

Теория ЛМФ и принцип золотого сечения

	стр.
Введение	2–5
Часть I. Теория ЛМФ	
Глава 1. Логика и формальная математика	5–15
Глава 2. Физическая математика	16–32
Глава 3. Основания физической теории	33–62
Глава 4. Границы физического мира. Обобщённые физические законы	63–78
Часть II. Принцип золотого сечения	
Глава 5. Принцип золотого сечения и числа Фибоначчи	79–121
Глава 6. Принцип золотого сечения в природе и искусстве	122–164
Глава 7. “Золотая” смесь	165–228
Глава 8. Обобщённая теория золотого сечения	229–270
Заключение. Теория ЛМФ и ОТЗС: основные положения, формулы, графики	271–282

*Краеугольным камнем мировой гармонии, без веры в которую естественнонаучное мышление лишилось бы большей части своей привлекательности, является математика. Известно, что путь от общих положений до конкретной их реализации часто долог, извилист и неоднозначен. Потому-то так труден вопрос, каким всё же образом математическая первооснова приобретает характер селективного формообразующего принципа для живой и неживой природы. **Принцип золотого сечения** предоставляет, быть может, наилучшую возможность для анализа подобных проблем. В силу его совершенно особого статуса, а главным образом из-за соотнесённости с фундаментальными математическими константами (ФМК), с положениями теории ЛМФ, вкратце представленной во Введении и Части I настоящей работы, подробное обсуждение этого принципа и всего, что с ним связано, представляется существенным и важным.*

*Фундаментальная физическая теория – мечта многих поколений исследователей. ЛМФ – попытка осуществить эту мечту в виде логически строгой, математически завершённой системы, соответствующей имеющимся экспериментальным данным и допускающей (частично уже подтвердившиеся) прогнозы и эмпирическую верификацию. Это базисная теория физического мира, реализующая идею единства математической логики (Л), числовой математики (М) и фундаментальной физики (Ф). Её корневая структура начинается с логических атомов и завершается обобщёнными физическими законами сохранения, изменения и квантования. В рамках теории ЛМФ получен удивительный результат для постоянной Ферми. Решается ряд важнейших задач, в частности определение численного значения постоянной тонкой структуры, времени жизни мюона и других физических констант, выявление границ физического мира с использованием нового космического параметра – безразмерной константы порядка 10^{125} , получение массовой формулы для частиц определённого типа, **обобщение принципа золотого сечения.***

*Теория ЛМФ по идее не только снабжает необходимым инструментарием для теоретического определения любой известной физической постоянной и не только приписывает с ограниченной или неограниченной точностью истинное числовое значение каждой величине. В свете теории ЛМФ некоторые изученные казалось бы вдоль и поперек математические величины предстают в новом качестве, приобретают дополнительные, ранее не известные характеристики. В этом назначение Части II настоящей работы, где изложение исторических фактов и подробное рассмотрение формальных свойств числа ϕ носит иллюстративный характер и подчинено решению основной задачи: выявлению связей между ϕ и исходными ФМК, анализу принципа золотого сечения с точки зрения общих принципов и идей, изложенных в Части I. По сути ставится задача построения **нетрадиционной математической теории золотой пропорции.** Это построение должно быть ответвлением теории ЛМФ и призвано не только подтвердить её возможность, но и осветить некоторые ключевые вопросы, которые в обычной трактовке золотого сечения кажутся загадочными.*

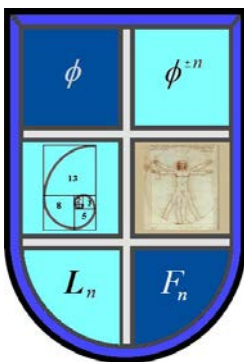


Разнонаправленные золотые спирали с зашифрованными в цветовой симметрии “золотыми” константами и числами Фибоначчи

Глава 6. Принцип золотого сечения в природе и искусстве

- 6.1. Золотое сечение в архитектуре. Парфенон
- 6.2. Пропорции пирамиды Хеопса: три версии
- 6.3. Принцип золотого сечения за пределами арифметики
- 6.4. Человек как носитель гармонии золотой пропорции
- 6.5. Геометрические фигуры
- 6.6. Пентаграмма
- 6.7. Логарифмическая спираль и ФМК
- 6.8. Золотая спираль

Глава 6. Принцип золотого сечения в природе и искусстве



Число золотого сечения является, вероятно, наиболее популярной после константы π математической константой. Путь к пониманию выделенности той или иной константы лежит через анализ её формальных особенностей, потому и были рассмотрены в предыдущей главе важнейшие арифметические характеристики константы ϕ и чисел Фибоначчи, их удивительные особенности. Но истинное математическое совершенство не остаётся невостребованным: оно как правило имеет выходы за пределы той сравнительно узкой области, в которой определяются формальные свойства. И всё же широкая известность золотых чисел обусловлена, похоже, не столько уникальностью формальных свойств, сколько многочисленными, порой не предусмотренными и потому весьма неожиданными, непредсказуемыми появлениями в самых внешне несхожих ситуациях, в различных научных и ненаучных сферах. Обзор более и менее известных примеров поиска и применения принципа золотого сечения в разных областях будет дан в настоящей главе и продолжен в следующей.

Разумеется, универсальность принципа золотого сечения является следствием формальной уникальности числа ϕ и его гомологов. Между тем, согласно предложенной классификации, ϕ – математическая константа второго, а не первого как проточисла и другие фундаментальные математические константы (ФМК), ранга. В чём тогда его завораживающая сила? Есть ли то, что мы называем принципом золотого сечения (пропорции),

регулятивное начало первостепенной космической значимости или же здесь всё-таки играет большую роль эмоциональный фактор, фактор человеческого восприятия? История золотого числа, интересная сама по себе, даёт немало аргументов в пользу и той и другой точек зрения, которые впрочем совместимы. Человек – органическая часть Вселенной, и общие принципы организации природы естественно должны относиться и к нему.

6.1. Золотое сечение в архитектуре. Парфенон

Начнем наш обзор с архитектуры. В главе 5 уже говорилось об одно-, двух- и трёхмерных прямоугольниках золотого сечения, о том, что такие пропорции нередко придаются архитектурным сооружениям. Следует вообще сказать, что чаще всего принцип золотого сечения применялся и применяется именно в архитектуре, где начиная с девятнадцатого века он неоднократно провозглашался основной универсального закона пропорциональности, см. [Гримм; Scofield; Гика; Doczi; Boles]. Заметим также, что прямых свидетельств подобного восторженного отношения к золотой пропорции в древнем Египте, Вавилоне или Греции не обнаружено. Насколько известно, ни в одном из дошедших до нас античных текстов нет ничего такого, что могло бы считаться неким признанием её универсальной значимости. Даже в “Началах” Евклида, где немало говорится о “пропорции”, делается это без явного по крайней мере пиетета. Тем не менее многие исследователи вполне уверены, что принцип золотого сечения так или иначе использовался в античном мире при строительстве таких выдающихся памятников мировой архитектуры как большая пирамида Хеопса и Парфенон. В последнем случае речь, судя по приведённым рисункам – см. например [Obara; Keller], идёт о прямоугольниках золотого сечения и о других связанных с числом ϕ пропорциях включая равнобочную, золотую логарифмическую спираль, подробно обсуждаемую ниже в разделах 6.7 и 6.8.

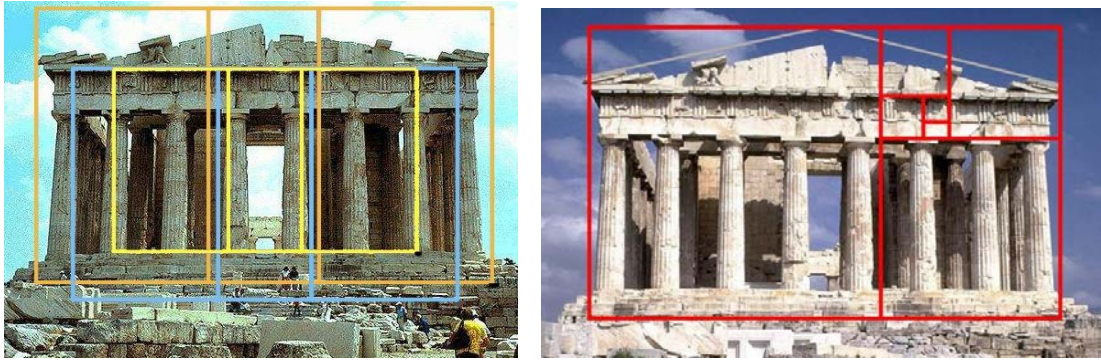


Рис. 6.1.1

Золотые пропорции Парфенона

Восемь квадратов, последовательно вписываемых в уменьшающиеся в пропорции ϕ^{-1} золотые прямоугольники, соответствуют традиционному способу построения равнобочной логарифмической спирали.

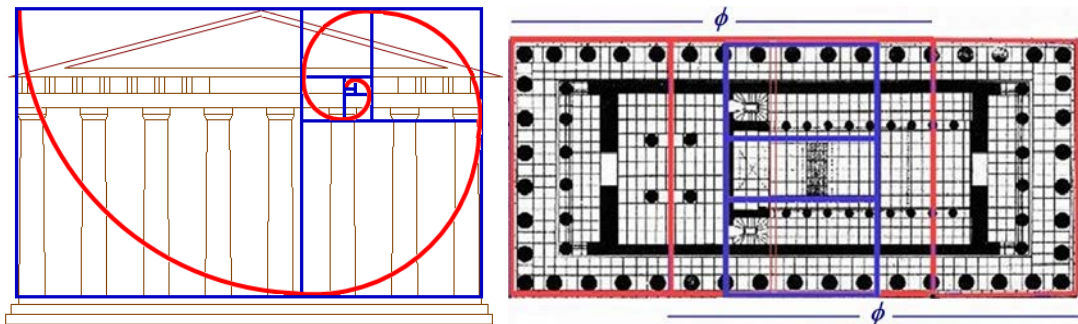


Рис. 6.1.2

Фасад Парфенона и золотая спираль; план Парфенона

Считают, что отношение ширины главного фасада к его высоте в точности равно ϕ и что длина Парфенона относится к его ширине как $2\phi - 1 = \sqrt{5}$; обнаружены и другие золотые пропорции, относящиеся к фасаду храма и его внутренним помещениям. Сейчас по понятным причинам трудно судить, насколько точны эти отношения, лучше сказать – близки к идеальному, поскольку определённая, притом немалая степень приближения к математическому идеалу безусловно наблюдается. Например, отношение, см. [Парфенон], 69,54 м/30,89 м \approx

2,251 длины храма к его ширине лишь на 0,015 больше золотого числа $2\phi - 1 = \sqrt{5} = 2,236\dots$ Если приведённые данные точны, реально это означает, что для практически полного совпадения с математической величиной достаточно отнять от длины этого грандиозного сооружения, прибавив их к ширине, каких-нибудь 14 сантиметров. Аналогично обстоит дело с фасадом сооружения, хотя нельзя всё же не заметить, что он имеет несколько отклоняющуюся от прямоугольной форму (*оптический*, как полагают, *изыск*, учитывающий особенности визуального восприятия), так что считать его прямоугольником золотого сечения можно лишь с натяжкой. В любом случае здесь всё неплохо сходится и мало сомнений в том, что правило золотого сечения так или иначе и вполне сознательно использовалось при проектировании храма Афины архитекторами Иктином и Калликратом.

Золотые пропорции нередко обнаруживаются в выдающихся памятниках средневековья и нового времени, таких как, например, Собор парижской богородицы (ранняя французская готика, 1163–1345) и Тадж-Махал (индийская архитектура, 1630–1652). Кстати, чтобы при сохранении показанных на рисунке золотых пропорций фасад Нотр-дамы вписался в прямоугольник золотого сечения, его двум башням “не хватает” нескольких метров высоты, которые, думается, скорее нарушили бы соразмерность пропорций фасада, чем наоборот.

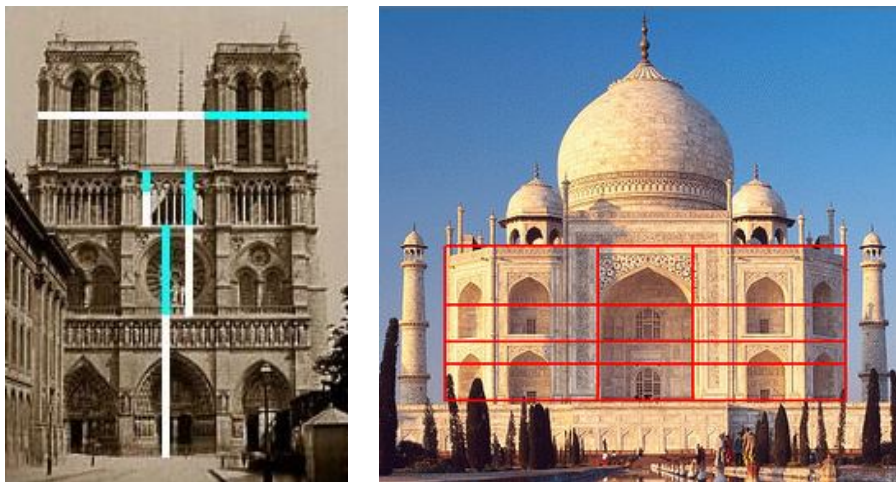


Рис. 6.1.3

Золотые пропорции в Нотр-дам де Пари и Тадж-Махале

6.2. Пропорции пирамиды Хеопса: три версии

Сложнее дело с египетскими пирамидами, в частности с первой в ряду чудес древнего мира большой пирамидой Хеопса (Хуфу), фараона IV династии, жившего в XXVII в. до н.э. Это величественное мегалитическое сооружение, поражающее не только размерами, но и строгим изяществом пропорций. Непросто, наверное, найти на свете что-нибудь ещё, что привлекало бы к себе внимание такого количества искателей тайного, эзотерического, с таким разнообразием подходов и мнений, с такой неизменностью интереса, безграничным упорством и фанатичным рвением, см. [Лауэр, Часть третья. Мнимые секреты пирамид]. При этом значительная часть всех изысканий по *пирамидологии* относится к пропорциям пирамиды Хеопса. Посмотрим, как это выглядит с точки зрения поиска золотого числа и в споре с другими математическими величинами.



Рис. 6.2.1

Пирамида Хеопса и пирамиды в Гизе

Далёким предтечей современной пирамидологии и “золотоискательства” следует очевидно считать Геродота (484–425 до н.э.). Объездив в 455–447 гг. до н.э. Египет, см. [Лурье], он оставил дошедшие до наших дней ценные сведения об этой стране, касающиеся и пропорций пирамиды Хеопса. Это несколько загадочная и озадачивающая фраза во второй книге его “Истории”, с испорченными местами и хромяющей грамматикой. Приведём вначале фразу по академическому изданию в переводе Г. А. Стратановского: “Она четырёхсторонняя, каждая сторона её шириной в 8 плетров и такой же высоты” [Геродот, Книга II. Евтерпа, 124]. И это всё о пропорциях пирамиды. Однако дословный реконструированный перевод с греческого оригинала несколько иной: “У неё есть повсюду метоп каждый восемь плетров, являющейся квадратной, и высота равная” [Евклид, Комментарий Мордухай-Болтовского к книге XIII, с. 297]. Весь вопрос в том, как понимать *метоп* и *плетр*. Метопу следует понимать не как сторону основания пирамиды, а как площадь её боковой грани, а плетра может быть и мерой длины и мерой площади равной 100×100 единиц, в частности локтей, но в данном случае, хотя бы для одинаковой размерности, речь идёт о площади. Устраняя грамматические огрехи дошедшего до нас греческого текста и принимая во внимание сказанное относительно метопа и плетра, предлагается такое прочтение: *У неё повсюду каждая грань составляет восемь плетров и равна квадрату высоты [там же, с. 298]*. Принимая, по принятому, сторону основания равной 440 локтям, апофему (перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на сторону основания) 356 локтям, а высоту – 280 локтям, нетрудно убедиться, что площадь грани $220 \times 356 = 78\,320$ кв. локтей близка к 80 000 кв. локтям, то есть восьми плетрам. А главное, квадрат высоты $280 \times 280 = 78\,400$ кв. локтей почти равен площади грани.

Даже с первого поверхностного взгляда на пирамиду Хеопса заметно, что сторона её основания намного больше (почти в 1,6 раз) высоты и очень трудно, даже невозможно поверить, что Геродот мог полагать их равными. В комментарии Мордухай-Болтовского и в аналогичных толкованиях других авторов всё похоже становится на свои места и это едва ли не общепринятая точка зрения, о чём в частности свидетельствует и левый рисунок взятый из капитальной работы [Лауэр, рис. 41].

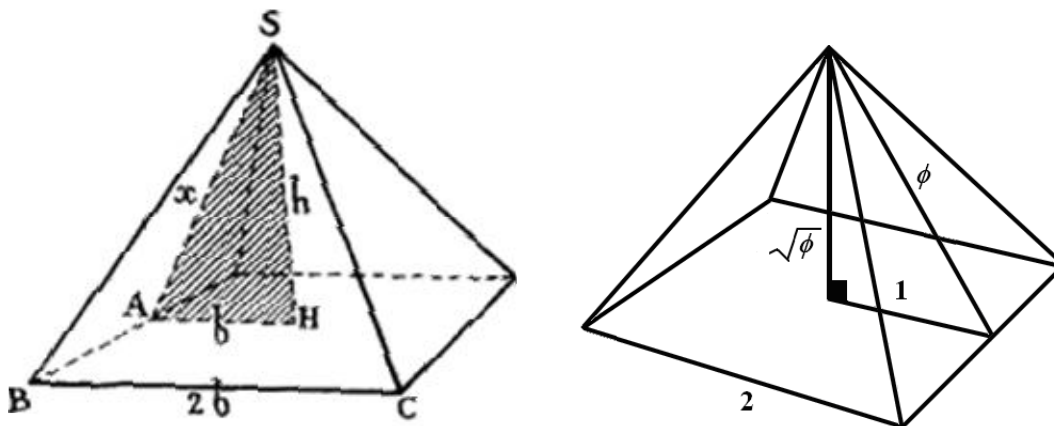


Рис. 6.2.2

“Золотая” модель пирамиды Хеопса

В разрезе пирамиды дан прямоугольный треугольник, горизонтальным катетом которого служит половина стороны основания (удобства ради обозначаемая нами в дальнейшем символом l), вертикальным катетом — высотой пирамиды (h), а гипотенузой – апофема (a). “Равенство Геродота” запишется в виде $a \cdot l = h^2$, отсюда $a/h = h/l$, то есть апофема так относится к высоте, как высота к половине основания. Это не что иное, как деление в крайнем и среднем отношении – геометрическая формулировка золотого сечения. По теореме Пифагора $h^2 = a^2 - l^2$ и подставляя h^2 в равенство Геродота получим золотое квадратное уравнение $a^2 - a \cdot l - l^2 = 0$ с положительным корнем $a = l \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Судить о реальном уровне древнеегипетской математики очень непросто. Споры на эту тему ведутся давно и разброс в оценках достаточно велик, см. [Ван дер Варден; Выгодский; Нейгебауэр]. Существует мнение, что математика в древнем Египте была развита значительно лучше, чем если судить по дошедшим до нас малочисленным документам. Можно весьма предположительно допустить, что уже во времена Хеопса были известны три вещи: во-первых, теорема Пифагора – за два тысячелетия до появления на свет самого Пифагора, – по которой (понятно, в наших обозначениях) $x^2 + y^2 = z^2$, во-вторых, приводящее к золотому равенству $z = \phi$ соотношение $1 + \phi = \phi^2$, и в-третьих, менее достоверно, формула $S = \frac{1}{2} x \cdot y$ для площади прямоугольного треугольника. При таком уровне знаний вычисление параметров золотой модели Большой пирамиды не представляет трудностей. Принимая половину стороны основания пирамиды в качестве единицы длины, имеем

следующий набор значений: высота $\sqrt{\phi}$, площадь грани ϕ , площадь основания 4, длина апофемы ϕ , площадь боковой поверхности 4ϕ , её отношение к площади основания ϕ , длина отрезка образующей между вершиной и основанием $\sqrt{\phi+2}$, полная поверхность $4\phi^2$, объём $4\sqrt{\phi}/3$. Напомним, что по распространенному мнению комментаторов “Истории” первые два значения фактически подсказаны Геродотом, притом со слов жрецов – через два тысячелетия после Хеопса. Непонятно одно: если принцип золотого сечения действительно применялся в строительстве Большой пирамиды, почему он так и не стал универсальным каноном древнегреческой архитектуры? Ведь и до и после Хеопса при строительстве пирамид, в том числе его наследников Хефрена (Хафры) и Микерина (Менкаура) использовались другие, причём довольно разные пропорции [Лауэр; Herz-Fischler; Rossi; Pyramides d’Égypte].

Заметим также, что стороны прямоугольного треугольника в сечении пирамиды образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{\phi}$. Это уникальная в своём роде геометрическая фигура, золотой треугольник Кеплера, как бы укладывающий в одну математическую шкатулку оба кеплеровских сокровища: теорему Пифагора и деление отрезка в среднем и крайнем отношении. Приравнивая меньший катет треугольника какому-либо положительному числу и решая уже знакомую нам систему уравнений $x^2 + y^2 = z^2$, $z/y = y/x$, получим искомое отношение $1 : \sqrt{\phi} : \phi$. Интересно, что для построения треугольника Кеплера можно обойтись циркулем и линейкой, не трогая “сокровищ” и ничего о них не зная. Достроив, точно таким образом как на рисунке 5.1.7 предыдущей главы, единичный квадрат до прямоугольника золотого сечения, надо лишь провести дугу окружности радиусом ϕ до пересечения с боковой стороной четырёхугольника. Закрашенный на рисунке серым треугольник и есть треугольник Кеплера.

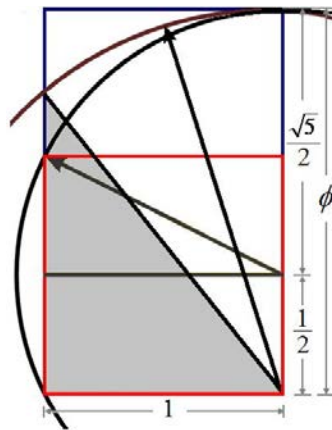


Рис. 6.2.3

Построение треугольника Кеплера

Такова математическая модель Большой пирамиды, построенная на основе туманной фразы о метопах и плетрах, истолкованной как “равенство Геродота”. Золотая модель, со временем порядком забывтая, возродилась в середине 19 в. в Германии (Г.Ребер, 1855 г.) и сегодня у неё немало приверженцев, см. [Лауэр; Gazale; Васютинский; Obara], как впрочем и оппонентов, предлагающих альтернативные модели; но об этом чуть позже. Разумеется, любая имеющая отношение к внешнему миру теоретическая конструкция, даже самая изящная, нуждается в эмпирическом оправдании, которое обычно связано с большими сложностями и далеко не всегда приводит к однозначным выводам. В нашем случае главная трудность в том, что за более чем четыре с половиной тысячелетия пирамида, лишившись облицовки, стала чуть уже и заметно (примерно на 10 м) ниже, и сегодня нет единой точки зрения относительно точных значений её первоначальных размеров. Нередко приводятся такие усредненные значения: длина основания $\approx 230,4$ м, высота $\approx 146,6$ м [Great Pyramid of Giza], но в различных источниках, включая новейшие энциклопедические справочники, данные расходятся не менее чем на 20–30 см. Это означает, что сторона пирамиды, не говоря уже о её высоте, определяется с погрешностью не менее 0,1% открывающей широкие просторы для всевозможных гипотез и спекуляций.

Между тем, угол α наклона граней пирамиды, точнее угол между апофемой боковой грани и основанием, не мог серьёзно измениться за всё время существования пирамиды и согласно наиболее надёжным измерениям едва ли выходит за пределы интервала $51^\circ 49' - 51^\circ 52'$. Следовательно угол α известен с погрешностью 0,04%, которая заметно ниже погрешности определения линейных параметров пирамиды. Естественно поэтому брать именно угол α , обеспечиваются тем самым более высокую точность числовых расчётов и большую степень достоверности окончательных выводов. Модель пирамиды безотносительно к той или иной теории её пропорций изображена на рисунке.

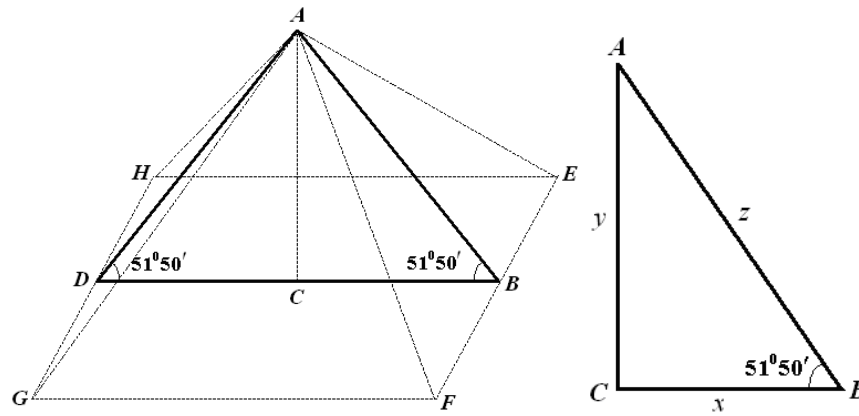


Рис. 6.2.4

Геометрическая модель пирамиды Хеопса

Вернёмся к золотой модели уже с точки зрения углового соответствия. Угол α , определяемый соотношением

$$\alpha = \arctg \sqrt{\phi} = 51^{\circ}49'40''$$

вполне укладывается в обозначенный интервал допустимых значений. Золотой угол, подкреплённый свидетельством Геродота, многих завораживает. Если, например, исходить из неизвестно откуда взявшегося, притом без указания погрешности, значений миллиметровой точности $2l = 230,363$ м и $h = 146,515$ м [Calter], то получаемый при этом угол практически неотличим от идеального α . Для получения абсолютно точного соотношения $h^2/l^2 = \phi$ надо разве что сдуть пылинку с вершины почти стопятидесятиметровой громады – отнять от h два миллиметра. Похоже на подгонку под нужный результат, но в любом случае угол $\approx 51^{\circ}50'$ – находка, придающая пирамиде эстетическую привлекательность. При заметно меньших значениях угла пирамида покажется излишне покатой, приземлённой, недостаточно изящной, а при больших – чересчур удлинённой, иглообразной. Кроме того, можно предположить, что такой угол наклона граней во многом обеспечивает живучесть пирамиды, прочность её конструкции, что впрочем характерно и для пирамид с другими углами наклона, варьируемыми в широких пределах от $42^{\circ}33'$ до 66° , см таблицу в [Pyramides d'Égypte]. Во всяком случае за 46 веков своего существования сооружение, составленное из 2,5 миллиона каменных блоков общим весом в 6 млн. тонн, не очень пострадало, лишившись только своей вершины и облицовки.

Золотая модель Большой пирамиды безусловно отвечает всем требованиям гармонии и математического изящества. Судя по имеющимся данным есть, хотя и не бесспорные, основания полагать, что исследование, нацеленное на поиск числа ϕ в её основных пропорциях, увенчалось успехом и можно поэтому говорить о мудрости древних и развитости их математических знаний, а заодно о прозорливости тех, кто сумел подобрать ключи к расшифровке тайн каменного исполина. Есть однако довод, способный омрачить радость пирамидологов-золотоискателей. Список великих констант, претендующих на причастность к пропорциям великой пирамиды, не ограничивается числом ϕ : свои права предъявляет и фундаментальная константа π . Рассматривая длину основания и высоту пирамиды Хеопса, можно думать [Robinson], что если здесь действительно зашифрована математическая константа, то это скорее π чем ϕ , поскольку отношение периметра основания пирамиды к её удвоенной высоте, $4l/h$ в наших обозначениях, больше похоже на число π чем упомянутое отношение h^2/l^2 на число ϕ . Простое соотношение $\alpha = \arctg 4/\pi$ соответствует значению угла $\alpha_{\pi} \approx 51^{\circ}51'14''$, что укладывается в пределы погрешности измерения этого угла. А отсюда как раз и следует альтернативная гипотеза о равенстве числу π отношения полупериметра основания пирамиды к её высоте.

Даже страстные поклонники золотой пропорции вряд ли станут утверждать, что константа ϕ важнее π в иерархии математических величин. Точность же измерения в обоих случаях практически одинакова, тем более что значение $51^{\circ}51'$ по мнению некоторых ближе к истинному чем $51^{\circ}50'$. К тому же в древнем (датируется 1650 г. до н.э.) папирусе, содержащем описание математических методов, применяемых в Вавилоне и Египте, а также решение некоторых имеющих отношение к пирамидам проблем, золотая пропорция даже не упоминается. Между тем число π как отношение длины окружности к диаметру уже тогда вычислялось с относительной погрешностью порядка 0,6%.

Возможен и компромисс, до некоторой степени примиряющий альтернативные точки зрения исходя из знания и незнания строителей пирамид – знания математических реалий π и ϕ как таковых и незнания их точных значений. Про арифметическое значение числа π это доподлинно известно и можно думать, что так же обстояло дело с золотым числом. К тому же вплоть до Нового времени “золотая геометрия” явно в большем почёте чем “золотая арифметика”, о чём в частности свидетельствуют и “Начала” Евклида; для геометрического построения

первого или второго золотого сечения знание числа ϕ отнюдь не обязательно. В принципе, угол $51^\circ 50' \approx \operatorname{tg} \sqrt{\phi}$ для пирамиды Хеопса мог быть получен чисто геометрически – без знания самого числа ϕ . В любом случае, числовой компромисс в следующем: π – для высоты, а ϕ – для апофемы пирамиды Хеопса. Другими словами, при длине основания пирамиды равной 2 имеем значение $4/\pi$ для её высоты и (хотя бы по теореме Пифагора) значение ϕ для апофемы; всё это в пределах точности не ниже одной тысячной. Математически это соотношения

$$h^2/l^2 = \phi \quad \text{и} \quad 4l/h = \pi \quad (6.2.1)$$

приводящие к неверному равенству $\pi^2 \phi = 16$. Отклонение $\sigma \approx 0,2\%$ от правильного значения 15,9693... здесь достаточно мало чтобы, увеличив обе константы на $\approx 0,002$, то есть оставаясь в пределах погрешности их определения в Древнем мире, прийти к точному значению 16.

Гадать в наши дни об “истинной” математике пирамид – занятие быть может увлекательное, но малоперспективное: это скорее игра с числами, которые кстати могут быть разными. Если к примеру исходить из того, что в основных пропорциях пирамиды Хеопса зашифрованы **проточисла** e , π и 2 вместе с шестидесятеричной системой счисления и делением окружности на 360 градусов, то соотношение $\alpha = \operatorname{tg}(2/e)$ после перевода в градусы, то есть умножения на $360/2\pi$, даёт не совсем безнадёжное значение $\alpha = 51^\circ 52' 20''$. Вот вам очередная версия относительно пропорций Большой пирамиды, якобы свидетельствующая о знакомстве древних с константой e и об их познаниях в области тригонометрии. А можно при желании пойти дальше, взяв за основу **константу суперпозиции косинуса u** в её соотносённости с e - i -2-преобразованием. Тогда из соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{arctg} u$$

получим значение $\alpha = 51^\circ 50' 52''$, которое не хуже других.

Но даже если исключить из рассмотрения интуитивно неприемлемую числовую экзотику, список серьёзных претендентов на истинное значение угла наклона, а следовательно и линейных размеров Большой пирамиды, не исчерпывается фундаментальными константами. В новейшем исследовании норвежского специалиста по архитектуре Оле Брюна [Bryn], воспринятом некоторыми как “разгадка тайны египетских пирамид” утверждается, что строители пирамид использовали разбивочную сетку, которая позволяет возводить самые сложные сооружения и является одним из главных инструментов архитектуры и в настоящее время. Брюн постарался воспроизвести проектную документацию пирамиды Хеопса на основе используемых при строительстве пирамид в период Древнего царства (2686 до н.э – 2181 до н.э) данных [Rossi]: основная мера длины – *царский локоть* (мех), равный по Борхардту [Borchardt 1922; 1926] 52,355 см (52,375 см в работе [Petrie]). Локоть равен семи ладоням (шеспам), а ладонь четырём пальцам (тебам). И что особенно важно, в качестве угловой единицы использовался *секед*, который в современных понятиях можно представить как больший угол прямоугольного треугольника противолежащий катет которого равен одному локтю (семи ладоням), а прилежащий катет пяти ладоням и двум пальцам (= $5\frac{1}{2}$ ладоней). Другими словами *секед* это угол $\alpha = \operatorname{arctg}(14/11) = 51^\circ 50' 34''$. Имея *секед* можно с высокой степенью точности определить через высоту пирамиды длину её основания, являющегося в идеале квадратом, или наоборот – высоту через основание. Полагая сторону основания пирамиды равной 440 локтям (230,362 м), получают 280 локтей (146,594 м) для её проектной высоты. По сути здесь всё сводится к выбору одного из линейных параметров, например высоты, пирамиды и углу определяемому соотношением 14/11.

Для других, не слишком уступающих своими размерами Большой пирамиде гигантов вроде пирамиды Хефрена (Хафры), Ломаной и Розовой пирамид, применялись, как знаем, другие угловые единицы. Так, *секед* второй по величине пирамиды Хефрена, наследника Хеопса, определяют отношением $7/5\frac{1}{4} = 4/3$, что означает удобную во многих отношениях прямоугольную геометрическую фигуру в сечении пирамиды – египетский треугольник с соотношением сторон 3:4:5, арифметическую прогрессию в противоположность геометрической прогрессии золотой модели. Пирамида Хефрена чуть меньше пирамиды Хеопса и немного круче: угол наклона $\beta = \operatorname{arctg}(4/3) = 53^\circ 50' 34''$. В каких-то других случаях отклонение от угла $\operatorname{arctg}(14/11)$ существенно больше, см. например [Lehner; Hitchins], но могут сказать, что неслучайно именно пирамида Хеопса и никакая другая считалась и считается подлинным шедевром мировой архитектуры, занимая первое место среди семи чудес света. К тому же это единственное сохранившееся до наших дней древнее чудо, ставшее предметом культового поклонения и объектом многочисленных изысканий уже в наши дни.

Обозначен круг основных претендентов на роль истинной математической модели Большой пирамиды. Это и определяемый рациональным отношением 14/11 *секед* и трансцендентное число π и представленная треугольником Кеплера иррациональная константа ϕ . *Секед* вроде бы проще и может показаться, что он предпочтительнее своих конкурентов, особенно если учесть пристрастие древних к натуральным числам. Но непонятно, почему именно *такой* *секед* среди множества других, см. [Hitchins; Щетников, 16, 17]; кроме того иногда полагают, что это попросту число π в своём рациональном приближении $22/7$, хотя насколько известно древние египтяне пользовались приближением $256/81$, а $\pi \approx 22/7$ это уже более поздний продукт греческой

математики (Архимед, 3 в. до н.э.). Если учесть соотношения (6.2.1), “примиряющие” пи- и фи-версии параметров пирамиды Хеопса, то станет ясно, что в какой-то мере источником обсуждаемых гипотез являются приближённые, с погрешностью не более двух тысячных, соотношения

$$14/11 \approx \sqrt{\phi}, \quad 4:14/11 = 22/7 \approx \pi, \quad \pi^2 \phi \approx 16$$

допускающие различные толкования, но не дающие однозначных ответов.



Рис. 6.2.5

Три версии основных пропорций пирамиды Хеопса

Мы видим на рисунке три визуально практически неотличимых прямоугольных треугольника, среди которых треугольник Кеплера выделяется простотой и изяществом своих числовых пропорций, хотя этого всё-таки ещё недостаточно для безоговорочного признания безальтернативности золотой версии.

Обсуждение пропорций двух величественных сооружений древности, думается, весьма показательно и есть основания, пусть далеко не бесспорные – особенно в случае пирамиды Хеопса, полагать, что принцип золотого сечения в той или иной форме использовали строители египетских пирамид, греческих храмов и других архитектурных памятников древнего мира. Однако при относительно малой точности сохранившихся параметров сооружений и без явных свидетельств, таких как приводимые в “Началах” Евклида геометрические построения, делать окончательные и далеко идущие выводы о высокоразвитой математической культуре египтян, вавилонян и других, тем более о существовании древней “сверхцивилизации”, не приходится. В любом случае интригующая тема “золотое сечение в архитектуре разных эпох и народов”, в том числе египетской, греческой, византийской, готической, итальянского Возрождения, барокко, древнерусской, была, есть и по-видимому останется актуальной и привлекательной для многих, см. например [Гримм; Шевелев].

6.3. Принцип золотого сечения за пределами арифметики

В отношении архитектурных памятников (и не только) помимо вопроса о степени точности соответствия реального “изделия” воображаемому математическому прототипу возникает второй, неизбежный в подобных случаях вопрос. Применялись ли пропорции, близкие к золотым, осознанно или же чисто интуитивно? А может было и то и другое? Интуитивная версия, очевидно, годится тем, кто полагает, что данный принцип изначально заложен в человеке, в его сознании, эстетическом восприятии окружающего мира и потому так часто, осознанно или нет, отражается в его практической деятельности. Ведь форму близкую к форме прямоугольников золотого сечения имеют многие художественные изделия, например некоторые образцы древнегреческих ваз [Hambidge]. Так, из двух показанных на рисунке ваз одна вписывается в золотой прямоугольник почти идеально, другая – с небольшим недобором по ширине.



Рис. 6.3.1

Греческие вазы в золотых прямоугольниках

Соответствие золотой пропорции для горшков различных типов схематично показано на следующем рисунке, см. [[Philosophy of Beauty](#)].

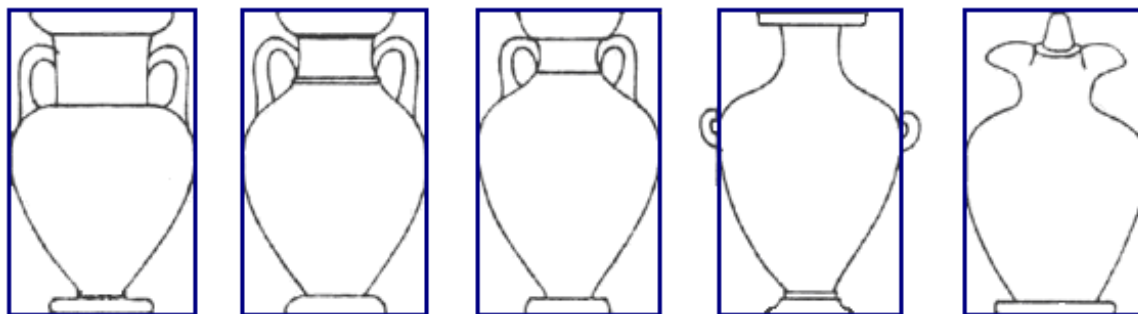


Рис. 6.3.2

Горшки в золотых прямоугольниках

Подобное соответствие характерно и для многих предметов быта; многие считают, что именно золотая пропорция способна в высшей степени вызвать ощущение приятности и согласованности. На это в частности указывают опыты, проведённые немецким психологом Фехнером в конце прошлого века [[Fechner](#)]. Он показывал людям разного возраста и пола десять прямоугольников с отношением сторон $5/2$, $1/1$, $6/5$, $2/1$, $5/4$, $4/3$, $29/20$, $23/13$, $3/2$, $34/21$ (в порядке приближения к числу ϕ) и предлагал им выбрать прямоугольник, который удовлетворяет их в наибольшей степени и который их в наибольшей степени не удовлетворяет. Добрая треть испытуемых высказалась в пользу прямоугольника золотого сечения ($34/21$), 20 и 19 процентов – в пользу ближайших его соседей ($3/2$, $23/13$), а из оставшихся семи прямоугольников ни один больше 10% голосов не набрал. Таким образом, результаты опыта оказались статистически весьма благоприятными для золотого сечения, причём никто из 228 испытуемых неблагоприятного отзыва о прямоугольнике золотого сечения не дал. Оппоненты пробуют объяснить такое предпочтение не столько “внутренним влечением” к золотому сечению, сколько “привычкой” и “рассудочными соображениями”, тем более что результаты такого же теста, проведённого среди детей, показали совсем другое.

Как отмечает Тимердинг, “форматам книг, известным картинам, входным билетам, бумажникам, аспидным доскам, сундукам, ящикам, шкатулкам, шоколадным плиткам, пряникам и всевозможным другим предметам, частью сознательно, частью бессознательно, придается форма согласно основному принципу золотого сечения” [[Тимердинг](#), 70]. Кстати, об этом же, как полагают, свидетельствуют украшения и предметы быта из гробницы Тутанхамона. Если далее исходить из предположения, что золотому сечению первоначально было предпочтено по “рассудочным соображениям”, исконность человеческой предрасположенности к золотому сечению ставится тем самым под сомнение, “так как нужно было бы производить опыты с грудными младенцами и ботокудами”, а не вконец испорченными цивилизацией взрослыми людьми. Привычка – вторая натура: “вследствие того, что это отношение потом было избрано нормой для бесчисленного множества употребляемых форм, ... оно, в конце концов, так утвердилось в представлении, что даже бессознательный выбор отношения размеров тоже тяготеет к нему”. Впрочем, выносить окончательный вердикт довольно рискованно и всё-таки лучше оставить эту приткрятой: “Но уверенности в этом вопросе во всяком случае очень трудно достигнуть. Мы должны всё же считаться с возможностью того, что тяготение к золотому сечению происходит благодаря внутренней склонности” [[там же](#), 73].

В любом случае если судить по опытам Фехнера со взрослыми и детьми, предрасположенность к золотому сечению проявляется не сразу, а лишь в определённом возрасте. Об этом же свидетельствуют другие источники, в частности работа [[Titchener](#)], по которой в генезисе личности эстетически первично отношение равенства и лишь в зрелые годы начинает проявляться тенденция к золотой пропорции. Когда именно – сказать трудно, надо полагать на основе уже других исследований, что в одной из критических точек возраста, который (по годам как естественной единице измерения возраста) соответствует числам Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 для мужчин, и числам Люка 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123 для женщин. По этой градации период молодости у мужчин (от 21 до 34 лет) наступает позже и длится дольше чем у женщин (от 18 до 29 лет), но старость наступает до обидного рано, в 55 лет вместо 76 у особ противоположного пола. Высказывается также предположение [[Сороко](#)], что связанные с переходами от детства к отрочеству, от отрочества к юности и т.д. качественные скачки “по Фибоначчи” характерны не только для человека, но и для любых самоорганизующихся систем включая организмы и популяции животных, экологические сообщества и социальные системы, в которых обменные процессы с течением времени приобретают необратимый характер.

Немало исследований на эту тему могут быть отнесены к категории психологических. В дополнение к своим опытам с прямоугольниками Фехнер проводил аналогичные тесты с девятью эллипсами, для которых отношение длины большой оси к малой менялось в пределах от $5/2$ до 1. Результаты тестов, опубликованные

лишь много лет спустя [Witmer], оказались не очень благоприятными для золотой пропорции, поскольку 42% испытуемых отдали предпочтение эллипсам с отношением 3/2:1, а близкий к золотому эллипс оказался лишь на втором месте – 16,7%. Кроме того Фехнер исследовал 20 000 картин известных мастеров из 22 музеев на соответствие золотому сечению отношения высоты картины к ширине. Результаты были не в его пользу и на этот раз, поскольку выявилось тяготение к отношению 5:4 для вертикальных и 3:4 для горизонтальных картин. Полагают, однако [Arnheim, 60], что подобный итог мало что значит в силу множества факторов, способствующих тому, чтобы указанные пропорции для картин даже выдающихся мастеров отклонялись от золотой, поэтому данное статистическое исследование следует считать изначально ущербным и некорректным.

Впрочем, нередко полагают, что важен не формат картины (фотографии, кинокадра, художественной композиции) а совмещение его основных элементов с особыми точками – “зрительными центрами”, которые призваны служить примером использования правила золотого сечения. Геометрическое построение таких точек элементарно. Предположим, имеем прямоугольный четырёхугольник со сторонами a и b . Проведем внутри четырёхугольника две горизонтальные и две вертикальные прямые, отстоящие от его сторон соответственно на $a \cdot m/n$ и $b \cdot m/n$, причём $m/n < 1/2$. Получим прямоугольник, который подобен исходному и меньше его в $(1 - 2m/n)^2$ раз, с вершинами лежащими на пересечении горизонтальной и вертикальной прямых с диагональю. Если, как показано на рисунке, $m/n = 3/8$, то это почему-то и считается совмещением зрительных центров с точками золотого деления, поскольку все отрезки, включая диагонали, делятся в пропорции $3/8 = F_4/F_6$ и $5/8 = F_5/F_6$. Между тем аппроксимация константы ϕ начальными членами ряда Фибоначчи весьма приближительна и здесь скорее можно говорить о применении универсального правила третьего члена к шести отрезкам, выражаемым посредством чисел F_n . Для существенно большей близости к золотому идеалу надо брать m/n равным не $3/8 = 0,375$ с относительной погрешностью 0,02, а хотя бы $0,382 \approx \phi^{-2}$ – с погрешностью $\sim 10^{-5}$. Нетрудно также подсчитать, что в идеале, когда m/n в точности равен ϕ^{-2} , и в соответствии с арифметикой числа ϕ прямоугольная область ограниченной четырьмя зрительными центрами ровно в $\phi^6 = 17,944\dots$ раз меньше исходного прямоугольника.

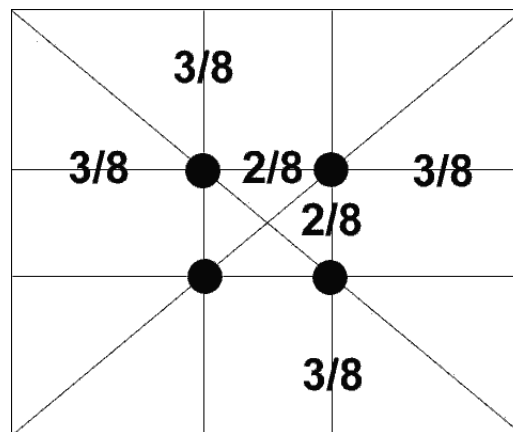


Рис. 6.3.3

Зрительные центры и числа Фибоначчи

Возвращаясь к опытам Фехнера заметим, что на вопрос, чем можно объяснить предпочтение, отдаваемое золотому сечению, он ответил просто: “Не знаю”. Радикальная критика полагает, что его опыты, в частности с прямоугольниками, ни о чём не говорят, поскольку не соответствуют современным стандартам научной строгости; в частности выбор объектов исследования не был случайным, и то ли сознательно, то ли бессознательно Фехнер создавал условия эксперимента, приводящие к желаемому результату, хотя, добавим, с эллипсами у него вроде бы ничего не вышло. Другие считают такую критику надуманной и несправедливой, см. [Green], но в любом случае начало подобным исследованиям было положено и продолжение не заставило себя ждать. С конца девятнадцатого века до середины двадцатого проведено немало тестов [Titchener; Davis], в большинстве близких опытам Фехнера с прямоугольниками, но по более усовершенствованной, хотя всё ещё не лишённой, считали критики, изъянов методике. Явное подтверждение склонности к золотой пропорции помимо работ самого Фехнера было зафиксировано в [Witmer; Lalo], а также в серии пятилетних исследований [Farnsworth], неизменно выводивших отношение ϕ на первое или второе место; эффект был менее заметен в [Pierce; Angier; Thompson G.G.; Shipley, Dattman and Steele; Neinstadt and Ross; Austin and Sleight]; у [Thorndike; Weber] в области золотого сечения наблюдался эффект, но слабо выраженный; у [Haines and Davies] не обнаружено ничего “золотого”; у [Davis] наблюдалось сразу три пика для отношения сторон прямоугольников, соответствующих значениям 1,72:1, 2,02:1 и 2,2:1, что было истолковано как близость к квадратным корням $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$. Сюда можно при желании добавить ещё более значимые, составленные из ФМК выражения,

например $\pi/2 \approx 1,57$, $\sqrt{e} \approx 1,65$. Это служит серьёзным предупреждением (к нему почитатели золотой пропорции не любят прислушиваться), что близость в пределах нескольких процентов к числу ϕ с таким же успехом может рассматриваться как близость к некоторому другому числу, поэтому спешить с *эврикой* в таких ситуациях не надо.

В целом достаточно убедительных свидетельств в пользу предпочтительности золотой пропорции указанные тесты не дали; видимо, итог этих исследований и стал причиной появления наряду с другими работ, отрицающих какую бы то ни было психологическую предрасположенность к золотой пропорции. Так, безрезультатными оказались попытки выявить склонность к золотой пропорции в опытах [Schiffman 1966; 1969] со всё теми же прямоугольниками; в опытах [Eysenck and Tunstall] на сорока испытуемых был обнаружен некий возрастающий при повторном испытании эффект, истолкованный не вполне убедительно как очередное проявление склонности к золотой пропорции, особенно у людей самоуглублённых (интровертов – по К. Юнгу). Опыты [Hintz and Nelson 1970], призванные подтвердить *периметрическую гипотезу*, по которой предпочтение, отдаваемое в частности тому или иному прямоугольнику, есть функция формы его визуального поля, визуального восприятия, привели после соответствующей корреляции “на бинокулярность” к усредненному результату, близкому числу ϕ^{-1} . Похожий результат, что само по себе интересно, был получен в опытах [Hintz and Nelson 1971] на осязание у слепых, хотя и в том и в другом случае соответствующим образом скорректированное число может с не меньшим, если не с большим основанием считаться равным $3/5$, а не ϕ^{-1} . В опытах [Berlyne 1969; 1970] квадраты оказались предпочтительнее прямоугольников близких к золотому, а некоторая склонность к последним у испытуемых канадцев оказалась выше чем у лиц азиатского происхождения. Отсюда и из других работ подобного рода вывод, что склонность к золотой пропорции имеет скорее культурную чем глубокую психологическую основу [Berlyne 1971]. В работе [Godkewitsch] утверждается, что пресловутая склонность – всего лишь “артефакты” плохо задуманных экспериментальных процедур, таких как выгодное помещение золотого прямоугольника в центре, а не с краю. Однако, во-первых, здесь нет объяснения результатов, полученных применением других процедур и методов, а во-вторых, в опытах Фехнера золотой прямоугольник в центре как раз не помещался; получается, что весомые на первый взгляд аргументы *contra* оказываются на деле хоть слабыми, но аргументами *pro*, см. [Green].

Волна частичного или полного отрицания натолкнулась на встречную волну безоговорочного признания, которая начиная с 80-ых явно превалирует. В [Benjafield 1976] утверждается, что более тщательно поставленные, притом обязательно с учётом критики, эксперименты непременно подтвердят наличие золотого эффекта; считают, что эти оптимистические ожидания в той или иной мере подтвердились в опытах [Piehl; Svensson; McManus; Benjafield 1985]. Тем не менее критика, более осторожная и менее категоричная в своем отрицании [Schiffman and Bobko], сохранилась наряду с альтернативными объяснениями относительно, например, предпочтительности прямоугольников с отношением сторон $3/2$ по сравнению с ϕ [Boselie 1984; 1992].

Для большей широты обзора укажем на группу работ иного плана, в которых золотую пропорцию ищут и как правило находят при исследовании межличностных отношений [Adams-Webber; Adams-Webber & Benjafield; Benjafield 1985; Benjafield & Adams-Webber], структуры этического сознания [Lefebvre] при выборе в “случаях, когда у объектов отсутствуют те свойства, на основе анализа которых требуется принять решение” [Левфевр], то есть при “выборе без объективных критериев” [Kunst-Wilson and Zajonc; Seamon *et al.*; Mandler *et al.*; Bonanno and Stillings]. Добавим сюда исследование таких чувств как страдание, беспокойство, депрессия и агорафобия – боязнь пространства [Schwartz & Michelson], изучение потребительских вкусов [Crowley; Crowley & Williams] и даже относительного числа побед, обеспечивающего поддержку болельщиков [Crowley; Crowley & Williams].

Но вернёмся к опытам с прямоугольниками и другими геометрическими фигурами. Даже беглый и далеко не полный обзор – подробности можно найти в [Green], а обсуждение теоретических моделей в [Berlyne 1971] – имеющихся результатов позволяет судить, хотя бы поверхностно и со стороны, о трудностях исследования золотой пропорции с позиций психологии. Помимо нужды в достаточно глубоко разработанных и проверенных теоретических моделях это и необходимость дальнейшего усовершенствования методики проведения указанных тестов с привлечением большего числа участников, без чего нет надёжной статистики и точных числовых данных, это и хорошо продуманный возрастной и не только возрастной подбор испытуемых, желателен не имеющих представления ни о золотом сечении ни о целях эксперимента. В любом случае только существенный качественный подъём уровня проведения соответствующих тестов позволит вместо “хрупких”, нередко по-разному интерпретируемых результатов получить гораздо более достоверные данные, а следовательно и более определённые оценки психологической предрасположенности к золотой пропорции.

Время от времени появляются новые данные, вроде бы свидетельствующие в пользу гипотезы “внутренней склонности”. Например к числу ϕ приводит сопоставление частот β -волны, соответствующей умственной деятельности человека, и α -волны, соответствующей состоянию покоя [Соколов, 40]. Наш мозг как бы настроен на золотое сечение, потому отвечающие ему пропорции и вызывают у нас ощущение согласованности отдельных частей, гармонии, завершенности, совершенства. Интерпретация опытов Фехнера становится тогда вполне однозначной. Следует, однако, оговориться, что экспериментальное измерение частот биоритмов (волн)

мозга не настолько точно, чтобы судить обо всём этом с уверенностью. Подтверждение этой гипотезы означало бы, что человек не только пропорциями своего тела по распространенным канонам (Фидий, Леонардо да Винчи, Дюрер [Дюрер; Матвиевская, гл. 1], Боттичелли [Cook; Пидоу, 131, 146–147] и многие другие) соответствует золотому сечению, но и особенностями своего мозга повторяет природу, органически вписывается в общую картину мира как один из носителей универсальной гармонии; см. также [H.Weiss, V.Weiss] и указанные там источники.

6.4. Человек как носитель гармонии золотой пропорции

Эта уже начатая выше тема так обширна и многообразна, что даже беглый обзор её важнейших аспектов займёт немало места. Один такой аспект относится к изображению человеческого тела в скульптуре и живописи. Как и в случае архитектуры ограничимся здесь рассмотрением небольшого числа лишь *самых-самых* выдающихся и известных работ: супершедевров античной скульптуры и живописи мастеров эпохи ренессанса. Речь по сути идёт об изображении идеального человека, о создании абсолютного, вневременного эталона человеческого совершенства, а без золотого числа это просто невозможно. По крайней мере так считают исследователи творчества великих мастеров, подкрепляющие свою позицию конкретным анализом.

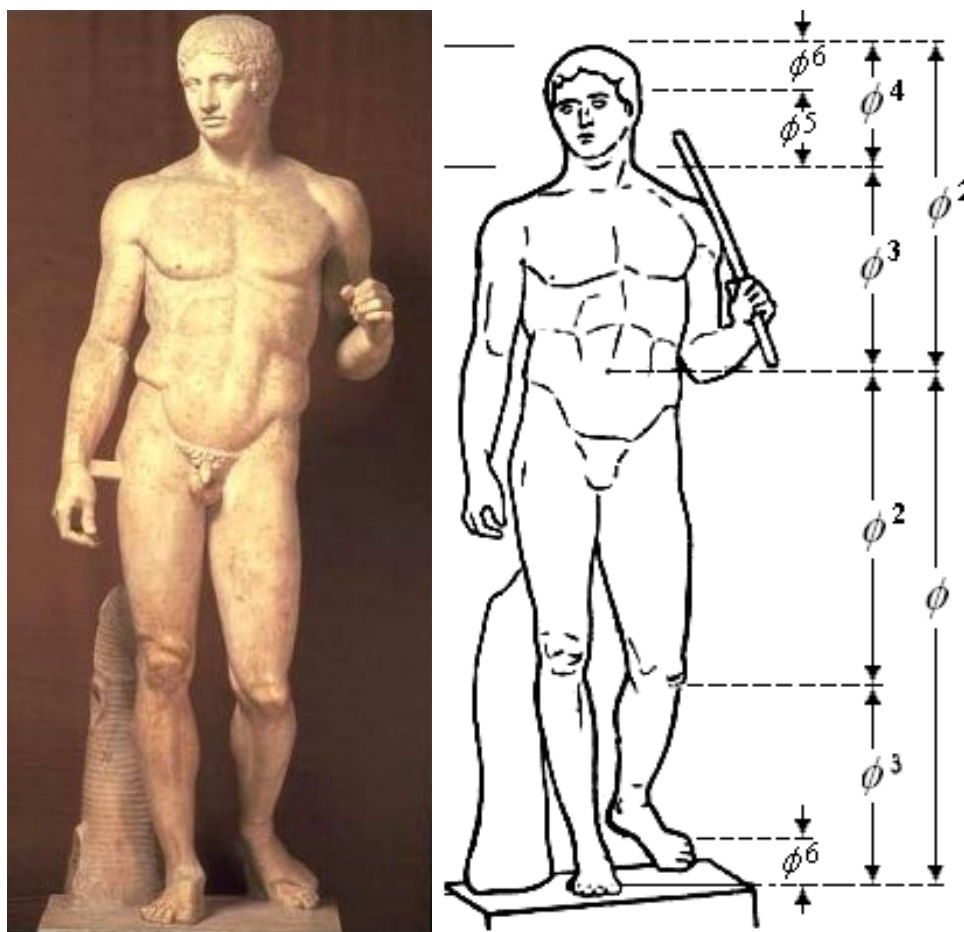


Рис. 6.4.1

Золотые пропорции в статуе Дорифора

Канонической с точки зрения реализации основанной на принципе золотой пропорции идеи точного соответствия между отдельными частями человеческого тела считается знаменитая статуя Дорифора – “копьеносца” работы Поликлета (V в. до н.э.), сохранившаяся в копии античного времени [Гримм]. Если длину тела Дорифора принять равной 1, то верхняя и нижняя половины тела делятся пупком в отношении $\phi^{-1} : \phi^{-2}$; нижняя часть туловища делится линией колена в отношении $\phi^{-2} : \phi^{-3}$, верхняя – линией шеи в отношении $\phi^{-3} : \phi^{-4}$, а голова – линией глаз в отношении $\phi^{-5} : \phi^{-6}$ (напомним, что $\phi^{-2} + \phi^{-3} = \phi^{-1}$, $\phi^{-3} + \phi^{-4} = \phi^{-2}$, $\phi^{-5} + \phi^{-6} = \phi^{-4}$). Золотые пропорции обнаружены и во многих других работах античных мастеров включая такой шедевр мирового искусства как статуя Венеры Милосской работы Агесандра.

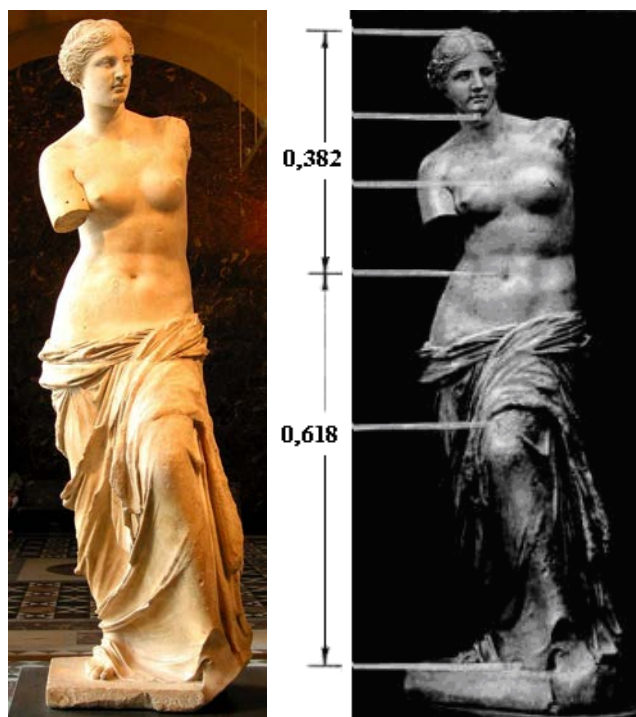


Рис. 6.4.2

Золотые пропорции в статуе Венеры Милосской

Пупок по-прежнему точка золотого деления. Более детальный анализ пропорций отдельных элементов скульптуры Агесандра определённо выявил бы закономерности, характерные для скульптуры Поликлета, – слишком хороша Венера, чтобы не быть “золотой”. Впрочем, Венера на картине Сандро Боттичелли едва ли хуже. Анализ пропорций её фигуры в классической работе [Cook] схематично показан на рисунке рядом с фрагментом “Рождения Венеры”. Если расстояние между кончиком носа и бровями принять равным 1, пропорции других частей головы и тела образуют возрастающий по ϕ ряд значений до ϕ^5 включительно.

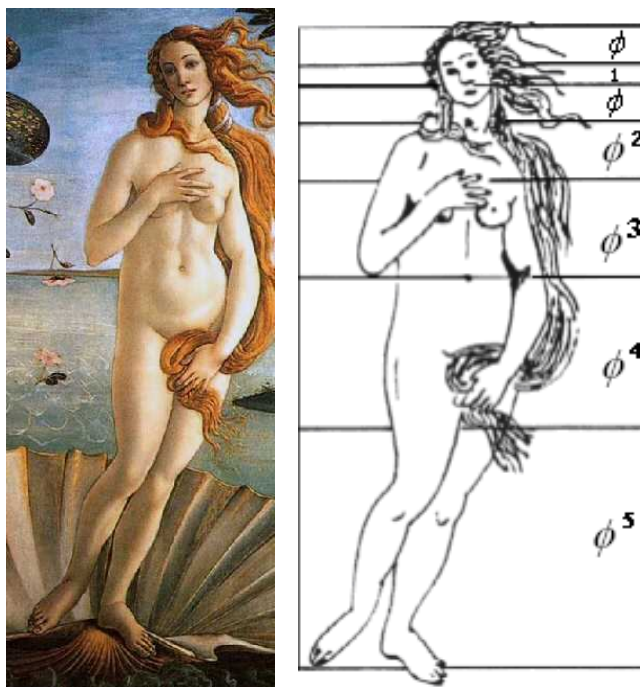


Рис. 6.4.3

Фрагмент картины Боттичелли и её “золотая” схема

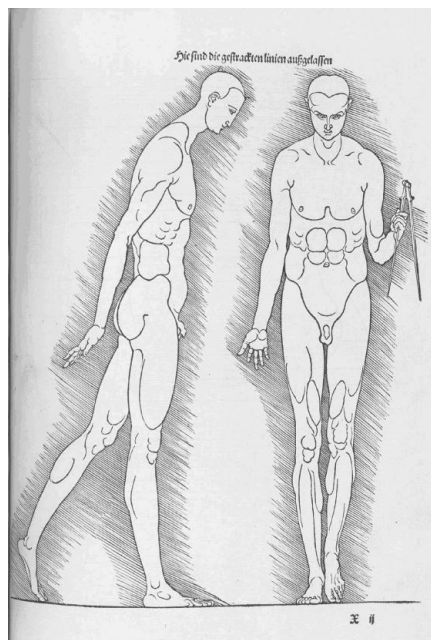
Два других деятеля Возрождения Леонардо да Винчи и Альбрехт Дюрер не только широко использовали в своем художественном творчестве, но и всесторонне исследовали золотое правило в своих научных трудах; **напомним** в этой связи, что именно с именем Леонардо многие связывают само происхождение названия “Sectio aurea” и что именно он иллюстрировал трактат “О божественной пропорции” математика Луки Пачоли, написанный под влиянием его идей.



Рис. 6.4.4

Луки Пачоли и его трактат “О божественной пропорции”

Об исследованиях Леонардо мы ещё поговорим при рассмотрении пентаграммы, логарифмической спирали, а также при изложении ОТЗС, пока же несколько слов о его знаменитой картине и работах Дюрера по золотой пропорции в архитектуре человеческого тела, головы и лица. Теория пропорций изложена Дюрером в трактате “Четыре книги о пропорциях человеческого тела”, где он придерживается античного понятия, сформулированного Витрувием следующим образом: “Пропорция есть соответствие между членами всего произведения и целым по отношению к части, принятой за исходное, на чём и основана всякая соразмерность. Ибо дело в том, что никакой храм без соразмерности и пропорции не может иметь правильной композиции, если в нём не будет такого же точного членения, как у хорошо сложенного человека” [Витрувий, 65]. Если в первой части этого высказывания можно усмотреть прозрачный намек на золотое сечение, одним из первых исследователей которого считается как раз Витрувий, то вторая фактически утверждает человека в качестве основной эстетической категории.



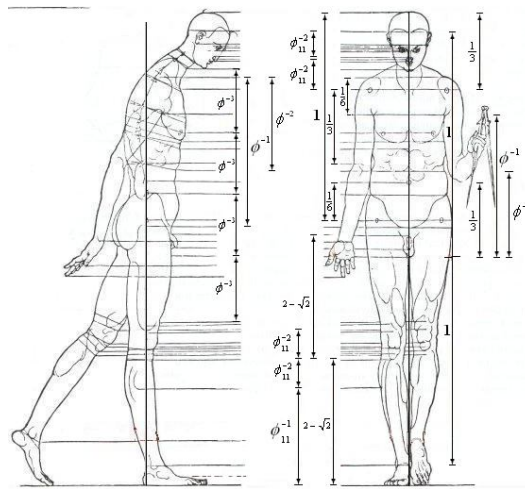


Рис. 6.4.5

Рисунок Дюрера и его числовой анализ

Дюрер исходит из тех же принципов, см. [Матвиевская, 202], и не без удовольствия цитирует своего античного предшественника: “Витрувий, древний зодчий, которому римляне поручали большие постройки, говорит: кто хочет строить, тот должен ориентироваться на сложение человеческого тела, ибо в нём он найдет скрытые тайны пропорции” [Дюрер, 21]. Поиск скрытых пропорций привёл Дюрера к делению фигуры на сто частей, отмеченных на множестве рисунков. Как и в случае Дорифора и Венер Агесандра и Боттичелли современный анализ этих рисунков выявляет константы ϕ , а также ϕ_{11} в разных степенях как числовую характеристику отдельных пропорций фигуры. Встречаются конечно и другие величины вроде $1/3$, $1/6$, но золотое число и константа да Винчи похоже преобладают.

Сетью прямоугольников, близких в большинстве своем к золотым, опутан профиль старика на одном из рисунков Леонардо.

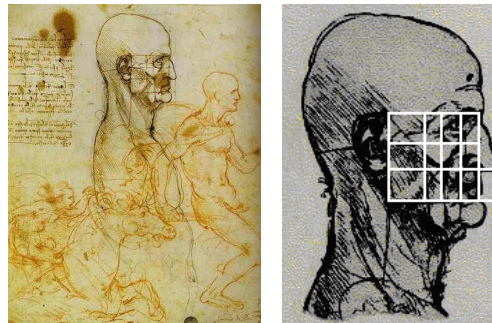


Рис. 6.4.6

Золотые прямоугольники на рисунке Леонардо

По золотому канону построено и лицо человека на рисунке Леонардо из книги “О божественной пропорции” его друга Луки Пачоли.

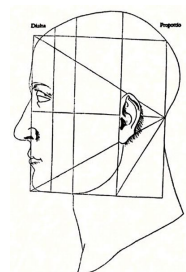


Рис. 6.4.7

Иллюстрация Леонардо к книге “Божественная пропорция”

Излишне говорить о том, что не обошли исследователи своим вниманием и самую, быть может, знаменитую в мире картину – Мону Лизу (Джоконду) Леонардо. Наверно ни одно произведение живописи не вызывало такого любительского и профессионального интереса, такого количества всевозможных суждений и домыслов включая гипотезу, что это автопортрет самого Леонардо в женском обличье. Что касается принципа золотой пропорции, было бы странно, если бы в работе, которая многими оценивается как эталон художественного совершенства, его не обнаружили. Его обнаружили во множестве проявлений. Более того, считается, что мало есть произведений живописи с таким разнообразием сознательного применения данного принципа; судить об этом легче по рисункам, см. [The painters of the Golden Section; Math & Art: The Golden Rectangle; Obara]. Вся фигура и картина в целом опутана здесь двумя золотыми треугольниками и сетью больших, средних и малых золотых прямоугольников, ориентированных по ширине или высоте полотна. Хорошо вписывается в такой прямоугольник лицо Джоконды, но особенно интересен последний рисунок с его семью золотыми прямоугольниками и семью квадратами. Одна из сторон самого большого прямоугольника – от правой кисти до левого локтя, а другая – от левого локтя до верхушки головы; вписав сюда квадрат, получим второй по величине золотой прямоугольник, высота которого в точности равна высоте головы; продолжая этот процесс, имеем систему последовательно уменьшающихся в отношении ϕ золотых прямоугольников со вписанными в них квадратами, сходящихся в точке возле кончика носа, которая представляет собой не что иное как полюс равнобочной логарифмической спирали; подробное её обсуждение ещё впереди. При ознакомлении с этими рисунками могут возникнуть два простых вопроса, которые так или иначе встанут и во многих других случаях. Действительно ли композиция картины строилась в строгом соответствии с канонами золотого сечения и математическими построениями указанного типа? Что мы имеем перед собой: списанный с природы портрет реального человека или его идеализированную математическую модель? Единого мнения и однозначного ответа здесь как водится нет, но большинство исследователей всё-таки сходятся в том, что Леонардо-ученый всегда шагал рядом с Леонардо-художником, оказывая на второго огромное влияние, и что портрет хоть и списан с природы, но в соотнесённости с определёнными представлениями о прекрасном и как бы с подгонкой под математический идеал. Другими словами, “Мона Лиза” такой же образ идеального человека как скульптуры Дорифора и Венеры Милосской, с той быть может разницей, что реальный прототип здесь всё-таки налицо.

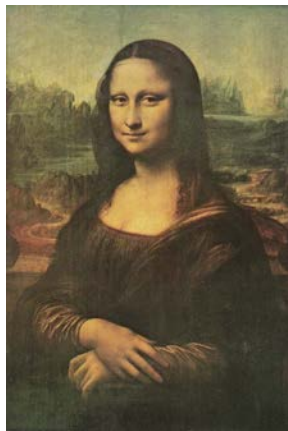


Рис. 6.4.8

“Мона Лиза” (“Джоконда”) Леонардо да Винчи

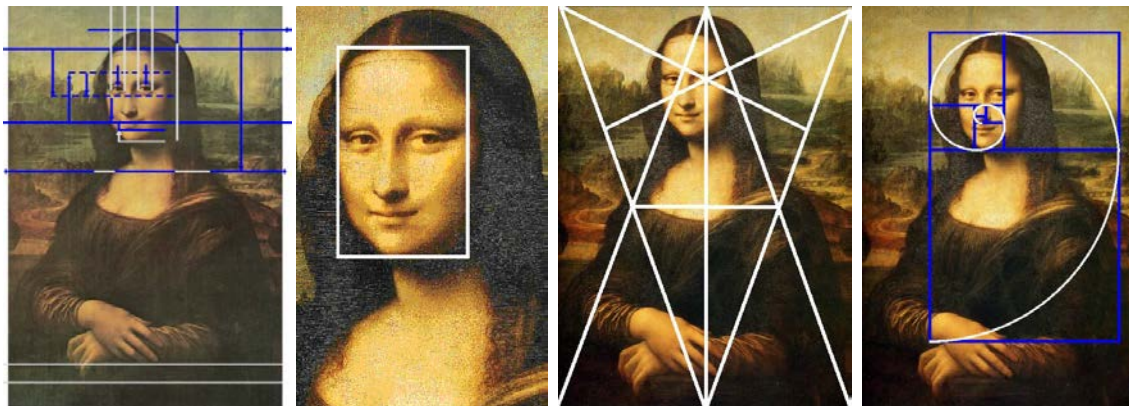


Рис. 6.4.9

Золотые пропорции в картине “Мона Лиза”

Оставив решение подобных вопросов специалистам, приведём без комментариев последний пример анализа путём разбиения в том числе и на золотые прямоугольники ещё одного шедевра мировой живописи эпохи ренессанса – картины Рафаэля “Сикстинская мадонна”.

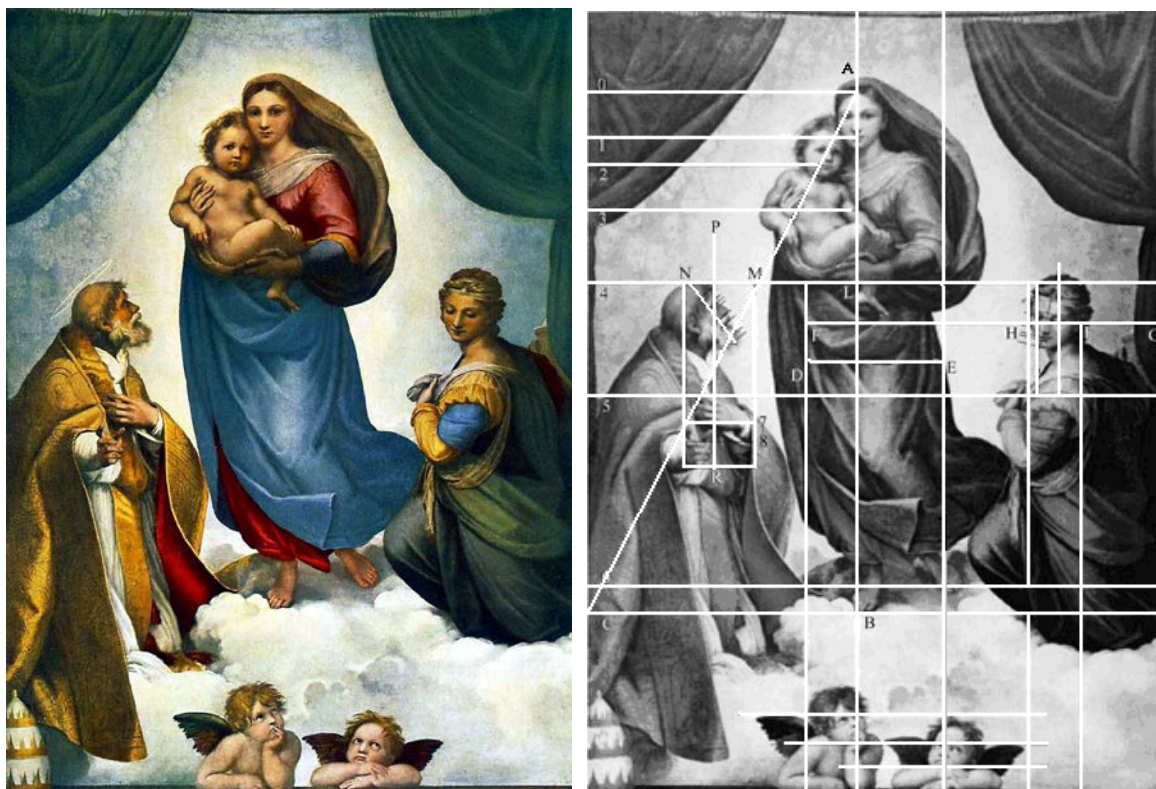
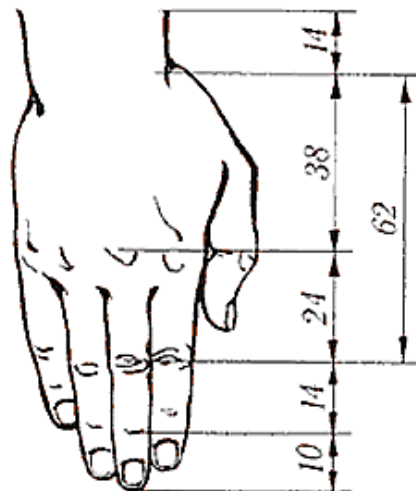
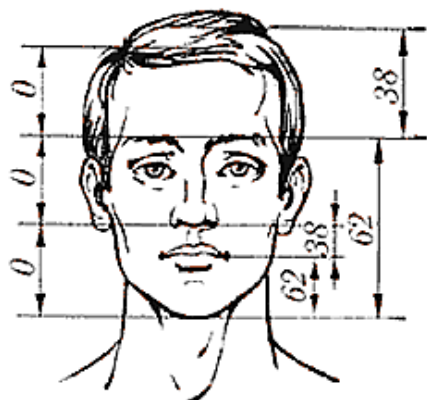


Рис. 6.4.10
“Сикстинская мадонна” Рафаэля в золотом делении

К настоящему времени собрано множество разнородных и более или менее убедительных данных, свидетельствующих, что человек – подлинное хранилище золотого сечения; это неудивительно, если исходить из того, что принцип золотой пропорции основное формообразующее начало в природе, а человек наиболее совершенное её творение. В подтверждение этих не совсем бесспорных тезисов приводят великое множество фактов, значительная часть которых, как и раньше, относится к разным частям человеческого тела включая самые мелкие. Результаты исследований, относящиеся к математически идеальному в смысле пропорций либо среднестатистическому человеку показаны на рисунках, см. [Zeising; Стахов 2006а; Тимердинг; Ward; Marquardt Beauty Analysis].



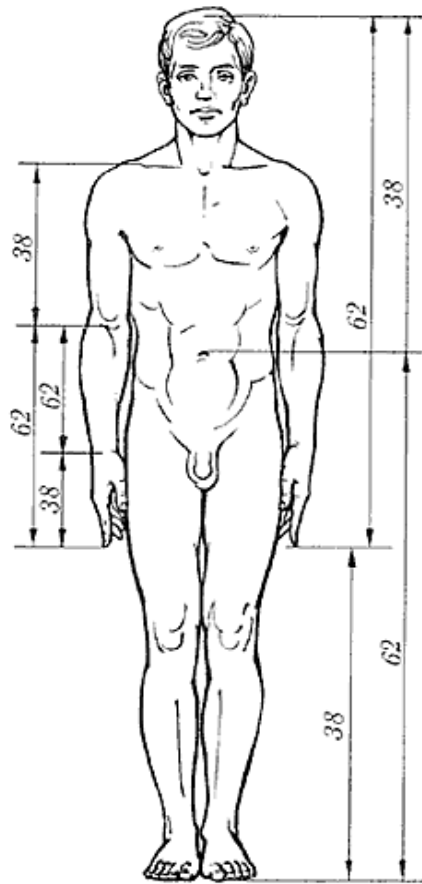
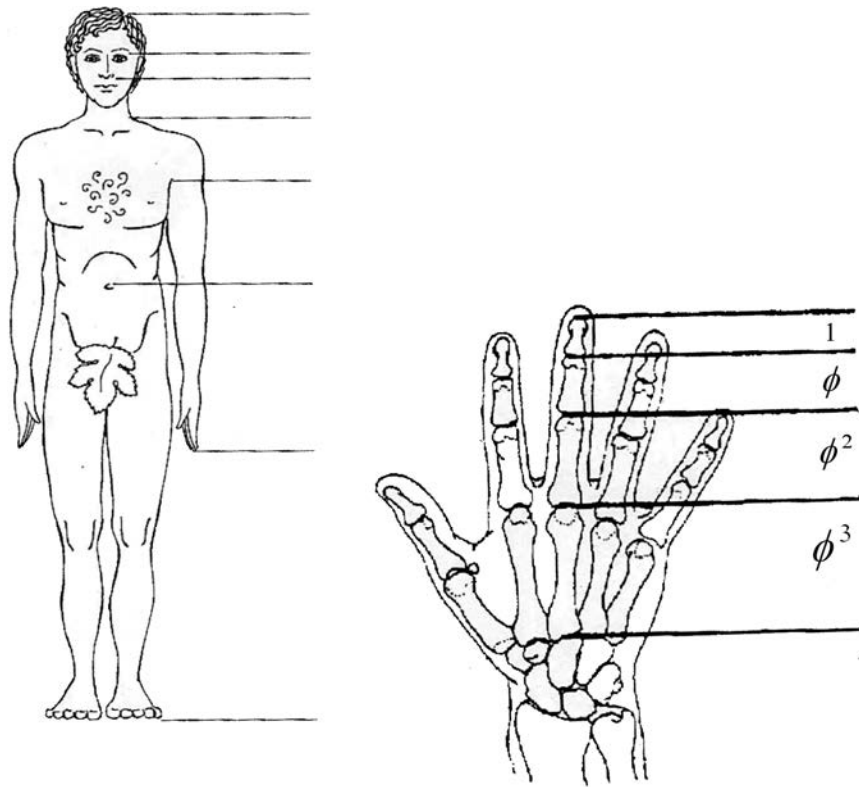


Рис. 6.4.11
Человек в золотых пропорциях

Пупок и здесь служит точкой золотого деления для всего тела. Обмеры показывают, что такая пропорция у хорошо сложенного человека окончательно формируется к 21 году, у среднестатистического новорожденного она ещё равна 1:1 и лишь к 13 годам достигается близкое к золотому значению 1,6. Идеальные пропорции головы и лица даны на верхнем левом рисунке; длина суставов среднего пальца на рисунках справа образует возрастающую последовательность $1, \phi, \phi^2, \phi^3$. Если на рисунке слева внизу расстояние между бровями и кончиком носа принять равным 1, то расстояние между бровями и макушкой, между кончиком носа и основанием шеи равно ϕ , между шеей и подмышками ϕ^2 , подмышками и пупком ϕ^3 , пупком и кончиком вытянутых вдоль тела пальцев ϕ^4 , между пальцами и пяткой ϕ^5 ; некоторые другие золотые пропорции показаны на последнем рисунке. Можно полагать, что среднестатистический человек недалёк от математически совершенного, хотя найти кого-то, у кого *всё на месте* в смысле соответствия золотому идеалу, конечно, не так просто, если вообще возможно. Насколько хорошо пропорции головы и лица реальных людей соответствуют этому идеалу можно в какой-то мере судить по рисункам в [The Human Face].

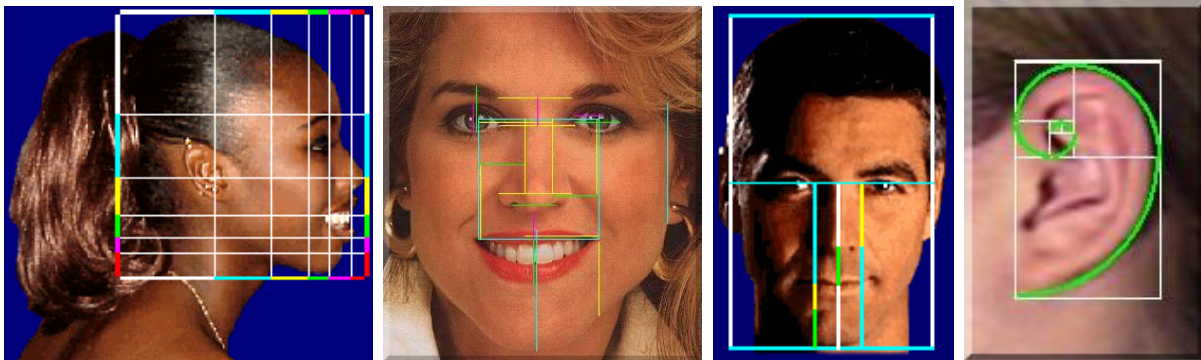


Рис. 6.4.12
Золотые пропорции головы и лица

На крайнем правом рисунке форма ушной раковины, не вполне стандартного впрочем типа, соотнесена с равнобочной логарифмической спиралью; на остальных трёх рисунках линиями различного цвета и длины показаны расстояния между “выделенными” точками лица и головы. Здесь перед нами целая россыпь золотых отношений, если только не слишком привередничать и за высокой точностью не гнаться. Возьмём, например, верхнюю сторону квадрата на рисунке слева, обозначив длину белого отрезка через B , синего C , жёлтого $Ж$, зелёного $З$, розового P , и красного K . Цепочка золотых равенств

$$\frac{B}{C} = \frac{C}{Ж} = \frac{Ж}{P} = \frac{P}{K} = \phi$$

лишь одна из многих на этих рисунках.

Придуман даже трёхконечный, с двумя соответствующими отношению $\phi:1$ растворами измеритель золотой пропорции.



Рис. 6.4.13
Измеритель золотой пропорции и его применение

Имея три точки на прямой и прикладывая концы раздвижного измерителя к двум точкам, можно говорить о наличии золотой пропорции, когда последний конец совпадает с третьей точкой, как на примере картины Мондриана и подсолнуха. Автор изобретения, дантист по профессии, обнаружил немало таких совпадений, относящихся к зубам и пропорциям правильного лица [Levin 1978; 2003]. Например, числу ϕ соответствует отношение ширины центральных резцов к боковым, отношение расстояния между близлежащими уголками глаз к ширине глаза, а общая ширина двух центральных резцов образует с их высотой прямоугольник золотого сечения.



Рис. 6.4.14

Зубы в золотой пропорции и их измерение

Есть также данные о том, что принцип золотой пропорции инстинктивно отражается в нашем почерке, в написании таких букв как заглавные В и Е. Обнаруживается золотая пропорция и в биении здорового сердца при изучении с помощью измерителя стандартной электрокардиограммы (ЭКГ). Если это действительно так, то выражение *золотое сердце* приобретает новый смысловой оттенок, касающийся уже не морально-этической, а чисто медицинской стороны дела.

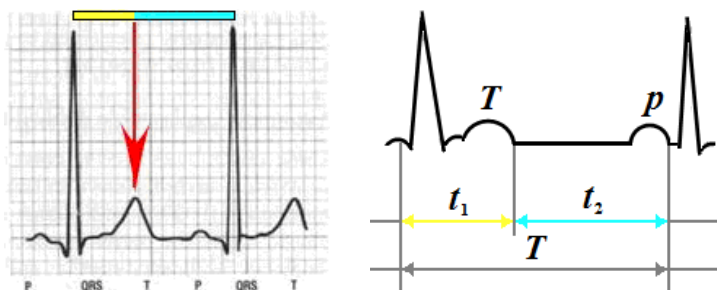


Рис. 6.4.15

Золотая пропорция в биениях здорового сердца

Кстати, в спокойном состоянии “золотое сердце” бьётся с частотой 63 удара в минуту (проверьте свой пульс). Полагают также, что отношения максимального (систолического) давления крови в аорте к минимальному (диастолическому) тоже равно числу ϕ , причём это константа, не зависящая от изменения нагрузки, которая проявляется в изменении частоты пульса [Цветков]. Стандартное объяснение подобных фактов, рассматриваемых некоторыми как явное свидетельство подстроенности человеческого организма под золотую пропорцию, достаточно тривиально. Человек как биосистема, органически связанная со всей природой, сформировался в процессе длительной эволюции, происходящей под воздействием факторов как земного, так и космического происхождения. Нет поэтому ничего удивительного в том, что в течение многих миллионов лет произошла подстройка как внешнего строения человеческого тела и пропорций между различными его частями, так и деятельности отдельных органов под гармонию и ритмы космоса, которые связаны преимущественно с золотой пропорцией. С этих позиций идея человека как микрокосма приобретает реальное и всестороннее числовое содержание; звучит всё очень красиво, но ощущается потребность новых исследований, более точных данных и углублённого теоретического анализа.

6.5. Геометрические фигуры

Вернёмся к геометрическим фигурам. Числу ϕ равно отношение сторон в равнобедренном тупоугольном треугольнике с углами в 108° , 36° , 36° и остроугольном треугольнике с углами в 36° , 72° , 72° , на которые разбивается десятиугольник.

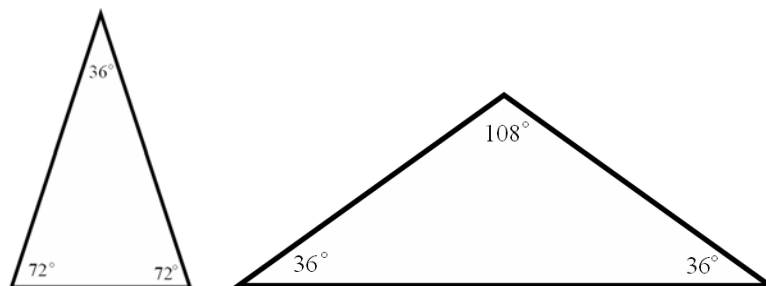


Рис. 6.5.1

Треугольники золотого сечения

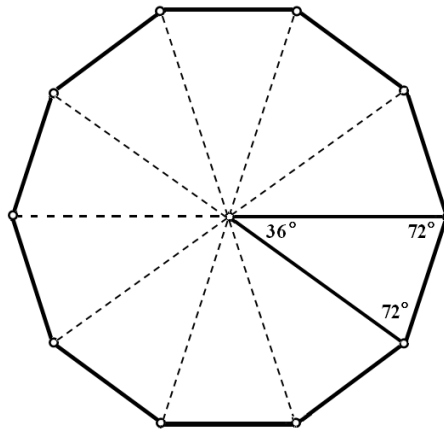


Рис. 6.5.2
Десятиугольник

Золотым может считаться и равнобедренный треугольник с углами в 54° , 54° , 72° , для которого отношение сторон равно $\sqrt{3 - \phi}$. Треугольники золотого сечения, как и прямоугольники золотого сечения, можно до бесконечности разбивать на меньшие по площади треугольники тоже золотого сечения.

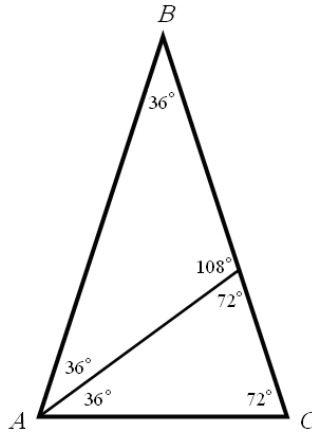


Рис. 6.5.3
Деление золотого треугольника на два новых

Кроме того есть основания считать золотым прямоугольный треугольник, для которого отношение катетов b/a равно ϕ , то есть $\text{arctg } \alpha = a/b = 1/\phi$ и угол $\alpha = 31,72^\circ$, а угол $\beta = 58,28^\circ$.

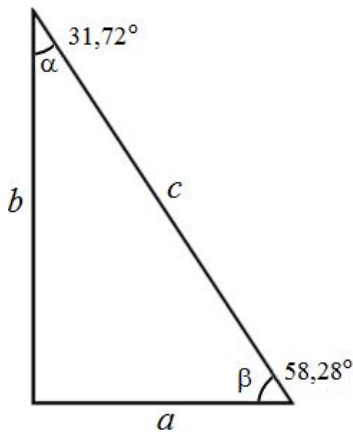


Рис. 6.5.4
Прямоугольный треугольник золотого сечения

Делит золотым сечением основание полукруга вписанный в него квадрат. Принцип золотой пропорции затрагивает “священный египетский треугольник”, свойства которого, в том числе связь с золотым сечением широко использовались, как считают одни – см. например [The Fib. Quart. 1968, 85–87], – несмотря на возражения других [Fischler; Robinson; Markowsky], строителями пирамид, в частности Хефрена, см. выше. Длина отрезка, соединяющего центр окружности, вписанной в египетский треугольник со сторонами, равными трем, четырем и пяти единицам длины, с одной из вершин, равна $2\phi - 1$; остальные два отрезка равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}(2\phi - 1) = \sqrt{10}$ [Вьлев].

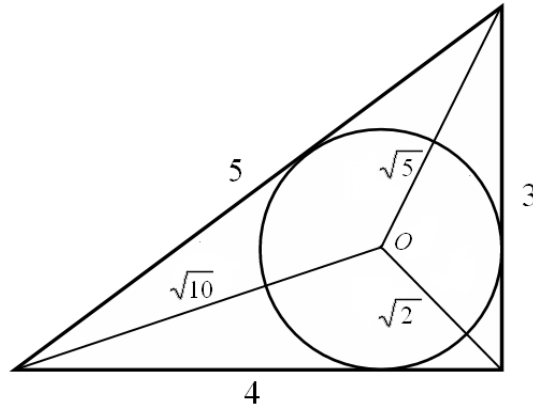


Рис. 6.5.5

Золотые пропорции в египетском треугольнике

Числом ϕ и его гомологами характеризуются правильный десятиугольник, шестиконечная “звезда Давида” и, как полагают, см. например [Quintin], некоторые мандалы, которые в космической концепции буддизма символизируют единство Вселенной в виде живописных или графических изображений с использованием геометрических фигур.

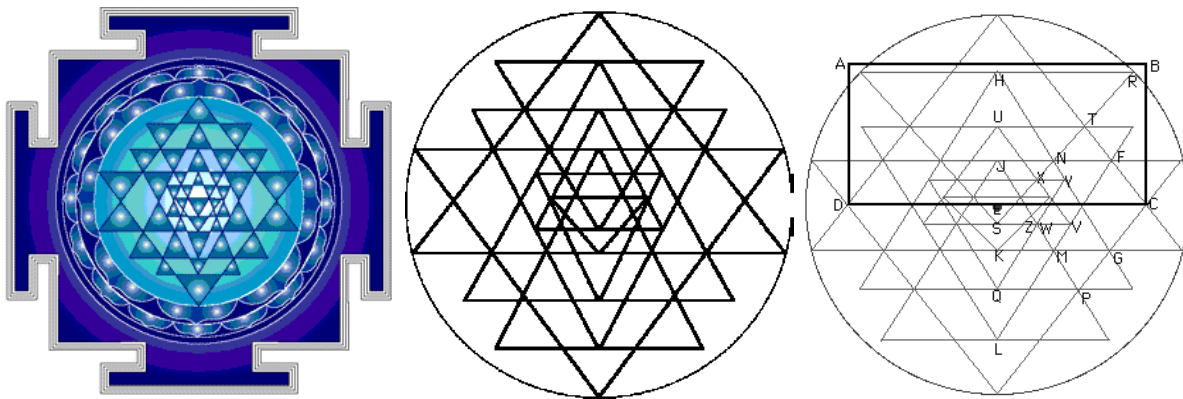


Рис. 6.5.6

Шри-янтра и прямоугольник золотого сечения

В частности, знаменитая шри-янтра, янтра сотворения, геометрически представляет собой непростую систему нескольких десятков больших и малых треугольников внутри системы концентрических колец, образующих в своей целостности завершённый образ мистической, как считают, красоты, идеального равновесия и гармонии. Шри-янтра, символизирующая гармоническое сочетание *инь* и *янь*, женского и мужского начала, действительно прекрасна, однако ни один из её треугольников золотым не является, а её причастность принципу золотого сечения в простейшем варианте вписывания золотого прямоугольника ABCD по центру всего построения, недостаточно убедительна. Это соотносённость более высокого порядка, связанная с более сложными геометрическими фигурами, первая из которых – пентаграмма.

Не вполне очевидна причастность принципу золотого сечения и восьмигранного тела на гравюре “Меланхолия” Альбрехта Дюрера. Это одно из наиболее загадочных произведений Дюрера, со сложными аллегориями, неоднозначно толкуемыми символами и первым в Европе, хитроумно составленным магическим квадратом четвертого порядка, с константой 34 – девятым членом ряда Фибоначчи, а в нижнем ряду двумя средними числами указана дата создания гравюры – 1514 г.).



Рис. 6.5.7

Гравюре Дюрера “Меланхолия”

Немалый интерес и споры, особенно в академической среде, см. [Dürer graph], вызывает большой восьмигранник в правой части картины, похожий на деформированный куб или ромбоэдр. Среди различных версий относительно того для чего и главное как великий мастер деформировал многогранник есть и такая, которая учитывает явное пристрастие Дюрера к золотому сечению и тот факт, что вершины всех его многогранников лежат на правильной сфере [Schreiber]. Не вдаваясь в подробности, скажем только, что по данной версии таинственное дюрерово тело это усечённый с двух углов куб, превращённый во вписываемый в сферу восьмиугольник с двумя равносторонне треугольными и шестью неправильной пятиугольной формы гранями. Здесь главное это углы показанного на рисунке пятиугольника, в особенности острый угол, значение которого задаёт в значительной степени конфигурацию всего тела и варьируется в довольно широких пределах в различных версиях, см [Hideko]. Угол в 72° – почти всегда добрый вестник золотой пропорции и рассматриваемая конструкция не исключение: отношения между тремя разными длинами её рёбер выражаются с помощью константы ϕ .

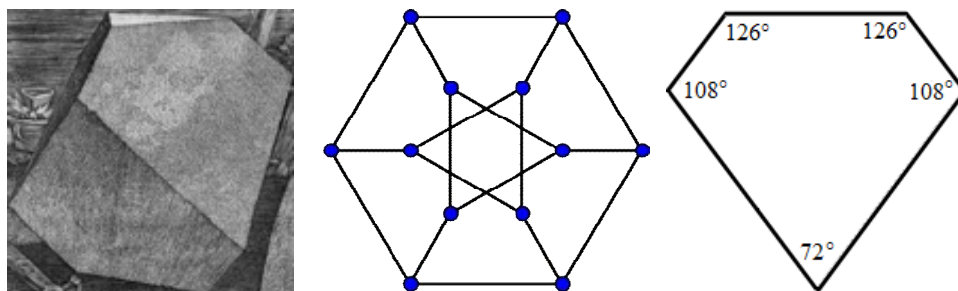


Рис. 6.5.8

Восьмиугольник в гравюре Дюрера, его предполагаемые граф и пятиугольная грань

6.6. Пентаграмма

От неправильных пятиугольников перейдём к правильным, определяющим очень важный вид симметрии в природе, – пентагональную симметрию [Шубников]. Если вершины пятиугольника соединить через одну, получится фигура, чрезвычайно богатая пропорциями золотого сечения и называемая *пентаграммой*, иногда пентаклем, пентальфой, пентагероном. Она была известна ещё шумерам и вавилонянам как оберёг от всякого зла, служила символом совершенства, эмблемой пифагорейского ордена, впоследствии позаимствованной и другими [Pentagram]. Пятиконечная звезда, получаемая соединением вершин пятиугольника через одну, сама содержит в себе пятиугольник меньшего по сравнению с исходным размера. Продолжая процесс вписывания звёзд в пятиугольники, можно получить убывающую по величине последовательность тех и других, которая чисто математически потенциально бесконечна, но фактически ограничена конечностью пространственных параметров физического мира, а в визуальном восприятии – его разрешающей способностью. Уже по рисунку

со вписанными один в другой всего четырьмя пятиугольниками и тремя звездами можно судить о том, насколько быстро происходит приближение к пороговым значениям чувственного различения геометрических фигур.

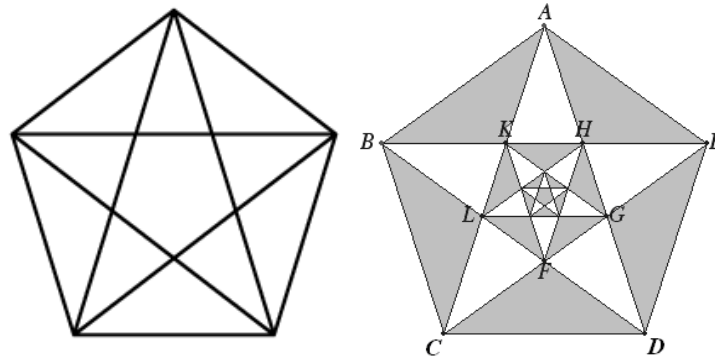


Рис. 6.6.1

Пентаграмма и звезды, последовательно вписываемые в пятиугольники

Здесь можно говорить о частном проявлении принципа золотого пропорции, что неудивительно, если учесть насыщенность пентаграммы такими пропорциями. Все треугольники, образованные сторонами пятиугольника и звезды, это равнобедренные остроугольные с углами в 36° , 72° , 72° и тупоугольные с углами 108° , 36° , 36° золотые треугольники. В пентаграмме – см. рисунок в [Тимердинг, 14] – можно выделить три различающиеся размерами группы подобных золотых остроугольных и две группы подобных тупоугольных треугольников, по пять треугольников в каждой из пяти групп.

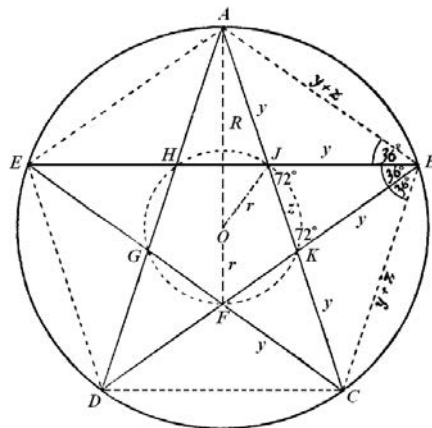


Рис. 6.6.2

Золотые треугольники в пентаграмме

По возрастанию длин сторон в пропорции ϕ это остроугольные треугольники типа BKJ , BCJ , BCE и тупоугольные типа ABJ , ABE . Таким образом,

$$\frac{AJ}{HJ} = \frac{AB}{BK} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{BJ} = \frac{AC}{AB} = \phi$$

Обозначая стороны JB и JK треугольника JBK через y и z и исключая повторяющиеся равенства, имеем:

$$\frac{y}{z} = \frac{y+z}{y} = \frac{2y+z}{y+z} = \phi$$

Не составляет особого труда и нахождение отношения радиуса R большой окружности к радиусу r малой:

$$R/r = \phi^2$$

Рассматривая последовательность уменьшающихся по величине (или увеличивающихся, если идти в обратном порядке) пентаграмм, примем длину стороны наименьшего из пятиугольников за единицу измерения. Тогда, переходя от пятиугольника к звезде, от звезды к большему пятиугольнику и т.д., получим последовательность чисел $1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \dots$, как показано на рисунке.

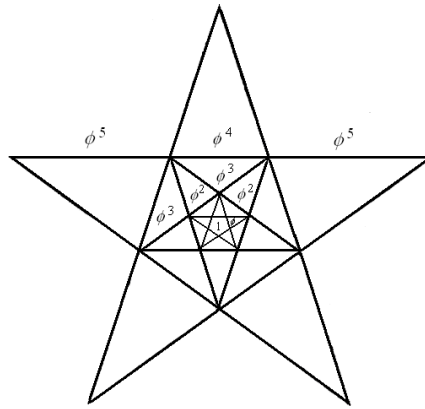


Рис. 6.6.3

Последовательность увеличивающихся по величине пентаграмм

Все стороны правильного пятиугольника равны, а линейные размеры звезды можно характеризовать сразу тремя параметрами: на нашем рисунке первые два из них равны (для средней звезды) ϕ^2 и ϕ^3 , третий же – общая сторона звезды – равна сумме $\phi^3 + \phi^2 + \phi^3$, которая, как видно из того же рисунка, равна ϕ^5 . Это не что иное как проявление уже известного нам аддитивного свойства золотой пропорции:

$$\phi^n + \phi^{n+1} = \phi^{n+2}, \text{ откуда } \phi^n + 2\phi^{n+1} = \phi^{n+3}$$

Можно, таким образом, утверждать, что в пентаграмме и все треугольники и все стороны пятиугольника и звезды и вписанные и описанные их последовательности согласуются с принципом золотой пропорции; точнее это одно из наиболее ярких его проявлений среди великого множества других. В самом общем случае, приняв в последовательности вписанных и описанных пентаграмм длину стороны какого-либо (любого) пятиугольника равной a , имеем для каждой из четырех последовательностей длин один и тот же числовой ряд типа

$$a\phi^{-2k}, a\phi^{-2k+2}, a\phi^{-2k+4}, \dots, a\phi^{-2}, a, a\phi^2, a\phi^4, \dots, a\phi^{2m-2}, a\phi^{2m}, \dots$$

то есть геометрическую прогрессию со знаменателем ϕ^2 . Интересно, что в границах физического мира предельные значения коэффициентов k и m большими числами быть не могут. Так, если последовательность возрастающих по величине пентаграмм начинать с пятиугольника величиной с атом ($\sim 10^{-8}$ см), то уже при $m = 55$ размеры пентаграммы превысят линейные размеры Солнечной системы, а при $m = 89$ и существующей Вселенной. Появление фибоначчиевых чисел 55 и 89 здесь скорее всего случайно, поскольку выбор исходного пятиугольника достаточно произволен. К слову сказать, для всего универсума физической реальности коэффициент m согласно изложенному в [четвертой главе](#) приблизительно, а может и точно равен 300. Разбиение звезды симметричным образом по “лучам” в пяти направлениях производится как показано на следующем рисунке, см. [Rawles]; для большей наглядности звезда соответствующим образом раскрашена и вписана в правильный пятиугольник, круг и квадрат.

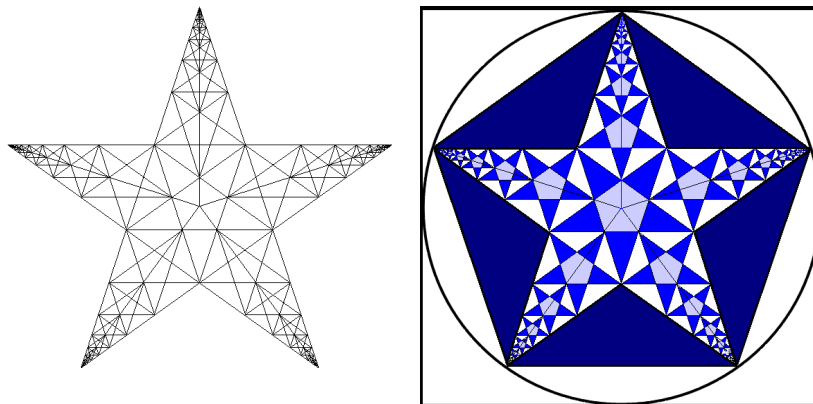


Рис. 6.6.4

Симметричное разбиение звезды в пяти направлениях и звезда, вписанная последовательно в пятиугольник, круг и квадрат

Мы видим всё те же треугольники, пятиугольники и звезды, но в несколько иной конфигурации и в другой, если приглядеться, пропорции убывания: в геометрической прогрессии со знаменателем ϕ , а не ϕ^2 .

Пентаграмма – прекрасный повод вернуться к вопросу об идеальных пропорциях человеческой фигуры. Таковыми принято считать те, что открыты Витрувием и изображены на классическом рисунке Леонардо да Винчи, без которого не обходится ни одно серьезное обсуждение данного вопроса. По Витрувию

- ширина ладони составляет четыре пальца
- ширина ступни составляет четыре ладони
- ширина локтя составляет шесть ладоней
- высота человека составляет четыре локтя (соответственно 24 ладони)
- шаг равняется четырем локтям
- размах рук равен высоте человека
- расстояние от линии волос до подбородка составляет $1/10$ его высоты
- расстояние от макушки до подбородка – $1/8$ высоты
- расстояние от макушки до сосков – $1/4$ высоты
- максимум ширины плеч – $1/4$ высоты
- расстояние от локтя до кончика руки – $1/4$ высоты
- расстояние от локтя до подмышки – $1/8$ высоты
- длина руки – $1/10$ высоты
- расстояние от подбородка до носа – $1/3$ длины лица
- расстояние от линии волос до бровей – $1/3$ длины лица
- длина ушей – $1/3$ длины лица [Витрувий]

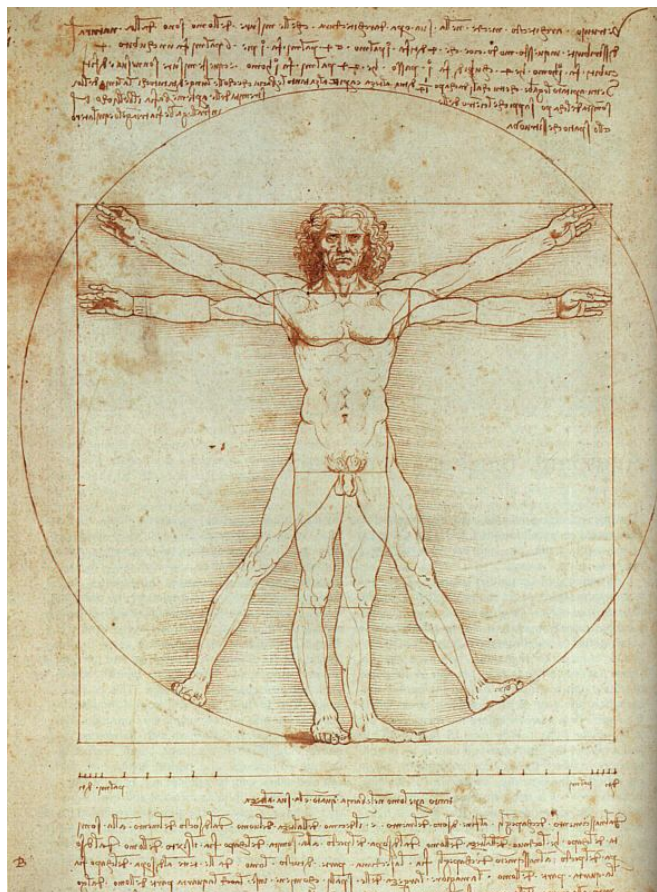


Рис. 6.6.5
Витрувианский человек по Леонардо

Эти пропорции стали со временем каноническими; на рисунке Леонардо витрувианский человек изображен посредством вписанной в круг и квадрат мужской фигуры с широко разведенными в стороны руками в двух наложенных одна на другую позициях, которым соответствуют четыре комбинации рук и ног. Хотя фигуры золотой пропорции на рисунке не обозначены, достаточно провести дополнительные линии, чтобы всё стало ясно.

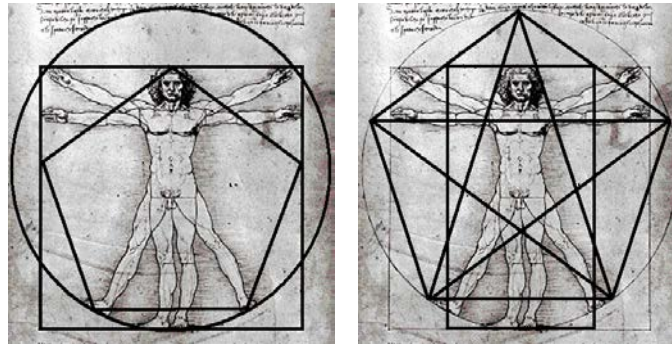


Рис. 6.6.6

Золотые пропорции в рисунке Леонардо

Здесь выявлены без всяких домыслов и необязательных построений не показанные в оригинале фигуры: прямоугольник и треугольники золотого сечения, правильные пятиугольники разных размеров и пентаграмма. Заметим, что размах рук математически идеального человека равен его росту, а пупок, как всегда делящий фигуру в золотой пропорции, находится в центре круга, большой пентаграммы и звезды.

Хорошо вписывается в пентаграмму и человек на рисунке младшего современника Леонардо оккультиста, астролога и алхимика Агриппы Неттесгеймского (Heinrich Cornelius Agrippa von Nettesheim, 1486 (1487) – 1535).



Рис. 6.6.7

Человек в пентаграмме на рисунке Агриппы

Символом применения золотой пропорции в искусстве может также служить изображение головы медузы Горгоны в её соотносённости с двумя вписанными в концентрические окружности большими и двумя малыми пентаграммами.

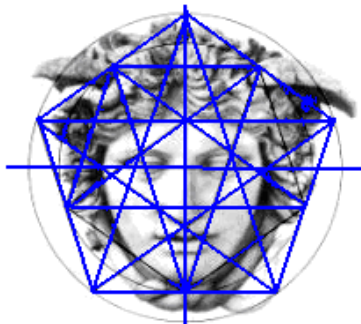


Рис. 6.6.8

Анализ пропорций головы Горгоны четырьмя пентаграммами

Пентаграмма привлекает к себе внимание по меньшей мере уже пять тысячелетий. Ей нередко приписывалась мистическая сила магического талисмана, защищающего от злых духов. Это тот самый “волшебный знак у порога”, который, будучи плохо начертан, дал возможность Мефистофелю войти, но не позволял выйти из комнаты Фауста [Гёте, 78]. Так что если хочешь избежать нежелательных сюрпризов от нечистой силы, надо научиться аккуратно чертить пятиконечные звезды, хотя от неприятностей они не всегда спасают, о чём начиная с пифагорейцев свидетельствует богатый опыт. Впрочем, не менее эффективным средством борьбы с происками нечистой силы может, вероятно, служить логарифмическая спираль. Ведь магическая сила константы ϕ подкрепляется здесь явным присутствием не менее могущественных математических реалий – фундаментальных констант первого ранга.

6.7. Логарифмическая спираль и ФМК

Свойство непрерывной самодубликации, воспроизведения, сохранения исходной геометрической формы, отмеченное выше для остроугольных и тупоугольных треугольников, своеобразно отражается в кривой, называемой *логарифмической спиралью*. Недостатка в восторженных эпитетах (обычно, надо сказать, сопровождающих всё так или иначе связанное с золотым сечением) по поводу её исключительности и совершенства никогда не было и в этом случае они, пожалуй, более уместны чем во многих других. Геометрическое построение спирали, близкой к логарифмической, можно осуществить методом *приближённого* построения спиралей, предложенным Дюрером и, видимо, известным ещё Витрувию. Возьмём прямоугольник золотого сечения $N_1M_1M_2M_3$ с отношением длин сторон N_1M_3 и N_1M_1 равным ϕ и впишем в него квадрат $N_1M_1N_2M_4$. Полученный при этом прямоугольник $N_2M_2M_3M_4$ тоже фигура золотого сечения, поскольку $M_2M_3/M_3M_4 = \phi$, что вытекает из соотношения $1/(\phi - 1) = \phi$. Точно таким же способом из $N_2M_2M_3M_4$ получим $N_3M_3M_4N_5$ и так далее (ср. Парфенон на рис. 6.1.1 и Мону Лизу на последнем рисунке в серии 6.4.9). Неограниченно продолжая это деление, образуем последовательность прямоугольников золотого сечения, убывающую в отношении ϕ и асимптотически приближающуюся к точке, пересечения диагоналей M_1M_3 и M_2M_4 , называемой полюсом. Соединяя точки N_1 и N_2 , N_2 и N_3 , N_3 и N_4 и т.д. четвертями дуг окружностей соответствующих радиусов, получим кривую, нередко называемую *равнобочной спиралью*.

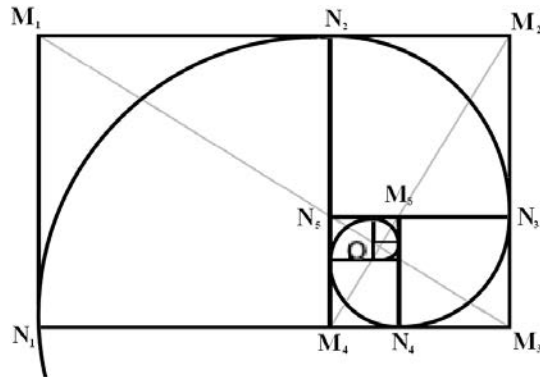


Рис. 6.7.1
Построение равнобочной спирали

Отметим, что точки N_2, N_3, N_4, \dots , делящие прямоугольники золотым сечением, лежат на кривой. Сходное построение осуществляется последовательным делением треугольников золотого сечения.

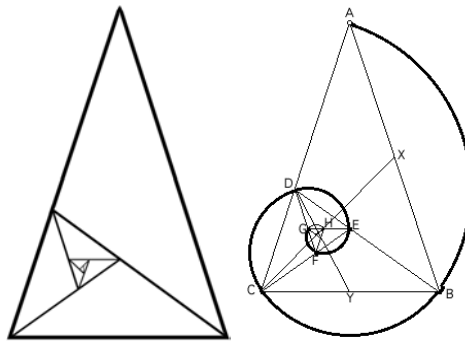


Рис. 6.7.2
Построение спирали делением золотого треугольника

Но чтобы лучше понять особенности спирали золотого сечения как частного представителя семейства кривых определённого типа, требуются некоторые сведения о семействе в целом.

Известно, что форма логарифмической спирали использовалась уже в древнегреческой и римской архитектуре на капителях ионийского ордера, а изучением её особенностей занимались многие выдающиеся исследователи – Декарт, Торричелли, Якоб Бернулли, на кого как и на Гёте она произвела особенно сильное впечатление.

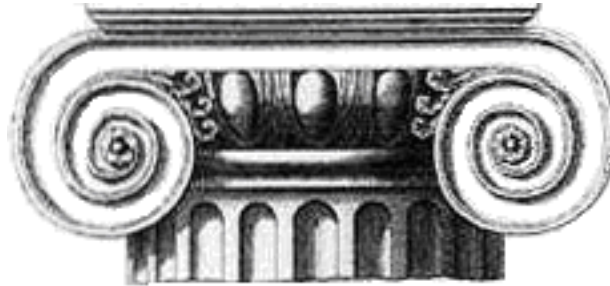


Рис. 6.7.3
Ионийский ордер

Глубинная математическая природа логарифмической спирали раскрывается при её аналитическом представлении в полярных координатах. Обозначив радиус-вектор через r , угол поворота через θ , значение r в точке $\theta = 0$ через a , имеем

$$r = a e^{k\theta} \quad (6.7.1)$$

в логарифмическом варианте

$$\ln(r/a) = k\theta \quad (6.7.1')$$

и отсюда видно, что при постоянных a и k логарифм радиуса-вектора движущейся по кривой точки меняется пропорционально углу поворота θ , и становится понятным название этой спирали (для краткости *логарифмическую спираль* будем называть и просто *спиралью*). Важно однако другое. Геометрическое построение спирали методом Дюрера указывает на её связь с золотым сечением, между тем в аналитическом выражении для спирали константа ϕ не фигурирует. Уравнение (6.7.1) и его логарифмический двойник (6.7.1') составлены из следующих элементов:

- e фундаментальная константа
- a, k параметры, характеризующие конкретную спираль
- θ независимая переменная
- r функциональная переменная

В функциональной связи этого типа ничего особенного на первый взгляд нет: обычная экспоненциальная, или логарифмическая, функция одной переменной в полярных, напомним, координатах с обычным произвольным множителем a и постоянным для данной спирали параметром k . Нетрудно догадаться, что вся соль именно в этом параметре. Однако до более полного знакомства с семейством спиралей конкретизировать “золотое” значение постоянного параметра не будем, а просто примем это как ещё не уточнённый, но бесспорный факт, приближённо представленный на приведённом выше рисунке. Появление *материнских функций* e^z и $\ln z$ в теории золотого сечения весьма примечательно. Строго говоря, следует говорить о наличии золотой пропорции в одной из простейших модификаций универсального *экспоненциально-логарифмического представления*, а не наоборот. Да и само название спирали свидетельствует о первичности логарифмической связи относительно золотого сечения для данной фигуры. Из содержащего экспоненту уравнения (6.7.1) или (6.7.1') аналитически выводятся все основные характеристики логарифмической спирали, математическая теория которой дана, например, в работах [Савелов; Lockwood]. После долгих блужданий по извилинам теории и практики золотой пропорции мы реально приблизились к её математическим истокам. И хотя наш “золотой тур” ещё далек от завершения и вскоре будет продолжен, впервые появился удобный случай напомнить об истинной цели настоящей и последующей главы и положить первые камни в основание модернизированной теории числа ϕ и принципа золотого сечения как фрагмента теории ЛМФ [Аракелян 2007].

Ситуация сейчас такова. Логарифмическая спираль, являющаяся носителем золотого сечения и одноимённого принципа, бесспорно не менее значительна и интересна чем любая другая из обсуждаемых здесь геометрических фигур включая “магическую” пентаграмму и ещё не упомянутые геометрические тела. В этом мы убедимся очень скоро – при рассмотрении основных свойств спирали. Само рассмотрение целиком сводится к

анализу экспоненциальной или обратной ей логарифмической функции от одной переменной. Достаточно простая аналитическая форма

$$r = a\psi(k\theta), \text{ или } \alpha(r/a) = k\theta \quad (6.7.2)$$

– без бесконечных сумм и произведений, без интегралов и производных, словом без операции предельного перехода \lim , – даёт основания для некоторых предположений предварительного пока характера. Совершенно очевидно, что математическая теория спирали, из которой вытекают те её особенности, которые произвели столь сильное впечатление на многих, есть прямое следствие некоторых свойств **материнских функций** $\psi(k\theta)$ или $\alpha(r/a)$. Чисто формальный анализ этих функций при соответствующих содержательных интерпретациях даёт возможность получить любое из ранее представленных соотношений для константы ϕ и чисел Фибоначчи. Естественно предположить, что вся математическая теория золотой пропорции, принцип золотого сечения при всём разнообразии его форм и применений не выходит за рамки простейших свойств материнских функций и **фундаментальных математических констант**. Другими словами, можно думать, что математическая теория золотого сечения в полном её объёме является непосредственным приложением, чем-то вроде бокового ответвления, если снова прибегнуть к **образу дерева**, от математического ствола (**AGE**) теории ЛМФ [Аракелян 2007; 2007a; Arakelian]. Справедливость этого тезиса мы можем показать пока только для спирали, а общая теория будет изложена позже.

Возьмём для определённости более удобную для анализа экспоненциальную форму (6.7.1) и в зависимости от изменения угловой переменной θ рассмотрим поведение функциональной переменной r , а также неопределённой ещё переменной k . Ясно, что с неограниченным увеличением или уменьшением θ неограниченно растёт или уменьшается r :

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} r = \infty, \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} r = 0$$

Важно однако понять и наглядно представить, как, по какому закону это происходит. Для этого отложим отрезок $OA = a$ на полярной оси OP и отрезок $OB = a \exp(k \cdot \pi/2)$ на вертикали к ней. Построив далее прямоугольную ломаную $ABCDE \dots$, из подобия треугольников $OAB, OBC, OCD, ODE, \dots$ имеем:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OE} = \dots = \frac{a}{e^{k\pi/2}} = \frac{a}{e^{k\pi}} = \frac{a}{e^{k3\pi/2}} = \frac{a}{e^{k2\pi}} = \dots$$

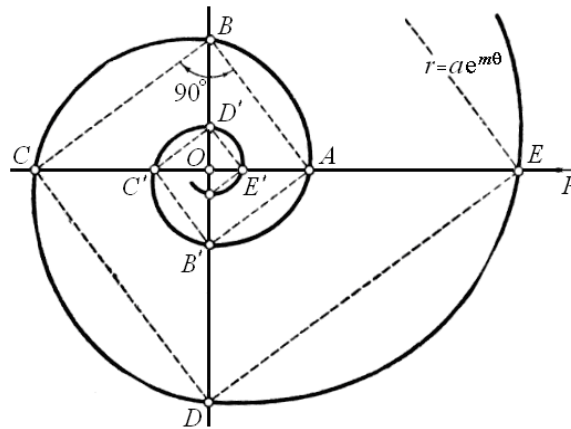


Рис. 6.7.4

Изменение функции $r = a e^{k\theta}$ с изменением угла θ

С изменением переменной θ по закону $n \cdot \pi/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \dots \quad (6.7.3)$$

функция $r(\theta)$ меняется по закону

$$a, a e^{k\pi/2}, a e^{k\pi}, a e^{k3\pi/2}, a e^{k2\pi}, a e^{k5\pi/2}, a e^{k3\pi}, a e^{k7\pi/2}, \dots \quad (6.7.4)$$

Аналогично для отрицательных значений θ . Следовательно, изменению переменной в **арифметической** прогрессии соответствует изменение функции r в **геометрической** прогрессии со знаменателем $e^{k\pi/2}$. Интересный результат, тем более что в знаменателе геометрической прогрессии наряду с переменной k появились **проточисла** π и 2 – привычные спутники константы e . А изменение функции по закону $r \sim (e^k)^n$ при изменении аргумента по закону $\theta = n \cdot \pi/2$ даёт возможность представить формулу логарифмической спирали в виде

$$r = a(e^k)^n = a(e^k)^{2/\pi \cdot \theta} = a(e^{2k/\pi})^\theta \quad (6.7.5)$$

Обозначая постоянную для данной спирали величину $a e^{\frac{2k}{\pi}}$ символом s , получим очень простую формулу

$$r = \pm s^\theta \quad (s > 0, -\infty < \theta < \infty) \quad (6.7.6)$$

из которой следует, что показательная функция в полярных координатах всегда представляет логарифмическую спираль. При этом её закрученность в одну или другую сторону зависит от знака перед s , а степень закрученности – от конкретного значения самой s .

Обозначим угол между радиусом-вектором и касательной к кривой через φ и найдём производную $dr/d\theta$:

$$r'_\theta = k a e^{k\theta} \quad (6.7.7)$$

С другой стороны известно, что для любой кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = F(\theta)$, имеет место формула

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{r'_\theta} \quad (6.7.8)$$

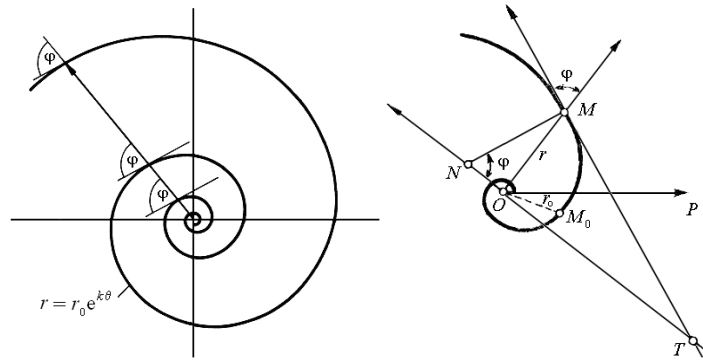


Рис. 6.7.5

Постоянный угол логарифмической спирали

Сравнивая (6.7.1), (6.7.7) и (6.7.8), получим

$$\operatorname{tg} \varphi = 1/k, \quad k = \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{const}$$

следовательно $\varphi = \operatorname{const}$, то есть угол между радиусом-вектором и касательной к кривой есть величина постоянная для каждой спирали. Поэтому логарифмическую спираль и называют нередко *равноугольной*.

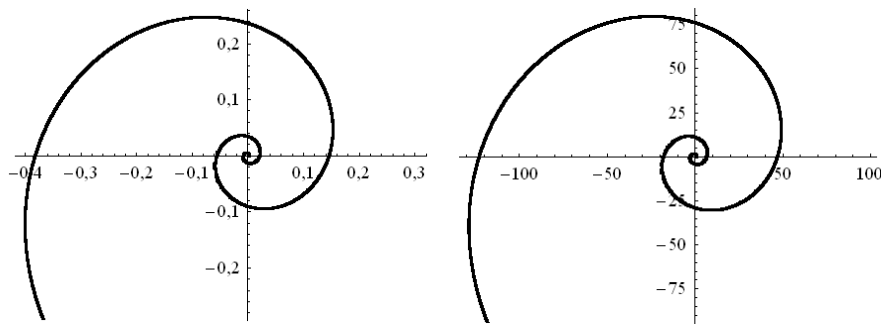


Рис. 6.7.6

Золотая спираль для интервалов $-\pi \leq \theta \leq 0$ и $0 \leq \theta \leq \pi$

Сохранение формы равноугольной равнобочной, золотой спирали хорошо видно из сравнения двух участков кривой для произвольно взятых равных по величине, но несимметричных относительно точки 0 интервалов. Кривые, естественно с учётом несоблюдения равенства масштабов, идентичны и только цифры на координатных осях говорят, что они относятся к разным интервалам значений переменной.

Уравнение (6.7.7) для любой спирали приводится к виду

$$r = a e^{\theta \operatorname{ctg} \varphi} \quad (6.7.9)$$

означающему появление ещё одной ФМК i под знаком тригонометрической функции

$$\operatorname{ctg} \varphi \equiv \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} i$$

Формула (6.7.9) определяет целое семейство логарифмических спиралей, различающихся углом φ . Если $\varphi = \pi/2$, то $\operatorname{ctg} \varphi = 0$ и тогда имеем $r = a$, то есть окружность. Следовательно, окружность может рассматриваться как частный случай логарифмической спирали когда радиус-вектор пересекает касательную под прямым углом.

Если изречение Якова Бернулли “Изменная, я воскресаю той же”, вырезанное вместе со спиралью (по ошибке архимедовой, вместо логарифмической [Livio]) на надгробии его могилы, перевести на строгий язык математических формул, получим ряд соотношений, среди которых почётное место займёт только что рассмотренное свойство. Назовем его *законом сохранения угла между радиусом-вектором и касательной* и особо отметим, что этот закон – прямое следствие универсального *закона сохранения экспоненты относительно дифференцирования*, о котором шла речь в [первой части](#):

$$\psi' = \psi, \quad \text{если} \quad \psi = \psi(z)$$

в более общем случае

$$\psi' = a\psi, \quad \text{если} \quad \psi = \psi(az), \quad a = \operatorname{const}$$

Это роднит спираль с фундаментальными физическими законами сохранения, которые также были получены в [главе 3](#) как следствие экспоненциально-логарифмического представления функций и величин. В сущности логарифмическую спираль можно рассматривать как геометрическую интерпретацию законов сохранения относительно различных математических преобразований.

Простейшее преобразование, состоящее в повороте полярной оси вокруг полюса, не только сохраняет форму спирали, но даёт возможность избавиться от множителя a , точнее обратить его в 1. Отсюда любая спираль может быть приведена к более простому виду

$$r = e^{k\theta} = e^{\theta \operatorname{ctg} \varphi} \tag{6.7.10}$$

с единственным постоянным параметром φ . Кстати, в декартовых координатах (x, y) и в параметрической с переменной t запись уравнение имеет менее компактную форму:

$$x^2 + y^2 = e^{\operatorname{arctg}(y/x) \operatorname{ctg} \varphi} \tag{6.7.11}$$

$$x = e^{t \operatorname{ctg} \varphi} \cos t, \quad y = e^{t \operatorname{ctg} \varphi} \sin t \tag{6.7.12}$$

Вполне очевидно, что члены бесконечного семейства логарифмических спиралей отличаются лишь множителем в показателе степени экспоненты, конкретнее углом φ между касательной и радиусом-вектором. Ещё раз убеждаемся в том, что из экспоненты и логарифма при соответствующем толковании и использовании лишь первичных средств можно получить фактически всё: континуум чисел, все аналитические функции, общую форму числа, основные физические уравнения и вот теперь спираль со всеми её свойствами и связями. Последний случай отличается от других тем, что явная экспоненциальная форма аналитической связи дана здесь с самого начала. Рассматривая спираль, мы фактически раскрываем свойства материнских функций ψ и α в их отношении к законам сохранения и, добавим, изменения (преобразования) включая такую специфическую их разновидность как принцип золотого сечения.

До сих пор мы имели дело с одной сохраняющейся для данной спирали величиной – углом φ , а также с сохранением аналитической формы относительно вращения полярной оси вокруг полюса, посредством которого всегда можно избавиться от множителя a . Однако способность спирали оставаться неизменной, тождественной самой себе сохраняется и при более сложных математических преобразованиях, связанных в частности с понятием кривизны. Радиус кривизны любой непрерывной плоской кривой в полярных координатах определяется по формуле

$$R = \frac{(r^2 + r_\theta^2)^{3/2}}{r^2 + 2r_\theta^2 - r r_\theta''} \tag{6.7.13}$$

содержащей первую и вторую производные по переменной θ . Подставляя $r = a e^{k\theta}$ и учитывая, что $k = \operatorname{ctg} \varphi$, получим для логарифмической спирали достаточно простую формулу

$$R = \frac{r}{\sin \varphi} \tag{6.7.14}$$

Это даёт легкий способ построения центра кривизны, на котором, собственно говоря, основан способ построения спирали Дюрером, указывающий на её связь с золотым сечением. Умея находить полярные координаты центра

кривизны спирали, нетрудно найти уравнение её *эволюты*, которая определяется как геометрическое место центров кривизны данной кривой. Уравнение эволюты в новых полярных координатах (r_1, θ_1) имеет вид

$$r_1 = ka e^{k(\theta_1 - \pi/2)}$$

где $\theta_1 = \theta + \pi/2$. Мы знаем, что поворотом полярной оси вокруг полюса множитель $a_1 = ka$ может быть “уничтожен”, и тогда приходим к исходной спирали. Следовательно, достаточно сложное, вообще говоря, математическое преобразование – нахождение эволюты для логарифмической спирали означает лишь поворот исходной спирали вокруг полюса и фактически ничего не меняет. Далее исходная по отношению к своей эволюте кривая называется *эвольвентой*; даже без вычислений легко догадаться, что эвольвента логарифмической спирали есть та же спираль, повернутая вокруг полюса. Ясно, что и при бесконечном повторении операций нахождения эволют и эвольвент спирали никаких изменений помимо вращения вокруг полюса произойти не может. Отметим ещё раз, что это прямое следствие уникального закона сохранения экспоненты

$$\psi' = \psi, \text{ обобщённо } \psi^{(n)} = \psi$$

Всё сказанное относительно эволют и эвольвент относится и к *подере*, которая есть геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к кривой, а также к *антиподере* – исходной относительно своей подеры кривой (аналогично паре эволюта – эвольвента).

В плане связей спирали с фундаментальными математическими константами представляет интерес и определение длины дуги спирали. Согласно общей теории длина дуги $l(\theta)$ непрерывной плоской кривой в полярных координатах между двумя точками с координатами (r_0, θ_0) и (r, θ) определяется формулой

$$l(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r_0'^2} d\theta$$

Подставляя (6.7.1), после очевидных преобразований приходим к формуле

$$l(M_0, M) = \frac{r-r_0}{\cos \varphi}$$

Устремляя точку M_0 к полюсу, другими словами устремляя r_0 к нулю, получим для длины дуги от полюса до произвольной точки M ещё более простое выражение

$$l(O, M) = \frac{r}{\cos \varphi} \tag{6.7.15}$$

Оно содержит переменную r , параметр φ и константы $e, i, 2$ под знаком косинуса. Вспомним теперь, что для фундаментальной **константы ш** имеет место равенство $\cos \text{ш} = \text{ш}$; отсюда если $\varphi = \text{ш}$ длина дуги выражается простейшей формулой

$$l(O, M) = r/\text{ш} \tag{6.7.16}$$

содержащей переменную r и единственную константу ш . Этому частному представителю семейства спиралей соответствует угол между касательной и радиусом-вектором в $\pm 0,739085\dots$ радиан, или в $\pm 180^\circ \cdot \text{ш}/\pi \approx \pm 42,346^\circ$. Между прочим, уравнение архимедовой спирали в полярных координатах имеет как раз форму $r = a\varphi$, где a постоянная данной спирали, следовательно для любой точки логарифмической ш -спирали длина её дуги равна радиусу-вектору в той же точке архимедовой спирали, для которой $a = 1/\text{ш}$. Интересно, реализуется ли в природе спираль с таким углом и если да, то где, как и почему?

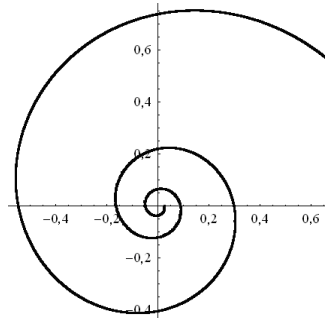


Рис. 6.7.7

Спираль, у которой $\varphi = \text{ш}$

Отметим также, что логарифмическую спираль можно определить и как интегральную кривую дифференциального уравнения $dr/dq = kr$, сходного с уравнением $y' = y$, описывающим великое множество процессов живой и неживой природы включая радиоактивный распад ядер, процессы роста и уменьшения.

6.8. Золотая спираль

Вооружившись всеми необходимыми данными о семействе логарифмических спиралей, можно наконец целиком перенести внимание на золотую спираль. Поскольку все индивидуальные особенности отдельных спиралей обусловлены разницей углов ϕ между радиусом-вектором и касательной к кривой, надо прежде всего знать, чему равен угол в данном случае. Приведённый выше метод построения равнобочной спирали и сопровождающий его рисунок указывает на угол близкий к 70° . А точная формула интересна и достаточно проста:

$$\operatorname{ctg} \phi = \frac{\ln \phi}{\pi/2} \quad (6.8.1)$$

Отсюда

$$\phi = \operatorname{arccotg}(2 \ln \phi / \pi) = 1,27352\ 50220\ 89591\dots \quad (6.8.2)$$

или в градусах

$$\phi \approx 72,96760\ 88700\ 38523^\circ \approx 73^\circ \quad (6.8.3)$$

Это и есть то значение угла ϕ между радиусом-вектором и касательной, которое выделяет золотую спираль в бесконечном множестве логарифмических спиралей. Получаемое для неё подстановкой (6.8.1) уравнение

$$r = e^{\frac{2 \ln \phi}{\pi} \theta} = \phi^{\frac{2}{\pi} \theta} \quad (6.8.4)$$

– частный случай ($a = 1$, $e^k = \phi$) общего уравнения (6.7.5).

Любопытно, что первые четыре десятичных знака значения угла ϕ в радианах совпадают (относительное отклонение 0,02%) с десятичными знаками отношения $4/\pi$, которое, как мы знаем из рассмотрения пропорций пирамиды Хеопса, в свою очередь приблизительно равно (с отклонением 0,1%) константе второго золотого сечения $\sqrt{\phi}$. Отсюда приближённые равенства $\phi \approx 4/\pi \approx \sqrt{\phi}$, а значит логарифмические спирали с углами

$$\phi' = 4/\pi \approx 72,951^\circ \quad \text{и} \quad \phi'' = \sqrt{\phi} \approx 72,881^\circ$$

близки к золотой и визуально неотличимы от неё. Полушутя, полусерьёзно можно сказать, что любая спираль в природе или искусстве, расцениваемая обычно как золотая, с равным успехом может считаться ϕ' - или ϕ'' -спиралью. Любопытно и другое. Если “тайну” пропорций пирамиды Хеопса не искать по принятому в её линейных или угловом параметрах, а каким-то образом, в духе сакральной геометрии связать с логарифмической спиралью, то обсуждаемые в разделе 6.2 π - и ϕ -версии перестанут быть альтернативными. Они как бы объединяются в единое целое формулой (6.8.4): используя угловые обозначения ϕ' и ϕ'' , её можно записать в виде двух точных равенств:

$$r = \phi'^{(\phi''/2)\theta} = (\phi'')^{\phi'\theta} \quad (6.8.4')$$

Вот вам и очередная “разгадка” тысячелетней тайны удивительных пропорций Большой пирамиды; остаётся “только” доказать знакомство древних египтян с особенностями логарифмической спирали, см. впрочем [Osborn; Бабанин], и её соотнесённость с архитектурой пирамиды Хеопса.

Геометрические фигуры, соответствующие уравнению (6.7.10) и с близкими к золотому ϕ углами ϕ' и ϕ'' , относятся к семейству логарифмических квазизолотых спиралей. Среди известных фигур есть и другие квазизолотые, но уже не логарифмические спирали, нередко ошибочно отождествляемые с золотой. Это, например, фигура на рис. 6.7.1, построенная предложенным Дюрером методом, то есть получаемая соединением вершин изменяющихся в пропорции ϕ квадратов четвертями окружностей. О том, насколько хорошо подобная квазизолотая спираль аппроксимирует золотую можно судить по рисунку, на котором она представлена зелёным цветом, золотая – красным, а жёлтым обозначены участки их совпадения.

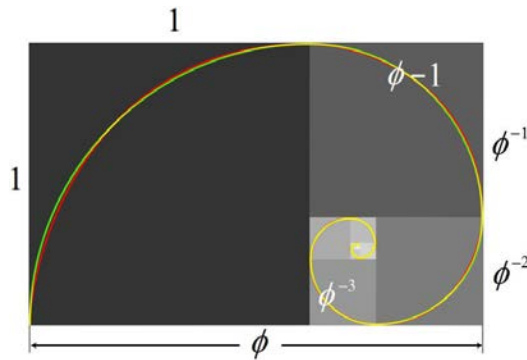


Рис. 6.8.1

Квазизолотая нелогарифмическая спираль, построенная по методу Дюрера, в сравнении с золотой

А формула (6.8.4) истинной золотой спирали это прежде всего формула связи числа ϕ с материнскими функциями и ФМК, формула, в которой изменение переменной в арифметической прогрессии влечет за собой изменение функции в геометрической прогрессии, формула, позволяющая преобразовать экспоненциальную функцию в линейную с появлением чисел Фибоначчи. Первое вполне очевидно, а изменение функции r по закону геометрической прогрессии в зависимости от изменения аргумента θ в арифметической прогрессии, являющееся общим свойством всех логарифмических спиралей, показано ниже.

θ	0	$\pi/2$	$2 \cdot \pi/2$	$3 \cdot \pi/2$	$4 \cdot \pi/2$	$5 \cdot \pi/2$...	$n \cdot \pi/2$...
r	1	ϕ	ϕ^2	ϕ^3	ϕ^4	ϕ^5	...	ϕ^n	...

Поворот вокруг полюса на четверть окружности сопровождается увеличением радиуса-вектора в ϕ раз, поэтому например любая проходящая через полюс прямая последовательно пересекает спираль в точках, относящихся как

$$1 : \phi^2 : \phi^4 : \phi^6 \dots$$

Что касается преобразования показательной функции в линейную, оно, как известно, осуществляется по формуле (5.9.3), приводящей посредством чисел Фибоначчи любую степень ϕ^n к линейному относительно ϕ выражению.

Равнобочная спираль, видно из рисунка 6.7.1, может быть построена с помощью убывающих по величине золотых прямоугольников; она асимптотически приближается к своему находящемуся в точке пересечения диагоналей полюсу, которого достигнуть не может. В декартовой системе координаты полюса относительно помещенной в начало системы точки D единичного квадрата $N_1M_1N_2M_4$ таковы:

$$x_p = \frac{1+3\phi}{5} \approx 1,1708, \quad y_p = \frac{3-\phi}{5} \approx 0,2769, \quad y_p/x_p = 2\phi - 3 \approx 0,2360 \quad (6.8.5)$$

а длины сторон приближающихся к полюсу прямоугольников образуют стремящуюся к нулю последовательность

$$1, \phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, \phi^{-4}, \dots, \phi^{-n}, \dots$$

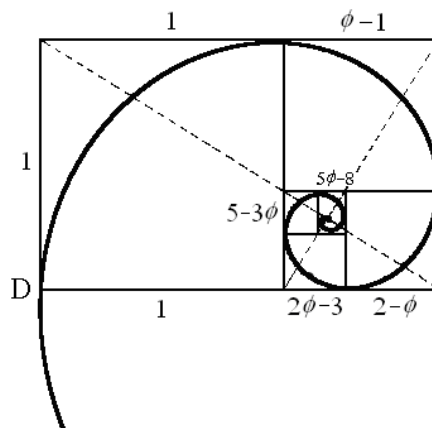


Рис. 6.8.2

Золотая спираль и числа Фибоначчи

Формула (5.9.4), которая переводит ϕ^{-n} в линейный двучлен, даёт последовательность

$$\phi, 1, \phi - 1, 2 - \phi, 2\phi - 3, 5 - 3\phi, 5\phi - 8, \dots$$

показанную на рисунке. А посредством одних только чисел Фибоначчи можно построить квазизолотую спираль, которую, как и спираль построенную по методу Дюрера, ошибочно принимаемую иногда за золотую.

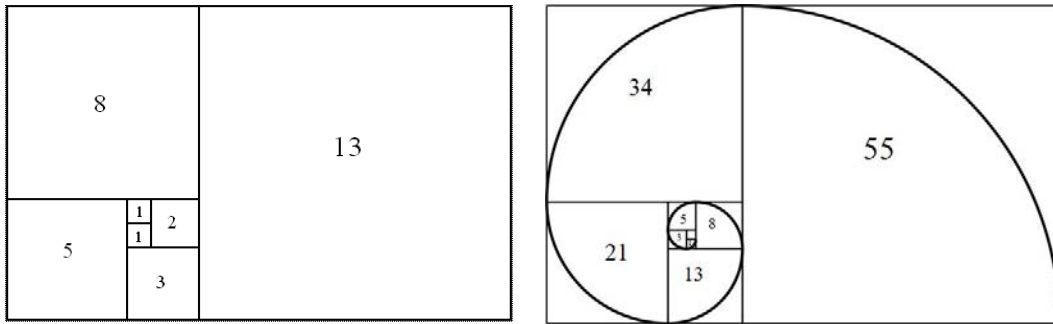


Рис. 6.8.3

Построение квазизолотой спирали посредством чисел Фибоначчи

Её построение начинается с двух имеющих общую сторону единичных квадратов в двух возможных вариантах их взаимного расположения. Далее четырьмя возможными способами строится квадрат с длиной стороны равной 2, отсюда кстати все четыре возможных типа закрученности спирали на плоскости – два по часовой и два против часовой стрелки (см. рис. на второй странице). Затем строится квадрат с длиной стороны равной 3, затем 5, 8, 13 и так далее. Проводя соответствующие дуги окружностей, получим спираль, для которой отношение большей стороны прямоугольника к меньшей, то есть отношение F_{n+1}/F_n , приближается к константе ϕ по мере увеличения номера n .

После всего сказанного не надо удивляться тому, что рассматриваемая кривая с большой точностью реализуется в творениях природы различного характера и масштаба [d'Arcy Thompson; Виленкин].



Рис. 6.8.4

Раковина улитки и рога архара

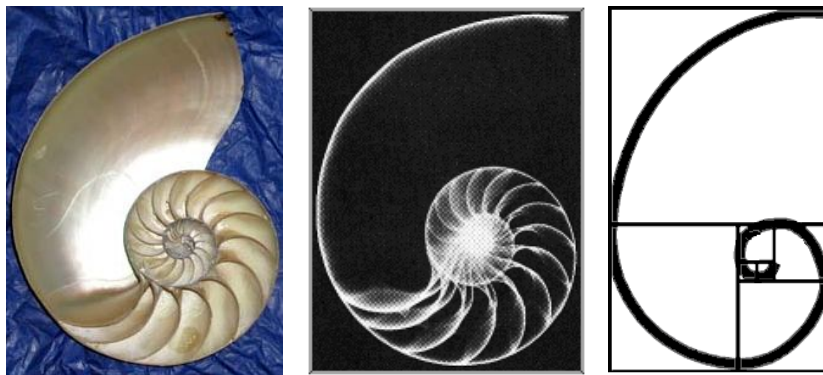


Рис. 6.8.5

Раковина наутилуса, её схематическое изображение и золотая спираль

Так, не меняющуюся с ростом форму логарифмической спирали, близкой судя по имеющимся данным к золотой, имеют рога архаров – горных козлов, сечения раковин различных улиток, моллюсков – в частности показанного на рисунке наutilusа, причём количество частей раковин конического типа у многих ископаемых и современных моллюсков соответствует числам Фибоначчи 5, 8, 13, 21, 34. Логарифмическую спираль плетет один из видов пауков, по левым и правым спиральям расположены семена растений, например подсолнуха; на рисунке выделена для определённости лишь одна из таких спиралей, но при желании можно выделить и другие.

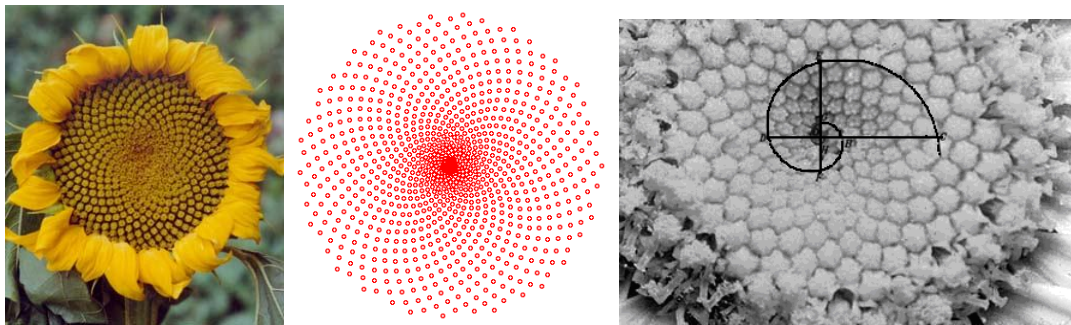


Рис. 6.8.6

Семена подсолнуха и золотая спираль

Гексагональные чешуйки ананаса плотно упакованы в три спиральных дуги с тремя числами Фибоначчи 5, 8 и 13 и именно такая конфигурация считается оптимальной для ананаса.

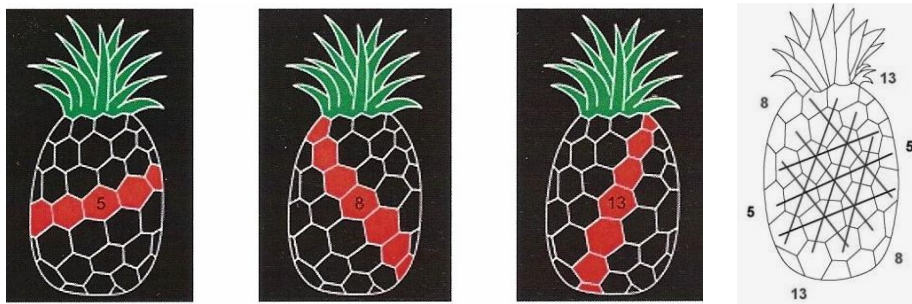


Рис. 6.8.7

Ананас и числа Фибоначчи

Отметим, что во многих, хотя далеко не во всех случаях спираль не просто близка к логарифмической, но и к золотой. Полагают, например, что приливная волна в океане при подходе к берегу закручивается в спираль, стороны которой относятся как $1:1:2:3:5:8:13:21:34:55$, то есть образуют квазизолотую спираль Фибоначчи. По логарифмической спирали атакуют в воздухе свою жертву некоторые виды хищных птиц, а если бы электрон в атоме водорода вместо того чтобы двигаться по стационарной орбите, стал бы под действием сил кулоновского притяжения между разноименными зарядами падать на протон, то, показывая расчёты, траектория падения совпала бы с трёхмерной логарифмической спиралью – естественным обобщением её двумерного аналога. Достаточно красноречивы сделанные с космических станций снимки двух сильных тропических ураганов разных лет.

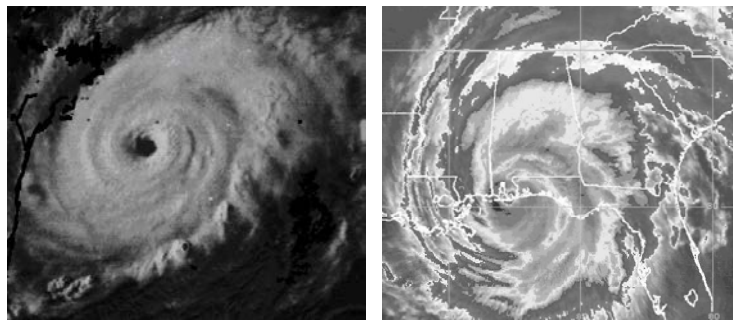


Рис. 6.8.8

Снимки ураганов Анита (1977, слева) и Иван (2004)

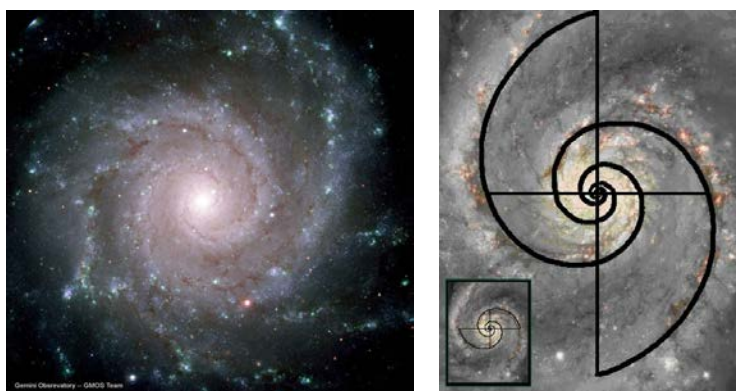


Рис. 6.8.9

Спиральная галактика и логарифмическая спираль

В космическом масштабе, на логарифмической спирали расположены перигелии и афелии планетных орбит солнечной системы [Бутусов], по ней закручиваются так называемые спиральные галактики, к числу которых относится наша, составляющие примерно половину всех галактик во Вселенной. Если бы не светящиеся точки, фотографии галактик можно спутать с фотографиями ураганов. Ещё одна характерная особенность изображенных на снимках объектов это близость к золотому стандарту закрученности их спиралей. Понять хотя бы на качественном уровне подобные совпадения нетрудно. Физический мир един в своей основе, миром правят одни и те же силы, в частности гравитация, подчиняющаяся по крайней мере в первом приближении закону обратных квадратов, который обеспечивает математически наиболее простую и оптимальную форму физических структур самого разного масштаба и уровня организации. Сохранение параметров логарифмической спирали – одно из многих проявлений свойств материнских функций, а в конечном счёте следствие функциональных уравнений E [Аракелян]. Словом, соединение свойств экспоненты с принципом золотого сечения даёт структуру, имеющую многие редкие качества, среди которых выделяются сохранение величины и инвариантность формы относительно различным преобразований, а также роста и уменьшения.

Вернёмся теперь к шри-янтре – буддийскому символу творения, единства мироздания, гармонии мужского и женского начал. Согласно индуистской традиции правильная визуализация изначального звука творения *оm* порождает сперва круг, потом другие геометрические образы, образующие в совокупности шри-янтру. Среди прочих геометрических фигур могут быть выделены показанные на рисунке, см. [Quintin], золотые треугольники, пентаграммы и спираль с полюсом в центре всего построения.



Рис. 6.8.10

Шри-янтра с выделенными фигурами золотой пропорции

Впрочем, понимание спирали как некоего символа вселенской значимости не чуждо и современному обществу, о чём можно судить по эмблеме одного из международных конгрессов по логике, методологии и философии науки.

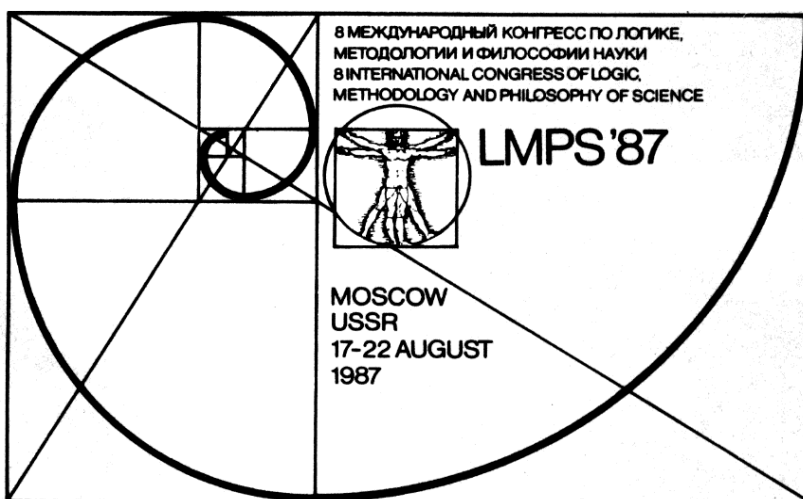


Рис. 6.8.11

Эмблема международного конгресса по логике, методологии и философии науки

Наряду со спиралью, построенной методом вписывания квадратов в золотые прямоугольники, здесь присутствует идеальная по Витрувию и Леонардо фигура человека, вписанная в окружность и квадрат, которые естественно дополняются, мы знаем, золотым треугольником и пентаграммой. Эта фигура человека, как и сама спираль, служит одним из важнейших символов и воплощений правила золотого деления, так что по эмблеме данный конгресс надо считать “золотым”, хотя золотая пропорция в восьми книгах материалов конгресса упоминается крайне редко.

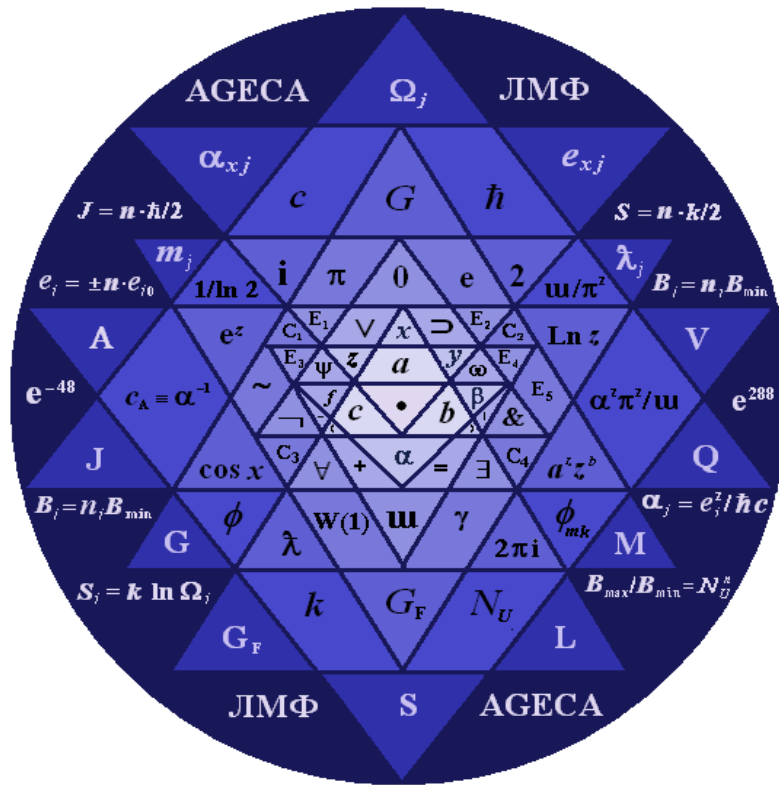
Литература

- Аракелян Г.Б.** *Фундаментальная теория ЛМФ*. Ереван, 2007
- [От логических атомов к физическим законам](#). Ереван: “Лусабац”, 2007
 - *Фундаментальные математические константы как начало всех чисел и новая ФМК*
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161779.htm>
- Бабанин В.** *Великие пирамиды и сфинкс: Атлантида предупреждает потомков*. Международный клуб ученых
<http://www.shaping.ru/mku/babanin13.asp>
- Бутусов К.П.** “Золотое сечение” в солнечной системе. В кн.: Проблемы исследования Вселенной. Труды ВАГО, вып. 7. М.: Л., 1973, с. 475–500
- Ван дер Варден Б.Л.** *Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции*. М.: Физматлит, 1959 (Репринт: М.: КомКнига, 2006)
- Васютинский Н.А.** *Золотая пропорция*. М.: Молодая гвардия, 1990
- Виленкин Н.Я.** *Функции в природе и технике*. М.: Просвещение, 1966
- Витрувий Поллион Марк.** *Десять книг об архитектуре*. М.: Изд. Акад. архитектуры, 1936
- Выгодский М.Я.** *Арифметика и алгебра в Древнем мире*. Изд. 2-е. М.: Наука, 1967
- Вълев П.** *Проблемы на културата*, 1985, № 4, с. 101
- Геродот.** *История. Книга II. Евтерпа*. Пер. и прим. Г. А. Стратановского. Л.: Наука, 124, 1972
<http://ancientrome.ru/artlit/t.htm?a=1284916103>
- Гёте И.В.** *Фауст* (Библиотека всемирной литературы, т. 50). М.: Худ. лит., 1969
- Гика М.** *Эстетика пропорций в природе и искусстве*. М.: Изд. Акад. архитектуры, 1936
- Гримм Г.Д.** *Пропорциональность в архитектуре*. Л.; М.: ОНТИ, 1935
- Дюрер А.** Из трактата “Руководство к измерению”. В кн.: А. Дюрер. Дневники, письма, трактаты. Л.; М.: Искусство, 1957, т. 2, с. 41–96

- Евклид.** *Начала. Книга XIV.* Пер. с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГТТИ, 1949-51. (Комментарий к книге XIII, с. 297–299) <http://www.math.ru/lib/i/395/index.djvu?djvuopts&page=326>
- Лаур Ж.-Ф.** *Загадки египетских пирамид.* М.: Наука, 1966 <http://www.fidel-kastro.ru/history/ancient/lauer.htm>
- Лефевр В.А.** *Рефлексия.* М.: Когито-Центр, 2003
- Лурье С.Я.** *Геродот.* М.–Л., 1947, с. 15
- Матвиевская Г.П.** *Альбрехт Дюрер – ученый.* М.: Наука, 1987
- Нейгебауэр О.** *Лекции по истории античных математических наук. Догреческая математика, том 1.* Из-во: ЛКИ, 2010
- Парфенон.** В кн.: БСЭ, т. 32. М.: Большая сов. энцикл., 1955, с. 186
- Пидоу Д.** *Геометрия и искусство.* М.: Мир, 1979
- Савелов А.А.** *Плоские кривые. Систематика свойств, применения (справочное руководство).* М.: Физматгиз, 1960
- Соколов А.** *Тайны золотого сечения.* Техника – молодежи, 1978, № 5, с. 40
- Сороко Э.М.** *Структурная гармония систем.* Минск: Наука и техника, 1984
- Стахов А.П.** *Музей Гармонии и Золотого Сечения. Формула красоты* http://www.goldenmuseum.com/index_rus.html
- Тимердинг Г.Е.** *Золотое сечение.* Петроград.: Научн. изд., 1924
- Цветков В.Д.** *Сердце, золотое сечение и симметрия.* Пушино: ПНЦ РАН, 1997
- Шевелев И.Ш.** *О форме образования в природе и искусстве.* В кн.: И.Ш. Шевелев, М.А. Марутаев, И.П. Шмелев. Золотое сечение. Три взгляда на природу гармонии. М: Стройиздат, 1990, с. 6–129
- Щетников А.И.** *Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе* <http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf>
- Шубников А.В.** *Симметрия (Законы симметрии и их применение в науке, технике и прикладном искусстве).* М.; Л.: Изд. АН СССР, 1980
- Adams-Webber J.** *Self-Other Contrast and the Development of Personal Constructs.* Canadian Journ. of Behavioral Science **17**, 303–314 (1985)
- Adams-Webber J. and Benjafield J.** *The Relation between Lexical Marking and Rating Extremity in Interpersonal Judgment.* Canadian Journ. of Behavioral Science **5**, 234–241 (1973)
- Arakelian H.** *LMP Fundamental Theory.* Yerevan: Sarvard, 2010
- Angier R.P.** *The Aesthetics of Unequal Division.* Psychological Rev. **4**, 541–561 (1903)
- Arnheim R.** *The Power of the Center: A Study of Composition in the Visual Arts* (rev. ed.). Berkeley and Los Angeles: Univ. of California Press, 1983
- Austin T.R. and Sleight R.B.** *Aesthetic Preference for Isosceles Triangles.* Journ. of Applied Psychology **35**, 430–431 (1951)
- Benjafield J.** *The Golden Rectangle: Some New Data.* American Journ. of Psychology **89**, 737–743 (1976)
– *A Review of Rrecent Research on the Golden Section.* Empirical Studies of the Arts, **3**, 117–134 (1985)
- Benjafield J. and Adams-Webber J.** *The Golden Section Hypothesis.* British Journ. of Psychology, **67**, 11–15 (1976)
- Berlyne D.E.** *La section d'or et la composition picturale occidentale et orientale.* Sciences de l'art/Scientific Aesthetics, **6**, 1–5 (1969)
– *The Golden Section and Hedonic Judgments of Rectangles: A Cross-Cultural Study.* Sciences de l'art/Scientific Aesthetics, **7**, 1–6 (1970)
– *Aesthetics and Psychobiology.* New York: Appleton-Century-Crofts, 1971
- Boles M.** *The Golden Relationship: Art, Math, Nature.* Bradford, Massachusetts: Pythagorean Press, 1987
- Bonanno G.A. and Stillings N.A.** *Preference, Familiarity, and Recognition After Repeated Brief Exposures to Random Geometric Shapes.* Amer. Journ. of Psychology **99**(3), 403–415 (1986)
- Borchardt L.** *Gegen die Zahlenmystik an der grofien Pyrami-de bei Gise,* Berlin, 1922.
– *Längen und Richtungen der vier Grundkanten der Grossen Pyramide bei Gise.* Berlin. 1926.
- Boselie F.** *Complex and Simple Proportions and the Aesthetic Attractivity of Visual Patterns.* Perception, **13**, 91–96 (1984)
– *The Golden Section Has no Special Aesthetic Attractivity!* Empirical Studies of the Arts **10**, 1–18 (1992)
- Bryn O. J.** *Retracing Khufu's Great Pyramid. The "diamond matrix" and the number 7.* Nordic J. of Architect. Research, v. 22, No 1/2, 2010 http://www.ntnu.edu/c/document_library/get_file?uuid=d1d69d25-b3cc-4b17-9c8b-c16dbbd2d199&groupId=139701
- Calter P.** *The Golden Ratio & Squaring the Circle in the Great Pyramid,* 1998
<http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit2/unit2.html>
- Cook T.A.** *The Curves of Life.* London, 1914 (reprinted in 1979 in New York: Dover)

- Crowley A.E.** *The golden section*. Psychology and Marketing, **8**, 101–116 (1991)
- Crowley A.E. and Williams J.H.** *An Information Theoretic Approach to Understanding the Consideration Set/Awareness Set Proposition*. Advances in Consumer Research, **18**, 780–787 (1991)
- Davis F.C.** *Aesthetic Proportion*. Amer. Journ. of Psychology, **45**, 298–302 (1933)
- Doczi G.** *The Power of Limits: Proportional Harmonies in Nature, Art and Architecture*. Shambala Press, 1994
- Dürer graph*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/D%C3%BCrer_graph
- Eysenck H.J. and Tunstall O.** *La personnalité et l'esthétique des formes simples [Personality and the Aesthetics of Simple Forms]*. Sciences de l'art/Scientific Aesthetics **5**, 3–9 (1968)
- Farnsworth P.R.** *Preference for Rectangles*. Journ. of General Psychology **7**, 479–481 (1932)
- Fechner G.T.** *Zur experimentalen Aesthetik*. Leipzig: S. Hirzel, 1871
- Fischler R.** *How to Find the "Golden Number" without Really Trying*. The Fib. Quart. **19**, 406–410 (1981)
- Gazale M.** *Gnomon: From Pharaohs to Fractals*. Princeton Univ. Press, 1999
- Godkewitsch M.** *The "Golden Section": An Artifact of Stimulus Range and Measure of Preference*. Amer. Journ. of Psychology, **87**, 269–277 (1974)
- Great Pyramid of Giza*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Great_Pyramid_of_Giza
- Green C.D.** *All That Glitters: A Review of Psychological Research on the Aesthetics of the Golden Section*. Perception **24**(8), 937–968 (1995)
- Haines T.H. and Davies A.E.** *The Psychology of Aesthetic Reaction to Rectangular*. Psychological Rev. **11**, 249–281 (1904)
- Hambidge J.** *Dynamic Symmetry. The Greek Vase*. London, 1919
- Herz-Fischler R.** *The Shape of the Great Pyramid*. Wilfrid Laurier University Press, 2000
- Hideko I.** *Another Solution to the Polyhedron in Durer's Melencolia: A Visual Demonstration of the Delian Problem*. Aesthetics, **13** 179–194 (2009)
- Hintz J.M. and Nelson T.M.** *Golden Section: Reassessment of the Perimetric Hypothesis*. Amer. Journ. of Psychology, **83**, 126–129 (1970)
– *Haptic Aesthetic Value of the Golden Section*. British Journ. of Psychology **62**, 217–223 (1971)
- Hitchins D.K.** *Exploding the Pyramid Myths* <http://www.hitchins.net/ExpMyths.html>
- Keller Ch.** *The Golden Mean*, 2001 <http://www.missioncollege.org/depts/math/keller/golden.htm>
- Künst-Wilson W.R. and Zajonc R.B.** *Affective Discrimination of Stimuli that Cannot be Recognized*. Science **206**, 557–558 (1980)
- Lalo C.** *L'esthétique expérimentale contemporaine*. Paris: Félix Alcan, 1908
- Lefebvre V.A.** *The Golden Section and an Algebraic Model of Ethical Cognition*. Journ. of Math. Psychology **29**, 289–310 (1985)
- Lehner M.** *The Complete Pyramids: Solving the Ancient Mysteries*. Thames & Hudson, 2008
- Levin E.** *Dental Esthetics and the Golden Proportion*. Journ. Prosthet. Dent. **40**(3), 244–252 (1978)
– *The Golden Proportion. The Golden Proportion as Seen in Teeth*, 2003 <http://www.goldenmeangauge.co.uk/golden.htm>
- Livio M.** *The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books, 2002
- Lockwood E.H.** *The Equiangular Spiral, Ch. 11*. In: A book of Curves Cambridge, England: Camb. Univ. Press, pp. 98–109, 1967
- Mandler G., Nakamura Y., and VanZandt B.J.S.** *Nonspecific Effects of Exposure on Stimuli that Cannot Be Recognized: Effects of Shadowing, Masking, and Cerebral Laterality*. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition **13**, 646–648 (1987)
- Markowsky G.** *Misconceptions About the Golden Ratio*. The College Math. Journ., January **23**, 2–19 (1992)
- Marquardt Beauty Analysis* http://www.beautyanalysis.com/index2_mba.htm
- Math & Art: The Golden Rectangle* <http://educ.queensu.ca/~fmc/october2001/GoldenArt.htm>
- McManus I.C.** *The Aesthetics of Simple Figures*. British Journ. of Psychology **71**, 505–524 (1980)
- Neinstedt C.W. and Ross S.** *Preferences for Rectangular Proportions in College Students and the Aged*. Journ. of Genetic Psychology **78**, 153–158 (1951)
- Obara S.** *Golden Ratio in Art and Architecture*.
<http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.2000/Obara/Emat6690/Golden%20Ratio/golden.html>
- Osborn G.** *Phi at Giza and in the Great Pyramid?* <http://www.garyosborn.moonfruit.net/#/phi-at-giza/4516084085>
- Pentagram*. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Pentagram#Early_history
- Petrie W.M.F.** *The Pyramids and Temples of Gizeh*. London, 1883
- PHIL 332 Philosophy of Beauty* – Core Text, Part two. Two key Platonic passages about beauty as a Form
<http://www.philosophy.umd.edu/Faculty/jhbrown/beautyII/>

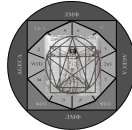
- Piehl J.** *The Golden Section: The "True" Ratio? Perceptual and Motor Skills*, **46**, 831–834 (1978)
- Pierce E.** *Aesthetics of Simple Forms*. *Psychological Review* **1**, 483–495 (1894)
- Pyramides d'Égypte*. Wikipedia http://fr.wikipedia.org/wiki/Pyramides_d%27%C3%89gypte
- Quintin J.** *Sacred Geometry Mandala Art* <http://www.isibno.cz/~gott/mandalas.htm>
- Rawles B.** *Sacred Geometry Home Page*, 2005 <http://www.intent.com/sg/>
- Robins G., Shute C.C.D.** *Mathematical bases of Ancient Egyptian architecture and graphic art*. *Historia Mathematica* **12**, p. 107–122 (1985)
- *The 14 to 11 proportion in Egyptian architecture*. *Discussions in Egyptology*, **16**, p. 75–80 (1990)
- Robinson E.D.** *A Note on the Geometry of the Great Pyramid*. *The Fib. Quart.* **20**, 343 (1982)
- Rossi C.** *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- Schiffman H.R.** *Golden section: Preferred Figural Orientation*. *Perception and PsychoPhysics*, **1**, 193–194 (1966)
- *Figural Preference and the Visual Field*. *Perception and PsychoPhysics*, **6**, 92–94 (1969)
- Schiffman H.R. and Bobko D.J.** *Preference in Linear Partitioning: The Golden Section Reexamined*. *Perception and PsychoPhysics*, **24**, 102–103 (1978)
- Schwartz R.M. and Michelson L.** *States-of-Mind Model: Cognitive Balance in the Treatment of Agoraphobia*. *Journ. of Consulting and Clinical Psychology* **55**, 557–565 (1987)
- Scolfield P.H.** *The Theory of Proportion in Architecture*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1958
- Seamon J.G., Brody N. and Kauff D.M.** *Affective Discrimination of Stimuli that Are Not Recognized: Effects of Shadowing, Masking, and Cerebral Laterality*. *Journ. of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition* **9**, 544–555 (1977)
- Shipley W.C., Dattman P.E., and Steele B.** *The Influence of Size on Preferences for Rectangular Proportion in Children and Adults*. *Journ. of Experimental Psychology* **37**, 333–336 (1947)
- Statistical Distribution Information addition*, 2003 http://www.super-computing.org/pi-decimal_current.html
- Svensson L.T.** *Note on the Golden Section*. *Scandinavian Journ. of Psychology* **18**, 79–80 (1977)
- Thorndike E.L.** *Psychological Review* **24**, 147–153 (1917)
- Titchener E.B.** *An Outline of psychology* (rev. ed.). New York: Macmillan, 1899
- The Fibonacci Association Official Website* <http://www.mscc.dal.ca/Fibonacci/>
- The Fibonacci Quarterly* <http://www.engineering.sdstate.edu/~fib/>
- The Human Face*. GoldenNumber Net., 2004 <http://goldennumber.net/face.htm>
- The Painters of the Golden Section* <http://user.sezampro.yu/~proper/painters/painters.htm>
- Thompson d'Arcy W.** *On the Growth and Form*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1952 (reprinted in 1992 in New York: Dover)
- Thompson G.G.** *The Effect of Chronological Age on Aesthetic Preferences for Rectangles of Different Proportions*. *Journ. of Experimental Psychology* **36**, 50–58 (1946)
- Thorndike L.A.** *A History of Magic and Experimentum Science*, v.1. New York: Columbia Univ. Press, 1958
- Ward D. S.** *Library of Halexandria. Golden mean*, 2003 <http://www.halexandria.org/dward101.htm>
- Weber C.O.** *The Aesthetics of Rectangles and Theories of Affection*. *Journ. of Applied Psychology* **15**, 310–318 (1931)
- Weiss H. and Weiss V.** *The Golden Mean as Clock Cycle of Brain Waves*. *Chaos, Solitons and Fractals* **18**(4), 643–652 (2003)
- Witmer L.** *Zur experimentellen Aesthetik einfacher räumlicher Formverhältnisse*. *Philosophische Studien* **9**, 96–144, 209–263 (1894)
- Zeising A.** *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unerkannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt und mit einer vollständigen historischen Uebersicht der bisherigen Systeme begleitet*. Leipzig: Weigel, 1854



Символ теории ЛМФ:
шри янтра со вписанными в неё основными элементами теории

Введение

Глава 1. Логика и формальная математика



Глава 5.

Принцип золотого сечения
и числа Фибоначчи



Глава 7.

“Золотая” смесь



Персональный сайт

E-mail: hrantara@gmail.com