А.П. Стахов

Об избыточности системы Бергмана
(ответ А.В. Никитину)

В микропроцессоре Фибоначчи, описанном в статье [1], для представления чисел используется два кода – *код Фибоначчи*

$$N = a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \ldots + a_i F_i + \ldots + a_1 F_1 , \tag{1}$$

и «золотой» код (система Бергмана)

$$A = \sum_i a_i \Phi^i . \tag{2}$$

Первый код используется для представления натуральных чисел, а второй - для представления действительных чисел и выполнения арифметических операций.

С помощью n-разрядного кода Фибоначчи (1) можно представить определенное количество чисел в диапазоне от $N_{\min}$ до $N_{\max}$, причем

$$N_{\min} = \underbrace{00\ldots0}_{n} = 0 ;$$

$$N_{\max} = \underbrace{11\ldots1}_{n} = F_n + F_{n-1} + \ldots + F_2 + F_1 = F_{n+2} - 1 .$$

Отсюда вытекает, что с помощью n-разрядного кода Фибоначчи (1) можно представить F_{n+2} целых чисел в диапазоне от 0 до $F_{n+2} - 1$.

Для обеспечения контроля информации в микропроцессоре Фибоначчи используется так называемая *минимальная форма* кода Фибоначчи, в которой двух единиц рядом в кодовой комбинации не встречается. Доказано, что в этом случае с помощью n-разрядного кода Фибоначчи (1) можно представить F_{n+1} целых чисел в диапазоне от 0 до $F_{n+1} - 1$.

Сравним теперь код Фибоначчи с двоичным кодом

$$N = a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \ldots + a_i 2^{i-1} + \ldots + a_1 2^0 . \tag{3}$$

Напомним, что с помощью n-разрядного двоичного кода (3) можно представить 2^n целых чисел в диапазоне от 0 до $2^n - 1$.

Для определения численного значения избыточности кода Фибоначчи (1) воспользуемся следующими традиционными рассуждениями, используемыми в теории избыточных кодов. Будем вычислять «относительную избыточность» кода Фибоначчи согласно следующему выражению:

$$R = \frac{n-m}{m} = \frac{n}{m} - 1, \tag{4}$$

где n и m – соответственно число разрядов «избыточного» и «неизбыточного» кодов для представления одного и того же диапазона чисел. При таком определении избыточности она характеризует относительное удлинение разрядной сетки «избыточного» кода по сравнению с «неизбыточным» кодом.

Для представления F_{n+2} целых чисел в «неизбыточном», то есть, двоичном коде (3), понадобится $m \approx \log_2 F_{n+2}$ двоичных разрядов. . Подставляя это выражение в формулу (4), мы получим следующие выражения для «относительной избыточности» кода Фибоначчи:

$$R_1 = \frac{n}{\log_2 F_{n+2}} - 1 \tag{5}$$

Для того, чтобы упростить выражение (5), обратимся к формуле Бине для чисел Фибоначчи. При достаточно большом n число Фибоначчи F_n с достаточной точностью можно представить в виде:

$$F_n \approx \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Выражая число Фибоначчи F_{n+2} в формуле (5) через золотую пропорцию Φ, мы получим следующее выражение для относительной избыточности кода Фибоначчи:

$$R_1 = \frac{n}{\log_2 \frac{\Phi^{n+2}}{\sqrt{5}}} - 1 = \frac{n}{n\log_2\Phi + 2\log_2\Phi - \frac{1}{2}\log_2 5} - 1 \tag{7}$$

Устремляя n к бесконечности, получим следующее предельное выражение для вычисления «относительной избыточности» кода Фибоначчи:

$$R_1 = \frac{1}{\log_2\Phi} - 1 \approx 0.44(44\%). \tag{8}$$

Если применить эти же рассуждения для случая представления чисел в минимальной форме, мы придем к следующему выражению для относительной избыточности:

$$R_2 = \frac{n}{\log_2 \frac{\Phi^{n+1}}{\sqrt{5}}} - 1 = \frac{n}{n\log_2\Phi + \log_2\Phi - \frac{1}{2}\log_2 5} - 1$$

Устремляя n к бесконечности, получим следующее предельное выражение для вычисления «относительной избыточности» кода Фибоначчи в случае использования «минимальной формы»:

$$R_2 = \frac{1}{\log_2\Phi} - 1 \approx 0.44(44\%). \tag{9}$$

Это означает, что предельное значение «относительной избыточности» кода Фибоначчи не зависит от формы представления чисел и равно 0.44 (44%).

Теперь перейдем к вычислению относительной избыточности «золотого кода» (2). Ясно, что разрядность «золотого» кода в микропроцессоре Фибоначчи ограничена. Предположим, что мы используем n разрядов в «золотом» коде (2) от 0-го до (n-1)-го. Такой «золотой» код может быть представлен в виде:

$$A = a_{n-1}\Phi^{n-1} + a_{n-2}\Phi^{n-2} + \ldots + a_1\Phi^1 + a_0\Phi^0 \tag{10}$$

Будем использовать минимальную форму для представления чисел в «золотом» коде (10). В Табл. 1 представлены все минимальные формы 4-разрядного «золотого» кода.

Таблица 1

Φ^3	Φ^2	Φ^1	$\Phi^0=0$	A_i	$\Delta_i = A_i - A_{i-1}$
0	0	0	0	$A_0 = 0$	
0	0	0	1	$A_1 = 1$	$\Delta_1 = 1$
0	0	1	0	$A_2 = \Phi$	$\Delta_2 = \Phi - 1 = \Phi^{-1}$
0	1	0	0	$A_3 = \Phi^2$	$\Delta_3 = \Phi^2 - \Phi = 1$
0	1	0	1	$A_4 = \Phi^2 + 1$	$\Delta_4 = 1$
1	0	0	0	$A_5 = \Phi^3$	$\Delta_5 = \Phi^3 - (\Phi^2 + 1) = \Phi^{-1}$
1	0	0	1	$A_6 = \Phi^3 + 1$	$\Delta_6 = 1$
1	0	1	0	$A_7 = \Phi^3 + \Phi$	$\Delta_7 = \Phi - 1 = \Phi^{-1}$

Табл. 1 задает отображение минимальных форм 4-разрядного «золотого» кода (первые четыре колонки) на некоторое множество чисел $A_0 - A_7$ (пятая колонка). В шестой колонке приведены значения разности $\Delta_i \left(i = 0,1,2,3,4,5,6,7\right)$ между соседними числами $\Delta_i = A_i - A_{i-1}$.

Анализ Табл. 1 приводит к следующим выводам, касающихся особенностей представления чисел в «золотом» коде (10):

1. Разность между соседними числами $\Delta_i = A_i - A_{i-1}$ равна либо числу 1, равному весу младшего разряда «золотого» кода (10), либо числу $\Phi^{-1} = 0.618$, равному весу разряда, предшествующему весу младшего разряда. Это означает, что «квантование» чисел в «золотом» коде не является равномерным, как это имеет место в классическом двоичном коде (3) или коде Фибоначчи (1).
2. С помощью 4-разрядного «золотого» кода (10) в минимальной форме можно представить 8 чисел от минимального числа $A_0 = 0$ до максимального числа $A_7 = \Phi^3 + \Phi$.

Любопытно отметить, что количество чисел, представляемых с помощью 4-разрядного «золотого» кода, равно числу Фибоначчи $F_6 = 8$. Оказывается, что это не случайное совпадение. Этот факт является частным следующей общей теоремы:

Теорема 1. С помощью n-разрядного «золотого» кода (10) в минимальной форме можно представить F_{n+2} чисел, где F_{n+2} - число Фибоначчи.

Теорема 1 позволяет нам вычислить «относительную» избыточность n-разрядного «золотого» кода. Для этого мы можем воспользоваться формулой (7), а также формулой (8), которая задает предельное значение «относительной» избыточности.

Повторяю то, что я писал в реплике на статью Андрея Никитина:

«Оценки Никитина ошибочны. Я еще раз привожу те оценки, которые я привел в своей статье. Система Бергмана обладает такой же кодовой избыточностью, как и код Фибоначчи, то есть, их применение приводит к удлинению разрядной сетки и аппаратурных затрат в микропроцессоре в 1,44 раза. Это – плата за те преимуществ, которые дает применение этих систем счисления (контроль всех преобразований информации в микропроцессоре, включая аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи, что важно для сигнальных микропроцессоров, используемых в системах управления)».

Литература

1. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011

P.S. Я очень рад, что Андрей Никитин не причастен к деятельности «оппозиционной группы», а его участие в письме, направленном в Одесский университет, будем считать досадной ошибкой. Надеемся, что в дальнейшем Андрей Никитин будет все тщательно взвешивать перед тем, как принимать решение об участии в подобных акциях. А может, Никитин и не знал о существовании такого письма? По крайней мере, один из «подписантов» не давал согласия на его включение в список «подписантов». То есть, его включили в список «подписантов» без его согласия. Но если это так, то это просто очередное «жульничество» лидеров «оппозиционной группы», что очень характерно для этих деятелей.