергий первых двух квазичастиц равнялось 1,618, то есть характерной величине «золотого сечения», предсказанной симметрией E8. Раду Колдеа убежден, что это не простое совпадение, а отражение неуловимой формы порядка, присутствующего в квантовых системах. Он считает, что похожие «спрятанные» симметрии могут также управлять физикой других материалов вблизи с критическими точками, где самоорганизуются электроны.

Российский ученый Александр Замолотчиков (в настоящее время в Rutgers University in Piscataway, New Jersey) указывал еще в конце 80 годов прошлого века, что симметрия E8 при некоторых условиях может описывать спектр возбуждений спина в одномерных ферромагнитных цепочках Изинга. Симметрия играет фундаментальную роль в нашем понимании физического мира. E8 присутствует и в теории струн, и в «теории всего» Гаррета Лизи (Garrett Lisi, 2007 год), в которой сделана попытка описать взаимодействие всех известных частиц. К сожалению, ученым удалось различить только самые низкие энергии квазичастиц при магнитном поле выше 5 Тесла».

Очевидно, квазичастицы ниобата кобальта, выведенные из состояния равновесия магнитным полем, под воздействием внутренних сил совершали свободные колебания, частота которых зависела от каких-то двух линейных параметров (назовем их X и Y). Эти

колебания гармонических микро-осцилляторов различались по частоте в Φ раз, поскольку неизвестные пока линейные микро-параметры также имели соотношение, равное золотой константе Φ .

Вспомним, что длина волны первого резонанса струны всегда равна её удвоенной длине, то есть частота свободных колебаний зависит от линейных размеров тела.

Представим, что неизвестные пока линейные микро-параметры X и Y пропорциональны координатам точки ЗС на гармонической гиперболе. Тогда становится понятным соотношение энергий квазичастиц или соотношение частот в их спектрах.

Для наглядности на Рис. 4 изображены два электроимпульса, длительности которых отличаются в Φ раз (как и координаты точки ЗС на гармонической гиперболе). Если заменить эти импульсы их разложением на гармоники (с помощью ряда Фурье), то соотношение частот или периодов первых гармоник также будет равно Φ .

Пока это только фантазии, но, кто знает, может новые гиперболические уравнения Золотого Сечения пригодятся и физикам для изучения состояния сверхохлажденных квазичастиц?

Вот что неоспоримо: на необъятное прекрасное полотно Математики Гармонии и теории Золотого Сечения нанесен еще один штрих, помогающий увидеть красоту законов Природы.

Заключение

Показан переход от произвольного сечения произвольного целого на две части «а» и «b» к «гармонической» пропорции $(a+b):b=b:(b-0,5h)$ с гармоническим средним $h(a,b)$ и к «гармонической» нормализованной рекурсии 2-го порядка $a_0^2 - a_0 - (1+\delta) = 0$.

На графической зависимости (носящей гиперболический характер) нормализованного аттрактора a_0 от относительной девиации δ режим каждой рекурсии отражается определенной точкой.

Например, координаты точки золотого сечения равны $(0; \Phi \approx 1,618)$. Для «серебряной» и «бронзовой» пропорций девиация отрицательна ($\delta < 0$), а для «медной» и «никелевой» пропорций девиация положительна ($\delta > 0$).

При девиации $\delta > -1$ безразмерный аттрактор a_0 всегда выражается действительным числом.

Для нормализованной рекурсии с характеристическим уравнением $a_0^2 - a_0 - (1+\delta) = 0$ найден ее геометрический образ. Это гармоническая равнобедренная гипербола с уравнениями $X^2 - Y^2 = 1$ и $XY = (1+\delta)^{0,5}$, где $X = a_0^{0,5}$ и $Y = [(1+\delta)/a_0]^{0,5}$ – обобщенные координаты рабочей точки.

Координаты X и Y любой точки гиперболы выражены через S – площадь гиперболического сектора для этой точки. Любое изменение рекурсии приводит к изменению значения безразмерной девиации δ , значений координат X , Y , значения S . Вершина гиперболы ($S=0$) соответствует точке бисекции. Точка ЗС обладает определенной спецификой, отразившейся на ее уравнениях золотого сечения.

Получены три формы гиперболических уравнений золотого сечения, каждое из которых имеет единственное решение, справедливое только для точки золотого сечения:

1) Относительно $n = \log_{\Phi}(X+Y)$: $\Phi^n - cLs(n-1) = 0$. Единственное решение: $n = \log_{\Phi}(X+Y) = 1,5$;

2) Относительно S : $ch S + sh S = cLs(\log_{\Phi} e^S - 1)$. Единственное решение: $S = \ln(cLs(0,5)) \approx 0,721817737\dots$;

3) Относительно δ : $X(\delta) + Y(\delta) - cLs(\log_{\Phi}(X(\delta) + Y(\delta)) - 1) = 0$. Единственное решение: $\delta = 0$.

В приведенных выше трех формах гиперболических уравнений ЗС совместно использованы константы «Фи» и «е», обычные и симметричные гиперболические функции, натуральные и «золотые» логарифмы.

Симметричная гиперболическая функция Люка cLs появляется при выражении суммы $X+Y$ координат рабочей точки **только в том случае, если это точка Золотого Сечения.**

Координаты рабочей точки гиперболы в режиме ЗС равны $X_0=\Phi^{0.5}$; $Y_0=\Phi^{-0.5}$.

На каждой из ветвей гармонической гиперболы находятся по две точки ЗС. Соединив четыре точки ЗС одной гиперболы, получаем уникальный «золотой» прямоугольник, площадь которого равна площади основного квадрата равнобочной гиперболы. У этого «золотого» прямоугольника длина (действительная ось) больше высоты (мнимая ось) в Φ раз.

Данную работу авторы расценивают лишь как начало теоретического изучения гармонической гиперболы как геометрического образа нормализованной гармонической рекурсии с переменными коэффициентами.

Литература:

1. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, 23(2): 379-389
2. Владимиров В.Л., Стахов А.П. Энтропия Золотого Сечения. Международный Клуб Золотого Сечения. Публикация от 16.3.2011 <http://www.goldensectionclub.net/publications/vladimirov/vladimirov-articles/vladimirov001>
3. Владимиров В.Л., Стахов А.П. Энтропийный анализ известных рекурсий. Международный Клуб Золотого Сечения. Публикация от 16.3.2011 <http://www.goldensectionclub.net/publications/vladimirov/vladimirov-articles/vladimirov002>
4. Владимиров В.Л. Ряды Фибоначчи, Люка и степеней золотой константы – частные случаи дивизорных возвратных последовательностей. Доклады 1-го международного конгресса "Современные аспекты Математики Гармонии и ее приложения в экономике, естествознании, технологии, социуме и образовании", г. Одесса, 8-10.10.2010 г. <http://www.goldensectionclub.net/home/congress/speeches>.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Главная редакция физ.-мат. литературы, «Наука», 1973 г., 872 с.
6. Стахов А.П., Владимиров В.Л. О формальной связи универсальных безразмерных физических констант: «фи», «пи» и «е». Публикация от 31.3.2011 г. <http://www.goldensectionclub.net/publications/vladimirov/vladimirov-articles/vladimirov003>
7. Мартыненко Г.Я., Малые зерна Фибоначчи, возвращенные на даче // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15080, 08.02.2009
8. Ясинский С.А. Основы динамических аналогий в исследовательской деятельности - СПб: ВУС, 2004. – 164 с.
9. Алексей Стахов. Золотое сечение в квантовом мире, математика гармонии, компьютеры Фибоначчи и «золотая» научная революция /04.01.2011 <http://www.goldensectionclub.net/publications/stakhov/stakhov-articles/stakhov012>
10. Quantum Criticality in an Ising Chain: Experimental Evidence for Emergent E8 Symmetry. R. Coldea et al. Science Vol. 327. no. 5962, pp. 177 - 180 (DOI: 10.1126/science.1180085). <http://physicsworld.com/cws/article/news/41373>