Грант Аракелян

Теория ЛМФ и принцип золотого сечения

стр.

Введение 2–5

Часть I. Теория ЛМФ

Глава 1. Логика и формальная математика 5–15

Глава 2. Физическая математика 16–32

Глава 3. Основания физической теории 33–62

Глава 4. Границы физического мира. Обобщённые физические законы 63–78

Часть II. Принцип золотого сечения

Глава 5. Принцип золотого сечения и числа Фибоначчи 79–121

Глава 6. Принцип золотого сечения в природе и искусстве 122–164

Глава 7. “Золотая” смесь 165–228

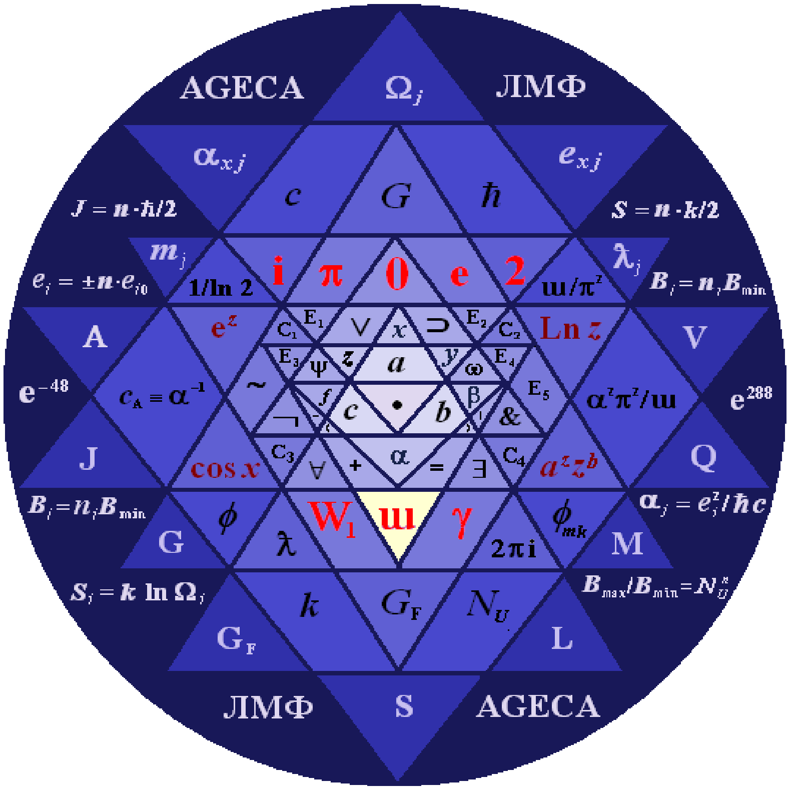
Глава 8. Обобщённая теория золотого сечения 229–270

Заключение. Теория ЛМФ и ОТЗС: основные положения, формулы, графики 271–282

Краеугольным камнем мировой гармонии, без веры в которую естественнонаучное мышление лишилось бы большей части своей привлекательности, является математика. Известно, что путь от общих положений до конкретной их реализации часто долог, извилист и неоднозначен. Потому-то так труден вопрос, каким всё же образом математическая первооснова приобретает характер селективного формообразующего принципа для живой и неживой природы. ***Принцип золотого сечения*** *предоставляет, быть может, наилучшую возможность для анализа подобных проблем. В силу его совершенно особого статуса, а главным образом из-за соотнесённости с фундаментальными математическими константами (ФМК), с положениями теории ЛМФ, вкратце представленной во Введении и Части I настоящей работы, подробное обсуждение этого принципа и всего, что с ним связано, представляется существенным и важным.*

Фундаментальная физическая теория – мечта многих поколений исследователей. ЛМФ – попытка осуществить эту мечту в виде логически строгой, математически завершенной системы, соответствующей имеющимся экспериментальным данным и допускающей (частично уже подтвердившиеся) прогнозы и эмпирическую верификацию. Это базисная теория физического мира, реализующая идею единства математической логики (Л), числовой математики (М) и фундаментальной физики (Ф). Её корневая структура начинается с логических атомов и завершается обобщёнными физическими законами сохранения, изменения и квантования. В рамках теории ЛМФ получен удивительный результат для постоянной Ферми. Решается ряд важнейших задач, в частности определение численного значения постоянной тонкой структуры, времени жизни мюона и других физических констант, выявление границ физического мира с использованием нового космического параметра – безразмерной константы порядка 10^{125}*, получение массовой формулы для частиц определённого типа,* ***обобщение принципа золотого сечения****.*

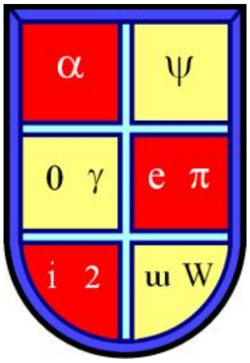
Теория ЛМФ по идее не только снабжает необходимым инструментарием для теоретического определения любой известной физической постоянной и не только приписывает с ограниченной или неограниченной точностью истинное числовое значение каждой величине. В свете теории ЛМФ некоторые изученные казалось бы вдоль и поперек математические величины предстают в новом качестве, приобретают дополнительные, ранее не известные характеристики. В этом назначение Части II настоящей работы, где изложение исторических фактов и подробное рассмотрение формальных свойств числа ϕ *носит иллюстративный характер и подчинено решению основной задачи: выявлению связей между* ϕ *и исходными ФМК, анализу принципа золотого сечения с точки зрения общих принципов и идей, изложенных в Части I. По сути ставится задача построения* ***нетрадиционной математической теории золотой пропорции.*** *Это построение должно быть ответвлением теории ЛМФ и призвано не только подтвердить её возможности, но и осветить некоторые ключевые вопросы, которые в обычной трактовке золотого сечения кажутся загадочными.*



Глава 2. Физическая математика

2.1. Континуум, формальная система и конкретные числа
2.2. Функциональные уравнения
2.3. Взаимно обратные функции ψ и α
2.4. Решение уравнений $\mathbf{E}_0$. Построение континуума. О других числовых системах
2.5. Проточисла и функции
2.6. Уравнение суперпозиции
2.7. Суперпозиция для действительной и мнимой переменных
2.8. Замечания, итоги и перспективы

Глава 2. Физическая математика



***В** главе 1 рассмотрение шло в основном по проторенным, хотя и с другими целями, тропам, а главная трудность состояла в выборе среди имеющихся альтернатив тех формальных средств, которые должны привести к решению поставленных задач. Теперь же мы вынуждены будем всё чаще сворачивать на нехоженые тропы, следуя внутренней логике и динамике развития системы* **AG**. *Представляется очевидным, что её простое, “механическое” расширение путём добавления каких-то новых доказуемых формул совершенно недостаточно для раскрытия внутренних потенций формализма системы* **AG**, *её скрытых возможностей. Для более полного их выявления необходимо прежде всего решить ряд кардинальных и достаточно тонких вопросов. Как должен осуществляться переход от аксиоматически задаваемых основных свойств числа к конкретным числам? Какие именно числа должны следовать за нулем в формальной иерархии математических величин, являющейся естественным продолжением и необходимым следствием принятой системы постулатов и аксиом? Каковы фундаментальные правила, устанавливающие соответствие между различными множествами, составленными из переменных и постоянных величин, иначе говоря, каковы исходные, материнские функции, посредством которых строятся остальные функции?*

О**твечая на подобные вопросы, мы рассчитываем получить в своё распоряжение всё необходимое и достаточное для дальнейшего построения основ физической теории. Разумеется, в “новой” математике многие известные факты “старой” математики предстанут в ином теоретическом контексте, в ином* *оформлении и в ином толковании. Ответом на поставленные вопросы является система пяти функциональных уравнений* **E** *или её обобщение* $\mathbf{E}_0$. *Решение этой исходной системы уравнений приводит к выявлению материнских для всей числовой математики функций экспоненты и логарифма и начальных, вслед за нулем, математических величин – фундаментальных математических констант (ФМК). В системе* **AGE**, *призванной служить основой физической теории и потому названной* ***физической математикой, *концептуально важное значение имеют* ***новые фундаментальные константы суперпозиции***: ɯ *и омега-константа* W(1). *Константа* ɯ *заполняет серьёзные бреши в существующей математике, причём в развертывании формализма теории ЛМФ ей принадлежит совершенно исключительная роль.*

2.1. Континуум, формальная система и конкретные числа

Начнем с бесспорного факта существования исторически сформировавшейся концепции бесконечного континуума как и его составных частей, с фиксированными правилами оперирования, определёнными принципами упорядочивания, характерными особенностями отдельных подмножеств или даже отдельных чисел и т. д. Словом, начнем с факта независимого существования содержательной, притом довольно развитой теории, которую будем называть *теорией чисел*, понимая под этим всю числовую математику за исключением теории трансфинитных чисел. В свете этого необходимо уточнить, что когда после задания аксиоматического каркаса не развернутой ещё системы **AG** говорят, что она формализует континуум, или имеет интерпретацию на множестве всех чисел, это следует понимать примерно так, что при определённом толковании графических знаков, составляющих алфавит системы **AG**, система аксиом $\mathbf{M}_1$–$\mathbf{M}_7$ вместе с правилами образования, преобразования, подстановки, замены и т. п. является достаточно адекватным формальным отображением своего независимо существующего содержательного прототипа. Точнее, исходная система правильно построенных формул – аксиом системы **AG** при соответствующем моделировании трансформируется в систему соотношений, выражающих основные свойства “живых” чисел и тем самым удостоверяется, хотя и не окончательно, пригодность взятой аксиоматики для формального представления данной содержательной теории. И не более того.

При интерпретации или моделировании результаты, так или иначе получаемые в теории чисел, не становятся собственностью формальной системы; она должна прийти к этим результатам самостоятельно, используя лишь арсенал своих формальных средств. Если не принимать в расчёт те обычно небольшие неувязки, разночтения, неоднозначности и пр., которые видимо нельзя полностью устранить при идентификации живой теории с жестко регламентированной формальной схемой, и если отвлечься от специфических математических проблем, касающихся полноты, разрешимости и т. п., лишний раз свидетельствующих о принципиальной недостижимости абсолютно точного соответствия между содержательным оригиналом и его формальным двойником, то может показаться, что других серьёзных проблем здесь нет. Действительно, если устанавливается, что какие-то результаты, получаемые в теории чисел, одновременно являются выводимыми формулами формальной теории, чтó мешает говорить о соответствии между двумя теориями хотя бы в этих пределах и с указанными оговорками?

На деле всё обстоит сложнее, чем кажется на первый взгляд, поскольку при решении некоторых фундаментальных задач развертывания формальной системы важен не только ответ, но и способ его получения. Это весьма тонкий и в высшей степени ответственный, требующий особого внимания вопрос, суть которого состоит в следующем. Теория чисел наряду с общим понятием математического числа, наряду с понятием бесконечного множества, континуума чисел имеет дело и с вполне конкретными, вообще говоря, комплексными числами. В формальной же системе **AG** на нынешнем этапе её развертывания постулировано потенциально бесконечное множество объектов

$$a_{|},\, a_{||},\, \ldots,\, b_{|},\, b_{||},\, \ldots,\, z_{|},\, z_{||},\, z_{|||},\, \ldots$$

с определёнными свойствами, истолковываемых как числа, но нет ещё, как отмечалось ранее, ни одного конкретного числа как такового за исключением аксиоматически заданного терма 0. Добавим, что нет пока и ни одной конкретной функции, хотя понятие математической (числовой) функции определено ещё в начале предыдущей главы. Можно, выражаясь фигурально, сказать, что имеется в наличии математическая субстанция, но нет ещё её субстрата, дана идея относящихся к субстанции законов, но ни один из них ещё не оглашен и не представлен. Необходимо, следовательно, от понятия числа, числового множества, задаваемого совокупностью свойств, и от понятия числовой функции перейти к конкретным, реальным числам и функциям; весь вопрос в том, как это сделать.

Обратимся вначале к знакомым примерам и посмотрим, как вводятся натуральные числа. Обычно здесь применяется древнейший *метод зарубок*, известный ещё доисторическому человеку. Способ чрезвычайно прост и весьма эффективен в простейших ситуациях: зарубка – один (день, палец, шкура убитого зверя, вообще всё, что поддаётся счёту), ещё зарубка – два, ещё одна – три и т. д. В современном научном варианте зарубки делаются не ножом или топором на дереве или допустим камне, а ставятся ручкой, карандашом и т. п. на бумаге в виде точек или палочек – именно так строится натуральный ряд в интуиционистской математике, где знаки 1, 2, 3,… являются сокращенными обозначениями соответствующих последовательностей точек или палочек. В аксиоматике Пеано и в выросших из неё формальных системах арифметики натуральных чисел типа **N** ряд натуральных чисел вводится следующим образом: задаётся начальное число (обычно нуль) и принцип генерирования новых чисел, то есть означающий прибавление единицы оператор $'$, последовательным применением которого порождается шаг за шагом бесконечный ряд вполне определённых чисел 0, $(0)'$, $((0)')'$, $(((0)')')'$, …, коротко обозначаемых знакомыми символами 0, 1, 2, 3, … Наконец, в аксиоматике классической теории множеств, где множество натуральных чисел является лишь начальным членом в возрастающей по *мощности* последовательности трансфинитных чисел, конкретные числа просто постулируются как актуальная данность так называемой аксиомой бесконечности, гласящей: “существует по крайней мере одно бесконечное множество – множество $\{1, 2, 3, \ldots\}$ натуральных чисел”. В других вариантах ряд начинается не с 1, а с 0, но здесь важно другое.

Во всех указанных случаях введение конкретных чисел как физических объектов (зарубки, палочки, точки), как последовательности объектов, порождаемых из начального члена действием числового генератора (аксиоматика Пеано, системы типа **N**) или как актуально бесконечной данности (теория множеств), обусловлено наличием трёх необходимых и достаточных условий. *Во-первых*, существованием наименьшего числа (нуль, в других вариантах один, реже два, три и даже четыре); *во-вторых*, дискретностью числового – натурального множества; *в-третьих*, возможностью, по крайней мере принципиальной, однозначного нахождения и представления любого его элемента как при конструировании строго упорядоченного ряда, так и при его задании в виде готового множества. Нетрудно заметить, что для четных и нечетных чисел, факториалов и т. п. реализуются все три условия, для простых чисел не выполняется третье, для положительных действительных чисел – второе и третье, а для множества всех чисел не выполняется ни одно из трёх условий. В общем, не всё, что верно в частности, верно и для целого, и ясно, что решение поставленной задачи в случае континуума требует более тонкого подхода и универсальных методов.

2.2. Функциональные уравнения

Как же тогда, не прибегая к искусственным приемам, решить эту задачу, как, оставаясь в рамках исходного формального базиса системы **AG**, ввести в неё конкретные числа? При такой постановке вопроса, если провести аналогию между множеством всех и множеством натуральных чисел и принять во внимание сказанное относительно способов введения натурального ряда, не видно никаких подходов. Поставим поэтому проблему несколько иначе и спросим, чего в первую очередь недостаёт пока системе **AG**, каково магистральное направление её развертывания как формальной теории чисел, какие глубинные внутренние потенции системы ещё не востребованы и не раскрыты? В неявной форме ответ частично содержится в предыдущей главе, когда обсуждались различные интерпретации системы **AG**. Там наряду с интерпретацией на множестве всех чисел, с пониманием трёх символов формального языка как сложения, вычитания и нуля была и интерпретация системы **AG** также на множестве всех чисел (только без нуля) и при толковании тех же символов как умножения, обратного элемента (деления единицы на a) и единицы. Приняв тогда единственно возможное решение, мы вместе с тем как бы приняли на себя обязательство непременно выразить отодвинутые “по конкурсу” на второй план операции $\cdot$, $^{-1}$ и число 1 через исходные операции +, – и число 0. Впрочем, и так ясно, что без умножения, деления и свойств единицы говорить о теории чисел и вообще о математике не приходится, и так или иначе они должны быть как-то определены. Отметим, что задача корректного введения арифметических действий стоит и перед любой достаточно богатой системой формальной арифметики. В случае формальной системы универсальной числовой математики задача введения недостающих пока арифметических действий, а также ничуть не менее важная задача получения первичных чисел и исходных функций фактически сводятся, как сейчас увидим, к решению соответствующим образом составленной системы функциональных уравнений.

Но предварительно условимся о терминологии. Любое математическое равенство назовем, как иногда делается, *законом сохранения*, желая тем самым подчеркнуть, что в равенстве двух частей математической формулы содержится глубокая идея постоянства математического закона, неизменяемости аналитических связей и в некоторых случаях идея сохранения каких-то величин. Равенство, содержащее только постоянные величины, назовем *соотношением*, равенство с переменными – *уравнением*, а равенство, где в качестве искомой величины выступает функция, – *функциональным уравнением*. Введение новых математических реалий редукцией их посредством функциональных уравнений к исходным элементам это могучее средство, общий метод развертывания формальной системы, дополняющий функциональными свойствами задаваемые аксиомами свойства числа. В сущности, это неявное определёние новых элементов, раскрывающее изначально заложенный в системе потенциал. Функциональные уравнения, как скоро выяснится, это простейший и самый верный путь к редукции операций умножения и деления к сложению и вычитанию; здесь достаточно ограничиться умножением и сложением, поскольку остальное уже тривиально.

Итак, обозначив новую операцию умножения точкой $\cdot$, которую во многих случаях можно опустить, мы хотим с помощью *простейших функциональных уравнений* определить, или в некотором смысле свести, умножение к сложению, и сейчас требуется составить соответствующие уравнения. Для двух числовых выражений $x+y$ и $x \cdot y$, а следовательно четырёх функциональных выражений

$$f(x+y), \quad f(x \cdot y), \quad f(x)+f(y), \quad f(x) \cdot f(y)$$

возможны в общей сложности шесть уравнений. Поскольку уравнения

$$f(x+y)=f(x \cdot y), \quad f(x)+f(y)=f(x) \cdot f(y)$$

просто означают отождествление умножения со сложением, а в уравнениях

$$f(x \cdot y)=f(x) \cdot f(y), \quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

нет сведения одной операции к другой, остаётся всего два функциональных уравнения – так называемые уравнения Коши. Обозначив искомые функции через $\psi(x)$ и $\alpha(x)$, имеем:

$$\mathbf{E}_1 \quad \psi(x+y)=\psi(x) \cdot \psi(y)$$

$$\mathbf{E}_2 \quad \alpha(x)+\alpha(y)=\alpha(x \cdot y) \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

Аргумент функции ψ (нет надобности всякий раз писать $\psi(x)$, $\alpha(x)$, часто удобнее обозначать функции просто символами ψ и α) может принимать любые значения из бесконечного числового континуума без каких-либо ограничений, сама же функция ψ не имеет, как окажется, нулевого значения, следовательно для неё это *особая точка*, нуждающаяся в специальном рассмотрении. Аргументы функции $\alpha(x)$ ограничены условием ненулевых значений во избежание выражений типа $0 \cdot x$, $0 \cdot 0$, а впоследствии и $0/x$, $0/0$, $x/0$, вместе с тем функция α может принимать, как выяснится позже, любые значения, в том числе нулевое. Если поэтому заполнить пробел, связанный с тем обстоятельством, что $\psi(x) \neq 0$, то каждой из функций ψ и α будет охвачено всё множество чисел без каких-либо изъятий, что важно для выяснения их теоретического статуса, границ применимости и конструктивных возможностей.

Функциональные уравнения $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ нетрудно обобщить на случай многих переменных:

$$\mathbf{E}_{10} \quad \psi(x_1+x_2+\ldots+x_k) \qquad =\psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \ldots \psi(x_k)$$

$$\mathbf{E}_{20} \quad \alpha(x_1)+\alpha(x_2)+\ldots+\alpha(x_k)=\alpha(x_1 \cdot x_2 \ldots x_k)$$

Введём теперь функциональный аналог изначальной математической константы нуль – константу λ, то есть основным свойствам нуля $a \pm 0 = a$ (как обычно, символом $\pm$ два отдельных выражения объединяются в одно; в выражениях общего типа $x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_k$ один раз берутся верхние знаки, другой раз нижние), зафиксированным в аксиомах $\mathbf{M}_5$–$\mathbf{M}_6$, придадим функциональный характер. Для этого есть только один путь. В единственной под знаком функции сумме одну из переменных заменим, по аналогии с ± 0, выражениями $\pm\lambda$ для некоей константы λ, так что

$$\mathbf{E}_{3-4} \ \psi(x \pm \lambda)=\psi(x)$$

что равносильно двум уравнениям:

$$\mathbf{E}_3 \quad \psi(x+\lambda)=\psi(x)$$

$$\mathbf{E}_4 \quad \psi(x-\lambda)=\psi(x)$$

В более общем случае, учитывающем возможность многократного применения *функционального правила нуля* (периодичности), эти уравнения выглядят так:

$$\mathbf{E}_{30} \quad \psi(x+\lambda+\ldots+\lambda) \ =\psi(x)$$

$$\mathbf{E}_{40} \quad \psi(x-\lambda-\ldots-\lambda) \ =\psi(x)$$

Договоримся при понимании $\mathbf{E}_1$–$\mathbf{E}_4$, или $\mathbf{E}_{10}$–$\mathbf{E}_{40}$ как единых, целостных систем уравнений применять обобщённые символы **E** и $\mathbf{E}_0$, а полученную к настоящему моменту логико-математическую систему обозначать далее символом **AGE**. Система функциональных уравнений **E** или её обобщённый вариант $\mathbf{E}_0$, призванные свести умножение к сложению и заодно распространить фундаментальный для математики закон сохранения любого числа относительно сложения и вычитания нуля на функциональный случай, даёт в действительности нечто гораздо большее. Об этом легче будет судить после ознакомления с некоторыми особенностями и выводами, получаемыми из функциональных уравнений.

2.3. Взаимно обратные функции ψ и α

Знакомство с системой функциональных уравнений мы начнем с выявления родственных связей между функциями ψ и α. Если некая функциональная зависимость f задана уравнением $y = f(x)$, то для получения обратной функциональной зависимости φ необходимо, поменяв местами x и y, перейти к уравнению $x = \varphi(y)$, определяющему x как зависимую переменную – функцию от независимой переменной – аргумента y. Сделать это удаётся, правда, не всегда; если из уравнения $y = f(x)$ следует уравнение $x = \varphi(y)$, говорят, что функция $f(x)$ имеет обратную функцию $\varphi(y)$, и наоборот – если уравнение $x = \varphi(y)$ приводит к $y = f(x)$, то $f(x)$ есть функция, обратная $\varphi(y)$. Это обычное (наравне с теоретико-множественным определением, которое здесь нет нужды приводить) определение понятия взаимно обратных функций. Нетрудно убедиться, (все подробности и доказательства даны, как обычно, в монографии “Фундаментальная теория ЛМФ”, в дальнейшем А1, Гл. 2), что функции ψ и α таковыми и являются.

Таким образом, ψ и α являются взаимно обратными функциями, причём, как выясняется, ψ однозначная, а α многозначная (бесконечнозначная) функция. Для достижения полной ясности в этом достаточно важном вопросе сравним исходное уравнение

$$\psi(x \pm \lambda) = \psi(x)$$

с полученным в **[**А1, Гл.2**]**

$$\alpha(x) = \alpha(x) \pm n\lambda$$

Сразу видно, что период λ в первом случае соотносится с *аргументом* функции ψ, а во втором – с самой *функцией* α, и именно по этой причине функция ψ бесконечному множеству значений ставит в соответствие единственное значение функции, а функция α в силу её статуса обратной ψ функции одному значению аргумента ставит в соответствие потенциально бесконечный спектр значений функции. Особому случаю $n = 0$ соответствует главное значение функции $\alpha(x)$.

Не отрицая правомерность определения понятия обратной функции отношением *функция – аргумент*, дадим понимание этого вопроса, вытекающее из особенностей системы **AGE** и продиктованное следующими конкретными соображениями. Во-первых, мы вообще полагаем, что других помимо ψ и α исходных аналитических числовых функций нет, иначе говоря, все математические функции подобного типа включая все специальные функции математической физики посредством исходных и вторичных математических операций всегда могут быть представлены через *материнские* функции ψ и α. Если же это так, то определение обратной функции, как и некоторых других математических понятий для ψ и α, должно иметь основополагающее значение для понимания этих понятий в математике вообще. Во-вторых, внимательно вчитаемся в словесную формулировку функциональных уравнений:

$\mathbf{E}_1$ Функция ψ от суммы аргументов равна произведению ψ-функций от каждого из аргументов в отдельности

$\mathbf{E}_2$ Функция α от произведения аргументов равна сумме α-функций от каждого из аргументов в отдельности

В предельно сжатом виде это выглядит так:

$\mathbf{E}_1$ Функция от суммы равна произведению функций

$\mathbf{E}_2$ Функция от произведения равна сумме функций

Вполне очевидно, что в каждом из двух уравнений по отношению к операциям сложения и умножения производится действие, обратное действию, производимому в другом уравнении. Следовательно, в отношении *сложение – умножение* функция α является обратной функцией для ψ, а ψ – обратной функцией для α. Отсюда имеем определению прямой и обратной функции по отношению к важнейшим операциям сложения и умножения. Это принципиально новое определение весьма важных понятий относится только к материнским функциям и лишний раз свидетельствует об их статусе. Разумеется, в дальнейшем функции ψ и α можно будет без всякого труда определить как прямую и обратную функции по отношению к (производным от сложения и умножения) операциям вычитания и деления, но это едва ли заслуживает отдельного рассмотрения, поэтому примем просто к сведению и такую возможность.

2.4. Решение уравнений $\mathbf{E}_0$. Построение континуума. О других числовых системах

Развертывание формальной системы в нужном направлении – достаточно кропотливая работа, требующая последовательности, внимания и терпения, причём без права использовать при формальных построениях какие-либо принципы и конструкты кроме постулированных и полученных к данному моменту. Подробный и всесторонний анализ уравнений $\mathbf{E}_{10}$–$\mathbf{E}_{40}$ в **[**А1**]** в рамках системы **AG** однозначно приводит к материнским (комплексным) функциям экспоненты $\psi(x) \equiv \mathrm{e}^{x}$ и логарифма $\alpha(x) \equiv \mathrm{Ln}\, x$, к системе ФМК e, π, i, 2, связанных известными формулами Эйлера

$$\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/2} = \mathrm{i},\quad \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} = \mathrm{i}^2 \equiv -1,\quad \mathrm{e}^{3\pi \mathrm{i}/2} = -\mathrm{i},\quad \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i}} = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i}^2 \equiv 1$$

с периодом $\lambda = 2\pi\mathrm{i}$.

Посредством ФМК e, π, i, 2 нетрудно построить континуум как бесконечный упорядоченный универсум, как множество конкретных чисел, придать аморфной математической субстанции, объединяемой совокупностью общих свойств, статус составленного из индивидуально конструируемых элементов математического субстрата. Построить число значит выразить его через известные величины или по крайней мере указать способ, алгоритм сведения к ним. А таковых у нас уже достаточно, и по формулам

$$e^0 = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = i^2 = -1, \ldots$$

они образуют единую, самосогласованную и самодостаточную систему *проточисел* – исходных математических атомов для построения остальных чисел. Следует особо подчеркнуть, что мы имеем не одну, как в концепции первичности натурального ряда, а сразу все четыре математические “единицы”. В геометрической интерпретации они представляются в виде показанных на рисунке точек на осях прямоугольной системы координат, в которой любое число толкуется как точка на плоскости (комплексной). Используя геометрические образы, можно сказать, что всё, на что способна интуиционистская математика в одном, положительном направлении оси *OX*, здесь делается одновременно (не в физическом, разумеется, смысле, а в смысле равноправия, отсутствия логической очередности) и единообразно во всех четырёх возможных направлениях; при этом не возникает проблем с введением, например, отрицательных чисел, с мнимой единицей, с математическими константами и т. д. Само построение множества всех чисел, осуществленное в **[**Аракелян 1981, 123–129**]**, покажем схематично, не вникая в детали.

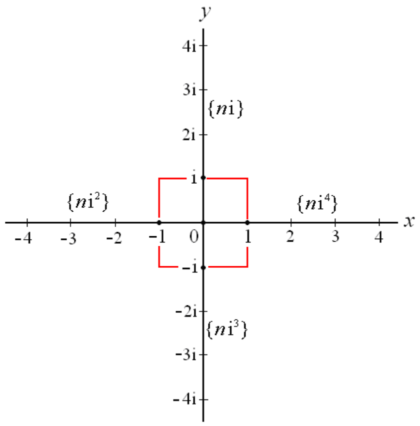


Рис. 2.4.1
Геометрическая интерпретация математических единиц и образованных их них множеств типа $\{n\mathrm{i}^k\}$

Вначале из исходных элементов 0, i, –1, –i, 1, последовательно применяя схему сложения

$$0, \quad 0 + a \equiv a, \quad a + a \equiv 2a, \quad 2a + a \equiv 3a, \quad 3a + a \equiv 4a, \ldots$$

с очевидными сокращенными обозначениями, получим четыре потенциально бесконечных множества типа

$$\{n\mathrm{i}^k\} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{2.4.1}$$

“целочисленных” (по отношению к четырем единицам) чисел с соответствующими условными названиями:

$\{n\mathrm{i}\}$	0,	i,	2i, …,	ki,...	мнимо-положительные целые числа
$\{n\mathrm{i}^2\}$	0,	–1,	– 2, …,	– k,...	целые отрицательные числа
$\{n\mathrm{i}^3\}$	0,	–i,	– 2i, …,	–ki,...	мнимо-отрицательные целые числа
$\{n\mathrm{i}^4\}$	0,	1,	2, ...,	k,...	целые положительные числа

Два следующих построения для каждого из множеств также вполне очевидны и в принципе ничем не отличаются от обычного построения множества всех положительных действительных чисел, являющегося разновидностью одного из четырёх конструируемых здесь множеств. Построения эти сводятся к получению положительных рациональных чисел как отношений между целыми положительными и трёх их аналогов – отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных; затем к получению четырёх множеств положительных, отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных иррациональных чисел, образуемых, например, путём составления бесконечных непериодических, в частности двоичных, дробей. В геометрической интерпретации им ставится в соответствие бесконечное множество точек на осях абсцисс и ординат указанной прямоугольной системы координат и остаётся лишь построить точки комплексной плоскости, проекциями которых считаются точки на осях. Это осуществляется двучленным выражением типа $\pm x \pm \mathrm{i}y$, где x

и $\mathrm{i}y$ в геометрической интерпретации – точки правого верхнего квадранта декартовой системы координат комплексной плоскости. Если устранить это весьма искусственное ограничение и, не умаляя общности, считать x и y отличными от $\pm\mathrm{i}$, все двучлены можно привести к единой знакомой всем форме $z = x + \mathrm{i}y$.

Разумеется, к геометрическим образам мы прибегли лишь для наглядности, по идее вполне можно обойтись без понятий точки, плоскости, системы координат и т.п. Кроме того, количество шагов, приводящих к комплексным числам, можно сократить, минуя, например, построение “рациональных” чисел или, допустим, генерирование чисел из объектов 0, i, –1, –i, 1 рассматривать как единое, не расчленяемое, не распадающееся на отдельные процедуры действие. Можно даже при желании построить множество всех чисел из исходных *единиц* “одним махом”, унифицированно и минуя все промежуточные звенья. Всё это в конце концов вопросы технического свойства, которые в данной ситуации не столь существенны. Цель обсуждения схемы построения в другом: показать, что система **AGE** действительно обладает потенциалом, воплощаемым в инструментарий, необходимый и достаточный для получения континуума как множества математических конструктов, строящихся по определённым правилам из исходных.

Добавим, что хотя содержательные толкования множества комплексных чисел могут быть разными – точки на плоскости, векторы двумерного пространства, матрицы второго порядка и др., – проточисла как генератор четырёх единиц и множество чисел, конструируемых из последних, обладают исключительно важным свойством единственности. Об этом в какой-то мере свидетельствует безальтернативность построений, основанных на идее полного исчерпания всех возможных простейших вариантов, а строгое доказательство единственности имеется в содержательной теории. Не углубляясь в детали, скажем только, что применительно к системе **AGE** единственность следует понимать, во-первых, как отсутствие каких-либо других помимо системы величин e, π, i, 2 числовых решений исходных функциональных уравнений и отсутствие каких-либо других помимо множества элементов типа $x + \mathrm{i}y$ завершенных числовых множеств, соответствующих постулатам системы и конструируемых из атомов 0, $\pm\mathrm{i}$, ± 1. Во-вторых, любая попытка обобщения, расширения, дополнения и т.п. множества комплексных чисел (гиперкомплексные числа, в частности кватернионы, числа Кэли, Клиффорда – Липшица, а также p-адические числа, ...) возможна лишь ценой отказа от тех или иных исходных положений системы **AGE**. Например, частный случай гиперкомплексных чисел – кватернионы, или числа типа

$$x_0 + \mathrm{i}x_1 + \mathrm{j}x_2 + \mathrm{k}x_3$$

отличаются формально от комплексных чисел тем, что у них три вместо одной комплексные единицы, связанные между собой формулами, тиражирующими

$$\psi(\pi\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 = -1$$

и соотношениями для их циклической перестановки:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$$

$$\mathrm{ij} = \mathrm{k},\quad \mathrm{ji} = -\mathrm{k},\quad \mathrm{jk} = \mathrm{i},\quad \mathrm{kj} = -\mathrm{i},\quad \mathrm{ki} = \mathrm{j},\quad \mathrm{ik} = -\mathrm{j}$$

Легко увидеть, что закон коммутативности умножения для кватернионов не выполняется. Следовательно, переход от размерности 2 к размерности 4, которому геометрически соответствует переход от двумерной плоскости к четырёхмерному пространству, не означает (в отличие, допустим, от заполнения множества всех рациональных чисел числами иррациональными) заполнения, расширения и т.п. множества комплексных чисел родственными им по общим признакам объектами нового рода, поскольку это сопровождается разрушением основ самой системы постулатов. Для других размерностей, число которых, конечно, не ограничено, отличия оказываются ещё более глубокими. Так, для размерностей 3, 5 и выше нельзя построить даже систему, аналогичную кватернионам, а гиперкомплексные системы с делением (каждое из уравнений $ax = b$ и $xa = b$, где $a \neq 0$ имеет единственное решение) могут иметь только размерности 4 и 8 [Кантор, Солодовников, 36].

Словом, если под числами понимать объекты, обладающие вполне определённой совокупностью обычных свойств включая коммутативность умножения и операцию деления, то универсум отвечающих этим требованиям объектов целиком формируется и заполняется комплексными числами $x + \mathrm{i}y$. В этом смысле можно утверждать, что других чисел нет, а все остальные “числа” – объекты другого рода, то есть с существенно другим набором основных свойств. Иногда это положение, известное благодаря исследованиям Вейерштрасса, Фробениуса, Пирса и других, облекается в сходную форму: невозможно какое-либо расширение понятия комплексного числа за пределами системы комплексных чисел без отказа от каких-то фундаментальных свойств числа. К тому же теория гиперкомплексных чисел не порождает новых математических констант, поскольку соотношения

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \ldots = -1$$

лишь мультиплицируют, тиражируют мнимую единицу, а не вводят какие-то новые математические величины.

2.5. Проточисла и функции

Тот факт, что посредством функций ψ и α оказывается возможным не только сведение операций умножения и деления к аксиоматически заданным операциям сложения и вычитания, но и однозначное получение четырёх фундаментальных математических констант, неявно определяемых системой уравнений $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_0$, говорит о совершенно исключительной роли этих функций в математике. Другого унифицированного способа введения в математическую теорию констант e, π, i, 2 как замкнутой, согласованной системы фундаментальных величин не существует **[**A1**]**.

Любая попытка сведения всех математических функций к какому-либо списку исходных функций неизбежно столкнется с проблемой фундаментальных констант, необходимость решения которой столь же неизбежно приведёт ко всё тем же экспоненте и логарифму. Поэтому мы ещё раз утверждаем, что никаких других функций, способных реально претендовать на базисную роль в математике нет. Любая аналитическая функция, какой бы сложной, неординарной она ни была, посредством математических констант и их комбинаций, операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\lim$, суммы слагаемых Σ, произведения сомножителей Π, дифференцирования df/dz, интегрирования, суперпозиции и других операций может быть выражена, по крайней мере в области комплексных чисел, через e^z и $\mathrm{Ln}\, z$. Количество интересующих нас функций практически необозримо, и не только рассмотрение, но даже простое перечисление всех случаев заняло бы слишком много места и едва ли вообще реально. Этого, впрочем, и не требуется – достаточно ограничиться основными элементарными функциями, простые как правило комбинации которых с помощью бесконечных сумм, произведений, суперпозиций и т. д. образуют обширный класс неэлементарных функций.

Простейшими и наиболее полезными в различных случаях, не исключая самые сложные, комбинациями экспоненты и проточисел (e-i-2-преобразования) являются шесть хорошо известных тригонометрических функций, сокращенно обозначаемых как $\cos z$, $\sin z$, $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{ctg}\, z$, $\sec z$, $\csc z$ (для тангенса, котангенса и косеканса нередко используются и другие обозначения), и столько же аналогичных им и не содержащих мнимой единицы (e-2-преобразования) гиперболических функций. Шесть обратных тригонометрических и шесть обратных гиперболических функций попарно связаны между собой посредством константы i, и все без исключения двенадцать обратных функций выражаются через i и логарифм.

В общем случае выражение z^u, возводящее комплексное число z в комплексную степень u, распадается на два частных случая, когда либо основание степени z, либо показатель степени u постоянное комплексное число. Следовательно, *степенная* функция z^a $(z \neq 0)$ представляется в виде

$$\mathrm{e}^{a\,\mathrm{Ln}\, z} = \mathrm{e}^{a(\ln z + k2\pi \mathrm{i})} = \mathrm{e}^{a(\ln|z| + \mathrm{i}\varphi + k2\pi\mathrm{i})}$$

и вследствие свойств логарифма однозначна, если $a = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$, и многозначна в остальных точках. Для *показательной* функции a^z $(a \neq 0)$ также всё ясно: $a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{Ln}\, a}$ есть многозначная (из-за $\mathrm{Ln}\, a$) функция в отличие от экспоненты e^z, областью однозначности которой является вся комплексная плоскость, “разрезанная” вдоль отрицательной части действительной оси. В теории специальных функций, например Г-функции, нередко встречается произведение показательной функции a^z на степенную z^b, где a и b могут быть различными постоянными величинами. В общем случае

$$a^z z^b = \mathrm{e}^{x\mathrm{Ln}\, a + b\mathrm{Ln}\, z} \qquad (2.5.1)$$

для главного же значения логарифма

$$a^z z^b = \mathrm{e}^{x\ln a + b\ln z} \qquad (2.5.1')$$

К этому виду можно привести также любое число за исключением 0, и в определённых случаях именно такая форма представления числа является наиболее удобной и отвечающей существу дела.

Неограниченное количество элементарных функций получается из основных конечным применением операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$ и суперпозиции. Снимая ограничения на конечность и допуская тем самым бесконечные ряды и произведения, дифференцирование и интегрирование во всех их разновидностях, бесконечную суперпозициию, то есть допуская операции, связанные с предельным переходом $\lim$, получим почти необозримый класс неэлементарных функций, по-прежнему выражаемых через e^z, $\mathrm{Ln}\, z$, но уже посредством и предельных операций. Желающие могут заглянуть в энциклопедии и специальные справочники или в справочную часть известной программы “Mathematica” компании Wolfram Research и убедиться как в существовании множества различных связей между отдельными функциями, так и в их сводимости к исходным ψ и α. Завершая обсуждение функций, следует непременно добавить, что, как принято считать, произвольная математическая функция может быть представлена, притом единственным образом, в виде конечного, а чаще бесконечного e-i-2-преобразования, то есть тригонометрического ряда, частный случай которого – ряды Фурье. Окончательного доказательства нет, но для очень широкого класса функций это доказано, см. **[**Зигмунд**]**.

2.6. Уравнение суперпозиции

Считая аксиоматически заданный 0 константой наивысшего, условно *нулевого, ранга*, мы должны считать константами *первого ранга* связанные с нулем, функциями ψ и α и составляющие замкнутую числовую систему проточисла. Сюда можно добавить постоянную Эйлера, которая в противоположность числу золотого сечения ϕ элементарной комбинацией проточисел не является и в получении которой используется по сути логико-математический, выражаемый в аксиоматике через не только математические операции, но и логические кванторы, принцип бесконечного предельного перехода. Вместе с тем постоянная Эйлера посредством операции предельного перехода (конкретнее бесконечной суммы) непосредственно выражается через материнские функции:

$$-\gamma = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} \ln u\, du \equiv \int_0^\infty \frac{\alpha(u)}{\psi(u)} du$$

Взятая с обратным знаком константа Эйлера, равная отношению α/ψ под знаком несобственного интеграла, целиком составлена из компонентов системы **AGE**. Не было поэтому необходимости вводить её посредством ещё одного функционального уравнения. А поскольку число γ, насколько известно, даже очень сложной комбинацией других констант не является, её следует считать одной из ФМК.

А комбинациям вроде e^π, e^γ, 2π, $\pi/2$, $\pi^2/4$, $\ln 2$, $\sqrt{2}$ и даже более сложным комбинациям отводится в этой иерархии место констант *второго ранга*. Это, понятно, относится и к константе золотого сечения

$$\phi = \psi[\alpha(1/2 + \sqrt{(1/2)^2+1})] = 1/2 + \sqrt{(1/2)^2+1} = 1{,}61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ \ldots$$

построенной здесь из обратной 2 величины 1/2 и 1 с помощью операций $+$, $\cdot$ и извлечения корня, а более универсальная форма представления числа ϕ, ведущая к обобщению принципа золотого сечения в рамках теории ЛМФ, будет дана в главе 8.

В свете сказанного неизбежно встаёт вопрос об общем количестве констант первого ранга, который мы поставим в следующей форме: все ли начальные потенции системы **AGE** задействованы для получения фундаментальных математических констант и нет ли каких-то других, не использованных ещё возможностей? Способ введения проточисел, а также знакомство со спецификой постоянной Эйлера имеют решающее значение для понимания этого вопроса и позволяют подойти к ответу на него с самых общих позиций. Анализ ситуации под таким углом зрения показывает, что неиспользованным пока остаётся конструктивный принцип суперпозиции функций (гл. 1, пункт в) раздела 1.1), и можно допустить, что неэлементарное, выражающееся через операцию lim действие этого принципа может привести к чему-то принципиально новому, необычному. Далее отметим, что система функциональных уравнений $\mathbf{E}_1$–$\mathbf{E}_4$ содержит все основные виды сохранения (инвариантность аналитической формы связи, инвариантность величины по отношению к преобразованию, наличие в преобразовании числовых констант) за исключением лишь одного – независимости числового решения от выбора переменных преобразования. Сводя воедино оба начала – бесконечную суперпозицию и не зависящую от переменных преобразования константу, придём к следующему функциональному уравнению:

$$\mathbf{E}_5 \qquad \lim_{n\to\infty} S(S(\ldots S(x)\ldots)) = \mathrm{const}$$

Символом S здесь обозначена неизвестная ещё функция или, быть может, функции, бесконечная суперпозиция которой (которых) должна по идее привести к гипотетической и не равной другим константе (константам); x означает произвольно взятое число.

Предполагая существование обратной S функции $\mathrm{arc}\, S$, рассматривая выражение во внешних скобках как функцию-переменную и опираясь на очевидное свойство операции предельного перехода

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n-1\to\infty}$$

можно свести всё к системе двух уравнений для прямой и обратной функций, которую представим в виде двойного равенства

$$\mathbf{E}_{51} \qquad S(x) = \mathrm{arc}\, S(x) = x$$

содержащего константу(ы) суперпозиции уже неявно, в качестве числового решения системы уравнений. Решение ищем в *простейших элементарных функциях*, понимая под этим все известные элементарные функции математики исключая, однако, их комбинации, получаемые применением арифметических действий и суперпозиции. Существует три десятка таких функций, необходимые сведения о которых содержатся в учебниках по математике и справочниках по элементарным функциям. С целью их тестирования на предмет соответствия фундаментальному уравнению $\mathbf{E}_5$ сформулируем по убывающей степени общности естественные требования, предъявляемые к искомой функции (или функциям).

а) Уравнение $\mathbf{E}_5$ имеет место для всех действительных чисел б) Графики функций $f(x)$, $f^{-1}(x)$ и $y = x$ имеют общую точку пересечения, в которой выполняется соотношение $\mathbf{E}_{51}$, то есть равенство значений функции, обратной функции и аргумента

в) Функции $f(x)$, $f^{-1}(x)$ и $y = x$ пересекаются лишь в одной точке

г) Эта точка отлична от 0 и 1

Всем этим требованиям удовлетворяют лишь три элементарные функции: a^x, $\cos x$, $\operatorname{sech} x$. Учтём теперь, что уравнение суперпозиции $\mathbf{E}_5$, рассматриваемое отдельно от остальных лишь по практическим соображениям, является неотъемлемой частью системы уравнений $\mathbf{E}_1$–$\mathbf{E}_5$. А последняя представляет собой единую систему функциональных уравнений с единым решением в найденных уже функциях $\psi(x)$, $\alpha(x)$ и в константах, из которых неизвестны пока лишь константы суперпозиции. Отсюда следует, что показательная функция может быть только экспонентой: $a^x = \mathrm{e}^{-x}$.

Таким образом, решение уравнения $\mathbf{E}_5$ в элементарных функциях действительной переменной приводит к следующим функциям и константам:

$$\psi(-x) \equiv \mathrm{e}^{-x} \qquad\qquad x_\mathrm{e} = 0{,}56714\ 32904\ldots$$

$$\cos x \equiv \frac{\psi(\mathrm{i}x) + \psi(-\mathrm{i}x)}{2} \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad\qquad x_\mathrm{c} = 0{,}73908\ 51332\ldots$$

$$\operatorname{sech} x \equiv \frac{2}{\psi(x) + \psi(-x)} \equiv \frac{2}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \qquad\qquad x_\mathrm{h} = 0{,}76500\ 99545\ldots$$

Из трёх довольно близких по значению констант последняя, как скоро выяснится, менее значительна чем две другие, а тройные точки пересечения x_c и x_e показаны на рисунках; для большей наглядности отдельно приводятся также взятые в более широком интервале графики функций $\cos x = x$ и $y = x$, пересекающиеся в точке x_c.

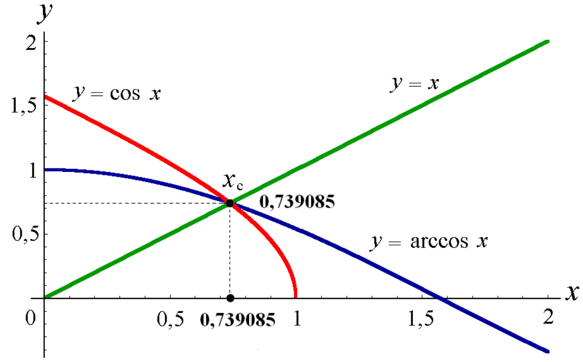


Рис. 2.6.1
Константа x_c как тройная точка
пересечения кривых $y = \cos x$, $y = \arccos x$ и $y = x$

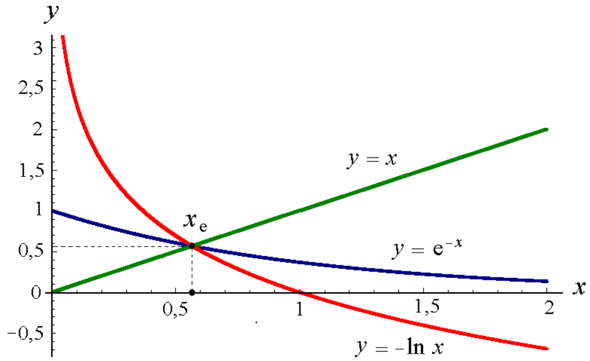


Рис. 2.6.2
Константа x_e как тройная точка
пересечения кривых $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y = -\ln x$ и $y = x$

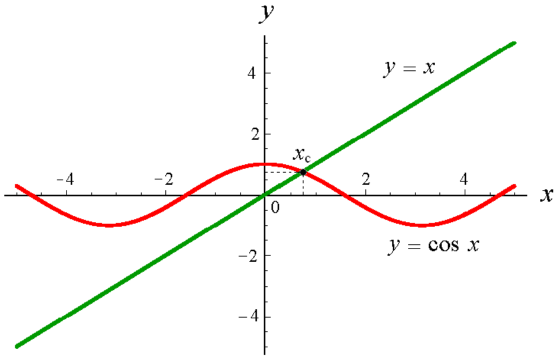


Рис. 2.6.3
Пересечения кривых $y = \cos x$ и $y = x$ в точке x_c

2.7. Суперпозиция для действительной и мнимой переменных

Все три прошедшие отбор функции непосредственно связаны с экспонентой и потому дальнейшее исследование фактически касается свойств материнской функции ψ. Переход от частного случая функции действительной переменной к более общему случаю функций действительной и мнимой переменных означает добавление нового условия, дополняющего условие а).

д) Уравнение $\mathbf{E}_5$ имеет место для всех мнимых чисел

Известное соотношение

$$\operatorname{sech}(\mathrm{i}x) = \sec(x) = 1/\cos x \tag{2.7.1}$$

показывает, что гиперболический секанс мнимого числа есть число действительное, следовательно формула $\mathbf{E}_5$ имеет место не только для всех действительных, но и для различных мнимых чисел, однако не всех. Функция sech z не определена в точках

$$z_n = (2n + 1)\cdot\pi\mathrm{i}/2 \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$$

в которых она обращается в бесконечность, следовательно условию д) функция sech z не удовлетворяет, а константа суперпозиции всех действительных чисел x_h на роль ФМК претендовать не может. Понятно также, что преимущество функции $\cos x$ (как универсального генератора одной из ФМК) перед $\operatorname{sech}(\mathrm{i}x)$ состоит в том, что выражение $\psi(\mathrm{i}x) + \psi(-\mathrm{i}x)$ стоит здесь в числителе, а не в знаменателе дроби, оттого и нет у косинуса особых точек указанного типа.

В итоге, условиям а)−д) удовлетворяют лишь функции $\cos x \equiv (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x})/2$ и e^{-x} со своими константами суперпозиции ա (первая буква армянского алфавита, читается “а”) и W(1):

$$x_\text{c} \equiv \text{ա}, \quad x_\text{h} \equiv \mathrm{W}(1)$$

По поводу последнего обозначения скоро будут даны необходимые разъяснения. Для данной пары функций и констант справедливость предельного отношения $\mathbf{E}_5$ не зависит от выбора начальной, действительной или мнимой, переменной x. А выражаясь языком геометрии, можно сказать, что применением принципа бесконечной суперпозиции ко всем точкам, лежащим на действительной и мнимой осях, обе оси отображаются в точки ա или W(1).

Для функции косинуса из уравнения

$$\mathbf{E}_{52} \quad \lim_{n\to\infty} \cos(\cos \ldots \cos(z) \ldots) = \text{ա}$$

имеем

$$\mathbf{E}_{53} \quad \cos z = \arccos z = z$$

или в явном виде

$$\mathbf{E}'_{53} \quad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = -\mathrm{i}\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}\,) = z$$

Аналогично для экспоненты e^{-x} из исходного уравнения

$$\mathbf{E}_{54} \quad \lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(\psi^{-1} \ldots \psi^{-1}(z) \ldots) = \mathrm{W}(1)$$

получаем

$$\mathbf{E}_{55} \quad \mathrm{e}^{-z} = -\ln(z) = z$$

Трансцендентные уравнения $\mathbf{E}_{53}$ и $\mathbf{E}_{55}$, удобные для вычисления констант ա и W(1), неразрешимы в конечном виде относительно неизвестной z. Стало быть, эти константы, связанные как и дóлжно с функциями ψ, α и проточислами, не являются однако комбинациями последних наподобие e^{π} или, допустим, $\pi^2/4$. Следовательно, ա и W(1) имеют равный с π, e, i, 2, γ статус констант первого ранга.

Займёмся вначале константой ա, см. также **[**Аракелян 2010**]**. Предшествующее изложение подводит к мысли, что в области действительных и мнимых чисел любая математическая константа так или иначе, через те или иные операции обусловлена материнскими операциями ψ и α и что все константы глубоко связаны друг с другом, составляя единую взаимодополняющую систему выделенных математических величин. Вполне поэтому закономерно, что константа ա, определяемая уравнением $\mathbf{E}_5$ через исходную в системе **AGE** операцию суперпозиции, то есть будто совершенно независимо от принципов, которые положены в основу определения функций ψ, α и проточисел, тем не менее имеет решение непосредственно соотносящееся с теми и другими. Более того, близость по природе, удивительное сходство вторичных аналитических форм, включенность константы ա в систему фундаментальных констант бросается в глаза, если простейшую комбинацию соотношений для проточисел сравнить с соотношением $\mathbf{E}_{53}$, получаемым из исходного $\mathbf{E}_5$:

$$\frac{\psi(\mathrm{i}\pi) + \psi(-\mathrm{i}\pi)}{2} = \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} \tag{2.7.2}$$

$$\frac{\psi(\mathrm{i}\text{ա}) + \psi(-\mathrm{i}\text{ա})}{2} = \text{ա} \tag{2.7.3}$$

В обоих соотношениях полусумма функциональных слагаемых типа $\psi(x)$, $\psi(-x)$ даёт одну из содержащихся под знаком функции констант, другими словами e-2-i-π-преобразование приводит к i·i, а e-2-i-ա-преобразование, с заменой π на ա, приводит к ա. В обоих соотношениях содержатся только константы, составляющие таким образом семейство взаимосогласованных фундаментальных математических величин. Уравнение $\mathbf{E}_5$, определяющее фактически константы ա и W(1), наряду с функцией косинуса

$$S(x) = \frac{\psi(\mathrm{i}x) + \psi(-\mathrm{i}x)}{2} \quad (x \text{ действительно или мнимо})$$

и материнской функцией $\psi^{-1}(x)$ с самого начала могло быть включено в систему функциональных уравнений **E** в качестве одного из её уравнений. Но стоявшие тогда задачи, в частности введение новых операций и построение континуума, не требовали констант γ, ա и W(1) и мы предпочли заняться суперпозицией позже.

Решая любое из трёх уравнений $\mathbf{E}_{53}$ (удобнее, конечно, иметь дело с уравнением $\cos x = x$ для действительной переменной x) одним из существующих методов приближённого решения трансцендентных уравнений, например стандартным методом касательных Ньютона, получим число **[**Аракелян 1981, 135, 136**]**

ա = 0,73908 51332 15160 64165 53120 87673 87340 40134 11758 90075 74649 65680 63577 32846 54883 54759
45993 76106 93176 65318 49801 24664 39871 63027 71490 36913 08420 31578 04405 74620 77868 85249
03891 53928 94388 45095 23480 13356 12767 7223… (2.7.4)

которое по всей видимости трансцендентно, то есть выражается бесконечной непериодической десятичной (или любой другой n-ичной) дробью. Здесь приведены полученные методом касательных Ньютона лишь двести знаков десятичного представления константы ա, а с точностью в 6 400 000 десятичных знаков, наряду со статистическим анализом частоты их распределения, она дана в **[**Аракелян[1]**]** (индексы [1], [2], … используются для нумерации ссылок на работы данного автора, когда их больше одной и дата помещения на web-странице не важна). Заметим также, что есть и другой – общедоступный, “эмпирический” способ получить десятичное приближение числа ա. Дело в том, что с определённой точностью оно как бы содержится в любом калькуляторе, способном производить операцию cos. Надо лишь наугад набрать число (выражаемое, понятно, в радианах) или, ничего даже не набирая, нажимать раз за разом или держать нажатой кнопку “cos”. Получаемый с доступной для данного калькулятора точностью результат (2.7.4) скоро замелькает на экране.

О характере приближения к пределу получаемой из $\mathbf{E}_{52}$ последовательности чисел можно судить по рисунку.

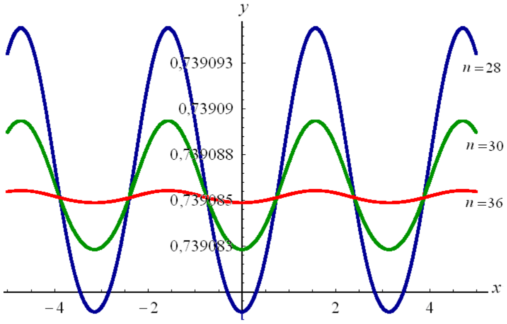


Рис. 2.7.1

Графики функции cos(cos(…cos(x)…) для n = 28, 30, 36

Для мнимой переменной ix это последовательность действительных чисел x_1, x_2, x_3, …, x_n, x_{n+1}, … которая с каждым шагом приближается к своему пределу, попеременно принимая бо́льшие и меньшие чем ɯ значения. Как увидим в главе 3, в теории ЛМФ константа ɯ – это тот самый “скрытый параметр”, недостающее звено в семействе математических величин, которое позволяет решить, считающуюся ранее “непробиваемой” проблему теоретического определения численных значений некоторых фундаментальных физических постоянных путём их сведения к ФМК.

Что касается второго случая, он несколько своеобразен. Известно, что экспонента e^{-ix} переводит всякое мнимое число в комплексное, поэтому для любого ix уравнение $\mathbf{E}_{54}$ приводит к бесконечному упорядоченному множеству типа

$$x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ x_3 + iy_3,\ \dots,\ x_n + iy_n,\ \dots$$

Особенность этой последовательности комплексных чисел в том, что с увеличением n варианта y_n стремится к нулю, переменная же x_n, а вместе с ней и вся последовательность $x_n + iy_n$, сходится к пределу W(1). При этом, как и в случае косинуса, переменная x_n приближается к своему пределу колеблясь возле точки сходимости W(1) с постоянно уменьшающейся амплитудой колебаний. Первые двести знаков десятичного представления второй константы суперпозиции таковы:

$$\mathrm{W}(1) = 0{,}56714\ 32904\ 09783\ 87299\ 99686\ 62210\ 35554\ 97538\ 15787\ 18651\ 25081\ 35131\ 07922\ 30457\ 93086\ 68456$$
$$66932\ 19446\ 96175\ 22945\ 57638\ 02497\ 28667\ 89785\ 45235\ 84659\ 40072\ 99560\ 85164\ 39289\ 99461\ 43115$$
$$71492\ 95980\ 35943\ 76698\ 47463\ 56061\ 34226\ 84613\dots \qquad (2.7.5)$$

С точностью в n десятичных знаков константа W(1), называемая также *омега-константой* и обозначаемая символом Ω **[**Omega constant**]**, может быть получена в “Mathematica 7” набором выражения N[ProductLog[1], n], где вместо n может стоять любое семи- или даже восьмизначное число.

Используемое здесь обозначение не случайно, поскольку речь фактически идёт об определённом значении функции Ламберта W(z), или омега-функции, см. **[**Michon**]**, обычно задаваемой функциональным уравнением

$$z = \mathrm{W}(z)e^{\mathrm{W}(z)}, \quad \text{или} \quad \mathrm{W} = ze^{-\mathrm{W}} \qquad (2.7.6)$$

Функция W(z), определённая для множества всех чисел z включая 0 и используемая при решении различных трансцендентных уравнений, нашла достаточно широкое применение в чистой математике и за её пределами – в физике и биологии, в механике жидких сред, при анализе динамических систем, в теории алгоритмов и т.д., см. **[**Corless *et al.***]**. Кривая W(x), ($x \geq 0$, W(0) = 0), напоминающая по виду график логарифма, показана на рисунке вместе с кривой $y = \ln x$:

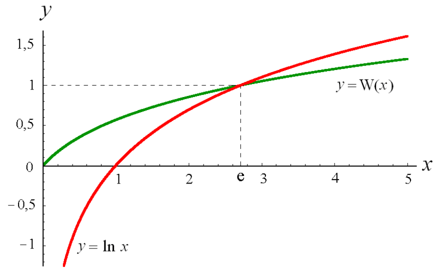


Рис. 2.7.2

Графики функций W(x) и ln x

Если $z = 1$, получаем уравнение

$$\mathrm{W}(1) = \mathrm{e}^{-\mathrm{W}(1)}$$

тождественное $\mathbf{E}_{55}$. Таким образом, одно из двух решений уравнения $\mathbf{E}_5$ для действительной и мнимой переменных совпадает с выделенным значением функции W(z), соответствующим простейшему случаю отсутствия множителя z в уравнении (2.7.6). В этом смысле число W(1) может считаться первенцем бесконечного семейства чисел W(z). Следует также отметить, что пути, ведущие к константе 0,567143…, весьма различны. В то время как в последнем уравнении экспонента задана с самого начала и задача сводится лишь к нахождению различных значений W(z) в зависимости от значений переменной z, в функциональном уравнении $\mathbf{E}_5$ неизвестными “величинами” наряду с ɯ и W(1) являются функции cos z и e^{-z}, причём значения констант суперпозиции от конкретных значений z никак не зависят. Остаётся добавить, что получение приближённого десятичного значения константы W(1) на калькуляторе ненамного сложнее чем в случае константы ɯ. Взяв произвольное число, надо производить над ним одну за другой операции e^x и $1/x$ до тех пор, пока число 0,56714 32904… не появится на дисплее с максимальной для данного калькулятора точностью.

2.8. Замечания, итоги и перспективы

Характерной особенностью ФМК является неожиданное появление в самых разных разделах чистой и прикладной математики, в самых разных ролях и в самых непредвиденных обстоятельствах. История математики полна таких неожиданностей, притом в отношении всех без исключения фундаментальных констант. В связи с этим любопытно отметить, что число 0,73908…, впервые рассмотренное как константа и аттрактор в [Аракелян 1981, 135, 136] в связи с решением проблемы теоретического определения численных значений фундаментальных физических постоянных, в последнее время встречается довольно часто. В этом можно убедиться с помощью Интернета, последовательно задавая например поиск десятичных приближений

0.73908   0.739085   0.7390851   0.73908513   0.739085133 …

числа ɯ в поисковых системах Google, Alta Vista или Yahoo. Для пяти-шести верных знаков после запятой количество web-страниц исчисляется сотнями, далее десятками, затем – с пятнадцати до двух тысяч знаков – считанными единицами или полным отсутствием ссылок, после чего уже вроде ничего нет. Конечно, очень часто, особенно для четырёх-пяти знаков, имеет место простое совпадение каких-то сочетаний цифр с тем или иным десятичным приближением константы. После того как всё случайное будет отброшено, останутся сотни страниц, где речь уже идёт о математическом числе, являющемся решением уравнения $\cos x = x$. Правда, и здесь рассмотрение часто носит формальный характер и преследует весьма ограниченные, преимущественно иллюстративные цели – при изложении приемов математического исследования, таких как анализ итерационных процессов и методы численного решения (например, метод касательных Ньютона) трансцендентных уравнений, простейшим и характерным примером которых и является данное уравнение. Исследование формальных свойств косинуса, в частности его особых точек, также приводит к “магической” точке 0,739085… С основаниями математики, а тем более с фундаментальной физикой эти случаи, безусловно, прямо не соотносятся, хотя и здесь можно найти подоплеку. Уравнение $\cos x = x$ относится к числу простейших трансцендентных уравнений, к тому же с единственным, графически легко представимым и не равным 0 или 1 решением.

Всё вроде очень просто, доступно и лежит на поверхности, но лишь глубокий анализ позволяет постичь истинную природу указанного числа как фундаментальной математической константы одного ранга с π. Впрочем, и огромный чистый алмаз может быть принят за любопытный блестящий камешек: если уж говорить о константе π, то вплоть до появления методов решения бесконечных числовых рядов и произведений она рассматривалась *лишь* как чисто геометрическое отношение длины окружности к диаметру. Широкий выход новой константы за рамки чистой математики практически неотвратим, и вот уже число 0,739085… вместе с уравнением для косинуса появляется наряду с числами Фейгенбаума при анализе процессов перехода от хаоса к упорядоченности, при рассмотрении фракталов – см., например, [Bojar], а также [Weisstein] – при решении уравнения Кеплера для предельного случая, когда эксцентриситет эллиптической орбиты равен 1 [AKiTi]. В этом нет ничего удивительного или неожиданного, если принять во внимание исходное уравнение $\mathbf{E}_5$. Геометрически оно может интерпретироваться как отображение мнимой и действительной осей координат в одну точку, а содержательно истолковано как переход от произвольной множественности к вполне определённой количественно иной особенности. С позиций синергетики, принципа самоорганизации систем это можно понимать как стремление системы к фиксированному конечному состоянию, совершенно независящему от её начального состояния. Можно предположить, что новые появления константы ɯ в различных научных дисциплинах, в особенности в области физических явлений, мыслимы при исследовании колебательных процессов, динамических систем, энтропийных процессов, теории хаоса, процессов упорядочивания и самоорганизации физических систем, фазовых переходов, фракталов, турбулентности, …

Наше рассмотрение постоянной суперпозиции косинуса не будет полным без упоминания истории касающейся её обозначения и названия, см также [Аракелян[2]]. Число 0,739085… как решение уравнения типа $f(x) = x$, конкретно уравнений $\mathbf{E}_{53}$, является неподвижной точкой отображения, как решение уравнения суперпозиции $\mathbf{E}_{53}$ – глобальным аттрактором, а как одно из решений системы функциональных уравнений **E** – фундаментальной математической константой. Разумеется аттрактор – нечто большее чем неподвижная точка отображения, но в то же время фундаментальная математическая константа – куда более важный объект, чем аттрактор. Но и в ранге аттрактора, тем более глобального, число заслуживает не только специального обозначения, но и именного названия. О том как это иногда делается (возможно по неведению, но в любом случае с нарушением авторского права) можно судить по выдержке из небольшой статьи, опубликованной в 2007 году в известном американском математическом журнале. “Среди моих друзей, выпускников школы, *число Дотти* было прозвищем единственного действительного корня уравнения cos $x = x$. Говорят, что Дотти, профессор французского языка, заметила, что какое бы число она не набирала на калькуляторе, последовательное нажатие кнопки COS всякий раз давало на дисплее одно и то же значение 0.739085… . Она спросила своего мужа, профессора математики, почему калькулятор всегда даёт только одно значение, независимо от первоначально набранного числа. Он посмотрел, попробовал и сказал, что пока ещё не разобрался. На следующий день он понял произошедшее, как и то, что его жена нашла красивый, простой образец глобального аттрактора” **[**Kaplan**]**.

После этой статьи о *числе Дотти* (*Dottie number*), как о глобальном аттракторе и просто замечательном числе, заговорили многие. Появились упоминания в научной печати, предложение о включении в учебники по математике, отдельная статья в математическом веб-сайте MathWorld **[**Weisstein, *Constants***]**, десятичная запись (более ста знаков после запятой) *Dottie number* в онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей **[**Sloane**]**, широкое обсуждение на математических форумах с интригующими названиями **[**A most mysterious of numbers**]** и т. п.

Между тем, число 0,739085…, как аттрактор и более того как фундаментальная математическая константа, впервые появилось за четверть века до “Dottie number”, в начале 80-ых прошлого столетия **[**Аракелян 1981**]**. Названная “постоянной косинуса” или “постоянной суперпозиции косинуса” и обозначенная символом ɯ эта константа широко использовалось при решение некоторых важнейших проблем физической теории **[**Аракелян 1981; 1989; 1992; 2007; 2007*a*; Arakelian 1995; 2010**]**. Впрочем, наше авторское право на обозначение и название данного числа, подтвержденное соответствующими доказательствами и подкрепленное обращением руководства Национальной академии наук Армении к журналу “Mathematics Magazine”, никем фактически не оспаривается и уже внесены кое-какие изменения в указанную статью в MathWorld. “Поль Бланшар (муж Дотти, профессор математики – Г. А) не заинтересован в защите имени (*Dotti number* – Г. А.)” говорится в письме ко мне: “Paul Blanchard is not interested in defending the name.” А раз уж принято не только символически обозначать, но и давать именные названия особо значимым числам, всё говорит в пользу *константы Аракеляна*, хотя в зависимости от контекста, понятно, допустимы и другие названия: *постоянная суперпозиции косинуса*, *аттрактор косинуса*, просто *константа* ɯ и т. п.

Что касается числа W(1), обнаружившего себя в качестве константы суперпозиции экспоненты в ходе очерченного выше исследования, то о его достаточно широком применении в области чистой математике и её приложений уже говорилось.

В числах заключена великая тайна и великая сила, которую человек стал осознавать с незапамятных времён. Не случайно числовая магия возникла задолго до появления математики как науки, оказав на последнюю немалое влияние, особенно в момент её становления; не случайно и современная наука и “тайное знание” при всём их различии с одинаковым пиететом относятся к числам; пожалуй, только *наука о числах* (по-разному, конечно, понимаемая) является обязательной, непременной принадлежностью как фундаментальной науки, так и оккультизма. С высоты сегодняшнего знания кажется вполне очевидным, что в лоне математики и математического естествознания хорошо известные величины – фундаментальные математические константы – приобрели со временем высочайший статус, вселенскую значимость. Если вообще попытаться хотя бы в грубом приближении, без особых претензий на точность и тем более полноту, буквально в нескольких словах охарактеризовать наиболее характерную содержательную особенность, прикладную роль каждой из восьми фундаментальных математических констант в отдельности, то картина может быть такой:

0	отсутствие данного количества или свойства
π	от прямолинейного к криволинейному
e	быстрое увеличение
i	периодические процессы
2	появление нелинейных связей
γ	переход к интегральным формам
ɯ, W(1)	переход от множественного к единичному

А в более важном в данном контексте системном подходе константы 0, e, π, i, 2 вправе, как было показано выше, считаться началом всех чисел, проточислами числового множества, способными конструировать континуум; что же касается констант γ, ա, W(1) это как бы мостик между единичным (число) и актуальной математической бесконечностью (интеграл, бесконечная суперпозиция). В широком же смысле константы ա и W(1) можно, как указывалось, понимать как независимость конечного состояния системы от её начального состояния.

Литература

Аракелян Г.Б. *Фундаментальные безразмерные величины (Их роль и значение для методологии науки).* Ереван: Изд. АН, 1981

- *Числа и величины в современной физике*. Ереван: Изд. АН, 1989
- *Числа и величины в современной физике*. Автореф. докт. дисс., С.-Петербург, 1992
- *Основания физической теории*. Ереван: Давид, 1997
- Фундаментальная теория ЛМФ. (A1) Ереван, 2007 http://www.hrantara.com/Monograph.pdf
- От логических атомов к физическим законам. Ереван: “Лусабац”, 2007 http://www.hrantara.com/Book.pdf
- [1]Новая фундаментальная математическая константа (с точностью до 6 400 000 знаков после запятой) http://www.hrantara.com/NewConstant2.pdf
- [2]Фундаментальные математические константы как начало всех чисел и новая ФМК http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161779.htm

Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, т. 1–2. М.: Мир, 1965

Кантор И.Л., Солодовников А.С. *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973

A most mysterious of numbers http://forums.xkcd.com/viewtopic.php?f=17&t=23066&p=687416

AKiTi Kepler’s Equation of Elliptical Motion, 2004 http://www.akiti.ca/KeplerEquation.html

Arakelian H. *The New Fundamental Constant of Mathematics*. Pan-Armenian Scientific Rev., London, **3**, 18–21 (1995)

- *LMP Fundamental Theory*. Yerevan, Sarvard Hrat. LTD, 2010

Bojar Ondřej. *Chaos přehledně* http://chaospace.hyperlinx.cz/index.php?pgid=230

Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., and **Knuth D.E.** *On the Lambert W Function*. Advances in Computational Mathematics **5**, 329–359 (1996)

Kaplan S.R. *The Dottie Number*, Math. Mag. **80**, (2007), 73−74

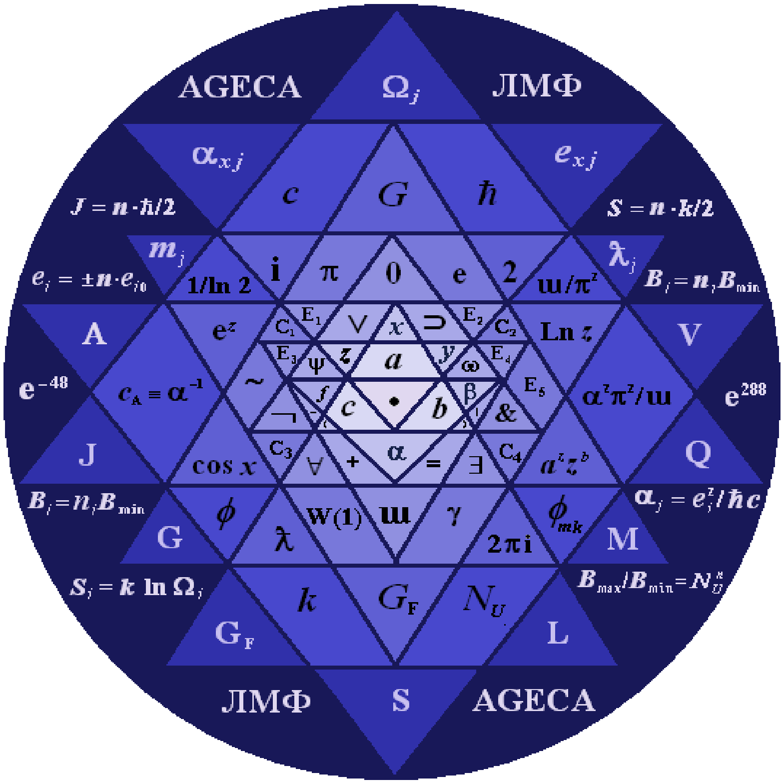
Michon G.P. *Final Answers: Numerical Constants* http://home.att.net/~numericana/answer/constants.htm#mertens

Omega constant. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Omega_constant

Sloane, N. J. A. *Sequence A003957*. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences http://oeis.org/A003957

Weisstein E. W. *Fixed Point*. From MathWorld http://mathworld.wolfram.com/FixedPoint.html

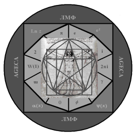
- *Constants*. From MathWorld A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/topics/Constants.html



Символ теории ЛМФ:
шри янтра со вписанными в неё основными элементами теории

Введение
Глава 1. Логика и формальная математика
⇧

Глава 1. ⇦
Логика и формальная математика



⇨ **Глава 3.**
Основания физической теории

⇩
Персональный сайт

E-mail: hrantara@gmail.com