А. П. Стахов

К обоснованию «золотой» теории чисел: троичная зеркально-симметричная арифметика, основные достижения и перспективы развития новой теории чисел

Аннотация

Во второй половине 20-го века в рамках так называемой «математики гармонии» было получено ряд фундаментальных математических результатов (система Бергмана, коды Фибоначчи, коды золотой пропорции и др.), касающиеся теории систем счисления. Эти результаты могут быть объединены под общим названием **«золотая» теория чисел**, поскольку в ее основе лежит «золотое сечение» - выдающееся математическое открытие античной науки. «Золотая» теория чисел как бы возвращает математику к периоду ее зарождения. Основным предметом исследований в этой теории являются новые, неизвестные ранее системы счисления, основанные на «золотом сечении» и его обобщении – «золотом *p*-сечении». Эти системы счисления, обладающие избыточностью и многими экзотическими свойствами, могут стать началом «золотой» информационной технологии, новых компьютеров и новых микропроцессоров.

Оглавление

1. Введение

Всегда приятно получать положительные отзывы на опубликованные работы от своих коллег. Но еще приятнее получать такие отзывы от всемирно известных ученых. В 2002 г. автор получил письмо от выдающегося специалиста в области современной информатики американского ученого, профессора **Дональда Кнута**, автора научного бестселлера «Искусство программирования».

Дональд Эрвин Кнут (англ. *Donald Ervin Knuth*, родился 10 января 1938) — американский учёный, почётный профессор Стэнфордского университета и нескольких других университетов в разных странах, иностранный член Российской академии наук, преподаватель и идеолог программирования, автор 19 монографий (в том числе ряда классических книг по программированию) и более 160 статей, разработчик нескольких известных программных технологий. Автор всемирно известной серии книг, посвящённой основным алгоритмам и методам вычислительной математики, а также создатель настольных издательских систем $\mathrm{T_EX}$ и METAFONT, предназначенных для набора и вёрстки книг, посвящённых технической тематике (в первую очередь — физико-математических).

Почему вдруг Дональд Кнут прислал письмо мне, в тот период малоизвестному в западном мире ученому из Украины? Оказалось, что причиной письма стала моя статья **Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic** [1], опубликованная в 2002 г. в одном из наиболее престижных журналов "The Computer Journal" (British Computer Society). В этой статье мне удалось объединить троичную систему счисления, использованную Николаем Брусенцовым при создании первого в истории науки троичного компьютера «Сетунь», с системой Бергмана, что привело меня к созданию «золотой» троичной зеркально-симметричной арифметики, которая является основой для разработки высоконадепжных троичных компьютеров нового типа, основанных на «золотом сечении.

В своем письме Дональд Кнут поздравил меня с этой публикацией, пожелал дальнейших успехов в развитии этого напрапвления и пообещал, что описание этой новой компьютерной арифметики будет включено в новое издание его книги «Искусство программирования».

Цель настоящей статьи – прокомментировать интерес Дональда Кнута к троичной зеркально-симметричной арифметике [1], рассмотреть основные достижения и наметить перспективы развития «золотой» теории чисел.

2. Троичная зеркально-симметричная арифметика

Троичная зеркально-симметричная система счисления детально описана не только в моей англоязычной статье [1], но и в ее русскоязычном варианте, опубликованном в АТ [2]. Поэтому мы дадим самое сжатое изложение новой компьютерной арифметики, отсылая читателей к работам [1,2] для более детального ознакомления.

Отметим самые необычные свойства новой арифметики, которые могли заинтересовать Дональда Кнута. Итак, в статье [1] речь идет о новом троичном позиционном представлении целых чисел:

$$N=\sum_i c_i\left(\Phi^2\right)^i, \tag{1}$$

где $c_i \in \{\bar{1},0,1\}$ – троичная цифра i-го разряда; $\left(\Phi^2\right)^i$ – вес i-го разряда; Φ^2 – основание системы счисления (1), $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – «золотая пропорция».

Основанием данной системы счисления является иррациональное число

$\Phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$, то есть, эта система счисления относится к классу систем счисления с иррациональными основаниями, которые ввел в математику американский математик Джордж Бергман [3].

В системе счисления (1) каждое целое число представляется в виде следующего троичного кода:

$$c_m c_{m-1} \ldots c_i \ldots c_2 c_1 \boxed{c_0}, c_{-1} c_{-2} \ldots c_{-i} \ldots c_{-(m-1)} c_{-m} \tag{2}$$

Троичное представление (2) состоит из двух частей (левой и правой), симметрично расположенных относительно нулевого разряда c_0. При этом левая и правая части троичного кода (2) удовлетворяют свойству *зеркальной симметрии*, то есть, левая часть $c_m c_{m-1} \ldots c_i \ldots c_2 c_1$ троичного кода (2) зеркально симметрична его правой части $c_{-1} c_{-2} \ldots c_{-i} \ldots c_{-(m-1)} c_{-m}$, то есть,

$$\boxed{c_m = c_{-m}; c_{m-1} = c_{-(m-1)}; \ldots; c_i = c_{-i}; \ldots; \ldots; c_2 = c_{-2}; c_1 = c_{-1}}.$$

В качестве примера в Табл. 1 представлены троичные зеркально-симметричные представления начального ряда натуральных чисел.

Таблица 1

i	3	2	1	0	-1	-2	-3
Φ^{2i} / *N*	Φ^6	Φ^4	Φ^2	Φ^0	Φ^{-2}	Φ^{-4}	Φ^{-6}
0	0	0	0	0,	0	0	0
1	0	0	0	1,	0	0	0
2	0	0	1	$\bar{1}$,	1	0	0
3	0	0	1	0,	1	0	0
4	0	0	1	1,	1	0	0
5	0	1	$\bar{1}$	1,	$\bar{1}$	1	0
6	0	1	0	$\bar{1}$,	0	1	0
7	0	1	0	0,	0	1	0
8	0	1	0	1,	0	1	0
9	0	1	1	$\bar{1}$,	1	1	0
10	0	1	1	0,	1	1	0

При этом «зеркально-симметричная арифметика» обладает следующими полезными и необычными свойствами:

1. Все арифметические операции выполняются в «прямом коде», то есть, без привлечения понятий обратного и дополнительного кодов.
2. Операция сравнения зеркально-симметричных кодов по величине может осуществляться путем поразрядного сравнения троичных разрядов как слева направо, так и справа налево. Если осуществлять сравнение одновременно как слева, так и справа, то эта операция становится контролируемой, что важно для практических приложений.
3. Свойство «зеркальной симметрии» является инвариантом относительно арифметических операций, то есть, результат любой арифметической операции всегда должен быть представлен в «зеркально-симметричной форме». Это означает, что найден принципиально

новый метод контроля арифметических операций в компьютере, использующем зеркально-симметричное представление.

4. Существует много полезных приложений зеркально-симметричной арифметики, описанных в работах [1,2]. Одним из них является возможность создания конвейерного сумматора-умножителя, предназначенного для цифровой обработки сигналов, например, вычисления преобразований Фурье.

3. Эволюция систем счления

«Золотая» теория чисел касается новых систем счисления, которые возникли во второй половине 20-го века и успешно развиваются в 21-м веке [1-9]. Ясно, что в в своих истоках «золотая» теория чисел восходит к периоду *зарождения математики*, когда и были созданы первые системы счисления (Вавилонская 60-ричная система, Египетская десятичная (непозиционная) система и др.). Высшим достижением в области систем счисления считается *десятичная* и *двоичная* системы счисления.

Каждый человек на земном шаре, окончивший хотя бы четыре класса начальной или «церковно-приходской» школы, знает, по меньшей мере, две полезные вещи: он умеет писать и читать и использовать *десятичную систему счисления* для выполнения простейших арифметических операций. И эта система кажется нам настолько простой и элементарной, что многие из нас с большим недоверием отнесутся к утверждению, что десятичная система является одним из *крупнейших математических открытий за всю историю математики.* И чтобы убедить читателя в этом, обратимся к мнению «авторитетов».

Пьер Симон Лаплас (1749-1827), французский математик, член Парижской академии наук, почетный иностранный член Петербургской академии наук:

«*Мысль выражать все числа 9 знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой*».

М.В. Остроградский (1801-1862), русский математик, член Петербургской академии наук и многих иностранных академий:

«*Нам кажется, что после изобретения письменности самым большим открытием было использование так называемой десятичной системы счисления. Мы хотим сказать, что соглашение, с помощью которого мы можем выразить все полезные числа двенадцатью словами и их окончаниями, является одним из самых замечательных созданий человеческого гения …*»

Жюль Таннери (1848-1910), французский математик, член Парижской академии наук:

«*Что касается до нынешней системы письменной нумерации, в которой употребляется девять значащих цифр и ноль, и относительное значение цифр определяется особым правилом, то эта система была введена в Индии в эпоху, которая не определена точно, но, по-видимому, после христианской эры. Изобретение этой системы есть одно из самых важных событий в истории науки, и несмотря на привычку пользоваться десятичной нумерацией, мы не можем не изумляться чудной простоте ее механизма*».

Как упоминалось, создание первых систем счисления относится к *периоду зарождения математики*, когда потребности счета предметов, измерения времени, земельных участков и количества продуктов привели к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Как подчеркивает А.Н. Колмогоров в статье «Математика» (БСЭ, том. 15), «*только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приемы выполнения над натуральными числами четырех арифметических действий*».

Именно в этот период было сделано одно из крупнейших математических открытий в области арифметики. Вавилонские математики открыли *позиционный принцип представления чисел,* воплощенный ими в *Вавилонской 60-ричной системе счисления.* Все последующие системы счисления основаны на этом принципе.

К сожалению, историки компьютерной науки, владея развитой компьютерной теорией, иногда забывают о той роли, которую сыграли системы счисления в истории компьютеров. Ведь первые проекты счетных приборов (абаков и арифмометров), прообразов современных компьютеров, появились задолго до возникновения алгебры логики, теории алгоритмов – и главную роль при создании таких счетных приборов сыграли именно системы счисления и правила выполнения в них простейших арифметических операций. Об этом не следует забывать, прогнозируя дальнейшее развитие компьютерной техники.

Хотя никто и не отрицает выдающуюся роль систем счисления в развитии материальной культуры, образования и информатики, но, к большому сожалению, в математике, в частности, в теории чисел, системы счисления играют роль «изгоев», которым не уделялось должного внимания в математической науке.

Почему же в теории чисел и теоретической арифметике не уделялось системам счисления того внимания, которое они несомненно заслуживали. Все дело – в «традиции». В греческой математике, достигшей высокого уровня развития, впервые произошло сохранившееся до наших дней разделение математики на «высшую» математику, к которой относилась геометрия и теория чисел, и «логистику» - прикладную науку о технике арифметических вычислений («школьная» арифметика), геометрических измерениях и построениях. Уже со времени Платона «логистика» третировалась как низшая, прикладная дисциплина, не входящая в круг образования философа и ученого.

Восходящее к Платону пренебрежительное отношение к «школьной» арифметике и ее проблемам, а также отсутствие какой-либо достаточно серьезной потребности в создании новых систем счисления в практике вычислений, которая в течение последних столетий всецело удовлетворялась десятичной системой, а в последние десятилетия – двоичной системой (в информатике), и может служить объяснением того факта, что в теории чисел не уделялось должного внимания системам счисления, и в этой части она не намного ушла вперед по сравнению с периодом своего зарождения

Интерес к системам счисления сохранился только в истории математики. Хотя историки математики и утверждают, что именно «проблема счета» была одним из главных стимулов развития математики на этапе ее зарождения, однако после изобретения десятичной системы «проблема счета» математики решили, что «проблема счета» была решена «полностью и окончательно» и никаких серьезных исследований в этом направлении (кроме обсуждения проблем методики преподавания десятичной системы в средней школе) в математической науке не проводилось.

4. Исторические и практические предпосылки создания «золотой» теории чисел

Ситуация резко изменилась во второй половине 20-го века после появления современных компьютеров. Именно в этой области опять проявился огромный интерес к способам представления чисел и новым компьютерным арифметикам. Кроме использования двоичной системы счисления (неймановские принципы), уже на начальном этапе «компьютерной эры» были предприняты попытки использования в компьютерах и других, отличных от двоичной, систем счисления (в этом отношении наиболее ярким примером является первый в истории компьютеров троичный компьютер «Сетунь», основанный на троичной системе счисления и спроектированный в Московском университете под руководством **Николая Петровича Брусенцова**). Во второй половине 20-го века появились системы счисления с «экзотическими» названиями и свойствами: система остаточных классов, с комплексным основанием, нега-позиционная, факториальная, биномиальная системы счисления и т.д. Все они имели те или иные преимущества по сравнению с двоичной системой и были направлены на улучшение тех или иных технических характеристик компьютеров; некоторые из них стали основой для создания новых компьютерных проектов (троичный компьютер «Сетунь», компьютер на основе на системе остаточных классов и т.д.).

Но есть и другой интересный аспект этой проблемы. Спустя 4 тысячелетия после изобретения вавилонянами позиционного принципа в области систем счисления возник период своеобразного «ренессанса». Благодаря усилиям, прежде всего, специалистов в области компьютеров, математика как бы вновь возвратилась к периоду своего зарождения, когда именно системы счисления в значительной степени определяли содержание и сущность математики. Но ведь этот период, по мнению многих историков математики, считается чрезвычайно важным для развития математики. Именно в этот период были заложены основы такого важнейшего математического понятия как *натуральное число* и истоки самой *теории чисел,* которая по праву называется «царицей математики». Но тогда вполне резонным является постановка следующего вопроса: а не могут ли современные системы счисления, созданные для удовлетворения потребностей компьютерной техники, повлиять на развитие самого понятия числа и теории чисел и таким путем оказать влияние не только на развитие компьютерной науки, но и всей математической науки?

Есть все основания полагать, что именно системы счисления с иррациональными основаниями [3], коды золотой пропорции [4-9] могут стать теоретической основой «золотой» теории чисел. Таким образом, практической предпосылкой для создания «золотой» теории чисел явились потребности информатики в создании новых способов представления чисел и новых компьютерных арифметик. Именно «золотая» теория чисел, возникшая для удовлетворения этой практической потребности, в наибольшей степени отвечает на поставленный выше вопрос.

«Золотая» теория чисел как бы возвращает математику к периоду ее зарождения. Основным предметом исследования в «золотой» теории чисел являются системы счисления, основанные на «золотом сечении». Эти системы счисления, обладающие избыточностью и многими экзотическими свойствами, могут стать началом «золотой» информационной технологии, новых компьютеров и новых микропроцессоров [9,10].

5. Основные достижения «золотой» теории чисел

«Золотая» теория чисел является новой математической теорией, которая возникла совсем недавно - во второй половине 20-го века. И несмотря на «молодость» теории, в ней уже получено ряд математических результатов, которые можно отнести к разряду фундаментальных для математики:

5.1. Система счисления Бергмана.

«Золотая» теория чисел начинается с системы счисления с иррациональным основанием, предложенным в 1957 г. американским математиком Джорджем Бергманом [3]. Математическое выражение для системы счисления Бергмана имеет следующий вид:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i \qquad (3)$$

где A – некоторое действительное число и a_i – двоичные цифры, 0 или 1 (i = 0, ±1, ±2, ±3, …), Φ^i – вес i-й цифры в системе счисления (3), $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - основание системы счисления (3).

Возникает вопрос: как оценить открытие юного (12-летнего) американского вундеркинда Джорджа Бергмана, который в 1957 г. описал весьма необычную систему счисления, названную им *системой счисления с иррациональным основанием* [3]? Отвечая на этот вопрос, мы должны сделать еще одно смелое заявление: **система Бергмана является крупнейшим современным открытием в области систем счисления, сравнимым разве что с открытием позиционного принципа представления чисел, а также десятичной и двоичной системами счисления. Она переворачивает наши представления о системах счисления; более того - соотношение между рациональными и иррациональными числами. В этой системе на первый план выдвигается иррациональное число «золотая пропорция», которое становится основанием всех чисел, так как с его помощью может быть представлено любое действительное число!**

Хотя система Бергмана представляла собой результат принципиальной важности не только для систем счисления, но и для теории чисел, но в тот период (50-е годы прошлого столетия) она просто не была замечена ни математиками, ни инженерами. И свое математическое открытие сам Бергман оценил весьма скромно [3]: *"Я не знаю никакого полезного приложения для систем счисления, подобных этой, как для умственного упражнения и приятного времяпровождения, хотя эта система счисления может быть полезной для алгебраической теории чисел"*.

Однако развитие компьютерной и измерительной техники опровергло пессимистическое мнение Бергмана относительно практического приложения его системы счисления. В отличие от классической двоичной системы система Бергмана обладает "естественной" избыточностью, которая может быть эффективно использована для контроля компьютеров. В 70-е и 80-е годы 20-го столетия в бывшем Советском Союзе под руководством автора настоящей статьи были выполнены научные и инженерные разработки, основанные на системе счисления Бергмана. Эти разработки, с одной стороны, показали исключительную эффективность системы счисления Бергмана для проектирования самокорректирующихся аналого-цифровых преобразователей и помехоустойчивых процессоров, а с другой стороны, привели к новому геометрическому определению действительного числа [4], которое лежит в основе «золотой» теории чисел.

5.2. Коды Фибоначчи

Следующим математическим результатом, который может быть отнесен к «золотой» теории чисел, являются p-коды Фибоначчи и вытекающая из них арифметика Фибоначчи. К этим идеям автор пришел в 1974 г. [11]. Под p-кодами Фибоначчи понимаются следующие способы двоичного позиционного представления натуральных чисел:

$$N = a_n F_p(n) + a_{n-1} F_p(n-1) + \ldots + a_i F_p(i) + \ldots + a_1 F_p(1), \qquad (4)$$

где $a_i \in \{0,1\}$ - двоичная цифра, $F_p(i)$ - вес *i*-го разряда, который при заданном целом $p = 0,1,2,3,...$ связан с весами предыдущих разрядов следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(i) = F_p(i-1) + F_p(i-p-1); \quad F_p(1) = F_p(2) = F_p(p+1) = 1 \tag{5}$$

Заметим, что при *p*=0 *p-код Фибоначчи* (4) сводится к классическому двоичному коду. При *p*=1 рекуррентное соотношение (5) превращается в рекуррентное соотношение для *чисел Фибоначчи*:

$$F(i) = F(i-1) + F(i-1); \quad F(1) = F(2) = 1, \tag{6}$$

а сам *p-код Фибоначчи* (4) сводится к классическому *коду Фибоначчи,* называемому также *представлением Цекендорфа*:

$$N = a_n F(n) + a_{n-1} F(n-1) + ... + a_i F(i) + ... + a_1 F(1), \tag{7}$$

в котором весами разрядов являются числа Фибоначчи: 1,1,2,3,5,8,13, 21, ...

5.3. Коды золотой пропорции.

Под *кодами золотой p-пропорции* понимаются следующие способы двоичного позиционного представления действительных чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i, \tag{8}$$

где $a_i \in \{0,1\}$ - двоичная цифра *i*-го разряда, Φ_p^i - вес *i*-го разряда, связанный с весами предыдущих разрядов соотношением:

$$\Phi_p^i = \Phi_p^{i-1} + \Phi_p^{i-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{i-1}; \quad i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ... \tag{9}$$

Φ_p - основание системы счисления (8), которое при заданном целом $p = 0,1,2,3,...$ является положительным корнем следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0 \tag{10}$$

Корень Φ_p является иррациональным числом для всех $p > 0$ и был назван *золотой p-пропорцией* на том основании, что при *p*=1 он совпадает с классической золотой пропорцией $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; при этом код (8) сводится к *системе Бергмана* (3).

Выражение (8) задает бесконечное количество двоичных (по числу используемых цифр 0 и 1) позиционных систем счисления с иррациональными основаниями Φ_p; единственным исключением из них является случай *p*=0, для которого система счисления (8) сводится к классической двоичной системе, которая лежит в основе современных информационных технологий.

5.4. Новые свойства натуральных чисел (Z-свойство, F- и L-коды)

Впервые концепция «золотой» теории чисел была изложена в статье автора [4], опубликованной в «Украинском математическом журнале» согласно рекомендации академика **Ю.А. Митропольского**. В этой статье были доказаны необычные свойства натуральных чисел, которые возникают при их представлении в системе Бергмана.

Первое из них – это Z-свойство натуральных чисел. Оказывается, если представить натуральное число N в виде суммы

$$N = \sum_i a_i \Phi^i, \tag{10}$$

а затем в этой сумме все степени золотой пропорции Φ^i заменить на соответствующее число Фибоначчи F_i, то возникающая при этом сумма всегда тождественно равна 0 независимо от исходного натурального числа N, то есть,

$$\sum_i a_i F_i = 0. \tag{11}$$

Важно подчеркнуть, что это свойство справедливо только для натуральных чисел, то есть, оно является теоретико-числовым свойством натуральных чисел.

Это означает, что спустя 2,5 тысячелетия после начала изучения натуральных чисел нам удалось открыть новое свойство натуральных чисел (*Z-свойство*) И это стало возможным только благодаря введению системы Бергмана!

Еще два новых математических результата – это новые способы двоичного позиционного представления натуральных чисел, названных F- и *L-кодами* [8].

5.5. Троичная зеркально-симметричная арифметика

Троичное позиционное представление целых чисел, описанное в работе [1], привело к созданию весьма необычной троичной зеркально-симметричной арифметики, которая может быть положена в основу новых компьютеров и процессоров.

6. Прикладные аспекты «золотой» теории чисел

«Золотая» теория чисел уже в настоящее время нашла много практических приложений. Основные из них следующие:

6.1. Патентование изобретений по теме «Компьютеры Фибоначчи»

Уникальность этого научного направления состоит в том, что уже на раннем этапе его развития (70-е годы 20 в.) все основные изобретения в области «компьютеров Фибоначчи» удалось запатентовать за рубежом (США, Япония, Англия, Франция, ФРГ, Канада и др. страны). Свыше 60 зарубежных патентов являются официальными юридическими документами, которые подтверждают приоритет советской науки (и приоритет автора этого проекта) в области «компьютеров Фибоначчи». Патентование началось в 1976 г. в Таганрогском радиотехническом институте (Россия) и продолжилось затем в Винницком политехническом институте (Украина).

6.2. Включение «золотых» АЦП и ЦАП в Государственный план социального и экономического развития СССР на 1986-1990 годы

В Винницком политехническом институте в 80-е годы 20-го столетия были разработаны уникальные по своим техническим параметрам «золотые» аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи, которые превышали зарубежный уровень по техническим характеристикам. По инициативе Госкомизобретений СССР эта разработка была включена в Государственный план социального и экономического развития СССР на 1986-1990 годы

6.3. Работы по «компьютерам Фибоначчи» в США

Анализ западных публикаций по «компьютерам Фибоначчи» показал, что в США, начиная с середины 70-х годов, интенсивно проводились работы по «компьютерам Фибоначчи». Наиболее информативной в этом отношении является статья “Minimal and maximal Fibonacci Representations: Boolean Generation” опубликованная американскими учеными P. Monteiro and R.W. Newcomb (University of Maryland) в журнале “The Fibonacci Quarterly” (1976, V.14, No 1). В статье описывается устройство для приведения кода Фибоначчи к минимальной форме, которое было предметом моих заявок на изобретения, и которое затем было признано пионерным изобретением во всех странах патентования. Весьма интересными являются комментарии к статье. Оказалось, что выполненные исследования были поддержаны отделом научных исследований ВВС США в соответствии с Грантом AFOSR 70-1910, откуда вытекает, что эта разработка проводилась в военных целях.

Следующей характерной публикацией является статья “Multilevel Fibonacci Conversion and Addition”, опубликованная американскими учеными P. Licomendes and R. Newcomb (University of Maryland) в том же журнале “The Fibonacci Quarterly” (1984, V.22, No 3). В статье описывается способ преобразования двоичного представления Фибоначчи в троичное представление Фибоначчи. В статье имеется ряд ссылок на следующие публикации:

(1) P. Ligomenides & R. Newcomb, “Equivalence of some Binary, Ternary, and Quaternary Fibonacci Computers”. Proceeding of the Eleventh International Symposium on Muliple-Valued Logik, Norman, Oklahoma, May 1981, pp. 82-84.
(2) P. Ligomenides & R. Newcomb. “Complement Representations in the Fibonacci Computer”, Proceedings of the Fifth Symposium ob Computer Arithmetic, Ann Arbor, Michigan, May 1981, pp. 6-9.
(3) R. Newcomb. “Fibonacci Numbers as a Computer Base”. “Conference Proceedings of the Second Interamerican Conference on Systems and Informatics”, Mexico City, November 27, 1974.
(4) V.D. Hoang. “A Class of Arithmetic Burst-Error-Correcting Codes for the Fibonacci Computer”. PhD Dissertation, University Maryland, December 1979.

Из этого далеко не полного перечня публикаций американских ученых можно сделать вывод, что понятие «Компьютер Фибоначчи» прочно вошло в американскую компьютерную литературу и что работы по «Компьютерам Фибоначчи» проводились в США (Университет штата Мериленд) примерно в тот же период, что и работы по «фибоначчиевому» направлению, выполнявшиеся под моим научным руководством сначала в Таганрогском радиотехническом институте (1971-1977 гг.), где началось зарубежное патентование изобретений по «Компьютеру Фибоначчи», а затем в Винницком политехническом институте (1977 - 1996 гг.). Диссертация V.D. Hong “A Class of Arithmetic Burst-Error-Correcting Codes for the Fibonacci Computer”, защищенная в 1979 г. в Университете Мериленд, свидетельствует о том, что цели этих исследований, проводившихся в Винницком политехническом институте и Университете Мериленд (США), были одинаковы – создание самоконтролирующихся и самокорректирующихся компьютеров Фибоначчи.

Из последних приложений кодов Фибоначчи следует упомянуть такую важную область информатики как «цифровая обработка сигналов». В российской науке идеи использования чисел Фибоначчи для создания сверхбыстрых алгоритмов цифровой обработки активно развивает доктор физико-математических наук профессор Чернов Владимир Михайлович (Самара, Институт обработки изображений РАН). Подобные же исследования проводятся в Финляндии (Tampere International Center for Signal Processing). Исследования в области «фибоначчиевых» сигнальных преобразований изложены в книге «Fibonacci Decision Diagram»(2000 г.) авторов R.S. Stankovic, M. Stankovic, J.T. Astola, K. Egizarian. В книге широко используются так называемые обобщенные числа Фибоначчи (*p-числа Фибоначчи*), введенные мною еще в моей кандидатской диссертации (1966 г.). Сверхбыстрые «фибоначчиевые» преобразования могут быть реализованы только над числовыми данными, представленными в *p*-кодах Фибоначчи. Это означает, что для реализации таких преобразований требуется создание специализированных процессоров Фибоначчи!

И, наконец, последняя весьма интригующая информация. В журнале "Электронные компоненты и системы" № 11, ноябрь 2001 г. на стр. 25 приведена краткая информация об оценочной (демонстрационной) плате с сигнальным процессором семейства ADSP-2189M фирмы Analog Devices. В частности, указывается следующее: *"Демонстрационные программы, поставляемые в составе этого комплекта, включают алгоритмы обработки сигналов, такие как свертка и вычисления в кодах Фибоначчи"*.

7. Перспективы развития «золотой» теории чисел и ее приложения

7.1. Микропроцессоры Фибоначчи

По мнению выдающегося российского ученого академика Я.А. Хетагурова, применение микропроцессоров иностранного производства в российских разработках таит в себе большие проблемы для национальной безопасности России. Это своего рода «троянский конь», роль которого только начинает проявляться. Причина состоит в отсутствии в таких микропроцессорах контроля преобразований информации. Современные микропроцессоры ненадежны с информационной точки зрения.

В статье [10], написанной в развитие этой идеи, излагаются теоретические основы «микропроцессоров Фибоначчи» как нового направления в повышении информационной надежности микропроцессоров. «Троянским конем» двоичной системы, используемой в микропроцессорах, является ее **НУЛЕВАЯ ИЗБЫТОЧНОСТЬ,** что не позволяет осуществлять контроль преобразований информации в микропроцессоре. Настало время заменить «двоичное отношение» и двоичную систему, используемую в микропроцессорах, на «золотое отношение», фибоначчиеву и «золотую» систему счисления. Микропроцессоры Фибоначчи открывают новую эру в развитии высоконадежных микропроцессоров и, в перспективе, нанопроцессоров! Они являются одной из базисных инноваций будущего технологического уклада, которые могут изменить уровень экономической и информационной безопасности систем.

7.2. Фибоначчиевое кодирование сложных математических объектов

Позиционное кодирование точек n-мерного пространства

Традиционно в течение нескольких тысячелетий, начиная с вавилонян и древних египтян, мы использовали системы счисления для представления чисел. Однако во второй половине 20-го века начались появляться работы, посвященные позиционному представлению сложных математических объектов. Впервые идея позиционного кодирования сложных математических объектов была выдвинута российским ученым С.И. Хмельником [12-15], который обосновал идею позиционного кодирования «сложных математических объектов», таких, как «векторы», «матрицы», «функции», «геометрические фигуры» и т.д. Идеи Хмельника получили неожиданное развитие в работах украинского ученого В.А. Лужецкого, который в работе [16] предложил методы фибоначчиевого кодирования таких математических объектов. Мне приятно сознавать, что Владимир Лужеций – выходец из моей научной школы, один из лучших моих учеников, который в 1980 г. защитил в Винницком политехническом институте кандидатскую диссертацию под моим научным руководством, а позже и докторскую диссертацию по тематике «компьютеры Фибоначчи».

В работе [16] рассматриваются следующие способы позиционного кодирования некоторого сложного математического объекта:

$$A = a_n w_n + a_{n-1} w_{n-1} + \ldots + a_1 w_1 + a_0 w_0 + a_{-1} w_{-1} + \ldots + a_{-m} w_{-m} \qquad (12)$$

где A – кодируемый математический объект; a_k – троичная цифра k-го разряда позиционного представления (12), принимающая значения из множества $\{\bar{1},0,1\}$; w_k – вес k-го разряда ($k = n, n-1, \ldots, 1, 0, -1, -2, \ldots, -m$).

В качестве весов разрядов в (12) предлагается использовать некоторые «узловые» математические объекты, связанные между собой рекуррентным соотношением (5), задающим p-числа Фибоначчи.

Напомним, что рекуррентная формула (5) является рекуррентным соотношением (p+1)-го порядка и задает бесконечное количество рекуррентных формул (каждому p соответствует своя рекуррентная формула). Выбор типа рекуррентного соотношения (5), используемого в позиционном представлении (12), зависит от размерности кодируемого математического объекта A.

Продемонстрируем идею позиционного кодирования точек n-мерного пространства на примере кодирования комплексных чисел. Комплексные числа $A = x + yi$ являются точками 2-мерного пространства. Тогда в этом случае для вычисления весов разрядов в (12) будем использовать рекуррентную формулу (5) 2-го порядка, то есть,

$$F_1(n) = F_1(n\text{-}1) + F_1(n\text{-}2). \tag{13}$$

Рассмотрим теперь позиционное представление комплексного числа A в виде (12) и используем рекуррентную формулу (13) для вычисления весов разрядов, то есть

$$w_k = w_{k-1} + w_{k-2}. \tag{14}$$

Заметим также, что комплексное число имеет две «естественные» единицы, а именно, «реальную единицу» 1 и «воображаемую единицу» $i = \sqrt{-1}$. Именно эти «естественные» единицы мы выберем в качестве первых членов рекуррентной последовательности (14), то есть,

$$w_0 = 1, \quad w_1 = i. \tag{15}$$

Тогда, используя (14) и (15), мы можем вычислить веса w_k . Начальные значения весов w_k приведены в Табл. 2.

Таблица 2

l	0	1	2	3	4	5	6
w_k	1	i	1 + i	1 + 2i	2 + 3i	3 + 5i	5 + 8i
w_{-k}	1	-1 + i	2 - i	-3 + 2i	5 - 3i	-8 + 5i	13 - 8i

А теперь распространим этот подход для позиционного кодирования точек 3-мерного пространства, то есть,

$$A = xi + yj + zk, \tag{16}$$

где i, j, k – «естественные» единицы математического объекта A.

Для вычисления весов разрядов для этого случая будем использовать рекуррентное соотношение (5) 3-го порядка, то есть,

$$F_2(n) = F_2(n\text{-}1) + F_2(n\text{-}3).$$

И тогда для вычисления весов разрядов w_k для этого случая мы будем использовать рекуррентное соотношение:

$$w_k = w_{k-1} + w_{k-3}. \tag{17}$$

Выберем теперь «естественные» единицы i, j, k математического объекта (16) в качестве первых трех начальных членов числовой последовательности (17), то есть,

$$w_0 = i;\ w_1 = j;\ w_2 = k. \tag{18}$$

Табл. 2 задает значения первых членов последовательности «весов», вычисленных в соответствии с рекуррентной формулой (17) при начальных условиях (18).

Таблица 3

l	0	1	2	3	4	5	6
w_k	i	j	k	$i + k$	$i + j + k$	$i + j + 2k$	$2i+j+3k$
w_{-k}	i	$-j + k$	$-i + j$	$i + j - k$	$i - 2j + k$	$-2i + k$	$3j - 2k$

Для позиционного кодирования *квартернионов*

$$A = a + bi + cj + dk$$

мы будем использовать рекуррентное соотношение для 3-чисел Фибоначчи:

$$F_3(n) = F_3(n\text{-}1) + F_3(n\text{-}4) \qquad (19)$$

Для позиционного кодирования *октав*

$$O = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k + b_1e + b_2ie + b_3je + b_4ke$$

мы будем использовать рекуррентное соотношение для 7-чисел Фибоначчи:

$$F_7(n) = F_7(n\text{-}1) + F_7(n\text{-}8).$$

Веса разрядов w_k для представления квартернионов и октав в виде (12) вычисляются в соответствии со следующими рекуррентными формулами:

(а) Для квартернионов:

$$w_k = w_{k\text{-}1} + w_{k\text{-}4};$$
$$w_0 = 1,\ w_1 = i;\ w_2 = j;\ w_3 = k.$$

(б) Для октав:

$$w_k = w_{k\text{-}1} + w_{k\text{-}8};$$
$$w_0 = 1,\ w_1 = i;\ w_2 = j;\ w_3 = k,\ w_4 = e,\ w_5 = ie,\ w_6 = je,\ w_7 = ke.$$

Позиционное кодирование квадратных матриц

Обычно матрицы произвольной размерности могут быть представлены как совокупность 2×2-матриц следующего вида:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

где d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} – квадратные матрицы меньшей размерности.

Будем вычислять веса разрядов w_k для позиционного кодирования матриц в виде (12) по следующей рекуррентной формуле:

$$w_k = w_{k-1} + w_{k-4}, \qquad (20)$$

где начальные члены матричной последовательности (20) представляют собой следующие 2×2-матрицы:

$$w_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

Позиционное кодирование функций

Используя методы приближенных вычислений, некоторую функцию $g(x)$ можно представить в виде следующего алгебраического полинома, заданного на отрезке $[a, b]$:

$$g(x) = a_3x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \qquad (21)$$

Для позиционного кодирования полинома (21) в виде (12) будем использовать рекуррентное соотношение для 3-чисел Фибоначчи для вычисления весов разрядов:

$$w_k = w_{k-1} + w_{k-4}, \qquad (22)$$

причем в качестве начальных членов последовательности (22) будем использовать следующие полиномы

$$w_0 = 1, w_1 = x, w_2 = x^2, w_3 = x^3$$

которые играют роль «естественны» единиц полинома (21).

Таким образом, основной итог проведенного в [16] исследования состоит в распространении «фибоначчиевого» подхода для позиционного кодирования сложных математических объектов, в частности, таких, как точки n-мерного пространства (комплексные числа, квартернионы, октавы), матрицы, функции и т.д.

Теория Лужецкого находится в начальной стадии развития, но сама идея очень привлекательна и может привести к созданию принципиально новых компьютеров, осуществляющих обработку сложных математических объектов подобно тому, как современные компьютеры обрабатывают числа.

8. Заключение

Академик Колмогоров выделяет следующие периоды в развитии математики [17]:

1. **Период зарождения математики** (догреческий период)
2. **Период элементарной математики** (от 6-5 в. до н.э. до 17-го столетия). Запас понятий, с которыми имела дело математика до начала 17 в., составляет и до настоящего времени основу «элементарной математики», изучаемой в начальной и средней школе.
3. **Период математики переменных величин** (17-й век – начало 19-го века). В 17 в. новые запросы естествознания и техники заставляют математиков, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразования геометрических фигур. Ответом математики на эти запросы стало создание аналитической геометрии Декарта, а также дифференциального и интегрального исчисления.
4. **Период современной математики.** Этот период начинается с создания русским математиком Николаем Лобачевским так называемой «неевклидовой геометрии».

Период зарождения математики связан с двумя цивилизациями: Вавилон и Древний Египет. В этот период развитие математики стимулируется двумя практическими потребностями: ***счет и измерение.*** «Проблема измерения» привела к возникновению *геометрии* и *тригонометрии*. «Проблема счета» привела к возникновению в Вавилоне и Древнем Египте «практической арифметики», которая включала в себя разработку способов представления чисел и выполнения над ними простейших арифметических операций. Именно в этот период вавилонские математики изобрели *позиционный принцип представления чисел,* который был воплощен в *Вавилонской 60-ричной системе счисления,* а древние египтяне изобрели *десятичную (непозиционную) систему счисления.* Для выполнения арифметических операций в этой системе они изобрели *принцип удвоения,* с использованием которого они выполняли операции *умножения* и *деления.* Методы умножения и деления, изобретенные древними египтянами, по существу совпадают с методами умножения и деления, используемыми в современных компьютерах.

Таким образом, если объективно подходить к истории математики, то «элементарная теория чисел» должна начинаться с систем счисления и «практической арифметики», созданной в Вавилоне и Древнем Египте. К сожалению, этого не произошло. Начиная с древних греков, проблемы систем счисления и «практической арифметики», отошли на задний план. «Элементарная теория чисел» начала развиваться по пути, намеченному древними греками. Системы счисления развивались обособленно от генерального пути развития математики. Изобретение новых систем счисления (десятичной, двоичной, системы майя и др.) стало предметом творческой деятельности целых народов. К сожалению, в последующие периоды развития математической науки «системы счисления» стали своеобразными «изгоями» в математике и им не уделялось того внимания, которого они несомненно заслуживали. Именно поэтому можно утверждать, что в части развития «теории систем счисления» современная математика не намного ушла вперед по сравнению с периодом своего зарождения.

Во второй половине 20-го века интерес к системам счисления значительно возрос в связи с развитием компьютерной техники. Пионерское открытие *системы счисления с иррациональным основанием («золотой пропорции»),* сделанное в 1957 г. юным американским вундеркиндом Джорджем Бергманом [3], и их обобщение («коды золотой пропорции» [5,6]) переворачивают наши представления о системах счисления; более того - соотношение между рациональными и иррациональными числами. В этих системах на первый план выдвигается иррациональные числа - *«золотая пропорция»* и *«золотые р-пропорции»* (р=0,1,2,3, ...), которые становятся основанием всех чисел, так как с их помощью может быть представлено любое действительное число! А это означает, что системы счисления с иррациональными основаниями затрагивают основания всей математики и именно поэтому могут быть отнесены к разряду фундаментальных открытий современной математики!

Именно эти системы счисления (система Бергмана и коды золотой пропорции) является основой «золотой» теории чисел, изложенной в работах [1-9]. «Золотая» теория чисел как бы возвращает математику к периоду ее зарождения (системы счисления) и древнегреческой математике («золотое сечение»). Основным предметом исследований в этой теории являются новые, неизвестные ранее системы счисления, основанные на «золотом сечении» и его обобщении – «золотом *р*-сечении». Эти системы счисления, обладающие избыточностью и многими экзотическими свойствами, могут стать полезными при создании новых компьютеров и новых микропроцессоров [10].

Литература

1. Stakhov AP. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal, 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.

2. Стахов А.П. Троичный принцип Брусенцова, система счисления Бергмана и «золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12355, 15.08.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320001.htm
3. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119
4. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
5. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
6. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
7. А.П. Стахов, Системы счисления с иррациональными основаниями и новые свойства натуральных чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16778, 24.08.2011
8. А.П. Стахов, К обоснованию «золотой» теории чисел: *F*- и *L*-коды натуральных чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16792, 29.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321221.htm
9. Alexey Stakhov. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”. World Scientific, 2009
10. А.П. Стахов, Микропроцессоры Фибоначчи - как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm
11. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
12. Хмельник С.И. Специализированные ЦВМ для операций с комплесными числами. Вопросы радиоэлектроники, 1964, серия XII, вып.2 - с. 29-34
13. Хмельник С.И. Позиционное кодирование комплексных чисел. Вопросы радиоэлектроники, 1966, серия XII, вып.9 - с. 18-24
14. Хмельник С.И. Кодирование функций. Кибернетика, 1966, №4 – с.32-37
15. Хмельник С.И. Несколько типов позиционных кодов функций. Кибернетика, 1970, №5 – с.34-39
16. Лужецький В.А. Високонадійні математичні Фібоначчі-процесори. Вінниця: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 2000. – 248 с.
17. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. Москва: Наука, 1991.