О.А. Черепанов

СТРУКТУРНЫЙ СТРОЙ «ЗОЛОТОЙ АРИФМЕТИКИ»

Введение в секстетную теорию чисел Фидия.

В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм – математических структур, и оказывается (…), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм.

Н. Бурбаки. Архитектура математики.

Как в творчестве, так и в обыденной жизни высшее искусство состоит в том, чтобы взять проблему за… постулат.

Гете

«Золотая пропорция» и квадроединица.

Когда говорят о «золотом» сечении, то обычно имеют в виду деление отрезка в среднем и крайнем отношении [1], предполагающее существование между его концами A и B точки C, положение которой задано пропорцией $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, где $c=a+b$. (*Рис.* 1.) Но при этом без должного внимания оставляют тот факт, что «золотая» пропорция – это связь чисел a, b и c, тогда как «золотое» сечение – это отношение отрезков AB, AC и CB, может быть таких, что $AB=AC+CB$, где предположительно $AB=c$, $AC=a$ и $CB=b$. Поэтому ниже показано, что оценка идеально-сплошных образов AB, AC и CB искусственными скалярами a, b и c не корректна метрологически.

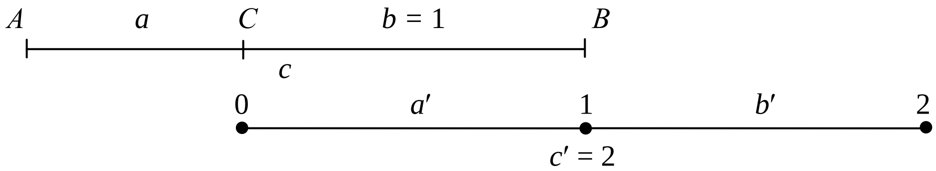


Рис. 1.

Итак, словосочетания «золотое сечение» и «золотая пропорция» не равноценны семантически, поскольку первое относится к геометрии, где измерениям предшествует выбор масштаба, а второе принадлежит арифметике, где единица вводится аксиоматически и деление чисел не эквивалентно измерению. Но проблема единицы не сводится к различию ее определений в смежных разделах элементарной математики. Она лежит глубже и состоит в невозможности утвердить геометрический масштаб без логических трудностей принципиального характера.

Пусть принятое в арифметике бинарное представление $2=1+1$ числа 2 определяет операцию сложения, вроде бы допустимую в геометрии. Однако дихотомия отрезка длиной в две единицы затруднительна из-за неясной принадлежности точки деления к его частям, которые в принципе не могут быть одинаковыми. И в этом усматривается проблема арифметизации, то есть представления образов геометрии числами, а не буквами. Обозначим эту проблему отчетливо.

Предположим, что серединной точке C' отрезка $c'=2$, как начального фрагмента числовой прямой, соответствует число 1 (*см. рис.* 1). Тогда части a' и b' геометрического образа $c'\subseteq[0,2]$ должны включать все точки-числа согласно одной из трех возможностей, якобы удовлетворяющих условию $a'=b'$:

1) $a'\subseteq[0,1]$ и $b'\subseteq[1,2]$;

2) $a'\subseteq[0,1)$ и $b'\subseteq(1,2]$;

3) $a'\subseteq[0,1]$, а $b'\subseteq(1,2]$ или $a'\subseteq[0,1)$, а $b'\subseteq[1,2]$.

Но $[a'+b']>c'$ по варианту (1), так как точка-число 1 входит в отрезок $c'=2$ дважды. Напротив, $[a'+b']<c'$ по варианту (2), поскольку точка-число 1 исключена из отрезка $c'=2$. И, наконец, $[a'+b']=c'$ по варианту (3). Но тут $a'\neq b'$, что исключает $a'=b'=1$. Кроме того, сложение разнородных образов – отрезка и полуинтервала – запрещено семантическими соображениями.

Как видно, дихотомия $2=1+1$, принимаемая в арифметике за определение единиц со свойством сложения, сомнительна в геометрии потому, что одна из ее аксиом утверждает непрерывность воображаемых конструкций, характеризуемых длиной, площадью или объемом. То есть, дискретность арифметики и континуальность геометрии столь противоположны, что расстояния a', b' и c' нельзя оценить числами из-за невозможности с должной строгостью задать масштаб. А теперь попробуем утвердить единичный элемент в арифметике, представленной взаимной связью чисел a, b и c в рамках пропорции $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, почитаемой как «золотая».

Очевидно, что бинарная форма $c=a+b$ допускает единичное значение любого из трех ее членов. А преобразование исходной пропорции к виду $a^2+ab=b^2$ дает $a^2+a\cdot 1=1^2$ при $b=1$ и $1^2+1\cdot b=b^2$ при $a=1$, что вводит квадратичную связь чисел a и b, не вполне обоснованно рассматриваемых как искомые отрезки в задаче о «золотом сечении». Но при этом «золотая пропорция» порождает квадроединицу 1^2, возникающую в производном от нее равенстве $1^2=a\cdot c$ при $b=1$. Причем последнюю из двух единиц называют средним геометрическим величин a и c. Однако квадроединица 1^2 имеет самостоятельный смысл, выступая в роли единичного морфизма множества чисел, принадлежащих «золотой» арифметике, основанием которой являются Фидиевы скаляры – «большой» $\Phi=1{,}618\ldots$ и «малый» $\varphi=0{,}618\ldots$ И этой арифметике, отличной от Диофантовой, свойственны две дихотомии: $2'=1^1+1^1$ и $2^*=1^2+1^2$, где формально $1^2\neq 1^1$.

Итак, выше показано, что Диофантова арифметика и геометрия (например, Евклидова) не образуют единой системы, поскольку количественные отношения последней, выражаемые символами +, –, ×, : между буквами какого-либо алфавита, при замене букв числами верны с точностью до проблемы дихотомии, доказывающей неопределимость масштаба графических образов и, как следствие, условность их арифметизации.

Структуры «золотой арифметики».

Под «золотой арифметикой» будем понимать математическую систему из элементов и операций, в которой количество единиц больше, чем одна, а перечень действий не ограничен четырьмя, изучаемыми в начальной школе. Пусть в широком смысле элементами Фидиевой системы являются числа Фибоначчи 1, 1, 2, …, F_N, … и числа Люка 1, 3, 4, …, L_N, …, получаемые рекурсией, тогда как в узком смысле ограничимся иррациональными скалярами Ф и φ в целых степенях. При этом «золотая арифметика» оказывается самодостаточной системой, избавленной от нуля, свободной от бесконечности и максимально удаленной от натурального ряда.

Опираясь на давно известные сочетания «остепененных» чисел Ф и φ, последовательно построим недиофантову арифметику, попутно обнажая существенные отношения между ними и некоторыми натуральными числами из множеств $\{F_N\}$ и $\{L_N\}$.

Известно, что уравнения $a^2+a\cdot 1=1^2$ и $1^2+1\cdot b=b^2$ с искомыми a и b становятся тождествами при $a_1=0{,}618\ldots$, $a_2=-1{,}618\ldots$ и $b_1=1{,}618\ldots$, $b_2=-0{,}618\ldots$ соответственно. Но в качестве основного постулата новой системы утвердим положительные корни $a_1=\varphi$ и $b_1=\Phi$, такие, что определяют единицу как $1=\varphi\cdot\Phi$, то есть мультипликативно, и как $1=\Phi-\varphi$, то есть аддитивно. При этом уникальность постулированных скаляров состоит в том, что они являются соседними членами геометрического ряда $\{\varphi^n\}$, элементы которого строятся умножением, то есть мультипликацией, и при $n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ связаны рекурсией $\varphi^n=\varphi^{n+1}+\varphi^{n+2}$, то есть аддитивны. Более того, среднее арифметическое $\frac{\varphi+\Phi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ чисел Фидия (обозначим его буквой *A*) и их среднее геометрическое $\sqrt{\varphi\cdot\Phi}=1$, отмеченное буквой *Ч*, связаны со средним гармоническим $\frac{2}{(1/\varphi)+(1/\Phi)}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, обозначенным буквой *O*, формулой $Ч^2=A\cdot O$, где *O* и *A* взаимно обратны, как и постулированные числа Ф и φ, такие, что $\varphi\cdot\Phi=1^2$.

Как видно, «золотой арифметикой» востребованы скаляры 1, 1^2, 2 и $\sqrt{5}$, последний из которых не играет самостоятельной роли, поскольку $\sqrt{5}=\varphi+\Phi=\Phi^2-\varphi^2$. Причем перечень ее операций включает возведение во вторую степень, эквивалентное умножению числа на себя же.

Заметим, что геометрический ряд $\{\varphi^n\}$ не содержит единицы, если показатель степени $n=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$ не имеет нулевого значения. Но можно отказать ему и в отрицательных значениях, ограничиваясь натуральными показателями степени $N = 1,2,3,\ldots$. Тогда формулы Бине, определяющие целочисленные элементы рекурсивных рядов $\{F_N\}$ и $\{L_N\}$ Фибоначчи и Люка через иррациональные скаляры Φ и φ, примут вид $F_N = \frac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^N - (-1)^k \varphi^N]$ и $L_N = \Phi^N + (-1)^k \varphi^N$, где $k = 1$ при нечетных N и $k = 2$ при четных.

Будем считать, что числа Фибоначчи 1, 1, 2, …, F_N, … и числа Люка 1, 3, 4, …, L_N, …, связанные перекрестной рекурсией $L_N = F_{N-1} + F_{N+1}$, в широком смысле принадлежат «золотой арифметике» потому, что $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{F_N}{F_{N+1}} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{L_N}{L_{N+1}} = \varphi$, а $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = \varphi^2$ и $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{F_N}{L_N} = \frac{F_{N+1} - F_{N-1}}{F_{N-1} + F_{N+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, хотя в узком смысле можно обойтись тремя первыми членами каждого из множеств $\{F_N\}$ и $\{L_N\}$. Но об этом после.

А сейчас закрепим приоритет иррациональных скаляров Φ и φ над целыми числами Фибоначчи и Люка, для чего рассмотрим пропорцию $\frac{F_N}{L_N} = \frac{1 - F_{N-1}/F_{N+1}}{1 + F_{N-1}/F_{N+1}}$, определяя $\frac{F_N}{L_N}$ как число-отношение Z_N и понимая $\frac{F_{N-1}}{F_{N+1}}$ как число-отклонение Δ_N от единицы в обе стороны.

Таким образом, при ненулевом значении Δ_N дробные числа $f_N = 1 - \Delta_N$ и $l_N = 1 + \Delta_N$ контрсимметричны относительно единицы и в любом случае аддитивны относительно двойки: $f_N + l_N = 2$. А поскольку $(1 + \Delta_N)(1 + Z_N) = 2$, то скаляры Z_N и Δ_N определяют ту же двойку мультипликативно. Кроме того, они взаимозаменяемы ($Z_N = \frac{1 - \Delta_N}{1 + \Delta_N} \Leftrightarrow \frac{1 - Z_N}{1 + Z_N} = \Delta_N$) в рамках дискретной функции, предполагающей принадлежность точек (Z_N, Δ_N) симметричной дуге равнобочной гиперболы $y = \frac{1 - x}{1 + x}$, где $0 < x < 1$. При этом точки с четными номерами при $N \to \infty$ стремятся к пункту $T(\frac{1}{\sqrt{5}}, \varphi^2)$ данной дуги сверху, а точки с нечетными N приближаются к нему снизу. (*Рис*. 2.) Это свойство гиперболического распределения I назовем ТОП-сходом.

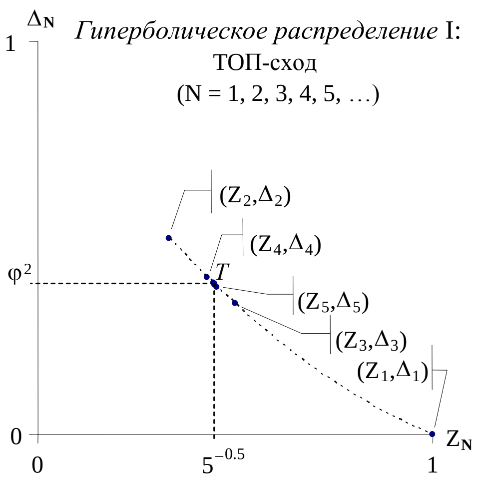


Рис.2.

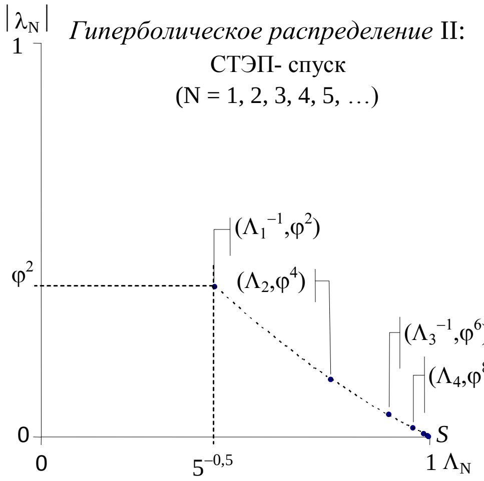


Рис.3.

В результате элементарных нововведений выделяется структура ♦ $1 \backslash \Delta_N \backslash f_N \backslash l_N \backslash Z_N \backslash 2$ ♦ из шести чисел, объединяющая целочисленные ряды $\{F_N\}$ и $\{L_N\}$ с перекрестной рекурсией элементов (*см. выше*). Причем натуральные инварианты 1 и 2 данной структуры определены дробными членами, связанными друг с другом так, что $Z_N = \frac{f_N}{l_N}$ и $\Delta_N = \frac{l_N - f_N}{2} = l_N - 1 = 1 - f_N$.

При этом $\frac{1 - \Delta_N}{1 + \Delta_N} = Z_N \Leftrightarrow \Delta_N = \frac{1 - Z_N}{1 + Z_N}$, что следует отметить специальным термином.

Свойство взаимной заменяемости рациональных чисел Z_N и Δ_N в рамках дискретной функции, утверждающей гиперболическое распределение точек (Z_N,Δ_N), назовем конверсией и будем считать пятым арифметическим действием. А теперь покажем, что иррациональные скаляры $\Lambda_N = \frac{F_N}{L_N}\sqrt{5}$ и $\lambda_N = (-1)^k \varphi^{2N}$ также конверсивны.

Дискретная функция $\Lambda_N = \frac{1-\lambda_N}{1+\lambda_N}$, получаемая делением тождеств $F_N\sqrt{5} = \Phi^N - (-1)^k\varphi^N$ и $L_N = \Phi^N + (-1)^k\varphi^N$, предполагает другое гиперболическое распределение точек $(\Lambda_N^{(-1)^k}, |\lambda_N|)$, стремящихся к пункту $S(1,0)$ при $N \to \infty$. (*Рис.* 3.) Этот процесс, учитывающий, что $k = 1$ при нечетных N и $k = 2$ при четных, назовем СТЭП-спуском. А так как $\frac{F_N}{L_N}\sqrt{5} = \frac{1-\ (-1)^k\varphi^{2N}}{1+\ (-1)^k\varphi^{2N}}$, то число-отношение $\Lambda_N = \frac{F_N}{L_N}\sqrt{5}$ и число-отклонение $\lambda_N = (-1)^k\varphi^{2N}$ связаны прямой конверсией $\frac{1-\Lambda_N}{1+\Lambda_N} = \lambda_N \Leftrightarrow \Lambda_N = \frac{1-\lambda_N}{1+\lambda_N}$ и вместе с контрсимметричными скалярами $\psi_N = 1-\lambda_N$ и $\Psi_N = 1+\lambda_N$, такими, что $\psi_N + \Psi_N = 2$, входят в секстет ◊ $1 \backslash \lambda_N \backslash \psi_N \backslash \Psi_N \backslash \Lambda_N \backslash 2$ ◊. При этом число 2 определяется мультипликативно произведением $(1+\lambda_N)(1+\Lambda_N) = 2$, а единица представлена аддитивно как $1 = \psi_N + \lambda_N = \Psi_N - \lambda_N$, где иррациональное число $\lambda_N = (-1)^k\varphi^{2N}$ меняет знак в зависимости от $k = 1{,}2$. Причем смену показателя степени k с четного на нечетный сопровождает перемена позиций контрсимметричных скаляров ψ_N и Ψ_N относительно числа 1, тогда как скаляр Λ_N колеблется относительно единицы, неограниченно приближаясь к ней при $N \to \infty$.

В итоге оказывается, что бесконечные ряды {F_N}, {L_N} и {φ^N} связаны секстетными структурами \♦\ и \◊\, числовые элементы которых значениями не превышают числа 2, но пока допускают $\Delta_N = 0$. Покажем, что недиофантова арифметика, основанная на числах Фидия и избавленная от понятия бесконечности, в нуле также не нуждается.

Квадроединица как сингулярность и бифуркация.

Ряд авторов [2-4], отстаивающих особую роль «золотого сечения» в геометрии и на формулах Бине построивших тригонометрию, аналогичную гиперболической, относят к «золотой арифметике» две последовательности $X_1 = 0{,}5$, $X_2 = 0{,}618...$, $X_3 = 0{,}682...$, …, $X_N = 0{,}999...$, … и $Y_0 = 2$, и $Y_1 = 1{,}618...$, $Y_2 = 1{,}466...$, …, $Y_{N-1} = 1{,}000...$, … со свойством $X_N \cdot Y_{N-1} = 1$, где $X_N \to 1$ и $Y_{N-1} \to 1$ при $N \to \infty$. При этом множество {X_N} состоит из действительных корней системных ($N = 1,2,3,...$) уравнений А) $x + x^N = 1$, тогда как ряд {Y_{N-1}} образован первыми решениями уравнений вида Б) $y - y^{1-N} = 1$. А так как $X_2 = \varphi$ и $Y_1 = \Phi$, то ряды {X_N} и {Y_{N-1}} соответственно упомянутые исследователи рассматривают в качестве *s*- и *p*-обобщений «золотой пропорции».

Покажем, что множество {φ^N}, сочетающее две структуры – мультипликативную $\varphi^N \cdot \varphi = \varphi^{N+1}$ и аддитивную $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$, входит в структуру $X_N^{N-1} - X_N^N = X_N^{2N-1}$, обобщающую ряды {$X_N$} и {$Y_{N-1}$}, единственным элементом $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$, соответствующим $N = 2$. Для этого числовые тождества А′) $1^1 = X_N + X_N^N$ и Б′) $1^1 = Y_{N-1} - Y_{N-1}^{1-N}$ относительно морфизма 1^1, отвечающие уравнениям (А) и (Б), перемножим с учетом $X_N \cdot Y_{N-1} = 1$. В результате получим эквивалентные равенства А*) $X_N^{N-1} - X_N^N = X_N^{2N-1}$ и Б*) $Y_{N-1}^{1-N} - Y_{N-1}^{-N} = Y_{N-1}^{1-2N}$ с рекурсией $(N-1) + N = 2N-1$ показателей степени, положительных в (А*) и отрицательных в (Б*). Поэтому будем считать выражение (А*) аддитивной структурой последовательности $d = 0{,}5$, $\varphi = 0{,}618...$, $e = 0{,}682...$, $f = 0{,}725...$ и т. д., начинающейся с дихотомии $1 = 0{,}5 + 0{,}5$. При этом сопряженный ряд $d^{-1} = 2$, $\varphi^{-1} = 1{,}618...$, $e^{-1} = 1{,}466...$, $f^{-1} = 1{,}379...$ и т. д. открывает дихотомия $2 = 1 + 1$. И, наконец, нельзя не заметить, что множества $\{X_N\}$ и $\{Y_{N-1}\}$ сходятся к единице – первое снизу, а второе сверху. Но если $X_N \to 1^1$ и $Y_{N-1} \to 1^1$ при $N \to \infty$, то должно быть $X_\infty \cdot Y_{\infty-1} = 1^2$.

Выше особое число 1^2, названное квадроединицей, появилось в результате тождественных преобразований пропорции $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, где $c = a + b$, охарактеризованной как «золотая». Здесь же квадроединица возникает при $N = \infty$ как сингулярность в связи со структурой $X_N^{N-1} - X_N^N = X_N^{2N-1}$, обобщающей ряды $\{X_N\}$ и $\{Y_{N-1}\}$. Убедимся, что данная структура отражает мультипликативный строй последовательности $d = 0{,}5$, $\varphi = 0{,}618...$, $e = 0{,}682...$, $f = 0{,}725...$ и т. д., рассматриваемой некоторыми исследователями как *s*-обобщение «золотой пропорции».

Очевидно, что структура $X_N^{N-1} - X_N^N = X_N^{2N-1}$, отображая аддитивные свойства числовой последовательности *d*, φ, *e*, *f* и т. д., распадается на ряд бинарных форм, представленных в столбце таблицы 1. При этом видно, что разность членов слева от знака равенства равна их произведению. А так как показатели степени данных членов складываются в показатель степени члена справа, то мультипликативный строй рассматриваемой последовательности отражает числовая форма $X_N^{N-1} \cdot X_N^N = X_N^{2N-1}$ с дискретными основаниями X_N, зависящими от $N = 1,2,3,...$.

Таблица 1

				$d^0 - d^1 = d^1$		
. . .	$\varphi^{-2} = \varphi^{-1} + \varphi^0$	$\varphi^{-1} = \varphi^0 + \varphi^1$	$\varphi^0 = \varphi^1 + \varphi^2$	$\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$	$\varphi^2 = \varphi^3 + \varphi^4$	. . .
	$1^* = \Phi^2 - \Phi$	$1' = \Phi - \varphi$	$1^0 = \varphi^1 + \varphi^2$	$e^2 - e^3 = e^5$		
				$f^3 - f^4 = f^7$		
				. . . .		

Заметим, что в форме $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$ показатели степени не только рекурсивны ($1 + 2 = 3$), но и последовательны как первые члены натурального ряда, представленные также в рядах Фибоначчи и Люка. И уникальные свойства триплета $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ позволяют считать его «бриллиантовым» ключом от «золотой пропорции». Но об этом после.

Сейчас же вернемся к форме А′) $1^1 = X_N + X_N^N$ (*см. выше*), а сопряженное с ней выражение Б′) $1^1 = Y_{N-1} - Y_{N-1}^{1-N}$ приведем к виду Б″) $1^1 = Y_N^N - Y_N^{N-1}$. Перемножая (А′) и (Б″), получим $X_N = Y_N^{N-1} - Y_N^{N-2} = Y_N^{-1}$ и заметим, что $X_N \cdot Y_N = 1$, где $N = 1,2,3,...$ А поскольку $X_N \to 1^1$ снизу и $Y_N \to 1^1$ сверху, то $X_N \cdot Y_N \to 1^2$ при $N \to \infty$. Но когда $N = \infty$, то (А′) принимает вид $2 \cdot 1^1 = 1^1 + 1^2$, если допустить бифуркацию $X_\infty^\infty \Rightarrow 1^2$ и сингулярное удвоение единицы 1^1 слева. При этом (Б″) в виде $1^1 = (1^1)^\infty - (1^1)^{\infty-1}$, отвечающем $N = \infty$, требует сингулярного удвоения члена $(1^1)^\infty$.

Как видно, противоречие аддитивных форм (А′), (Б″) мультипликативному свойству $X_\infty \cdot Y_\infty = 1^2$ взаимно обратных чисел X_N и Y_N в пределе обязывает ввести в оборот квадроединицу $1^2 = 2 \cdot 1^1$ и принять дихотомию $2^* = 1^2 + 1^2$ в качестве начала некоторой последовательности бинарных выражений из чисел, чем-то отличающихся от действительных. И такие числа находятся секстетными решениями ряда задач механики и физики [5], хотя морфизмы 1^1 и 1^2, формально отличающиеся вдвое, можно обнаружить в недиофантовой арифметике чисел φ и Φ.

Секстетная арифметика Фидия.

Обобщаемые аддитивной $X_N^{N-1} - X_N^N = X_N^{2N-1}$ и мультипликативной $X_N^{N-1} \cdot X_N^N = X_N^{2N-1}$ структурами, числовые последовательности $d = 0{,}5$, $\varphi = 0{,}618...$, $e = 0{,}682...$, $f = 0{,}725...$, … и $d^{-1} = 2$, $\varphi^{-1} = 1{,}618...$, $e^{-1} = 1{,}466...$, $f^{-1} = 1{,}379...$, … из взаимно обратных ($X_N \cdot Y_N = 1$) решений $\{X_N\}$ и $\{Y_N\}$ системных ($N = 1,2,3,...$) уравнений $1^1 = x + x^N$ и $1^1 = y^N - y^{N-1}$, начинающихся с дихотомий $1 = 0{,}5 + 0{,}5$ и $2 = 1 + 1$ соответственно, наглядно представлены рядом вертикальных отрезков на диаграмме, нарисованной в произвольном масштабе. (*Рис.* 4.) При этом отрезки длиной 0,618… и 1,618… отображают числа Фидия φ и Φ геометрически. Подтвердим их выдающуюся роль в «золотой арифметике», опирающейся на естественные связи скаляров φ и Φ в немногих целых степенях.

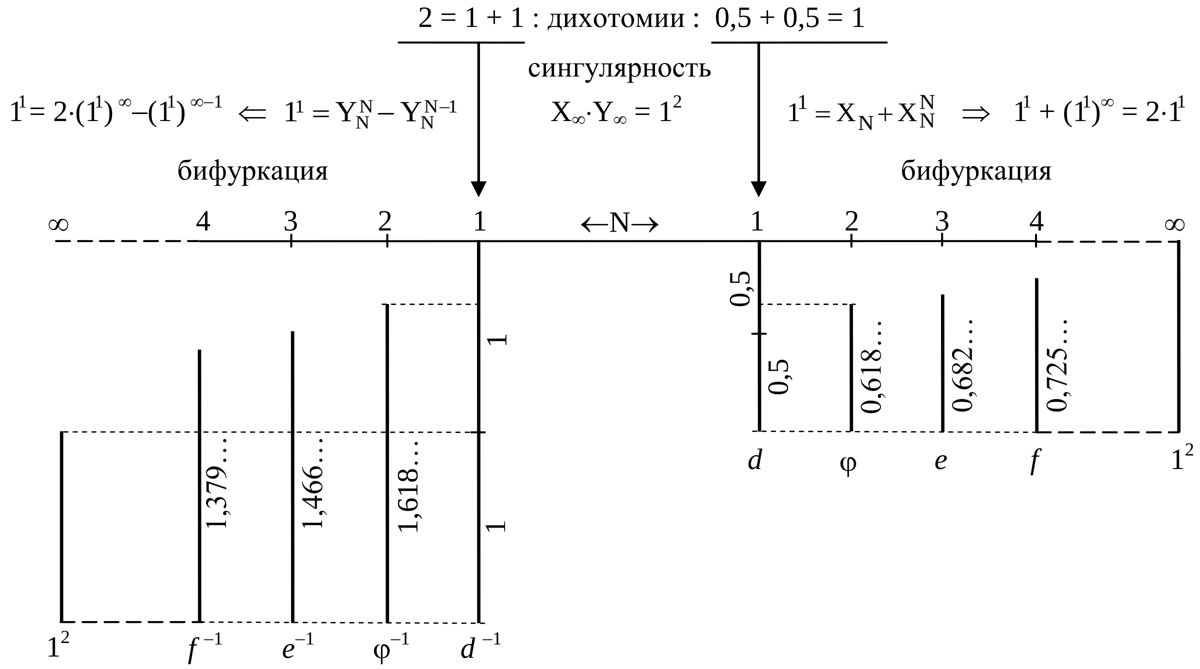


Рис. 4.

Как известно, множество $\{\varphi^N\}$ представляет собой геометрическую прогрессию или мультипликативный ряд $\varphi^N \cdot \varphi = \varphi^{N+1}$ без единичного морфизма с аддитивной связью трех соседних членов $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$, где число N можно считать номером унарного члена φ^N, а показатели степени тринарного элемента – это тройка целых чисел, следующих одно за другим. Ясно, что смена показателя степени с положительного на отрицательный инвертирует скаляр φ^N в обратное ему число Φ^N. Но при этом сохраняется аддитивная структура $\Phi^N + \Phi^{N+1} = \Phi^{N+2}$ сопряженного ряда $\{\Phi^N\}$ и его мультипликативный строй $\Phi^N \cdot \Phi = \Phi^{N+1}$ при отсутствии единичного морфизма, который можно ввести дихотомией $2 = 1 + 1$ особой двойки из секстетов, образуемых скалярами φ и Φ в небольших целых степенях. А в качестве основы секстетной «золотой арифметики» примем определение гармонического секстета из действительных чисел.

В элементарной математике, отнюдь не случайно, обнаружен новый класс объектов. Дадим определение, применимое к любому из них, опираясь на понятие вещественного числа, но зная, что найденные объекты буквально извлечены из измерительной практики [5].

Определение. *Гармонический секстет* общего вида – это шесть положительных чисел 1, *d*, *x*, *y*, *z* и 2, структурированных математически:

а) бинарными операциями $x + d = y - d = 1$ и $x + y = (1+z)(1+d) = 2$ относительно целых 1 и 2;

б) порядком $x < y$ и отношением $\dfrac{x}{y} = z < 1$ дробных элементов – первого $x < 1$ и второго $y > 1$;

в) их контрсимметрией $x = 1 - d$ и $y = 1 + d$, т. е. равным, но противоположным отличием от единицы;

г) конверсией $\dfrac{1-d}{1+d} = z \Leftrightarrow d = \dfrac{1-z}{1+z}$ или взаимной перестановкой числа-отношения $z = \dfrac{x}{y}$ и числа-отклонения $d = \dfrac{y-x}{2}$ в конвертируемой дроби с контрсимметрией числителя и знаменателя.

Заметим, что конверсия выглядит пятой арифметической операцией после действий сложения, вычитания, умножения и деления, привычно осуществляемых с действительными числами 1, *d*, *x*, *y*, *z* и 2 Диофантовой арифметики.

Структурные связи (*а*), (*б*), (*в*) и (*г*) шести элементов *гармонического секстета* $\circ 1 \backslash d \backslash x \backslash y \backslash z \backslash 2 \circ$ общего вида проиллюстрируем графически. (*Рис*. 5.)

По определению дробно-линейной функции $z=\dfrac{1-d}{1+d}$ с аргументом $0<d<1$ точка (d,z) принадлежит дуге равнобочной гиперболы между пунктами (0,1) и (1,0) декартовых осей с началом 0. И этим обусловлены прямая конверсия (*г*) и бинарная операция $(1+z)(1+d)=2$ по (*а*). А совпадение проекций точек (*d*,*z*) и (*x*,*y*) на отрезок 0*2 горизонтальной оси декартовой системы с началом 0* обеспечивает контрсимметрию (*в*) координат $x=1-d$ и $y=1+d$ точки (*x*,*y*) и их бинарную связь $x+y=2$ по (*а*). При этом $d\in(0,1)$, $x\in(1,0)$, $y\in(1,2)$ и $z\in(1,0)$ по условиям (*а*), (*б*), (*в*) и (*г*), определяющим *гармонический секстет* $\circ 1\backslash d\backslash x\backslash y\backslash z\backslash 2\circ$ общего вида из чисел, понимаемых как действительные.

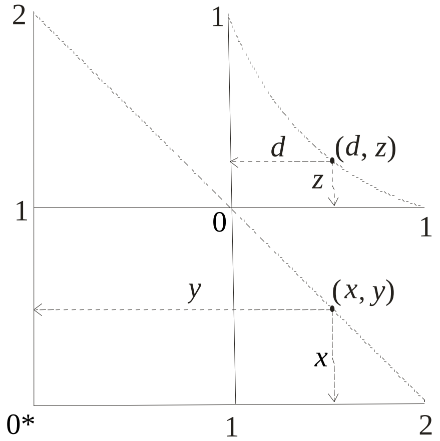


Рис. 5.

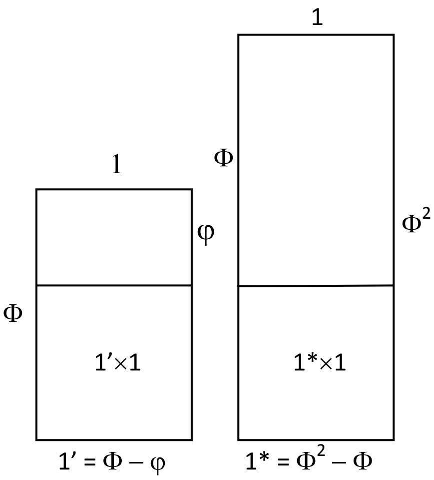
Но выше в устройстве рекурсивных рядов Фибоначчи и Люка, члены которых связаны с «золотыми» скалярами Фидия формулами Бине (*см. рис.* 2 и 3), выявлены *совершенные секстеты* из скаляров, выделяющихся из континуума так называемых действительных чисел своими связями с «золотой пропорцией». И подобные секстеты составляют «золотую арифметику», по сути недиофантову из-за наличия в ней двух единиц, формально отличающихся в два раза. При этом данные единицы геометрически интерпретируются как площади с отношением 1:2.

Отсутствие нулевых степеней «золотых» оснований φ и Φ порождает проблему выбора единицы «золотой арифметики» из нескольких выражений: $1=\varphi\cdot\Phi$, $1=\Phi-\varphi$, $1=\Phi^2-\Phi$, $1=\Phi^3-2\Phi$, $1=\varphi+\varphi^2$, $1=2\varphi-\varphi^3$ и $1=2\varphi^2+\varphi^3$. При этом нормировка триплета $\varphi^1-\varphi^2=\varphi^3$ (*см. таблицу* 1) каким-либо из его членов дает одну из трех единиц ($1^*=\Phi^2-\Phi$, $1'=\Phi-\varphi$ и $1^0=\varphi+\varphi^2$) того же ряда, отличающихся не только символикой.

Понимая морфизм 1^0, получаемый делением «бриллиантового ключа» $\varphi^1-\varphi^2=\varphi^3$ на φ^1, как площадь квадрата 1×1, будем считать последнюю суммой прямоугольников $\varphi\times1$ и $\varphi^2\times1$.

Затем равенство $\varphi^1=\varphi^2+\varphi^3$ разделим на φ^2, а нормированную единицу $1'=\Phi-\varphi$ умножим на 1. Тогда произведение $1'\times1=(\Phi\times1)-(\varphi\times1)$ приобретает смысл единичного квадрата, вычитание которого из прямоугольника $\Phi\times1$ дает прямоугольник площадью $\varphi\times1$, подобный фигуре $\Phi\times1$. (*Рис*. 6.)

И, наконец, пронормируем «бриллиантовый ключ» по φ^3, а единицу $1^*=\Phi^2-\Phi$ также умножим на 1. Тогда вычитание единичного квадрата $1^*\times1$ из площади $\Phi^2\times1$ оставит от нее площадь $\Phi\times1$. И выходит, что площади φ и Φ^2 одинаково (на −1 и на +1 соответственно) отличаются от площади Φ, то есть контрсимметричны относительно нее. При этом выделяются две единицы: положительная $[+1]=\Phi^2-\Phi$ и отрицательная $[-1]=\Phi-\varphi$.



контрсимметрия

$\varphi+[-1]=\Phi^2-[+1]=\Phi$

Рис. 6.

Ясно, что контрсимметричные скаляры φ и Φ^2 включены в структуру $\bullet 1\backslash\Phi\backslash-\varphi\backslash\Phi^2\backslash-\varphi^3\backslash 2\bullet$, отвечающую условиям (*а*), (*б*), (*в*) и (*г*), определяющим *гармонический секстет* общего вида как конструкцию обычной арифметики. А в рамках структуры $\backslash\bullet\backslash$, которую назовем *совершенным секстетом*, действительны связи $2=\Phi^2-\varphi=(1-\varphi^3)(1+\Phi)$ и $\dfrac{1-(-\varphi^3)}{1+(-\varphi^3)}=\Phi\Leftrightarrow-\varphi^3=\dfrac{1-\Phi}{1+\Phi}$ между числами Фидия и целыми числами 1 и 2, характерные для секстета $\circ 1\backslash d\backslash x\backslash y\backslash z\backslash 2\circ$. То есть, в *совершенном секстете* $\backslash\bullet\backslash$ представлены частные значения чисел, относящиеся к системе Фидия.

А теперь «бриллиантовым ключом» откроем еще одну контрсимметрию в ограниченной выборке чисел из ряда $\{\varphi^n\}$. Но сначала рассмотрим диаграмму, иллюстрирующую аддитивные («плюс» и «минус») связи взаимно обратных скаляров φ и Φ в степенях 1, 2 и 3. (*Рис*. 7.)

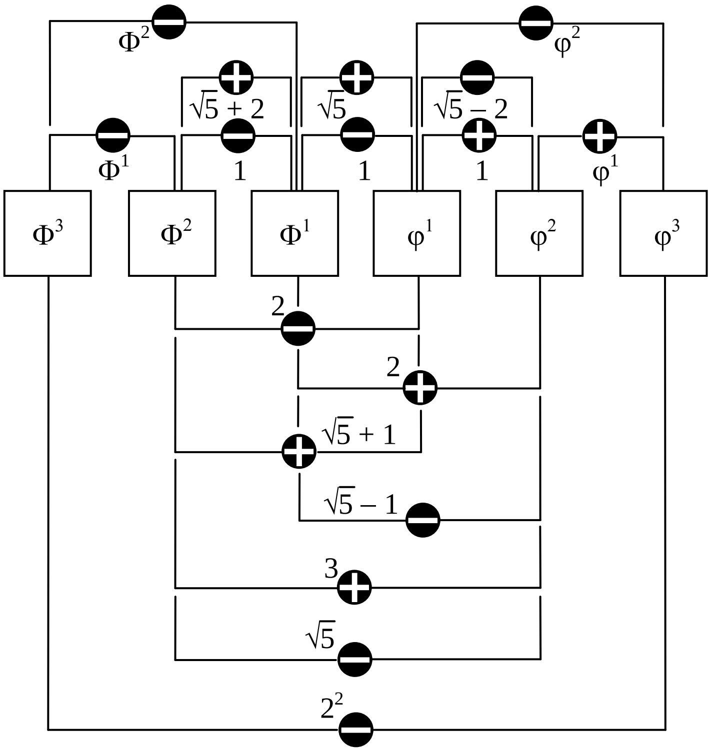
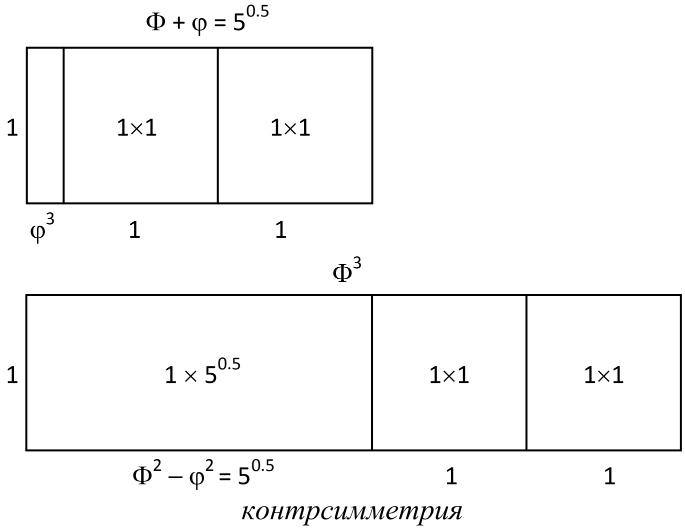


Рис. 7.

Заметим, что попарные сочетания «остепененных» чисел Фидия в ряде случаев дают результат, содержащий скаляр $\sqrt{5}$, одиозность которого в «золотой арифметике» можно преодолеть, зная, что $\sqrt{5} = \varphi + \Phi = \Phi^2 - \varphi^2$. То есть, сам по себе иррациональный член $\sqrt{5}$ не интересен, но важны его представления суммой «золотых» чисел φ и Φ и разностью их квадратов. И, кроме того, дробная часть числа $5^{0,5}$ равняется φ^3, поскольку $\sqrt{5} - 2 = 0{,}236\ldots$

Пусть переобозначение скаляра $\sqrt{5} = 2 + \varphi^3$ в $5^{0,5}$ выражает тот факт, что корень квадратный из пяти в «золотой арифметике» не играет самостоятельной роли. То есть, это скорее символ, выражающий двойственность числа $5^{0,5}$, поскольку его значение $\varphi + \Phi$ есть скаляр первой степени, тогда как равная ему величина $\Phi^2 - \varphi^2$ квадратична, что дает повод вспомнить о единице 1^1 и о квадроединице 1^2, определенной выше как сингулярность.

Левую и правую части тождества $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$ увеличим на 2 и получим $\varphi^3 = 5^{0,5} - 2$. Затем к равным частям «бриллиантового ключа» прибавим по 2^2, после чего будем иметь $\Phi^3 = 5^{0,5} + 2$.



$$\varphi^3 + [-2] = \Phi^3 - [+2] = \Phi + \varphi = \Phi^2 - \varphi^2$$

Рис. 8.

Ясно, что двойки [–2] и [+2] выражают отклонения чисел φ^3 и Φ^3, таких, что $\Phi^3 - \varphi^3 = 2^2$, от числа $5^{0.5} = \varphi + \Phi = \Phi^2 - \varphi^2$. При этом взаимно обратные скаляры φ^3 и Φ^3, как и скаляры 2 и $5^{0,5}$, имеют смысл площади. (*Рис*. 8.)

Секстетное ядро «золотой арифметики».

Итак, тождества $[-1]=\Phi-\varphi$ и $[+1]=\Phi^2-\Phi$ с контрсимметрией чисел φ и Φ^2 относительно «большого Фидия» Φ получаются нормировкой равенства $\varphi^1=\varphi^2+\varphi^3$ по φ^2 и по φ^3 соответственно. А выражения $[-2]=\varphi^3-(\Phi^2-\varphi^2)$ и $[+2]=\Phi^3-(\varphi+\Phi)$ сводятся к $\varphi^1=\varphi^2+\varphi^3$ подстановками $2+\varphi$ вместо Φ^2 и $4+\varphi^3$ вместо Φ^3.

Таким образом, первые три степени Фидиевых скаляров φ и Φ образуют твердое ядро «золотой арифметики» с основанием в виде «бриллиантового ключа» $\varphi^1=\varphi^2+\varphi^3$. А так как $\varphi^3=1-2\varphi^2$ и $\varphi^3=2\varphi-1$, откуда $\varphi^2=\dfrac{1-\varphi^3}{2}$ и $\varphi=\dfrac{1+\varphi^3}{2}$, то $\varphi=\dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$, где φ и φ^3 связаны прямой конверсией $\dfrac{1-\varphi}{1+\varphi}=\varphi^3 \Leftrightarrow \varphi=\dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$, то есть взаимозаменяемы в дробях с контрсимметричными числителем и знаменателем. Кроме того, $2=(1+\varphi)(1+\varphi^3)=(\Phi+1)(1-\varphi^3)$ и $2=(\dfrac{5^{0.5}}{2}+1)(1-\varphi^6)$. И еще $\varphi^3=5^{0.5}-2$ и $\varphi^{-3}=\Phi^3=5^{0.5}+2$, что выше интерпретировано геометрически (*см. рис.* 8).

Уникальные связи первых трех степеней чисел Фидия обозначим понятием *совершенного секстета*, как частного случая *гармонического секстета* $\circ 1\backslash d\backslash x\backslash y\backslash z\backslash 2\circ$, в котором дробные члены d, x, y и z принимают значения элементов «золотой арифметики».

Выше (*см. рис.* 6) найден секстет $\bullet 1\backslash\Phi\backslash-\varphi\backslash\Phi^2\backslash-\varphi^3\backslash 2\bullet$ из чисел Фидия в степенях 1, 2 и 3, содержащий прямую конверсию $\dfrac{1-\varphi}{1+\varphi}=\varphi^3 \Leftrightarrow \varphi=\dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$. При этом выявлена контрсимметрия чисел φ^3 и Φ^3 (*см. рис.* 8), предполагающая конверсию $\dfrac{2-5^{0,5}}{2+5^{0,5}}=-(-\varphi^3)^2 \Leftrightarrow \dfrac{5^{0,5}}{2}=\dfrac{1+(-\varphi^3)^2}{1-(-\varphi^3)^2}$ членов $-\varphi^6$ и $\dfrac{5^{0,5}}{2}$ секстета $\lhd 2\backslash 5^{0,5}\backslash-\varphi^3\backslash\Phi^3\backslash-\varphi^6\backslash 2^2\rhd$ с удвоенными целыми 1 и 2. Другие примеры контрсимметрии и конверсии Фидиевых скаляров в степенях 1, 2, 3, …, важные для «золотой арифметики», сведены в таблицу 2.

Таблица 2

степень	*контрсимметрия относительно* $\sqrt{5}$	*конверсия*
первая *вторая*	$\sqrt{5}+0=\varphi^1+\Phi^1=2+\varphi^3$ $\sqrt{5}-0=\Phi^2-\varphi^2=2+\varphi^3$	*прямая*: $\dfrac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1}=\varphi^3 \Leftrightarrow \varphi^1=\dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3}$
N = 1	$\sqrt{5}+1=\Phi^2+\varphi^1=2\Phi^1=3+\varphi^3$ $\sqrt{5}-1=\Phi^1-\varphi^2=2\varphi^1=1+\varphi^3$	$\dfrac{1+\varphi^2}{1-\varphi^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow -\ \varphi^2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=-\dfrac{1+\varphi^3}{1-\Phi^3}$
N = 2	$\sqrt{5}+3=2\Phi^2=5+\varphi^3$ $\sqrt{5}-3=-2\varphi^2=-2\varphi^1+2\varphi^3$	$\dfrac{1-\varphi^4}{1+\varphi^4}=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \varphi^4=\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{1-\varphi^3}{1+\Phi^3}$
N = 3	$\sqrt{5}+2=\Phi^2+\Phi^1=4+\varphi^3=\Phi^3$ $\sqrt{5}-2=\varphi^1-\varphi^2=\varphi^3$	$\dfrac{1+\varphi^6}{1-\varphi^6}=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow -\ \varphi^6=\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=-\dfrac{\varphi^3}{\Phi^3}$

Очевидно, что аддитивные («плюс» и «минус») сочетания $\sqrt{5}$ с целым $N=1{,}2{,}3$ входят в *совершенные секстеты* вместо контрсимметричных членов x и y *гармонического секстета*, сумма которых равняется 2. Но в трех последних строках таблицы 3 представлены *совершенные секстеты*, характеризуемые показателями степени $N=1$, $N=2$ и $N=3$ в конвертируемой дроби

$\dfrac{F_N}{L_N}\sqrt{5}=\dfrac{1-\ (-1)^k\varphi^{2N}}{1+\ (-1)^k\varphi^{2N}}$, где $F_1=L_1=1,\ F_2=1$ и $L_2=3,\ F_3=2$ и $L_3=4$ – первые числа Фибоначчи и Люка. При этом контрсимметрию элементов x и y двух последних секстетов нарушает деление их членов на 3 и на 2, необходимое для приведения суммы x и y к виду $x+y=2$.

Таблица 3

степень	*единица*	Δ	x	y	z	*двойка*
			контрсимметрия			
	1	φ	φ^2	Φ	φ^3	2
			$x + y = 2$			
	1	Φ	$-\varphi$	Φ^2	$-\varphi^3$	2
			$x + y = 2$			
N = 1	1	$\Phi + \varphi$	$-(1 + \varphi^3)$	$\Phi^3 - 1$	$-\varphi^2$	2
			$x + y = 2$			
N = 2	3/3	$(\Phi^2 - \varphi^2)/3$	$(1 - \varphi^3)/3$	$(\Phi^3 + 1)/3$	φ^4	6/3
			$x + y = 2$			
N = 3	2/2	$5^{0,5}/2$	$-\varphi^3/2$	$\Phi^3/2$	$-\varphi^6$	4/2
			$x + y = 2$			

Заметим, что число-отношение $z=\dfrac{-\varphi^3}{\Phi^3}=-(\varphi^2)^3$ в секстете $\lhd 2\setminus 5^{0,5}\setminus -\varphi^3\setminus \Phi^3\setminus -\varphi^6\setminus 2^2 \rhd$, определяемом показателем степени $N=3$, после уменьшения на единицу числителя и знаменателя равно числу-отношению $-\varphi^2=\dfrac{1+\varphi^3}{1-\Phi^3}$ секстета $\Theta\ 1\setminus 5^{0,5}\setminus -(1+\varphi^3)\setminus(\Phi^3-1)\setminus -\varphi^2\setminus 2\ \Theta$ в строке таблицы 3, озаглавленной показателем $N=1$.

Таблица 4

степень	*непрямая конверсия слева от* $\Leftrightarrow$
N = 1	$\boxed{\dfrac{-1}{-1}} \Rightarrow \dfrac{1+\varphi^3}{1-\Phi^3}=-(\varphi^2)^1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1}\sqrt{5}=\dfrac{\Phi^1+\varphi^1}{\Phi^1-\varphi^1}=\dfrac{1+(\varphi^2)^1}{1-(\varphi^2)^1}$
N = 3	$\dfrac{-\varphi^3}{\Phi^3}=\dfrac{1-2\varphi}{1+2\Phi}=-(\varphi^2)^3 \Leftrightarrow \dfrac{2}{4}\sqrt{5}=\dfrac{\Phi^3+\varphi^3}{\Phi^3-\varphi^3}=\dfrac{1+(\varphi^2)^3}{1-(\varphi^2)^3}$
N = 2	$\boxed{\dfrac{+1}{+1}} \Rightarrow \dfrac{1-\varphi^3}{1+\Phi^3}=(\varphi^2)^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\sqrt{5}=\dfrac{\Phi^2-\varphi^2}{\Phi^2+\varphi^2}=\dfrac{1-(\varphi^2)^2}{1+(\varphi^2)^2}$

Напротив, прибавление по единице к числителю и к знаменателю дроби $\dfrac{-\varphi^3}{\Phi^3}$ дает число-отношение $(\varphi^2)^2=\dfrac{1-\varphi^3}{1+\Phi^3}$, встроенное в секстет $\oplus 3\setminus 5^{0,5}\setminus(1-\varphi^3)\setminus(1+\Phi^3)\setminus(\varphi^2)^2\setminus 2\cdot 3\oplus$, для которого $N=2$. Но при этом числитель новой дроби и ее знаменатель не контрсимметричны относительно единицы. А это значит, что равенства слева от знаков $\Leftrightarrow$ в таблице 4, избавленные от иррационального скаляра $\sqrt{5}$, оказываются конверсивными не напрямую, то есть не так, как сопряженные дроби с контрсимметрией числителя и знаменателя справа от него. И остается найти применение метрическим свойствам морфизмов 1^1 и 1^2 «золотой арифметики» в какой либо из точных наук и указать, где и как в живой и неживой природе реализуются операционные связи *совершенных секстетов* \Θ\, \◁▷\, \⊕\ и их «остепененных» элементов.

Сингулярная квадроединица в кинематике.

Итак, «золотое сечение», наглядно представленное точкой *C* деления отрезка *AB* в среднем и крайнем отношении (*см. рис.* 1), абстрактно выражается пропорцией $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, которая при $c=a+b$ дает уравнение $a^2+a\cdot 1=1^2$, если $b=1$, и уравнение $1^2+1\cdot b=b^2$, если $a=1$. Их решениями являются взаимно обратные числа $\Phi=1{,}618...$ и $\varphi=0{,}618...$, такие, что $\Phi-\varphi=1$ и $\varphi\cdot\Phi=1$. А это позволяет принять пару Фидиевых скаляров основным постулатом «золотой арифметики», определяющим ее единицу как аддитивно, так и мультипликативно. При этом квадроединица 1^2, как морфизм недиофантовой системы, определена через сингулярность.

Убедимся, что сингулярную квадроедицицу можно обнаружить в простейшей задаче относительного движения, решаемой арифмометрическим методом без расстояний и времени.

Представим, что точечные объекты 1 и 2 сближаются по прямой с относительной скоростью $V=const$. Пусть при этом искомыми являются скорости v_1 и v_2 точек 1 и 2, определение которых как долей величины V выглядит задачей, обратной их сложению. (*Рис*. 9.) А теперь покажем, что масштабы пути и времени можно не связывать с единичной скоростью.

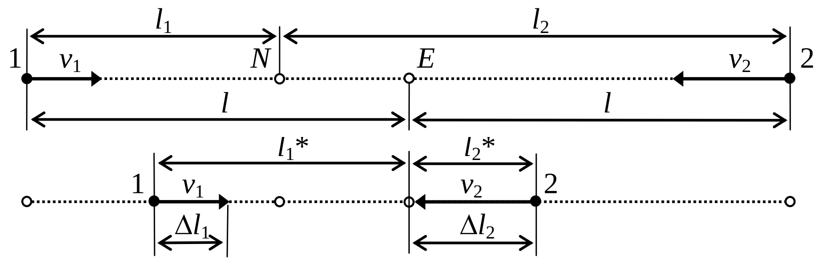


Рис. 9.

Ясно, что при $v_1=v_2$ квазичастицы 1 и 2 встретятся в середине *E* дистанции *L* между ними в момент начала отсчета времени $t=0$. При этом каждый из объектов преодолеет путь длиной $\frac{L}{2}=l$, возможно единичной, за период $t=T$, может быть равный единице. Но если $v_1<v_2$, то встреча частиц 1 и 2 случится в пункте *N*, ближе к стартовой позиции «медленной» точки 1. Пусть это произойдет в тот же момент $T=1$ с начала движения. Тогда $v_1=\frac{l_1}{T}$ и $v_2=\frac{l_2}{T}$, где скорости v_1 и v_2, такие, что $v_1+v_2=V$, *хроно-подобны*, а перемещения l_1 и l_2 условно аддитивны: $l_1+l_2=2l$.

Заметим, что *равнодлительная* (за период *T*) оценка величин v_1 и v_2 основана на *одновременном* прибытии частиц 1 и 2 в промежуточный пункт *N*, с которым свяжем наблюдателя по фамилии *Newton*. А середину *E* дистанции $L=l_1+l_2=2l$ пусть занимает наблюдатель по фамилии *Einstein*. И если точечный наблюдатель *E*, вооруженный часами, сначала отметит момент $t=T_2$, когда с ним поравняется «быстрая» частица 2, а затем засечет время $t=T_1$ прибытия частицы 1, то он вычислит и сравнит их скорости $v_1=\frac{l}{T_1}$ и $v_2=\frac{l}{T_2}$ *равнодлинно*, то есть по пробегу $l=1$. При этом физики-наблюдатели *N* и *E*, покоящиеся на расстоянии $l_1-l_2=\Delta L$, должны признать три различия своих позиций:

1) *Newton* ловит сигналы 1 и 2 *одномоментно*, а *Einstein* фиксирует их через время $T_1-T_2=\Delta T$;

2) *Newton* сравнивает скорости v_1 и v_2 *хроно-подобно*, а *Einstein* оценивает их *длино-подобно*;

3) для *Ньютона* переменные расстояния $l_1(t) = l_1 - v_1 t$ и $l_2(t) = l_2 - v_2 t$ между ним и объектами 1 и 2 таковы, что $\frac{l_1(t)}{l_2(t)} = const$, тогда как для *Эйнштейна* дистанции $l_1{*}(t) = l - v_1 t$ и $l_2{*}(t) = l - v_2 t$ до них со временем изменяются по гиперболическому (дробно-линейному) закону $\frac{l_1{*}(t)}{l_2{*}(t)} = var$.

Отмеченных различий хватит, чтобы усомниться в универсальности Галилеева правила $v_1 + v_2 = \mathrm{V}$ для неподвижных наблюдателей *N* и *E*, но их мало для адекватных представлений об относительности в точечных триплетах 1*N*2 и 1*E*2, не одинаково трансформирующихся во времени. Хотя в вырожденном треугольнике 1*N*2 с синхронным прибытием объектов 1 и 2 в вершину *N* можно воспользоваться *принципом виртуального масштаба* и оценить аддитивные скорости v_1 и v_2 в долях $\frac{\mathrm{V}}{2}$ контрсимметричными числами $\alpha = \underline{v}_1 < 1$ и $\mathrm{A} = \underline{v}_2 > 1$. И эти числа входят в гармонический секстет $♥\, 1^1 \setminus \Delta \setminus \alpha \setminus \mathrm{A} \setminus Z \setminus 2'\, ♥$, где $1^1 = \frac{v_1 + v_2}{2}$, а $2' = \underline{\mathrm{V}}$ – относительная скорость частиц 1 и 2, половина которой принята масштабом.

Заметим, что через период $\frac{T}{2}$ с начала движения объекты 1 и 2 оказываются от наблюдателя *E* на расстояниях $l_1{*}$ и $l_2{*}$, таких, что $\frac{l_1{*}}{l_2{*}} = \frac{l_2}{l_1}$, а затем, спустя время $\Delta T{*}$, «быстрый» объект 2 прибывает в пункт *E*. То есть, $T_2 = \frac{T}{2} + \Delta T{*}$. Причем за период $\Delta T{*}$ «медленная» точка 1 преодолеет расстояние $\Delta l_1 = v_1 \Delta T{*}$, а точка 2 совершит пробег $l_2{*} = \Delta l_2 = v_2 \Delta T{*}$. В таком случае аддитивный закон $v_1 + v_2 = \mathrm{V}$ кроме хроно-геометрической формы 1) $\frac{l_1}{T} + \frac{l_2}{T} = \frac{2l}{T}$ допускает аналогичную запись 2) $\frac{\Delta l_1}{\Delta T{*}} + \frac{\Delta l_2}{\Delta T{*}} = \frac{2l}{T}$. И выражения (1) и (2) при $l = 1$ и $T = 1$ модифицируются арифмометрически как $\alpha + \mathrm{A} = 2'$. Но при этом хроно-подобные оценки $\frac{\Delta l_1}{\Delta T{*}} = v_1$ и $\frac{\Delta l_2}{\Delta T{*}} = v_2$ скоростей v_1 и v_2 геометрически привязаны к наблюдателю по фамилии *Einstein*.

Придерживаясь тенденции находить кинематические величины v_1 и v_2 в долях третьей скорости, разделим формулу (2) на $\frac{l_1{*}}{\Delta T{*}} = v{*}$ и получим 2′) $\frac{\Delta l_1}{l_1{*}} + \frac{\Delta l_2}{l_1{*}} = \frac{\mathrm{V}}{v{*}}$, где $\mathrm{V} = 2'$, если $l = 1$ и $T = 1$. А поскольку $\frac{\Delta l_2}{l_1{*}} = \frac{v_1}{v_2}$, откуда $l_1{*} = \Delta l_2 \frac{v_2}{v_1}$, и кроме того $\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{v_1}{v_2}$, то из (2′) следует 2*) $\left(\frac{\alpha^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{\alpha}{\mathrm{A}}\right) v{*} = 2'$, где $\alpha = \underline{v}_1 < 1^1$ и $\mathrm{A} = \underline{v}_2 > 1^1$ – значения скоростей v_1 и v_2 по отношению к их полусумме $1^1 = \frac{v_1 + v_2}{2}$, что выше предъявлено как *принцип виртуального масштаба*.

Убедимся, что в сближении квазичастиц 1 и 2 единица 1^1 [V] не единственна.

Из (2*) с очевидностью следует, что $v{*} = \frac{\mathrm{A}^2}{\alpha}$ или $\mathrm{A}^2 = \alpha \cdot v{*}$. То есть, число-скорость $\mathrm{A} = \underline{v}_2$ является средним геометрическим скоростей $\alpha = \underline{v}_1$ и $v{*}$. Причем $v{*} = 1^1$, когда $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 = 1^1$ (дихотомия!), и $v{*} = \frac{l_1{*}}{\Delta T{*}} \to \infty$, если $\alpha = \underline{v}_1 \to 0$ в случае $\mathrm{A} = \underline{v}_2 \to 2' = \underline{\mathrm{V}}$. И при $\underline{v}_1 = 0$ и $\underline{v}_2 = 2'$ из (2*) выходит $(0+0)\infty = 2$, что не исключено, если $0 \cdot \infty = 1$. Более того, сингулярной единице надо присвоить вторую степень, поскольку из $\alpha \cdot v{*} = \mathrm{A}^2$ при $\alpha = 0$ и $v{*} = \infty$ должно быть $0 \cdot \infty = 1^2$. Между тем $\underline{v}_2 = \mathrm{A}$ в формуле $\alpha + \mathrm{A} = 2'$ равняется $2'$ при $\underline{v}_1 = 0$. И это противоречие можно понимать в том смысле, что $\mathrm{V} \equiv 2'$ по модели $2' = \alpha + \mathrm{A}$ и $\mathrm{V} \equiv 1^2$ по иной модели деления относительной скорости частиц 1 и 2 пополам. Таким образом, квадроскорость $W = 1^2$ формально отличается от скорости $\frac{V}{2} = 1^1$ в два раза: $1^2 = 2 \cdot 1^1$. И есть две дихотомии ($2' = 1^1 + 1^1$ и $2^* = 1^2 + 1^2$) встречного движения частиц 1 и 2, моделируемого *методом арифмометрической триангуляции* (МАТ).

В итоге квадроединица 1^2 оказывается масштабной величиной множества аддитивных квадроскоростей, объективность которых доказуема арифмометрической модификацией третьего закона Кеплера и утверждается опытом Физо в мультипараметрической постановке [6].

Заключение.

I. Преобразованием «золотой пропорции» $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$ в уравнение $a^2 + ab = b^2$, представленное как $a^2 + a \cdot 1 = 1^2$ при $b = 1$ или как $1^2 + 1 \cdot b = b^2$ при $a = 1$, формально обозначена квадроединица 1^2 недиофантовой арифметики, постулатом которой приняты взаимно обратные числа $\Phi = 1{,}618...$ и $\varphi = 0{,}618...$, отличающиеся на единицу.

II. Рекурсивные ряды Фибоначчи и Люка из натуральных элементов $\{F_N\}$ и $\{L_N\}$, определяемых формулами $F_N = \frac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^N - (-1)^k \varphi^N]$ и $L_N = \Phi^N + (-1)^k \varphi^N$, где $k = 1$ при нечетных $N = 1,2,3,...$ и $k = 2$ при четных, структурно обобщены секстетами из двух целых чисел 1, 2 и четырех дробных скаляров, среди которых число-отношение и число-отклонение связаны конверсией – пятым арифметическим действием в недиофантовой арифметике Фидия.

III. Перемножением тождеств $1^1 = X_N + X_N^N$ и $1^1 = Y_{N-1} - Y_{N-1}^{1-N}$ из первых решений $\{X_N\}$ и $\{Y_{N-1}\}$ системных уравнений $x + x^N = 1$ и $y - y^{1-N} = 1$ найдена аддитивно-мультипликативная форма $X_N^{N-1} - X_N^N = X_N^{2N-1}$, где $X_N^{N-1} \cdot X_N^N = X_N^{2N-1}$, структурно обобщающая эти тождества. А так как $X_N \to 1^1$ и $Y_{N-1} \to 1^1$ при $N \to \infty$, то $X_\infty \cdot Y_{\infty-1} = 1^2$, что определяет сингулярную квадроединицу и предполагает бифуркацию $1^2 = 2 \cdot 1^1$.

IV. Сингулярная квадроединица с размерностью скорости зафиксирована арифмометрическим решением задачи сближения двух точек, альтернативным хроно-геометрическому расчету.

V. Параллельно с определением недиофантова квадроморфизма 1^2 и его апробацией в кинематике обозначено твердое ядро «золотой арифметики», состоящее из «бриллиантового» ключа $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$ и совершенных Фидиевых секстетов $\ominus\ 1 \backslash 5^{0,5} \backslash -(1+\varphi^3) \backslash (\Phi^3 - 1) \backslash -\varphi^2 \backslash 2\ \ominus$ и $\oplus 3 \backslash 5^{0,5} \backslash (1-\varphi^3) \backslash (1+\Phi^3) \backslash (\varphi^2)^2 \backslash 2 \cdot 3 \oplus$, серединные члены которых на минус-единицу и на плюс-единицу отличаются от аналогичных элементов $-\varphi^3$ и Φ^3 совершенного секстета $\lhd 2 \backslash 5^{0,5} \backslash -\varphi^3 \backslash \Phi^3 \backslash -\varphi^6 \backslash 2^2 \rhd$, что может представлять интерес для вычислительной практики.

VI. Не исключено, что взаимосвязанные секстеты $\backslash \Theta \backslash$, $\backslash \lhd\rhd \backslash$, $\backslash \oplus \backslash$ служат математической основой зрительного восприятия кинематики, при котором мозг отличает ускорение от скорости.

Литература.

1. Математический энциклопедический словарь. – М.: «Советская энциклопедия», 1988.

2. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. – Львов: Издательство «Свит», 1994.

3. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Под ред. Е.М. Бабосова. – Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.

4. Stakhov A.P. “The Mathematics of Harmony, From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” (опубликована международным издательством “World Scientific” в 2009 г.)

5. Черепанов О.А. Физико-метрологические предпосылки секстетной недиофантовой арифметики. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15817, 07.03.2010 (www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1620-chr.pdf)

6. Черепанов О.А. О числовых связях физических параметров механических систем. Секстетное моделирование в теории движений. (*Статья подготовлена к публикации.*)