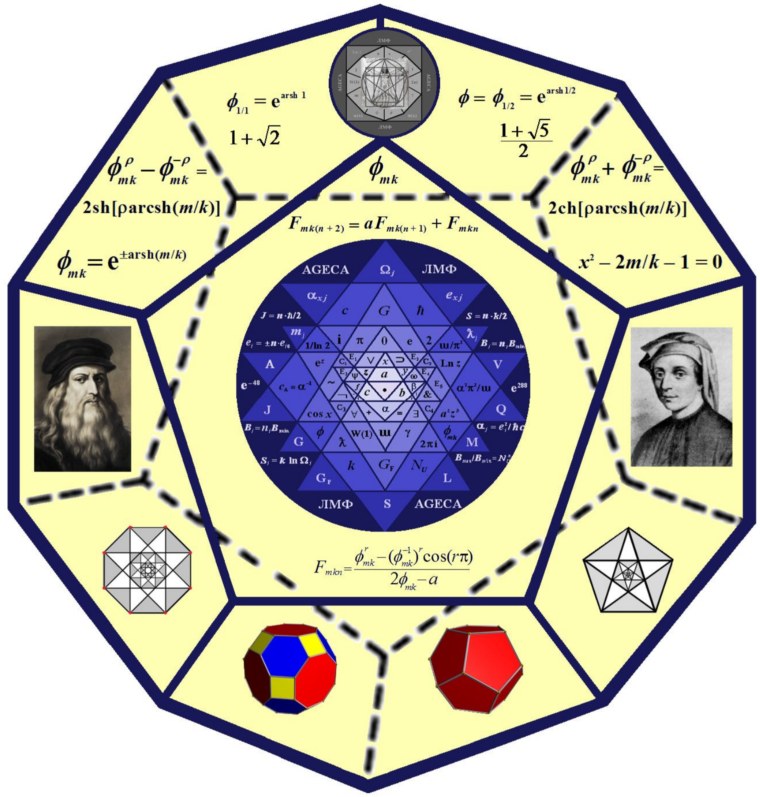
Грант Аракелян

Теория ЛМФ и принцип золотого сечения

***К**раеугольным камнем мировой гармонии, без веры в которую естественнонаучное мышление лишилось бы большей части своей привлекательности, является математика. Известно, что путь от общих положений до конкретной их реализации часто долог, извилист и неоднозначен. Потому-то так труден вопрос, каким всё же образом математическая первооснова приобретает характер селективного формообразующего принципа для живой и неживой природы. **Принцип золотого сечения** предоставляет, быть может, наилучшую возможность для анализа подобных проблем. В силу его совершенно особого статуса, а главным образом из-за соотнесённости с фундаментальными математическими константами (ФМК), с положениями теории ЛМФ, вкратце представленной во Введении и Части I настоящей работы, подробное обсуждение этого принципа и всего, что с ним связано, представляется существенным и важным.*

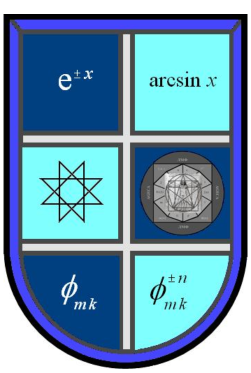
***Ф**ундаментальная физическая теория – мечта многих поколений исследователей. ЛМФ – попытка осуществить эту мечту в виде логически строгой, математически завершенной системы, соответствующей имеющимся экспериментальным данным и допускающей (частично уже подтвердившиеся) прогнозы и эмпирическую верификацию. Это базисная теория физического мира, реализующая идею единства математической логики (Л), числовой математики (М) и фундаментальной физики (Ф). Её корневая структура начинается с логических атомов и завершается обобщёнными физическими законами сохранения, изменения и квантования. В рамках теории ЛМФ получен удивительный результат для постоянной Ферми. Решается ряд важнейших задач, в частности определение численного значения постоянной тонкой структуры, времени жизни мюона и других физических констант, выявление границ физического мира с использованием нового космического параметра – безразмерной константы порядка 10^{125}, получение массовой формулы для частиц определённого типа, **обобщение принципа золотого сечения**.*

***Т**еория ЛМФ по идее не только снабжает необходимым инструментарием для теоретического определения любой известной физической постоянной и не только приписывает с ограниченной или неограниченной точностью истинное числовое значение каждой величине. В свете теории ЛМФ некоторые изученные казалось бы вдоль и поперек математические величины предстают в новом качестве, приобретают дополнительные, ранее не известные характеристики. В этом назначение Части II настоящей работы, где изложение исторических фактов и подробное рассмотрение формальных свойств числа ϕ носит иллюстративный характер и подчинено решению основной задачи: выявлению связей между ϕ и исходными ФМК, анализу принципа золотого сечения с точки зрения общих принципов и идей, изложенных в Части I. По сути ставится задача построения **нетрадиционной математической теории золотой пропорции.** Это построение должно быть ответвлением теории ЛМФ и призвано не только подтвердить её возможности, но и осветить некоторые ключевые вопросы, которые в обычной трактовке золотого сечения кажутся загадочными.*



Глава 8. Обобщённая теория золотого сечения

Глава 8. Обобщённая теория золотого сечения



Завершив в предыдущих трёх главах Части II анализ и рассмотрение всевозможных граней многоликой константы ϕ, можно наконец приступить к решению основной задачи – построению ОТЗС как приложения теории ЛМФ. Известно, что всякая математическая величина, особенно значимая, имеет как правило множество различных представлений, удобных для использования в тех или иных контекстах. Число ϕ выступало в предыдущих главах в самых разных обличьях: десятичная непериодическая дробь и цепная дробь, составленная из одних единиц; конечное выражение, содержащее радикал, и бесконечная последовательность радикалов; предел отношения целых положительных или отрицательных чисел Фибоначчи, Люка и комплексных рядов, построенных в соответствии с правилом третьего члена; пропорции, фигурирующие в геометрических фигурах разной степени сложности – от отрезков золотого сечения до магической пентаграммы и логарифмической спирали, от золотых треугольников и ромбов до додекаэдра и икосаэдра платоновской космологии…

Многообразие способов представления выделенной числовой величины в математике практически неограниченно, но могут ли все они считаться формально равноправными и теоретически одинаково значимыми? Запись любого числа это его представление посредством других чисел (например, натуральных чисел и нуля в десятичной или цепной дроби) либо каких-то математических конструктов и операций (функциональные уравнения, к примеру) либо тех и других (определённый интеграл, составленный из подынтегральной функции, нижнего и верхнего числовых пределов). Весь вопрос в том, насколько фундаментальны те элементы и операции, через которые выражается данное число. С этой точки зрения высшей, так сказать, формой представления важнейшей фундаментальной константы, нуля, являются аксиомы $\mathbf{M}_5$ *и* $\mathbf{M}_6$. *Для ФМК первого ранга это система функциональных уравнений* **E**. *Для остальных величин, включая константу* ϕ, *наиболее значимым является представление посредством материнских функций экспоненты и логарифма и ФМК нулевого и первого рангов. Следовательно, теперь перед нами стоит задача построения* ***нетрадиционной математической теории золотого сечения*** *(ОТЗС) как ответвления теории ЛМФ, приложения свойств материнских функций экспоненты и логарифма*.

8.1. Экспоненциальная форма числа ϕ

В иерархии чисел, согласно сказанному в части первой, число ϕ есть константа второго ранга. Отсюда следует, что при всей важности всех остальных форм записи числа ϕ, играющих неоценимую роль в понимании принципа золотого сечения в науке, природе и искусстве, фундаментальной должна всё же считаться простейшая экспоненциально-логарифмическая, ψ-α-форма представления константы ϕ посредством ФМК. Конечно, с *косвенными* свидетельствами существования глубокой внутренней связи между числом золотого сечения и ФМК мы сталкивались фактически уже неоднократно. Для наглядности перечислим их все:

- обобщение (5.8.10) формулы Бине и чисел Фибоначчи на случай произвольных действительных и комплексных чисел посредством функции косинуса
- экспоненциальная связь (5.9.35) и (5.9.36) между составленными из чисел Фибоначчи и Люка бесконечными рядами $F_1 + F_2x + F_3x^2 + \ldots$ и $L_1 + L_2x/2 + L_3x^2/3 + \ldots$
- золотая логарифмическая спираль, все характеристики которой могут быть выведены как свойства материнской ψ-функции
- логарифмический закон распределения (7.1.3), или в общем случае (7.2.3), которому с очень хорошей статистической точностью соответствует распределение первых знаков членов ряда Фибоначчи
- формулы (7.10.6–7.10.9), связывающие посредством арктангенса величины обратные числам Фибоначчи (а также Люка) друг с другом или с константами π и ϕ
- формула (7.10.10), выражающая F_k через константу i и биномиальные коэффициенты
- аналогия между квадратным уравнением (5.2.1) для числа ϕ и трансцендентным уравнением (2.7.6) для функции Ламберта $\mathrm{W}(z)$, относящая константу $\mathrm{W}(1)$ к разряду чисел “типа золотого сечения”
- логарифмическая форма размерностей Хаусдорфа для различных фракталов, включая золотые
- особые точки, в частности точки перегиба, экспоненциальной функции определённого типа, составленной из одних только проточисел
- соотношения Рамануджана (7.10.13–7.10.15), содержащие ϕ в одной связке с константами e, π, 2
- e-i-2-преобразования (синус, косинус, секанс, косеканс) числа π, разделенного на пять или десять частей, точнее чисел типа $n\cdot\pi/10$
- соотношения (таблица 7.12.3), содержащие логарифмическую и тригонометрические функции, константы 2, i, ϕ
- тригонометрическая, не содержащая к тому же константы ϕ, форма представления (7.12.4) формулы Бине

Наверняка есть и другие факты, косвенно свидетельствующие о существовании обсуждаемой связи, а пока познакомимся с простенькой, но не лишённой изящества ловушкой **[**Guy**]**, свидетельствующей прежде всего о ненадёжности неполной индукции в отличие от индукции математической, являющейся фактически дедуктивным принципом доказательства. Рассмотрим экспоненциальную функцию $\mathrm{G}(n)$, определив её как

$$\mathrm{G}(n) = I(\mathrm{e}^{(n-1)/2}),$$

где функция $I(x)$ как обычно означает целую часть от x плюс 1, то есть округление значения экспоненты до ближайшего целого числа, не меньшего x. Посмотрим теперь на значения функции для первых девяти $n = 0, 1, 2, \ldots, 8$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{G}(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Нижний ряд это первые девять чисел Фибоначчи, отсюда в качестве индуктивной догадки следует общая формула

$$\mathrm{G}(n) = I(\mathrm{e}^{(n\,-\,1)/2}) = F_n \tag{8.1.1}$$

которая подтверждается для следующего $n+1$-го значения переменной: $\mathrm{G}(9) = 55$. Искушенный читатель сразу поймет, что индуктивная догадка неверна и эта формула не может быть справедливой для больших n, хотя бы потому что быстро растущая экспонента e^x не может давать в округлении медленно растущий по правилу третьего члена ряд Фибоначчи. Действительно, $\mathrm{G}(10) = 91$, $\mathrm{G}(11) = 149$, что на 2 и 5 единиц больше соответственно F_{11} и F_{12}, а быстро растущая разность $\mathrm{G}(n) - F_n$ с увеличением n стремится к бесконечности. О других лжерядах Фибоначчи см. [Stewart; Knott].

Обратим внимание на то, что для функции $y = \mathrm{arsh}\, z$, обратной гиперболическому синусу

$$z = \mathrm{sh}\, y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

для всех без исключения значений переменной z имеет место известная формула

$$y = \mathrm{arsh}\, z = \ln(z + \sqrt{1+z^2}\,) \tag{8.1.2}$$

Следовательно, если $z = 1/2$, получаем

$$\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{arsh}\,½} \equiv \exp(\mathrm{arsh}\,½) \equiv \psi(\mathrm{arsh}\,½) \tag{8.1.3}$$

то есть экспоненциальную форму типа e-2. Квадратного корня в явном виде уже нет, а стоящая под знаком ψ обратная функция гиперболического синуса относится, мы знаем, к числу простейших элементарных функций, составленных из исходных экспоненты и логарифма [Аракелян 2007; 2007*а*; Arakelian]. Эта формула и есть искомое выражение для ϕ. Константу

$$\mathrm{arsh}\,½ \equiv \iota = 0{,}48121\ 18250\ 59603\ 44749\ldots \tag{8.1.4}$$

равную $\ln \phi$ будем в тех случаях, когда формальная структура этого числа не существенна, обозначать для краткости символом ι (греческая йота).

С приведением к экспоненциальной форме многие действия над числом ϕ сильно упрощаются благодаря тому что сводятся к элементарным действиям над степенью. Ограничимся пока простейшими случаями. Для обратной величины

$$\phi^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{arsh}\,½} \tag{8.1.5}$$

В более общем случае произвольного целого $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\phi^{\pm n} = \mathrm{e}^{\pm n\,\mathrm{arsh}\,½} \tag{8.1.6}$$

Учитывая, что

$$\mathrm{arsh}\, z = -\mathrm{i} \arcsin \mathrm{i}z$$

последнему соотношению можно придать менее удобную здесь форму тригонометрического e-i-2-преобразования:

$$\phi^{\pm n} = \mathrm{e}^{\mp\, n\,\mathrm{i} \arcsin\, \mathrm{i}/2} \tag{8.1.6′}$$

Ясно, что теперь, когда формулой (8.1.3) число ϕ представлено надлежащим образом, всё по существу сводится к исследованию свойств экспоненты строго определённого типа. Ситуация здесь такая же, что и в случае логарифмической спирали, с той разницей, что речь идёт не об одной, пусть даже замечательной фигуре золотого сечения, а о теории золотого сечения в целом. По идее математическая теория константы ϕ со всеми её многочисленными ответвлениями целиком закодирована в очень простой формуле (8.1.3). В этом ещё предстоит убедиться, но вопрос здесь ставится значительно шире, поскольку открыт путь для дальнейших обобщений. В рамках излагаемой ниже обобщённой теории золотого сечения – ОТЗС – будут выведены ранее неизвестные формулы и числовые последовательности, получены новые результаты. Кроме того теория золотого сечения, фрагмент теории ЛМФ, призвана ответить на ряд вопросов, которые кажутся малопонятными и труднообъяснимыми при обычном подходе.

8.2. Вывод известных соотношений

Вначале несколько слов о названии теории. Строго говоря, в этом и во множестве других случаев правильнее говорить не о *сечении*, а о *пропорции* (как в первоначальном варианте теории **[**Аракелян 2007, гл. 6**]**) коль скоро сечение – геометрическое понятие, а более широкое понятие пропорции относится скорее к арифметике, которая здесь явно важнее. При желании можно было конечно дать и такое, более отвечающее существу дела название: *теория семейства “золотых” чисел*. Однако, после некоторых колебаний мы всё-таки предпочли название с соответствующей аббревиатурой ОТЗС исходя из того, что словосочетание *золотое сечение* более узнаваемо, тем более, что фактически это общепринятый термин, подразумевающий нечто большее, чем просто геометрическое построение реализующее деление в крайнем и среднем отношении.

Опираясь на исходную экспоненту (8.1.3), докажем сперва соотношения, которые играют принципиальную роль в понимании фундаментальных особенностей числа ϕ:

(а) линейность относительно ϕ чисел ϕ^n и ϕ^{-n} при любом n

(б) целочисленность сумм типа $\phi^n + \phi^{-n}$ для любых $n = 2k$ и разностей $\phi^n - \phi^{-n}$ для нечетных $n = 2k - 1$

(в) формулы (5.8.1) и (5.9.2–6), выводимые обычно в теории рядов Фибоначчи

При доказательстве этих соотношений используем, не выходя за рамки теории ЛМФ, тождества

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x,\quad \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x,\quad \mathrm{ch}\,x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},\quad \mathrm{sh}\,x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

соотношение $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, формулы для суммы и разности $\mathrm{sh}(x \pm y)$, $\mathrm{ch}(x \pm y)$, двойного аргумента и некоторые другие известные соотношения для гиперболических функций (e-2-преобразования). Предпочтение, оказанное им перед тригонометрическими функциями (e-i-2-преобразования), вызвано техническими соображениями: запись в гиперболических функциях в данном случае упрощает дело. Предварительно покажем, что

$$\mathrm{sh}\left(\mathrm{arsh}\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \tag{8.2.1}$$

$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{arsh}\,\frac{1}{2}\right) = \phi - \frac{1}{2} \tag{8.2.2}$$

Первое из этих равенств просто тождество, второе следует из (8.2.1), фактически из исходного (8.1.3):

$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{arsh}\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\left(\mathrm{arsh}\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \phi - \frac{1}{2}$$

Перейдем теперь к доказательству свойства (а), то есть возможности преобразования $\phi^{\pm n}$ в линейную комбинацию типа $c_n + c_n'\phi$, где c_n и c_n' некие зависящие от n рациональные коэффициенты. Случай $n = 1$ тривиален, при $n = -1$ имеем

$$\phi^{-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{arsh}\,½} = \mathrm{ch}(\mathrm{arsh}\,½) - \mathrm{sh}(\mathrm{arsh}\,½) = (\phi - ½) - ½ = \phi - 1$$

При $n = 2$, используя для краткости обозначение (8.1.4), после очевидных преобразований, получаем:

$$\phi^2 = \mathrm{e}^{2\iota} = \mathrm{ch}\,2\iota + \mathrm{sh}\,2\iota = \mathrm{ch}^2\iota + \mathrm{sh}^2\iota + 2\mathrm{sh}\,\iota\cdot\mathrm{ch}\,\iota = 1 + 2\mathrm{sh}\,\iota(\mathrm{sh}\,\iota + \mathrm{ch}\,\iota)$$

Отсюда

$$\phi^2 = 1 + 2\mathrm{sh}\,\iota\cdot\phi \tag{8.2.3}$$

что снова даёт линейный двучлен:

$$\phi^2 = 1 + \phi$$

Продолжение уже тривиально и не требует больше обращения к гиперболическим функциям:

$$\phi^3 = \phi\cdot\phi^2 = \phi(1 + \phi) = \phi + \phi^2 = \phi + (1 + \phi) = 1 + 2\phi$$

Применяя метод математической индукции, допустим теперь, что

$$\phi^n = c_n + c_n'\phi \tag{8.2.4}$$

Тогда

$$\phi^{n+1} = \phi\cdot\phi^n = c_n\phi + c_n'\phi^2 = c_n' + (c_n + c_n')\phi \tag{8.2.5}$$

то есть также линейная комбинация, что и требовалось доказать. Совершенно аналогично доказывается линейность ϕ^{-n}. Доказано фактически нечто большее, чем свойство (а), но об этом чуть позже.

Доказательство свойства (б) уже не содержит принципиально новых моментов, поэтому дадим лишь общую схему, которую читатель при желании может сам реализовать. Вначале доказывается целочисленность (Ц) выражения $\phi - \phi^{-1}$, затем $\phi^2 + \phi^{-2}$, после чего по методу математической индукции, предполагая доказанными формулы

$$\phi^{2k-1} - \phi^{-(2k-1)} = 2\,\mathrm{sh}[(2k-1)\iota] = \text{Ц}$$

$$\phi^{2k} + \phi^{-2k} = 2\,\mathrm{ch}(2k\,\iota) = \text{Ц}$$

выводятся соответствующие формулы для степеней $2k + 1$ и $2k + 2$. Но удобнее провести доказательство по несколько иной схеме. Доказывается по индукции, что для всех нечетных степеней $n = 2k - 1$

$$\phi^{2k-1} = c\phi + c_2$$

$$\phi^{-(2k-1)} = c\phi - c_3$$

а для четных степеней $n = 2k$

$$\phi^{2k} = c_4 + c'\phi$$

$$\phi^{-2k} = c_5 - c'\phi$$

При этом, мы знаем, все коэффициенты c, c_i, c' целые числа (способ обозначения индексов здесь другой, индекс n для удобства опущен). Отсюда непосредственно видно, что при вычитании нечетных и сложении четных степеней нецелые слагаемые $c\phi$, $c'\phi$ сокращаются и остаются только суммы и разности целых чисел, что и доказывает свойство (б).

Наконец о группе свойств (в). Методом математической индукции, используя формулы для гиперболических функций и уже доказанные соотношения (8.2.1 – 5), с помощью очевидных, но громоздких выкладок, которые нет нужды приводить, можно заново доказать формулу Бине и все формулы раздела 5.9, устанавливающие зависимость между числами золотого сечения и целочисленными рядами Фибоначчи и Люка. Таким образом, можно утверждать, что *все указанные математические характеристики золотой пропорции и её гомологов являются прямым следствием, естественно вытекают из особенностей экспоненты с показателем степени определённого вида*.

8.3. Числа ϕ, F_n и L_n гиперболические и тригонометрические функции

Применяя сходные методы, можно получить несколько соотношений, связывающих посредством прямых и обратных гиперболических функций число ϕ с числами Фибоначчи ($k = 1, 2, 3,\ldots; F_0 = 0$):

$$n = 2k \qquad \mathrm{sh}(2\,\mathrm{arth}\,\phi^{-2k}) = \frac{2}{F_{2k}(2\phi - 1)} \tag{8.3.1}$$

$$n = 2k-1 \qquad \mathrm{sh}(2\,\mathrm{arth}\,\phi^{-(2k-1)}) = \frac{2}{F_{2k-2} + F_{2k}} \tag{8.3.2}$$

$$n = 2k \qquad \mathrm{ch}(2\,\mathrm{arth}\,\phi^{-2k}) = \frac{F_{2k-1} + F_{2k+1}}{F_{2k}(2\phi - 1)} \tag{8.3.3}$$

$$n = 2k-1 \qquad \mathrm{ch}(2\,\mathrm{arth}\,\phi^{-2(k-1)}) = \frac{F_{2k-1}(2\phi - 1)}{F_{2k-2} + F_{2k}} \tag{8.3.4}$$

В справедливости этих соотношений можно убедиться непосредственно подстановкой численных значений либо выражая $\mathrm{arth}\, x$ через $\ln x$, а $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{ch}\, x$ через e^x и применяя формулу Бине и формулы раздела 5.9. Второе и четвертое соотношения с учётом формулы связи

$$L_k = F_{k-1} + F_{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots; F_0 = 0)$$

между числами Фибоначчи и Люка можно привести к несколько более простому виду:

$$n = 2k-1 \qquad \mathrm{sh}(2\,\mathrm{arth}\,\phi^{-2(k-1)}) = \frac{2}{L_{2k-1}} \tag{8.3.2'}$$

$$n = 2k-1 \qquad \mathrm{ch}(2\,\mathrm{arth}\,\phi^{-2(k-1)}) = \frac{F_{2k-1}(2\phi - 1)}{L_{2k-1}} \tag{8.3.4'}$$

Соответствующие соотношениям (8.3.1–4) последовательности несократимых числовых дробей таковы:

$$\frac{2}{\sqrt5},\ \frac{2}{3\sqrt5},\ \frac{1}{4\sqrt5},\ \frac{2}{21\sqrt5},\ \frac{2}{55\sqrt5},\ \frac{1}{72\sqrt5},\ \frac{2}{377\sqrt5},\ldots \tag{8.3.5}$$

$$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{11},\ \frac{2}{29},\ \frac{1}{38},\ \frac{2}{199},\ \frac{2}{521},\ \frac{1}{682},\ \frac{2}{3571},\ \frac{2}{9349},\ldots \tag{8.3.6}$$

$$\frac{3}{\sqrt5},\ \frac{7}{3\sqrt5},\ \frac{9}{4\sqrt5},\ \frac{47}{21\sqrt5},\ \frac{123}{55\sqrt5},\ \frac{161}{72\sqrt5},\ \frac{843}{377\sqrt5},\ldots \tag{8.3.7}$$

$$\sqrt5,\ \frac{\sqrt5}{2},\ \frac{5\sqrt5}{11},\ \frac{13\sqrt5}{29},\ \frac{17\sqrt5}{38},\ \frac{89\sqrt5}{199},\ \frac{233\sqrt5}{521},\ \frac{305\sqrt5}{682},\ldots \tag{8.3.8}$$

Сразу видно, что первые две последовательности (для гиперболического синуса) стремятся к 0, а две последние (для гиперболического косинуса) – к 1.

Используя связи между гиперболическими и тригонометрическими формулами и принимая во внимание, что в области действительных чисел функция tg x существует в отличие от th x и для значений $x > 1$, легко привести полученные выше соотношения к тригонометрической (e-i-2) форме:

$$n = \pm 2k \qquad \sin(2\operatorname{arctg}\phi^{\pm 2k}) = \frac{2}{L_{2k}} \tag{8.3.9}$$

$$n = \pm(2k-1) \qquad \sin(2\operatorname{arctg}\phi^{\pm(2k-1)}) = \frac{2}{(2\phi-1)F_{2k-1}} \tag{8.3.10}$$

$$n = \pm 2k \qquad \cos(2\operatorname{arctg}\phi^{\pm 2k}) = \mp\frac{F_{2k}(2\phi-1)}{L_{2k}} \tag{8.3.11}$$

$$n = \pm(2k-1) \qquad \cos(2\operatorname{arctg}\phi^{\pm(2k-1)}) = \mp\frac{L_{2k-1}}{(2\phi-1)F_{2k-1}} \tag{8.3.12}$$

Имеем следующие числовые последовательности:

$$\frac{2}{3},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{47},\ \frac{2}{123},\ \frac{1}{161},\ \frac{2}{843},\ \frac{2}{2207},\ \frac{1}{2889},\ldots \tag{8.3.13}$$

$$\frac{2}{\sqrt5},\ \frac{1}{\sqrt5},\ \frac{2}{5\sqrt5},\ \frac{2}{13\sqrt5},\ \frac{1}{17\sqrt5},\ \frac{2}{89\sqrt5},\ \frac{2}{233\sqrt5},\ \frac{1}{305\sqrt5},\ldots \tag{8.3.14}$$

$$\mp\frac{\sqrt5}{3},\ \mp\frac{3\sqrt5}{7},\ \mp\frac{4\sqrt5}{9},\ \mp\frac{21\sqrt5}{47},\ \mp\frac{55\sqrt5}{123},\ \mp\frac{72\sqrt5}{161},\ldots \tag{8.3.15}$$

$$\mp\frac{1}{\sqrt5},\ \mp\frac{2}{\sqrt5},\ \mp\frac{11}{5\sqrt5},\ \mp\frac{29}{13\sqrt5},\ \mp\frac{38}{17\sqrt5},\ \mp\frac{199}{89\sqrt5},\ \ldots \tag{8.3.16}$$

Как и в случае гиперболических функций первые две последовательности стремятся к нулю, а последние две (с учётом знаков четыре) стремятся к единице. Обозначив образованные посредством гиперболических функций последовательности (8.3.7) и (8.3.8) через $\{a_h\}$ и $\{b_h\}$, а образованные посредством тригонометрических функций последовательности (8.3.15) и (8.3.16) через $\{a_t\}$ и $\{b_t\}$, имеем простые соотношения

$$\{a_h\} = 1/|\{a_t\}|,\quad \{b_h\} = 1/|\{b_t\}|$$

справедливые для любых индексов $h, t = 1, 2, 3, \ldots$

Получено в общей сложности десять бесконечных рядов, сходящихся к нулю либо к единице. Два ряда не содержат числа ϕ и являются последовательностями рациональных чисел, выражаемых через числа Фибоначчи; остальные восемь представляют собой упорядоченные множества иррациональных чисел. Разумеется, применяя какие-то другие сочетания гиперболических и тригонометрических чисел можно прийти к числовым рядам, в общем случае комплексным, отличным от рассмотренных.

Каждая из составленных посредством числа ϕ последовательностей может быть названа *золотой*, но, как отмечалось выше, теоретическая, а тем более практическая значимость того или иного ряда определяется отнюдь не только этим. Важно знать, соотносится ли хотя бы с одной из этих последовательностей нечто реальное вроде спектра масс частиц современной физики. Или за этим ничего не стоит и это лишь самодостаточная игра, не нуждающаяся во внешнем оправдании? У нас нет пока ответа (возможно, читателю об этом известно больше) и потому обе версии представляются сейчас равновозможными. Однако в данном контексте большего внимания заслуживает всё же тот факт, что определённые e-2 и e-i-2 преобразования над целыми степенями $\pm n$ числа ϕ приводят к 3последовательностям, непосредственно составленным из самого числа ϕ, чисел Фибоначчи (или Люка), а также констант 2, i.

8.4. Экспоненциальное обобщение золотой пропорции

Вернёмся к нашему утверждению, что в экспоненте (8.1.3) закодирована вся математическая теория золотого сечения. Действительно, элементарное исследование экспоненты типа $e^{\operatorname{arsh} x}$ привело к доказательству (или наметило легко реализуемые схемы доказательства) практически всех основных и хорошо известных соотношений для числа ϕ. Посредством e-i- и e-i-2-преобразований получены также соотношения, устанавливающие связь между степенями ϕ и числами Фибоначчи, приводящие к не лишённым, быть может, интереса бесконечным последовательностям рациональных и иррациональных чисел. Всё это однако не более чем частные проявления общих закономерностей, нечто вроде преамбулы общей теории. Было бы весьма странно, если бы роль экспоненты ограничивалась этим. Форма представления математического или физического закона или величины нередко самым существенным образом влияет на их понимание, открывает новые научные горизонты и возможности. Вспомним хотя бы о том значении, которое имело в развитии физической теории представление законов классической механики посредством функций Лагранжа и Гамильтона. Не говоря уж о замене классических физических величин экспоненциальной ψ-функцией, аналогия с заменой “классических” форм представления числа ϕ (квадратное уравнение, цепная дробь, ряд Фибоначчи, геометрическое определение и т.д.) на экспоненту (8.1.3) здесь вполне уместна.

Нередко в само́й форме представления величины содержится подсказка возможных путей её обобщения. С этим мы не раз уже сталкивались при рассмотрении золотого сечения. Так, от простейших отрезков естественно перейти к двумерным прямоугольникам и треугольникам золотого сечения, правильному пятиугольнику, пятиконечной звезде, пентаграмме, а затем к таким трёхмерным геометрическим фигурам как прямоугольная призма, икосаэдр, додекаэдр. Плоскую логарифмическую спираль нетрудно обобщить на случай трёх измерений. Начинающийся с двух единиц традиционный положительный ряд Фибоначчи дополняется равным нулю нулевым членом, далее – симметричным относительно нуля отрицательным рядом. От действительных чисел, сняв при этом все ограничения на допустимые значения первых двух членов, естественно перейти к общему случаю комплексного ряда Фибоначчи, конструируемого по тому же правилу третьего члена. Можно и само правило третьего члена заменить правилом n+1-го члена, то есть от возвратных последовательностей с минимальным $n = 2$ перейти к последовательностям с произвольным целым n. А это в свою очередь означает замену квадратного уравнения характеристическим уравнением степени n. Другой путь обобщения исходного квадратного уравнения для ϕ состоит в замене переменной x на x^p. Таковы основные пути обобщения золотого сечения в рамках традиционных представлений о нём.

Что нового может добавить сюда экспонента? Какие есть возможности для обобщения ψ(arsh ½)-формы числа ϕ? На последний вопрос ответ довольно прост: очевидно, что число ϕ является членом бесконечного множества

$$\phi_{mk} = e^{\pm \operatorname{arsh}(m/k)} \qquad (8.4.1)$$

где m и k произвольные комплексные числа. В общем случае ϕ_{mk} представляет собой множество отличных от нуля комплексных чисел, хотя здесь удобнее иметь дело с действительными m и k. А соответствующие множества положительных и отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных чисел можно образовать посредством экспоненты $\exp(\pi i n/2)$, помня о том, что для всего бесконечного множества переменных $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ существует лишь четыре значения функции: ±1, $\pm i$. Следовательно, в достаточно общем случае

$$\phi_{mk} = e^{\pi i n/2 \,\pm\, \operatorname{arsh}(m/k)} \qquad (8.4.2)$$

где n = 1, 2, 3, 4, а m и k действительные числа. Займёмся теперь изучением свойств множества $\{\phi_{mk}\}$. Ограничимся при этом лишь областью положительных действительных значений, поскольку остальные три случая вполне аналогичны и не содержат принципиально новых моментов. Словом, полагаем, что в последнем выражении $n = 4$ или что m и k в выражении (8.4.1) произвольные действительные числа, поэтому излагаемую ниже теорию можно назвать *обобщённой теорией золотого сечения для действительной переменной*. Гиперболическая функция $y = \operatorname{arsh} x$ действительной переменной x определена для всех значений $-\infty < x < +\infty$ и заполняет область значений $-\infty < y < +\infty$, поэтому исследуемое множество $\{\phi_{mk}\}$ является множеством всех чисел $\phi_{mk} > 0$. Используя соотношение (8.1.2), получим

$$\phi_{mk} = e^{\pm \operatorname{arsh}(m/k)} = \pm\frac{m}{k} + \sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}} \qquad (8.4.3)$$

Заметим, что перед квадратным корнем всегда стоит знак +, а дробь m/k будет положительной или отрицательной в зависимости как от самих m и k, так и от знака перед функцией в показателе степени. Для последнего и для чисел m и k возможны всего восемь сочетаний знаков: $(+, +, +)$, $(+, -, -)$, $(-, +, -)$, $(-, -, +)$, $(+, +, -)$, $(+, -, +)$, $(-, +, +)$ и $(-, -, -)$. Первые четыре сочетания (все плюсы или четное число минусов) приводят к положительной дроби и следовательно к большему значению; при нечетном количестве минусов дробь отрицательна и получаем меньшее из двух значений. Например если $m = \pm1$, $k = \pm2$, то первые четыре варианта дают число ϕ, а последние четыре $\phi^{-1} = \phi - 1$. Однако нас сейчас интересует общий случай произвольных действительных m и k. Для большего $\phi_{mk}^{\max}$ и меньшего $\phi_{mk}^{\min}$ значений имеем:

$$\phi_{mk}^{\max} = \sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}} + \left|\frac{m}{k}\right| \qquad (8.4.4)$$

$$\phi_{mk}^{\min} = \sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}} - \left|\frac{m}{k}\right| \qquad (8.4.5)$$

Сразу видно, что произведение большего и меньшего значений равно 1, а разность между ними равна $|2m/k|$. Отсюда квадратные уравнения

$$(\phi_{mk}^{\max})^2 - 2\left|\frac{m}{k}\right|\phi_{mk}^{\max} - 1 = 0 \qquad (8.4.6)$$

$$(\phi_{mk}^{\min})^2 + 2\left|\frac{m}{k}\right|\phi_{mk}^{\min} - 1 = 0 \qquad (8.4.7)$$

положительными корнями которых (напомним, что всегда $\phi_{mk} > 0$) являются (8.4.4) и (8.4.5) соответственно. Введём обозначения

$$\phi_{mk}^{\max} \equiv x, \quad \phi_{mk}^{\min} \equiv y, \quad 2\frac{m}{k} \equiv a \qquad (8.4.8)$$

сильно упрощающие запись последних уравнений:

$$x^2 - ax - 1 = 0 \qquad (8.4.9)$$

$$y^2 + ay - 1 = 0 \qquad (8.4.9')$$

Здесь достаточно рассмотреть лишь одно из них, для определённости первое. Общий случай в сущности мало чем отличается от ранее рассмотренного частного случая золотого сечения ϕ_{21}. Поскольку любое квадратное уравнение представимо в виде

$$x^2 - ax - b = 0 \qquad (8.4.10)$$

с действительными a и b, обобщение золотого сечения со стороны экспоненты равносильно частному случаю квадратного уравнения, когда

$$a \equiv 2\frac{m}{k}, \quad b = -1 \qquad (8.4.11)$$

Теперь уже

$$x = a + \frac{1}{x}$$

повторно подставляя это выражение вместо переменной x, получим последовательность

$$x = a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{x}}, \quad x = a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{x}}}, \quad x = a + \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{x}}}}, \cdots$$

которая для различных $a = 2m/k$ приводит в пределе (ср. (5.2.8)) к бесконечному семейству чисел ϕ_{mk}. Это медленное по сравнению со сходимостью подходящих дробей приближение к пределу, и в дальнейшем в качестве сходящихся к пределу ϕ_{mk} цепных дробей мы будем брать подходящие дроби

$$\phi_{mk} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}} \tag{8.4.12}$$

Каждая из них содержит периодически повторяющуюся последовательность чисел a_i, a_{i+1}, …, a_{i+k}, которая определяется свойствами исходной экспоненты и конкретным значением рационального отношения m/k. В дальнейшем при развертывании обобщённой теории золотого сечения рассмотрение будет в зависимости от значений параметра a идти в двух направлениях. В целом же программа исследования аналогична программе для числа ϕ и включает в себя следующие темы:

а) квадратные уравнения, подходящие дроби, аналоги ряда Фибоначчи

б) формулы для положительных и отрицательных степеней членов семейства, их сумм и разностей, обобщённая формула Бине

в) другие аналитические формулы и соотношения, геометрические образы некоторых членов семейства

г) общий анализ, обсуждение вопросов философского, методологического характера

8.5. Начальные сведения о семействе золотых чисел

Согласно исходной формуле (8.4.1) функция $\phi_{mk}(2, a)$ может принимать любое положительное значение, причём с увеличением модуля аргумента она стремится к пределам $2a$ и $1/2a$. Точнее

$$\lim_{a\to\infty} \mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(a/2)} = a, \quad \lim_{a\to-\infty} \mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(-a/2)} = \lim_{a\to-\infty} \mathrm{e}^{-\operatorname{arsh}(a/2)} = 1/a \tag{8.5.1}$$

(здесь и далее относительно несложные доказательства предоставляем читателю). Например

при $a = 10$ $\quad \phi(5) = 10{,}0990\ldots \quad \sigma \approx 10^{-2}$

при $a = 100$ $\quad \phi(50) = 100{,}0099\ldots \quad \sigma \approx 10^{-4}$

при $a = 1000$ $\quad \phi(500) = 1000{,}099\ldots \quad \sigma \approx 10^{-6}$

С увеличением $a > 0$ в $n > 0$ раз относительное отклонение от a уменьшается в $\approx n^2$ раз, что справедливо и для $-a$. Приближённые формулы

$$\phi(a/2) \approx a, \quad \phi(-a/2) \approx 1/a \tag{8.5.2}$$

дающие хорошее приближение уже для $a \sim 10$, делают “неинтересной” область существования функции, соответствующую большим по модулю значениям аргумента. А для малых значений параметра корни квадратного уравнения стремятся к $+1$ и -1, но отрицательные корни нам не нужны, поскольку для действительных переменных экспонента всегда положительна.

В формулах математической теории все допустимые значения переменной формально равноправны, однако с содержательной точки зрения здесь и во многих других случаях наибольший интерес представляют числа порядка единицы (условно “центральные”). Для некоторых наиболее характерных центральных чисел приведем в порядке справки соответствующие квадратные уравнения (8.4.6) типа

$$x^2 - 2m/k - 1 = 0$$

с их положительными корнями.

$$\phi_{2/11} \qquad x^2 - 2\frac{2}{11}x - 1 = 0 \qquad x = \frac{2 + 5\sqrt{5}}{11} = 1{,}19821\ldots \tag{8.5.3}$$

$$\phi_{11/2} \qquad x^2 - 2\frac{11}{2}x - 1 = 0 \qquad x = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} = 11{,}09016\ldots \tag{8.5.4}$$

$$\phi_{4/11} \qquad x^2 - 2\frac{4}{11}x - 1 = 0 \qquad x = \frac{4 + \sqrt{137}}{11} = 1{,}42769\ldots \tag{8.5.5}$$

$$\phi_{11/4} \qquad x^2 - 2\frac{11}{4}x - 1 = 0 \qquad x = \frac{11+\sqrt{137}}{4} = 5{,}67617\ldots \tag{8.5.6}$$

$$\phi_{3/4} \qquad x^2 - 2\frac{3}{4}x - 1 = 0 \qquad x = 2 \tag{8.5.7}$$

$$\phi_{4/3} \qquad x^2 - 2\frac{4}{3}x - 1 = 0 \qquad x = 3 \tag{8.5.8}$$

$$\phi_{1/3} \qquad x^2 - 2\frac{1}{3}x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1+\sqrt{10}}{3} = 1{,}38742\ldots \tag{8.5.9}$$

$$\phi_{3/1} \qquad x^2 - 2\frac{3}{1}x - 1 = 0 \qquad x = 3 + \sqrt{10} = 6{,}16227\ldots \tag{8.5.10}$$

$$\phi_{1/2} \qquad x^2 - 2\frac{1}{2}x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ \ldots \tag{8.5.11}$$

$$\phi_{2/1} \qquad x^2 - 2\frac{2}{1}x - 1 = 0 \qquad x = 2 + \sqrt{5} = 4{,}23606\ldots \tag{8.5.12}$$

$$\phi_{1/1} \qquad x^2 - 2\frac{1}{1}x - 1 = 0 \qquad x = 1 + \sqrt{2} = 2{,}41421\ldots \tag{8.5.13}$$

Заметим, что лишь немногие числа этого списка связаны простыми соотношениями с “золотым” числом $\phi_{1/2} \equiv \phi$:

$$\phi_{2/1} = \phi^3, \quad \phi_{11/2} = \phi^5, \quad \phi_{2/11} = (10\phi - 3)/11$$

в целом же в этом разнородном семействе целых, рациональных и иррациональных чисел “золотое” число $\phi_{1/2}$ математически ничем не выделено. Можно сказать, что экспоненциальное обобщение золотой пропорции, представленное в виде квадратного уравнения, наделяет членов семейства равными формальными правами. Но это лишь первый, наиболее тривиальный шаг в развертывании формализма обобщённой теории, поэтому не будем торопиться с выводами. В качестве любопытного (но не более) нумерологического факта отметим, что $\phi_{4/11}$ и $\phi_{11/4}$ связаны с числом 137; числа 4, 11 и 137 (с “хвостиком”) наличествуют и в решении базового уравнения (3.7.1) для константы Зоммерфельда, кроме того, значение $\phi_{2/11}$ не очень сильно отличается ($\sigma \approx 0{,}0035$) от разности $4\cdot 11\cdot\pi - \alpha^{-1}$.

Перейдем ко второй части пункта (а) программы, то есть займёмся цепными и подходящими дробями членов семейства ϕ_{mk}, приводящими к бесконечным последовательностям – аналогам ряда Фибоначчи. Перед выводом общих формул имеет смысл продолжить наше “эмпирическое” исследование, призванное наглядно показать некоторые важные особенности рассматриваемых чисел. Выпишем в соответствии с имеющейся теорией цепные и подходящие дроби для нескольких характерных членов семейства в наглядном виде (5.2.12) и компактной форме (5.2.14).

$$\phi_{2/11} = [1;\, 5,\, 22,\, 5,\, 1,\, 1,\, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{6}{5},\ \frac{133}{111},\ \frac{671}{560},\ \frac{804}{671},\ \frac{1475}{1231},\ \frac{8179}{6826},\ \frac{181413}{151403},\ \frac{915244}{763841},\ \frac{1096657}{915244},\ \frac{2011901}{1679085},\ \frac{11156162}{9310669},\ \ldots$$

$\sigma_6 \approx 9{,}9\cdot 10^{-8}$, $\sigma_{12} \approx 4{,}3\cdot 10^{-16}$

$$\phi_{11/2} = [11;\, 11,\ldots] = 11 + \cfrac{1}{11 + \ddots}$$

$$\frac{11}{1},\ \frac{122}{11},\ \frac{1353}{122},\ \frac{15005}{1353},\ \frac{166408}{15005},\ \frac{1845493}{166408},\ \frac{20466831}{1845493},\ \frac{226980634}{20466831},\ \frac{2517253805}{226980634},\ \frac{27916772489}{2517253805},$$

$\sigma_6 \approx 2{,}9\cdot 10^{-13}$, $\sigma_{12} \approx 8{,}4\cdot 10^{-26}$

$$\phi_{4/11} = [1;\, 2,\, 2, 1,\, 22,\, 1,\, 2,\;\, 2,\, 1,\, 1,\, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}}}$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{10}{7},\ \frac{227}{159},\ \frac{237}{166},\ \frac{701}{491},\ \frac{1639}{1148},\ \frac{2340}{1639},\ \frac{3979}{2787},\ \frac{10298}{7213},\ \frac{24575}{17213},\ldots$$

$\sigma_6 \approx 7{,}6\cdot 10^{-6}, \quad \sigma_{12} \approx 1{,}6\cdot 10^{-9}$

$$\phi_{11/4} = [5;\, 1,\, 2,\, 11,\, 2,\, 1,\, 5,\, 5,\, \ldots] = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \ddots}}}}}}}$$

$$\frac{6}{1},\ \frac{17}{3},\ \frac{193}{34},\ \frac{403}{71},\ \frac{596}{105},\ \frac{3383}{596},\ \frac{17511}{3085},\ \frac{20894}{3681},\ \frac{59299}{10447},\ \frac{673183}{118598},\ \frac{1405665}{247643},\ \frac{2078848}{366241},\ \frac{11799905}{2078848},\ldots$$

$\sigma_6 \approx 8{,}5\cdot 10^{-7}, \quad \sigma_{12} \approx 2{,}2\cdot 10^{-13}$

$$\phi_{1/3} = [1;\, 2,\, 1,\, 1,\, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{5},\ \frac{18}{13},\ \frac{25}{18},\ \frac{43}{31},\ \frac{111}{80},\ \frac{154}{111},\ \frac{265}{191},\ \frac{684}{493},\ \frac{949}{684},\ \frac{1633}{1177},\ldots$$

$\sigma_6 \approx 1{,}1\cdot 10^{-3}, \sigma_{12} \approx 7{,}3\cdot 10^{-7}$

$$\phi_{3/1} = [6;\, 6,\, \ldots] = 6 + \cfrac{1}{6 + \ddots}$$

$$\frac{6}{1},\ \frac{37}{6},\ \frac{228}{37},\ \frac{1405}{228},\ \frac{8658}{1405},\ \frac{53353}{8658},\ \frac{328776}{53353},\ \frac{2026009}{328776},\ \frac{12484830}{2026009},\ \frac{76934989}{12484830},\ \frac{18003116202}{2921503573},\ldots$$

$\sigma_6 \approx 5{,}6\cdot 10^{-11}, \sigma_{12} \approx 1{,}1\cdot 10^{-19}$

$$\phi_{1/2} = [1;\, 1,\, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}$$

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \frac{144}{89},\ \frac{233}{144},\ \frac{377}{233},\ \frac{610}{377},\ \frac{987}{610},\ \frac{1597}{610},\ \frac{2207}{1597},\ldots$$

$\sigma_6 \approx 4{,}3\cdot 10^{-3}, \sigma_{12} \approx 1{,}3\cdot 10^{-5}$

$$\phi_{2/1} = [4;\, 4,\, \ldots] = 4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}$$

$$\frac{4}{1},\ \frac{17}{4},\ \frac{72}{17},\ \frac{305}{72},\ \frac{1292}{305},\ \frac{5473}{1292},\ \frac{23184}{5473},\ \frac{98209}{23184},\ \frac{416020}{98209},\ \frac{1762289}{416020},\ \frac{7465176}{1762289},\ \frac{31622993}{7465176},\ldots$$

$\sigma_6 \approx 3{,}2\cdot 10^{-8}$, $\sigma_{12} \approx 9{,}5\cdot 10^{-16}$

$$\phi_{1/1} = [2;\, 2,\, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{2+\ddots}$$

$$\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{12}{5},\frac{29}{12},\frac{70}{29},\frac{169}{70},\frac{408}{169},\frac{985}{408},\frac{2378}{985},\frac{5741}{2378},\frac{13860}{5741},\frac{33461}{13860},\ldots$$

$\sigma_6 \approx 3{,}2\cdot 10^{-5}$, $\sigma_{12} \approx 7{,}6\cdot 10^{-10}$

Представлены наиболее характерные и интересные члены рассматриваемого множества чисел; внимательно приглядевшись, можно подметить некоторые особенности множества в целом. Приведённые здесь центральные числа семейства заметно отличаются как своими цепными и подходящими дробями, так и скоростью сходимости к пределу. Цепная дробь “золотого числа” составлена из одних единиц, цепные дроби таких членов семейства ϕ_{mk} как $\phi_{2/1}$, $\phi_{3/1}$, $\phi_{11/2}$ содержат наряду с 1 число m, а члены с нецелым $2m/k$, к примеру $\phi_{11/4}$, содержат периодически повторяющиеся последовательности чисел. Обратим теперь внимание на соответствующие цепным дробям подходящие дроби, определённее на числители десятых членов. Для “золотого числа” это двузначное число (89); для $\phi_{1/3}$ трёхзначное (265), для $\phi_{1/1}$ и $\phi_{4/11}$ четырёх-, для $\phi_{11/4}$ шести-, для $\phi_{2/11}$ и $\phi_{2/1}$ семи-, для $\phi_{3/1}$ восьми-, для $\phi_{11/2}$ одиннадцатизначное число. Посмотрим теперь на отклонения σ_6, σ_{12} шестых и двенадцатых членов последовательностей подходящих дробей от их пределов. Они варьируются весьма широко: от $\sigma_6 \approx 4{,}3\cdot 10^{-3}$ и $\sigma_{12} \approx 1{,}3\cdot 10^{-5}$ для “золотого числа” до $\sigma_6 \approx 2{,}9\cdot 10^{-13}$ и $\sigma_{12} \approx 8{,}4\cdot 10^{-26}$ для $\phi_{11/2}$. Кстати, по наименьшему среди приведённых отклонению можно судить, насколько оправданно название *подходящая дробь* для отрезков цепных дробей. Так, если в двенадцатом члене подходящей дроби числа $\phi_{11/2}$ увеличить или уменьшить числитель всего на одну единицу, отклонение σ от истинного значения составит уже $4{,}3\cdot 10^{-13}$, то есть увеличится на целых 13 порядков.

В нашем предваряющем более серьёзный теоретический анализ небольшом “эмпирическом” исследовании трижды упомянуто золотое число. Легко догадаться, что такая выделенность числа ϕ относится не только к взятой для наглядности группе характерных чисел, но и ко всему бесконечному множеству чисел ϕ_{mk} (m = 1, 2, 3, …; k = 1, 2, 3, …), так что и в рамках предлагаемой концепции можно уже сейчас констатировать известные из элементарной теории золотого сечения положения.

1) Константа ϕ единственное число, цепная дробь которого составлена из одного-единственного элемента, равного единице
2) Ряд Фибоначчи – наименее быстро растущая последовательность подходящих дробей
3) Ряд Фибоначчи сходится к пределу медленнее чем любая другая последовательность подходящих дробей

Можно сказать, что константа ϕ это уникум семейства чисел ϕ_{mk} с единственными в своем роде свойствами, выделяющими его из всех чисел континуума. В содержательном понимании, при сопоставлении математических величин с реалиями природы эти свойства имеют достаточно определённый смысл, о чем немало сказано выше и будет говориться в дальнейшем, после развертывания формализма обобщённой теории.

8.6. Основные формулы обобщённой теории

Предварительное знакомство с экспоненциальной формой, квадратными уравнениями, цепными и подходящими дробями некоторых наиболее важных членов семейства ϕ_{mk}, а также то, что мы уже знаем о золотом сечении, – всё это позволяет осуществить развертывание формализма обобщённой теории экономно, без особых сложностей. Прежде всего заметим, что если $2m/k \equiv a$ целое число, то все a_i в формуле (8.4.12) для цепной дроби равны a; если же $2m/k$ число нецелое, имеем ряд периодически повторяющихся начиная с некоторого места параметров a_0, a_1, …, a_i, определяемых периодичностью рациональной дроби m/k (см. например цепную дробь для $\phi_{2/11}$). Другое, связанное с первым отличие в том, что для целочисленных $2m/k$ числители и знаменатели подходящих дробей пробегают одну и ту же (за исключением начальных членов) последовательность чисел, аналогичных ряду Фибоначчи, а вот для нецелочисленных $2m/k$ не совпадают последовательности P_1, P_2, P_3, … и Q_1, Q_2, Q_3, … для числителей и знаменателей соответственно. Обе они аналогами ряда Фибоначчи считаться уже не могут, и для нахождения искомого ряда

$$u_1,\, u_2,\, u_3,\, \ldots,\, u_i,\, \ldots \qquad (8.6.1)$$

используем универсальное требование сходимости этого ряда к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi_{mk} \tag{8.6.2}$$

Проще всего составить (для нецелых, напомним, значений параметра a) целочисленный ряд

$$Q_1,\ P_1,\ Q_2,\ P_2,\ Q_3,\ P_3,\ \ldots,\ Q_i,\ P_i,\ \ldots \tag{8.6.3}$$

но для него требование (8.6.2) выполняется лишь в ограниченном объёме:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{2k}}{u_{2k-1}} = \phi_{mk},\quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.6.4}$$

Если например $a = 2/3$, то, зная из предыдущего раздела подходящие дроби для $\phi_{1/3}$, имеем ряд

1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 7, 13, 18, 18, 25, 31, 43, 80, 111, 111, 154, 191, 265, …

Он сходится лишь для последовательности отношений четных членов к нечетным, а допустим для подпоследовательности u_{6k-1}/u_{6k-2} (k = 1, 2, 3, …) отношение равно 1 для любого k = 1, 2, 3, … Кроме того заметим, что правило третьего члена

$$u_{n+2} = u_n + a u_{n+1} \tag{8.6.5}$$

справедливое для любого целого a, не выполняется, если a рациональная дробь. В последнем случае имеет место формула

$$u_{n+2} = a_i u_n + u_{n-2},\quad n \ge 3 \tag{8.6.6}$$

в которую наряду с членами ряда (8.6.3) u_{n+2}, u_n, u_{n-2} входят периодически повторяющиеся в зависимости от отношения m/k параметры a_i цепной дроби (8.4.12). Например для $\phi_{2/11}$ (см. выше) i = 0, 1, 2, 3, 4 и $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 22$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1$, так что для этих параметров a_i начиная с пятого члена выполняются следующие соотношения:

$$\begin{array}{ll}
u_5 = a_2 u_3 + u_1 & u_6 = a_2 u_4 + u_2 \\
u_7 = a_3 u_5 + u_3 & u_8 = a_3 u_6 + u_4 \\
u_9 = a_4 u_7 + u_5 & u_{10} = a_4 u_8 + u_6 \\
u_{11} = a_0 u_9 + u_7 & u_{12} = a_0 u_{10} + u_8 \\
u_{13} = a_1 u_{11} + u_9 & u_{14} = a_1 u_{12} + u_{10} \\
u_{15} = a_2 u_{13} + u_{11} & u_{16} = a_2 u_{14} + u_{12} \\
u_{17} = a_3 u_{15} + u_{13} & u_{18} = a_3 u_{16} + u_{14} \\
\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

В правильности этих соотношений, продолжение которых очевидно, можно убедиться непосредственной проверкой, что же касается общего доказательства, оно довольно громоздко и может быть получено методом математической индукции. Ясно одно: ряд, составленный по принципу (8.6.3), не вполне соответствует универсальному принципу (8.6.2) сходимости к пределу, к тому же все его члены содержат не подпадающие под общий алгоритм частные параметры. Условие полного единообразия формул, столь характерное для классического ряда Фибоначчи, здесь явно нарушается. Нужно поэтому искать другое решение.

Для этого отвлечемся от всех частных моментов и попытаемся решить задачу в общем виде. Записав непосредственно вытекающее из исходной экспоненты (8.4.1) квадратное уравнение (8.4.9) в виде

$$\phi_{mk}^2 = a\phi_{mk} + 1 \tag{8.6.7}$$

последовательно имеем:

$$\begin{aligned}
\phi_{mk}^3 &= \phi_{mk}^2\phi_{mk} = a\phi_{mk}^2 + \phi_{mk} = a(a\phi_{mk} + 1) + \phi_{mk} = (a^2+1)\phi_{mk} + a \\
\phi_{mk}^4 &= \phi_{mk}^3\phi_{mk} = (a^3+2a)\phi_{mk} + (a^2+1) \\
\phi_{mk}^5 &= \phi_{mk}^4\phi_{mk} = (a^4+3a^2+1)\phi_{mk} + (a^3+2a) \\
\phi_{mk}^6 &= \phi_{mk}^5\phi_{mk} = (a^5+4a^3+3a)\phi_{mk} + (a^4+3a^2+1) \\
\phi_{mk}^7 &= \phi_{mk}^6\phi_{mk} = (a^6+5a^4+6a^2+1)\phi_{mk} + (a^5+4a^3+3a) \\
\phi_{mk}^8 &= \phi_{mk}^7\phi_{mk} = (a^7+6a^5+10a^3+4a)\phi_{mk} + (a^6+5a^4+6a^2+1) \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Закон образования коэффициентов при a очевиден, это биномиальные коэффициенты. Используя общепринятые обозначения

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

можно доказать по индукции общую формулу

$$\phi_{mk}^{n} = [a^{n-1} + \binom{n-2}{1} a^{n-3} + \binom{n-3}{2} a^{n-5} + \binom{n-4}{3} a^{n-7} + \ldots]\phi_{mk} +$$

$$[a^{n-2} + \binom{n-3}{1} a^{n-4} + \binom{n-4}{2} a^{n-6} + \binom{n-5}{3} a^{n-8} + \ldots] \qquad (8.6.8)$$

для положительных степеней n. С учётом того, что по определению $0! = 1$, в компактной форме имеем:

$$\phi_{mk}^{n} = \sum_{i=0}^{n-2} \left[a^{n-(2i+1)} \binom{n-i-1}{i} \phi_{mk} + a^{n-(2i+2)} \binom{n-i-2}{i} \right] \qquad (8.6.8')$$

Для отрицательных степеней схема получения общей формулы та же:

$$\phi_{mk}^{-1} = \phi_{mk} - a$$

$$\phi_{mk}^{-2} = \phi_{mk}^{-1}\,\phi_{mk}^{-1} = -a\,\phi_{mk} + (a^2 + 1)$$

$$\phi_{mk}^{-3} = \phi_{mk}^{-2}\,\phi_{mk}^{-1} = (a^2 + 1)\phi_{mk} - (a^3 + 2a)$$

$$\phi_{mk}^{-4} = \phi_{mk}^{-3}\,\phi_{mk}^{-1} = -(a^3 + 2a)\,\phi_{mk} + (a^4 + 3a^2 + 1)$$

$$\phi_{mk}^{-5} = \phi_{mk}^{-4}\,\phi_{mk}^{-1} = (a^4 + 3a^2 + 1)\,\phi_{mk} - (a^5 + 4a^3 + 3a)$$

$$\phi_{mk}^{-6} = \phi_{mk}^{-5}\,\phi_{mk} = -(a^5 + 4a^3 + 3a)\,\phi_{mk} + (a^6 + 5a^4 + 6a^2 + 1)$$

. . . .

$$\phi_{mk}^{-n} = (-1)^{n+1}[a^{n-1} + \binom{n-2}{1} a^{n-3} + \binom{n-3}{2} a^{n-5} + \binom{n-4}{3} a^{n-7} + \ldots]\phi_{mk} + (-1)^n[a^n +$$

$$\binom{n-1}{1} a^{n-2} + \binom{n-2}{2} a^{n-4} + \binom{n-3}{3} a^{n-6} + \ldots] \qquad (8.6.9)$$

или в компактной форме

$$\phi_{mk}^{-n} = \sum_{i=0}^{n-2} \left[(-1)^{n+1} a^{n-(2i+1)} \binom{n-i-1}{i} \phi_{mk} + (-1)^n a^{n-2i} \binom{n-i}{i} \right] \qquad (8.6.9')$$

Введём теперь обозначения, упрощающие запись всех этих соотношений и формул:

$$F_{mk1} \equiv 1$$

$$F_{mk2} \equiv a$$

$$F_{mk3} \equiv a^2 + 1$$

$$F_{mk4} \equiv a^3 + 2a$$

$$F_{mk5} \equiv a^4 + 3a^2 + 1$$

$$F_{mk6} \equiv a^5 + 4a^3 + 3a$$

$$F_{mk7} \equiv a^6 + 5a^4 + 6a^2 + 1$$

$$F_{mk8} \equiv a^7 + 6a^5 + 10a^3 + 4a$$

. . . .

$$F_{mkn} \equiv a^{n-1} + \binom{n-2}{1} a^{n-3} + \binom{n-3}{2} a^{n-5} + \binom{n-4}{3} a^{n-7} + \ldots \qquad (8.6.10)$$

Это пока ещё предположительно и есть та самая бесконечная последовательность чисел обобщённой теории золотого сечения, которая аналогична, а в частном случае (a = 1) и тождественна ряду Фибоначчи. Положительные и отрицательные степени любого члена семейства ϕ_{mk} запишутся в виде

$$\phi_{mk} = F_{mk1}\phi_{mk} \qquad \phi_{mk}^{-1} = F_{mk1}\phi_{mk} - F_{mk2}$$

$$\phi_{mk}^{2} = F_{mk2}\phi_{mk} + F_{mk1} \qquad \phi_{mk}^{-2} = -F_{mk2}\phi_{mk} + F_{mk3}$$

$$\phi_{mk}^{3} = F_{mk3}\phi_{mk} + F_{mk2} \qquad \phi_{mk}^{-3} = F_{mk3}\phi_{mk} - F_{mk4}$$

$$\phi_{mk}^{4} = F_{mk4}\phi_{mk} + F_{mk3} \qquad \phi_{mk}^{-4} = -F_{mk4}\phi_{mk} + F_{mk5}$$

$$\phi_{mk}^{5} = F_{mk5}\phi_{mk} + F_{mk4} \qquad \phi_{mk}^{-5} = F_{mk5}\phi_{mk} - F_{mk6}$$

. . . .

Окончательно:

$$\phi_{mk}^{n} = F_{mkn}\phi_{mk} + F_{mk(n-1)} \qquad (8.6.11)$$

$$\phi_{mk}^{-n} = (-1)^n(F_{mk(n+1)} - F_{mkn}\phi_{mk}) \qquad (8.6.12)$$

Для четных степеней $n = 2i$ (i = 1, 2, 3, …) последняя формула принимает вид

$$\phi_{mk}^{-2i} = F_{mk(2i+1)} - F_{mk(2i)}\phi_{mk} \qquad (8.6.13)$$

а для нечетных степеней $n = 2i - 1$ вид

$$\phi_{mk}^{-(2i-1)} = F_{mk(2i-1)}\phi_{mk} - F_{mk(2i)} \qquad (8.6.14)$$

Формулы для суммы и разности степеней очевидны:

$$\phi_{mk}^{n} + \phi_{mk}^{-n} = F_{mk(n-1)} + F_{mk(n+1)} \quad \text{для четных степеней} \qquad (8.6.15)$$

$$\phi_{mk}^{n} - \phi_{mk}^{-n} = F_{mk(n-1)} + F_{mk(n+1)} \quad \text{для нечетных степеней} \qquad (8.6.16)$$

Только что выведенные формулы (8.6.11–16) обобщённой теории с точностью до индексов совпадают с известными формулами (5.9.3–6), (5.9.9) и (5.9.10) классической теории золотого сечения. Это, конечно, не случайно, поскольку всё должно подчиняться *принципу соответствия*, известному больше из физики, по сути универсальному методологическому условию соотнесённости нового знания со старым. Новая научная теория или модель непременно должна быть связана со своей предшественницей, если таковая имеется, иначе это просто свободный полёт в просторах научной фантазии. В общем условие соответствия сводится к тому, что любая научная теория, претендующая на более широкую область применимости, на более глубокое описание физической, математической и т.п. реальности, на обобщение старой теории, должна включать последнюю как предельный или частный случай. Упомянутые формулы теории золотого сечения как раз представляют собой частный, отвечающий значению параметра a = 1 случай формул обобщённой теории, но одного этого явно недостаточно. Соответствие соответствию рознь, и если мы хотим считать последовательность

$$F_{mk1},\ F_{mk2},\ F_{mk3},\ \ldots,\ F_{mki},\ \ldots \qquad (8.6.17)$$

аналогом традиционного ряда

$$F_1,\ F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_i,\ \ldots$$

в свою очередь – частного случая (m = 1, k = 2) первой последовательности, аналогия должна относиться к фундаментальным характеристикам ряда Фибоначчи. В качестве таковых следует брать, во-первых, условие сходимости к пределу (8.6.2), справедливое без каких-либо ограничений на четность или нечетность n, и во-вторых, обобщённое правило третьего члена, по которому значение каждого члена искомой последовательности должно начиная с некоторого места определяться значениями двух предшествующих членов. Именно двух и именно непосредственно предшествующих – в противном случае глубинной аналогии с рядом Фибоначчи уже не будет. В случае последовательности (8.6.3) ни одно из этих условий фактически не соблюдается, что и послужило причиной отказа от неё. Посмотрим теперь, как обстоит дело с “биномиальной” последовательностью (8.6.17).

Может показаться, что положительный ответ здесь очевиден, что нет надобности заниматься доказательством таких явных тезисов. Однако в этот ответственный момент легкомыслие неуместно. К тому же в ходе очень простых доказательств будет получено обобщение важнейшей формулы Бине, а тем самым выполнены первые два пункта из четырёх программы исследования в разделе 8.4. Используя формулу (8.6.11), составим отношение

$$\frac{\phi_{mk}^{n+1}}{\phi_{mk}^{n}} = \frac{F_{mk(n+1)}\,\phi_{mk} + F_{mkn}}{F_{mkn}\,\phi_{mk} + F_{mk(n-1)}} = \phi_{mk}$$

которое с учётом выражения (8.6.7) для ϕ_{mk}^2 после элементарных преобразований и замены $n \to n+1$ окончательно приводится к виду

$$F_{mk(n+2)} = a\,F_{mk(n+1)} + F_{mkn} \qquad (8.6.18)$$

Правило третьего члена доказано: $n+1$-ый член последовательности F_{mk1}, F_{mk2}, F_{mk3}, … определяется лишь параметром a и *двумя непосредственно предшествующими ему членами* F_{mkn} и $F_{mk(n-1)}$.

Использование этого правила наряду с формулами (8.6.11) и (8.6.12) для положительной и отрицательной степеней ϕ_{mk} быстро приводит к нужным результатам. Составим разность для четных степеней n и сумму для нечетных (ср. формулы (8.6.15) и (8.6.16) для суммы четных степеней и разности нечетных):

$$\phi_{mk}^{n} - \phi_{mk}^{-n} = F_{mkn}\,\phi_{mk} + F_{mk(n-1)} - (F_{mk(n+1)} - F_{mkn}\,\phi_{mk}) = 2F_{mkn}\,\phi_{mk} - F_{mk(n+1)} = F_{mkn}(2\phi_{mk} - a)$$

Отсюда

$$F_{mkn} = \frac{\phi_{mk}^{n} - \phi_{mk}^{-n}}{2\phi_{mk} - a} \quad \text{для четных } n \qquad (8.6.19)$$

точно так же

$$F_{mkn} = \frac{\phi_{mk}^{n} + \phi_{mk}^{-n}}{2\phi_{mk} - a} \quad \text{для нечетных } n \qquad (8.6.20)$$

Обе формулы нетрудно объединить в одну:

$$F_{mkn} = \frac{\phi_{mk}^{n} - (-1)^n\phi_{mk}^{-n}}{2\phi_{mk} - a} \qquad (8.6.21)$$

Это и есть формула Бине в обобщённой теории, справедливая для любых рациональных a и целых n. Как и для константы ϕ (см. формулу 5.8.10) обобщение на случай произвольных действительных и комплексных чисел возможно лишь посредством функции косинуса. Так, для любого действительного числа r справедлива формула

$$F_{mkn} = \frac{\phi_{mk}^{r} - (\phi_{mk}^{-1})^r\cos(r\pi)}{2\phi_{mk} - a} \qquad (8.6.21')$$

которая при целых значениях r = 0, ±1, ±2, …, переходит в предыдущую формулу. Поскольку ϕ_{mk}^{-n} с увеличением n стремится к нулю, получим, составив на основе формулы (8.6.21) отношение $F_{mk(n+1)}/F_{mkn}$, разделив числитель и знаменатель дроби на ϕ_{mk}^{n} и устремив переменную к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{mk(n+1)}}{F_{mkn}} = \phi_{mk} \qquad (8.6.22)$$

Условие (8.6.2) сходимости к пределу доказано, а пункты (а) – (б) программы исследования целиком выполнены.

8.7. Экспонента, периоды и закон Бенфорда

Интересным проявлением некоторых особенностей исходной “золотой” экспоненты являются своеобразные, чтобы не сказать причудливые, периоды связанных с ней и приведённых к однозначному виду бесконечных рядов. С подобной периодичностью мы уже сталкивались в разделах 5.7 и 5.9 при обсуждении рядов Фибоначчи, Люка и квазифибоначчиевых последовательностей типа (5.9.37). Напомним, что выделенными тогда оказались периоды из 24 членов, сумма которых всегда равнялась 117. В ОТЗС при анализе проблемы в целом эта интригующая тема получает дальнейшее развитие, приводит к довольно неожиданным результатам, частично изложенным ниже. Речь идёт о целочисленных последовательностях, для которых переменная m/k целое или полуцелое число. Ограничимся при этом положительными рядами, поскольку отрицательные ряды отличаются от них лишь знаком минус при четных членах (см. формулу 5.8.8). Другими словами, мы имеем дело с частным случаем золотой экспоненты

$$\phi_{mk} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/2)}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (8.7.1)$$

следовательно предметом непосредственного анализа являются бесконечные последовательности положительных “серебряных” чисел F_{m2n} (ими мы займёмся в разделах 8.9 – 8.10), обозначаемые общим символом u, а также последовательности общего типа

$$a_1 F_{m2(n+n_1)} + a_2 F_{m2(n+n_2)} + \ldots + a_j F_{m2(n+n_j)} \tag{8.7.2}$$

где $a_1, \ldots, a_j$ и $n_1, \ldots, n_j$ произвольные наборы целых чисел включая нуль. Сразу отметим, что в конечном счёте всё можно свести к формуле

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/2)} = m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m \ddots}}} \tag{8.7.3}$$

выражающей указанную экспоненту в виде бесконечной непрерывной дроби из двух элементов – единицы и целого числа m; для золотого числа, как известно, $m = 1$, для константы да Винчи $m = 2$. Поэтому данную экспоненту можно считать универсальным генератором целочисленной последовательности серебряных чисел как подмножества золотого семейства. Отсюда в принципе может быть получено кроме самой константы ϕ_{mk} многое другое: обобщённое правило третьего члена, все целочисленные ряды золотого семейства начиная с ряда Фибоначчи, соответствующие квадратные уравнения типа

$$x^2 - 2m/k - 1 = 0 \tag{8.7.4}$$

подходящие дроби и т.д. Наш интерес к периодам вызван ещё и тем, что это как бы узловая точка пересечения проблем, связанных с непрерывными и подходящими дробями, со скрытыми особенностями позиционных систем счисления, в частности десятичной, с правилом третьего члена и законом Бенфорда, а также с сюрпризами неполной индукции как порой незаменимого, но не совсем надёжного проводника по неизученным уголкам математической теории. Для наглядного представления проблемы при отсутствии общих доказательств нужна достаточно репрезентативная статистика по конкретным рядам. С этой целью кроме исходных F_{m2n} возьмём ещё две очень разные последовательности u_1 и u_2 общего типа, одну попроще, другую посложнее, с произвольно, без всякой системы выбранными наборами параметров a_j и n_j:

$$u_1 = 3F_{m2(n-2)} + 7F_{m2(n+5)} \tag{8.7.5}$$

$$u_2 = -4F_{m2(n+2)} + 19F_{m2(n-8)} - 3F_{m2(n-6)} + 8F_{m2(n+11)} - 6F_{m2(n-4)} - 5F_{m2n} \tag{8.7.6}$$

Основные в данном контексте характеристики приведённых к однозначному виду и представленных восемнадцатью начальными членами последовательностей u, u_1, u_2 даны в таблице.

Таблица 8.7

Периодичность приведённых рядов, связанных с числами типа $\mathrm{e}^{\operatorname{arsh} m/2}$

N	Число семейства $\phi_{m/k}$	Ряд	Период	Сумма
1	$\phi_{1/2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 1/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	u	24 (**1**, **8**)	117
		u_1	24 (**5**, **4**)	117
		u_2	1 (9)	9
2	$\phi_{2/2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 1} = 1+\sqrt{2}$	u	24 (**2**, **7**)	117
		u_1	24 (**7**, **2**)	117
		u_2	24 (**4**, **5**)	117
3	$\phi_{3/2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 3/2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$	u	6 (1, 3, 1, 6, 1, 9)	21
		u_1	6 (3, 7, 6, 7, 9, 7)	39
		u_2	6 (1, 5, 7, 8, 4, 2)	27
4	$\phi_{4/2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 2} = 2+\sqrt{5}$	u	8 (1, 4, 8, 9, 8, 5, 1, 9)	45
		u_1	8 (2, 7, 3, 1, 7, 2, 6, 8)	36
		u_2	1 (9)	9
5	$\phi_{5/2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 5/2} = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$	u	8 (1, 5, 8, 9, 8, 4, 1, 9)	45
		u_1	8 (4, 7, 3, 4, 5, 2, 6, 5)	36
		u_2	8 (9, 2, 1, 7, 9, 7, 8, 2)	45
6	$\phi_{6/2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 3} = 3+\sqrt{10}$	u	6 (1, 6, 1, 3, 1, 9)	21
		u_1	6 (3, 7, 9, 7, 6, 7)	39
		u_2	6 (1, 2, 4, 8, 7, 5)	27

7	$\phi_{7/2} = e^{\operatorname{arsh} 7/2} = \dfrac{7+\sqrt{53}}{2}$	u	24 (**7**, **2**)	117
		u_1	24 (**8**, **1**)	117
		u_2	1 (9)	9
8	$\phi_{8/2} = e^{\operatorname{arsh} 4} = 4+\sqrt{17}$	u	24 (**1**, **8**)	117
		u_1	24 (**1**, **8**)	117
		u_2	24 (**7**, **2**)	117
9	$\phi_{9/2} = e^{\operatorname{arsh} 9/2} = \dfrac{9+\sqrt{85}}{2}$	u	2 (1, 9)	10
		u_1	2 (3, 7)	10
		u_2	2 (1, 8)	9
10	$\phi_{10/2} = e^{\operatorname{arsh} 5} = 5+\sqrt{26}$	u	24 (**1**, **8**)	117
		u_1	24 (**5**, **4**)	117
		u_2	1 (9)	9
11	$\phi_{11/2} = e^{\operatorname{arsh} 11/2} = \dfrac{5+5\sqrt{5}}{2}$	u	24 (**2**, **7**)	117
		u_1	24 (**7**, **2**)	117
		u_2	24 (**4**, **5**)	117
12	$\phi_{12/2} = e^{\operatorname{arsh} 6} = 6+\sqrt{37}$	u	6 (1, 3, 1, 6, 1, 9)	21
		u_1	6 (3, 7, 6, 7, 9, 7)	39
		u_2	6 (1, 5, 7, 8, 4, 2)	27
13	$\phi_{13/2} = e^{\operatorname{arsh} 13/2} = \dfrac{13+\sqrt{173}}{2}$	u	8 (1, 4, 8, 9, 8, 5, 1, 9)	45
		u_1	8 (2, 7, 3, 1, 7, 2, 6, 8)	36
		u_2	1 (9)	9
14	$\phi_{14/2} = e^{\operatorname{arsh} 7} = 5+5\sqrt{2}$	u	8 (1, 5, 8, 9, 8, 4, 1, 9)	45
		u_1	8 (4, 7, 3, 4, 5, 2, 6, 5)	36
		u_2	8 (9, 2, 1, 7, 9, 7, 8, 2)	45
15	$\phi_{15/2} = e^{\operatorname{arsh} 15/2} = \dfrac{15+\sqrt{229}}{2}$	u	6 (1, 6, 1, 3, 1, 9)	21
		u_1	6 (3, 7, 9, 7, 6, 7)	39
		u_2	6 (1, 2, 4, 8, 7, 5)	27
16	$\phi_{16/2} = e^{\operatorname{arsh} 8} = 8+\sqrt{65}$	u	24 (**1**, **8**)	117
		u_1	24 (**8**, **1**)	117
		u_2	1 (9)	9
17	$\phi_{17/2} = e^{\operatorname{arsh} 17/2} = \dfrac{17+\sqrt{293}}{2}$	u	24 (**1**, **8**)	117
		u_1	24 (**1**, **8**)	117
		u_2	24 (**2**, **7**)	117
18	$\phi_{18/2} = e^{\operatorname{arsh} 9} = 9+\sqrt{82}$	u	2 (1, 9)	10
		u_1	2 (3, 7)	10
		u_2	2 (1, 8)	9

Данные этой таблицы даже при относительно небольшом их количестве, предоставляют немало возможностей для анализа, но вначале – кое-какие пояснения. Прежде всего отметим, что хотя периодичность это общее свойство всех без исключения последовательностей указанного типа, однако сами периоды могут сильно разниться как по длине, так и своими элементами. Помимо наиболее часто встречаемого периода T = 24, характеризующего, мы уже видели, классические ряды Фибоначчи и Люка, встречаются периоды равные 8, 6, 2 и 1. При этом если сумма чисел, образующих период из 24 членов, всегда равна 117 (приведённая к однозначному виду сумма $S_{\text{пр}}$ = 9), а при T = 1 единственный элемент равен 9, в остальных случаях суммы могут быть разными: 45, 36 и 39 ($S_{\text{пр}}$ равно 9 и 3) при T = 8; 21, 39 и 27 ($S_{\text{пр}}$ равно 3 и 9) при Т = 6; 10 ($S_{\text{пр}}$ = 1) и 9 при T = 2; нельзя впрочем исключать и другие варианты. Все цифры, из которых составлены ряды с периодами из одного, двух, шести и восьми элементов, даны в скобках, что же до рядов с T = 24, общая их особенность в том, что каждый ряд неизменно содержит все цифры от 1 до 9 и, что интересно, во всех случаях семь цифр входят по два раза, а две цифры по пять раз. Притом сумма этих двух цифр (отмеченных в скобках полужирным в порядке появления в периоде) всегда равна 9, а поскольку $1 + \ldots + 9 = 45$, $45 - 9 = 36$, общая сумма всех членов периода неизменно равна ста семнадцати: $5 \cdot 9 + 2 \cdot 36 = 117$ ($S_{\text{пр}} = 9$). Конечно, ни одно число здесь не случайно; чаще других, нетрудно заметить, встречается 9 – наибольшая цифра в десятичной системе счисления. Самое, быть может, важное проявление особой роли девятки как одной из важнейших особенностей рядов данного типа это повторяемость периодов через каждые девять значений переменной $a = 2m/k$; отсюда наша таблица для 18 значений $\phi_{m/k}$, то есть для двух больших периодов.

Для большей уверенности в этой особенности проведем дополнительный тест для больших значений параметра m и для каждого из рядов u, u_1, u_2. Пусть например $m(u) = 429$, $m(u_1) = 281$, $m(u_2) = 532$, и если идея сохранения равного девяти большого периода верна, то по этим трем числам нетрудно определить, что в первом случае период должен быть равен 6, во втором 24, в третьем 1. Посмотрим теперь, каковы эти периоды в действительности. После соответствующих вычислений имеем:

$$T_{u(m\,=\,429)} = 6\ (1, 6, 1, 3, 1, 9), \quad T_{u_1(m\,=\,281)} = 24\ (\mathbf{7}, \mathbf{2}), \quad T_{u_2(m\,=\,532)} = 1\ (9)$$

то есть ожидание полностью подтвердилось и даже параметры периодов в скобках совпали. Строго говоря, одного этого ещё не достаточно для окончательного заключения, поскольку полученный на базе – пусть даже достаточно обширной – статистических данных вывод, то есть вывод, полученный по неполной индукции, нередко оказывается ложным, вводит в заблуждение. Лжерядом Фибоначчи является ряд, образуемый функцией $\mathrm{G}(n)$ из раздела 8.1, дающий первые десять чисел F_n. Неполная индукция могла породить ложное представление, что не только последовательности F_n, L_n, R'_n, R''_n из 5.9, но и все квазифибоначчиевы ряды общего типа (8.7.2) имеют указанный период, равный 24, но уже наличие ряда u_2 для начального $m = 1$, то есть для золотого числа ϕ, как и других $m = 9k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), опровергает этот тезис. Кстати число 24 здесь лишь одно из нескольких возможных значений приведённого периода и никак не может считаться фундаментальной константой ещё и потому, что период $T = 24$ относится лишь к десятичной системе, в других же системах счисления сохраняется свойство периодичности, но не длина периода. С десятичной системой связано и существование равного 9 большого периода для рядов общего типа, то есть для любого целого m все члены бесконечного множества

$$\phi_{(m\,+\,9n/2)/2} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m+9n/2)/2}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.7.7}$$

имеют один и тот же период.

Не лишены интереса с точки зрения периодичности и расположения чисел и отдельные целочисленные ряды золотого семейства, например классический ряд u с параметром $m = 10$. Выпишем для начала первые десять его членов:

1, 10, 101, 1020, 10301, 104030, 1050601, 1061004, 107151001, 10821212005

– все они начинаются с единицы. Эта единичная серия, связанная с соотношением

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 10/2} = 10 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{10\ddots}}}$$

будет продолжаться ещё довольно долго, до 72-го члена включительно, дальше на первом месте будут только двойки, потом пойдет непрерывная серия троек и так далее до девяток, после чего всё повторяется снова. Любопытен не только сам факт периодичности данных серий, но и относящиеся к ним числовые значения. Чтобы убедиться в этом, нужна хотя бы минимальная статистика, поэтому выпишем данные по восьми большим периодам, отмечая начало и конец каждой серии с указанием в скобках её длины, а в последней строке – длины всего периода (серии).

Таблица 8.7.2

Данные по первому знаку членов ряда, связанных с числом $\phi_{10/2}$

Цифра	**Период 1**	**Период 2**	**Период 3**	**Период 4**
1	1–72 (72)	236–306 (71)	470–539 (70)	704–773 (70)
2	73–113 (41)	307–347 (41)	540–580 (41)	774–814 (41)
3	114–142 (29)	348–376 (29)	581–610 (30)	815–543 (29)
4	143–165 (23)	377–399 (23)	611–632 (22)	844–866 (23)
5	166–183 (18)	400–417 (18)	633–651 (19)	867–884 (18)
6	184–199 (16)	418–433 (16)	652–666 (15)	885–900 (16)
7	200–213 (14)	434–446 (13)	667–680 (13)	901–914 (14)
8	214–224 (11)	447–458 (12)	681–692 (12)	915–925 (11)
9	225–235 (11)	459–469 (11)	693–703 (11)	926–936 (11)
Итого	**235**	**234**	**234**	**233**

Цифра	**Период 5**	**Период 6**	**Период 7**	**Период 8**
1	937–1007 (71)	1171–1240 (70)	1405–1474 (70)	1638–1708 (71)
2	1008–1048 (41)	1241–1281 (41)	1475–1515 (41)	1709–1749 (41)
3	1049–1077 (29)	1282–1311 (30)	1516–1544 (29)	1750–1778 (29)
4	1078–1100 (23)	1312–1333 (22)	1545–1567 (23)	1779–1801 (23)
5	1101–1118 (18)	1334–1352 (19)	1568–1585 (18)	1802–1819 (18)
6	1119–1134 (16)	1353–1367 (15)	1586–1601 (16)	1820–1835 (16)
7	1135–1147 (13)	1368–1381 (14)	1602–1615 (14)	1836–1848 (13)
8	1148–1159 (11)	1382–1393 (12)	1616–1627 (12)	1849–1860 (12)
9	1160–1170 (11)	1394–1404 (11)	1628–1637 (11)	1861–1871 (11)
Итого	**234**	**234**	**233**	**234**

Очень любопытные данные, если внимательно в них вглядеться. Начнем с выделенных полужирным общих количеств членов в периодах, включающих непрерывные серии первых знаков от 1 до 9. Со второго члена последовательности и далее, как выясняется, закономерность чередования периодов такова:

234, 234, 233; 234, 234, 233; 234, 234, 233…

Становится более понятным число 117, неизменно фигурирующее при рассмотрении рядов u_1, u_2, u_3 в качестве суммы чисел в периоде $T = 24$. Связь элементарна: $117 \cdot 2 = 234$; заметим также, что приведённое к однозначному виду произведение числа 117 на любое целое число n равно 9. Это одна из конкретных особенностей десятеричной системы счисления, которую при желании нетрудно доказать. А вторая величина, число 233 – не что иное как тринадцатый член ряда Фибоначчи, следовательно данную закономерность можно записать в таком виде:

$$F_{13} + 1,\ F_{13} + 1,\ F_{13};\quad F_{13} + 1,\ F_{13} + 1,\ F_{13};\ \ldots$$

а сумму 117, общезначимую для всех периодов указанного типа из 24 членов, представить как $(F_{13} + 1)/2$. Теперь обратимся к числам в скобках, указывающим, что с точностью до единицы цифра 1 на первом месте стоит 70 (или 71) раз подряд, цифра 2 – 41 раз подряд и так далее до цифры 9, непрерывная серия которой равна 11 (или 10). Словом, рассмотрим последовательность

70 (71), 41, 29, 23 (22), 19 (18), 16 (15), 14 (13), 12 (11), 11 (10)

из девяти определяемых точно, или с точностью до единицы целых чисел, сумма которых равна 234 в двух случаях из трёх и 233 в одном. Вспомним теперь про феномен первого знака, выражаемый в десятичной системе в виде логарифмического закона Бенфорда (7.1.3), и применим этот закон к числу 234; результаты для 233 практически те же, лишь в одном случае вместо 19 получается 18. Используя функцию округления $R(x)$, имеем такую таблицу значений:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	**41**	**29**	**23**	**19**	**16**	**14**	**12**	**11**

Особые комментарии к ней не требуются, поскольку сразу видно, что закон Бенфорда выполняется здесь с абсолютной точностью. Но это ещё не всё. Полученные результаты, справедливые для простейшего ряда u с параметром $m = 10$, могут быть обобщены на множество других более сложных случаев включая последовательности общего типа (8.7.2) с произвольно взятыми значениями целочисленных параметров a_j и n_j и с параметрами $m = 9k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Например для ряда u_2 со значением переменной $m = 208$ ($208 = 9 \cdot 23 + 1$) выполняется указанное чередование периодов при строгом соблюдении логарифмического закона первого члена, с той лишь разницей, что данные закономерности начинают действовать с 14-го, а не 2-го – как в простейшем случае – члена последовательности.

8.8. Обобщённый закон Бенфорда

Дальнейшее рассмотрение приведённых к однозначному виду последовательностей предполагает переход с уровня статистически установленных закономерностей к более строгой математической модели, учитывающей все возможности и требующей также обобщения имеющихся данных, со всеми необходимыми дополнениями и корреляциями, на случай систем счисления с любым целочисленным основанием $n \geq 2$. Вполне возможно, что в подобной модели могут быть получены достаточно важные результаты, однако развитие данного фрагмента обобщённой теории уводит в сторону, а нас сейчас больше интересует ответ на поставленный ещё в разделе 7.1 вопрос о применимости закона логарифмического распределения первого знака к числовым последовательностям, отличным от рядов Фибоначчи, Люка и производных от них рядов. Нам потребуются статистические данные, относящиеся к двум разным типам рядов золотого семейства. Это определяемые формулой (8.7.3) целочисленные серебряные последовательности и получаемые из экспоненты $e^{\operatorname{arsh}(m/k)}$ все остальные последовательности, для которых $a = 2m/k$ нецелое рациональное число. Начнем с ряда

$$u_4 = 4F_{28/2(n+6)} - 2F_{11/2(n-1)} - 17F_{57/2(n+7)} + F_{67/2(n+2)} - 3F_{32/2(n-16)} + 6F_{51/2(n-9)} + 19F_{106/2(n+14)} - 5F_{40/2(n+5)} - 8F_{45/2(n+11)} \qquad (8.8.1)$$

составленного так, чтобы каждое отдельно взятое слагаемое представляло одно из девяти подсемейств, образующих, мы знаем, равный 9 большой период, другими словами чтобы были представлены все девять серебряных последовательностей, отличающиеся друг от друга значениями l ($l = 1, \ldots, 9$) в выражении $m = 9k + l$ для параметра m при совершенно произвольном выборе $k = 0, 1, 2, \ldots$ Показанные ниже 4513 первых знаков последовательности u_4 расположены один за другим по пронумерованным для удобства строкам с соответствующей группировкой одинаковых знаков.

0) 444 555 666 77 88 99

– –

1) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
2) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
3) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
4) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
5) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
6) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
7) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
8) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
9) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
10) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
11) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
12) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
13) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
14) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
15) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
16) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
17) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
18) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
19) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

20) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
21) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
22) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
23) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
24) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
25) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
26) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
27) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
28) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
29) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
30) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
31) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
32) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
33) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
34) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
35) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
36) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
37) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
38) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99
39) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
40) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
41) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
42) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99
43) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
44) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
45) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
46) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
47) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
48) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
49) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 888 9
50) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
51) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
52) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
53) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
54) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
55) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
56) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
57) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

---

58) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9
59) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
60) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9
61) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
62) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99
63) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
64) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99
65) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99
66) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99
67) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99

68) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

69) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9

70) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

71) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9

72) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

73) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99

74) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

75) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99

76) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

77) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99

78) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99

79) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

80) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9

81) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

82) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 777 88 9

83) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

84) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99

85) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

86) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99

87) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

88) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99

89) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99

90) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

91) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9

92) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

93) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9

94) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

95) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 88 99

96) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

97) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99

98) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

99) 111111111111 222222 33333 4444 555 666 77 88 99

100) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99

101) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

102) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9

103) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

104) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 9

105) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

106) 111111111111 2222222 33333 444 5555 66 77 888 9

107) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

108) 111111111111 2222222 33333 444 555 666 77 88 99

109) 111111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

110) 111111111111 2222222 3333 4444 555 666 77 88 99

111) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99

112) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

113) 111111111111 2222222 33333 4444 555 66 777 88 99

114) 11111111111 2222222 33333 4444 555 666 77 88 99

– –

Общие закономерности упорядочения первых знаков видны с первого взгляда. Минуя нулевой ряд, начиная с первого, а точнее с 16-го члена последовательности, все знаки располагаются в строгом, ни разу не нарушаемом порядке: сперва группа из одних единиц, потом двойки, тройки и далее до одной-двух девяток, потом с новой строки снова единицы, двойки и т. д. до бесконечности. В каждой строке содержится 39 либо 40 цифр, причём количество одинаковых знаков в разных строках если и разнится, то не более чем на единицу. Это то, что трудно не заметить чисто визуально, а менее явные закономерности требуют более детального рассмотрения.

Вначале посмотрим, *насколько точно* выполняется для данной последовательности логарифмический закон распределения первого знака, поскольку сам факт его выполнения интуитивно достаточно очевиден – недаром цифры выстраиваются в таком строго групповом порядке с убывающими по количеству членами в группе. Учитывая, что такой порядок, если отсчитывать с 1, начинается с 16-го члена последовательности u_4, а последний в нашем списке из 4513 членов 114-ый ряд полностью “укомплектован”, приведем статистические результаты для 4513 – 16 = 4498 членов с указанием в скобках данных идеального, то есть соответствующего логарифмическому закону 7.1.2, распределения.

Цифры	**Частота вхождения**
1	1354 (1354)
2	792 (792)
3	562 (562)
4	436 (436)
5	356 (356)
6	300 (301)
7	262 (261)
8	230 (230)
9	206 (206)

Отклонение реального распределения от идеального настолько незначительно, что комментариев здесь не требуется. От относительно большой выборки перейдем к очень малой и возьмём для сравнения с идеальным распределением какие-либо две соседние строки, хотя бы первую и вторую.

Цифра	**Частота вхождения**
1	24 (24)
2	14 (14)
3	10 (10)
4	8 (8)
5	6 (6)
6	5 (5)
7	5 (5)
8	4 (4)
9	3 (4)

Поскольку применение в формуле (7.1.2) функции округления $R(x)$ к общему числу 79 приводит к “лишней” единице, так что сумма в скобках равна 80, соответствие в данном случае тоже идеальное и можно уже делать первые выводы, относящиеся к тестируемой золото-серебряной последовательности. Во-первых, закон Бенфорда справедлив по отношению ко всему ряду u_4, во-вторых, он с точностью близкой к идеальной справедлив для любого относительно небольшого отрезка данного ряда, в-третьих, с неменьшей точностью справедлив для любого малого периода, состоящего из 39 либо 40 членов. Словом, распределение первых знаков в данной комбинированной последовательности происходит в строгом соответствии с законом логарифмического распределения и по периодам, точнее квазипериодам, исключающим по понятным причинам равное количество знаков во всех периодах.

Для всех девяти десятичных знаков это количество колеблется в пределах одной единицы: одиннадцать-двенадцать вхождений подряд для цифры 1, шесть-семь для 2, четыре-пять для 3, три-четыре для 4 и 5, два-три для 6, 7, 8, одно-два вхождения подряд для цифры 9. Эти колебания от периода к периоду также происходят по определённому закону, сущность которого можно видеть в обеспечении такого порядка знаков и их количества в каждой малой группе, при котором в конце каждого насчитывающего 39–40 членов периода закон логарифмического распределения выполняется с максимально возможной точностью. А сейчас мы попытаемся на примере знака 1 отыскать ещё одну закономерность, для чего и потребовалась выборка именно из 4513 элементов, поскольку для других тестов можно обойтись круглым и значительно меньшим их количеством. Последовательно отмечая вхождение знаков по периодам (строкам), будем для удобства различения выделять полужирным максимальные, а обычным шрифтом минимальные вхождения знака. Например выражение **8** + 1 + **1** означает, что налицо восемь периодов подряд максимального (12) вхождения знака 1, потом один период минимального (11) и один период максимального вхождения. Общая картина для девяти знаков и первой сотни периодов такова:

(**8** + 1 + **1** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **1** + 1) +

(**8** + 1 + **1** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **10** + 1 + **1** + 1) + …

Взятый в скобки большой период играет, оказывается, важную роль для данной и многих других, хоть и не всех комбинированных последовательностей серебряных чисел. Отделённый в списке для наглядности пунктирной линией большой период состоит из 57 малых периодов (строк) и содержит 2249 элементов – цифр. В шутку можно сказать, что два больших периода содержат 114 малых, между тем как раз 114-ый элемент периодической таблицы есть не что иное как рассмотренный в разделе 7.9 пик замечательного "острова стабильности" **[**Аракелян**]**, а значит получено косвенное свидетельство существования определённой связи между стабильностью химических элементов и свойствами серебряных последовательностей. Но это ещё не всё: число 57 в периодической таблице тоже явно выделено. Это порядковый номер лантана – редкоземельного элемента, с которого начинается семейство близких по свойствам лантаноидов, завершаемое элементом с $Z = 71$; в периодической таблице сразу за лантаном идёт гафний ($Z = 72$), а все лантаноиды выделены в специальную группу и даются отдельной строкой. Числа 71 и 72 тоже связаны с серебряной последовательностью (см. таблицу 8.7.2 и ниже), осталось только разобраться с самой главной здесь величиной, числом 2249. Оно разлагается на два простых множителя: $2249 = 13 \cdot 173$, а это просто замечательно, ведь некоторые считают, см. **[**Попов**]**, что 173 как раз есть количество всех возможных химических элементов. Что касается "чертовой дюжины", то она может быть числом периодов периодической системы; на сегодня твердо установлены лишь семь периодов, иногда говорят о девяти, но и конец таблицы ещё не близок. Словом, если хочешь проникнуть в тайны периодической системы химических элементов, изучай серебряные числа. А если серьёзно, то число 2249, не входящее насколько можно судить в какую-либо известную числовую последовательность, уникально по своему обслуживанию закона логарифмического распределения. Действительно, если в формулу типа (7.1.1) в стоящее под знаком функции округления $R(x)$ выражение $x = n \cdot \lg(1 + 1/j)$ подставить $n = 2249$ и заставить переменную j пробегать значения 1, 2,…, 9, получим такие числа:

$x_{j=1} = 677{,}016\ldots$ $x_{j=2} = 396{,}029\ldots$ $x_{j=3} = 280{,}987\ldots$

$x_{j=4} = 217{,}950\ldots$ $x_{j=5} = 178{,}078\ldots$ $x_{j=6} = 150{,}563\ldots$

$x_{j=7} = 130{,}423\ldots$ $x_{j=8} = 115{,}042\ldots$ $x_{j=9} = 102{,}908\ldots$

Семь значений очень близки к целым, а два ($x_{j=6}$ и $x_{j=7}$) к полуцелым числам. Сумма Σ_+ абсолютных значений всех отклонений от целого или полуцелого значения равна $\approx 0{,}46$, в среднем $\approx 0{,}05$ на одну цифру, а с учётом знака сумма Σ_{+-} просто равна нулю! Для сравнения: если брать например соседние числа 2248 и 2250, то в первом случае $\Sigma_+ = 1$, $\Sigma_{+-} = -1$ (все отклонения отрицательные), во втором $\Sigma_+ = 1{,}127$, $\Sigma_{+-} = 1$. Это существенная разница, особенно для суммы Σ_{+-}, обусловленная индивидуальной спецификой числа $x = 2249$, минимизирующего функцию

$$\sum_{j=1}^{9} \{x \lg(1 + 1/j) - R[x \lg(1 + 1/j)]\} \qquad (8.8.2)$$

Естественно возникает вопрос, насколько хорошо это нежданное и нигде, похоже, не отмеченное число обслуживает закономерность, которую можно назвать *правилом сохранения первого знака* (не путать с законом логарифмического распределения первого знака). Интуитивно ясно, что в данном случае целое число, каким бы особенным оно ни было, едва ли дотянет до уровня универсальной константы бесконечной последовательности трансцендентных чисел, но для более строгого и обоснованного ответа нужна как обычно соответствующая статистика. Выберем удобный для сравнения малый интервал Δu_4 последовательности u_4, например интервал между 243-им и 254-ым членами, содержащий в качестве начальных знаков цифры 5, 6, 7, 8, 9, 1. Правило сохранения первого знака подлежит проверке по формуле

$$k_j(N) = k_{0j} + 2249 \cdot N \qquad (8.8.3)$$

где k_{0j} первый знак j-го члена начального интервала, Δu_4, $k_j(N)$ первый знак соответствующего члена N-го периода, удаленного от начального на $2249 \cdot N$ номеров. Возьмём для сравнения четыре очень разных номера N, выделяя совпадения первых знаков крупным полужирным.

Таблица 8.8.1

Проверка правила сохранения первого знака для различных номеров *N*

Номер *N* и интервал номеров последовательности u_4				
243-254	***N* = 1** **2492-2503**	***N* = 50** **112 693-112 704**	***N* = 100** **225 143-225 154**	***N* = 400** **899 843-899 854**
$5{,}8466\cdot 10^{519}$	**5,84**41$\cdot 10^{5074}$	**5**,7187$\cdot 10^{228269}$	**5**,5936$\cdot 10^{456019}$	$4{,}8983\cdot 10^{1822519}$
$6{,}1980\cdot 10^{521}$	**6,19**53$\cdot 10^{5076}$	**6**,0624$\cdot 10^{228271}$	5,9297$\cdot 10^{456021}$	$5{,}1927\cdot 10^{1822521}$
$6{,}5705\cdot 10^{523}$	**6,5**676$\cdot 10^{5078}$	**6**,4267$\cdot 10^{228273}$	**6**,2861$\cdot 10^{456023}$	$5{,}5047\cdot 10^{1822523}$
$6{,}9653\cdot 10^{525}$	**6,96**22$\cdot 10^{5080}$	**6**,8129$\cdot 10^{228275}$	**6**,6638$\cdot 10^{456025}$	$5{,}8355\cdot 10^{1822525}$
$7{,}3839\cdot 10^{527}$	**7,38**06$\cdot 10^{5082}$	**7**,2223$\cdot 10^{228277}$	**7**,0643$\cdot 10^{456027}$	$6{,}1862\cdot 10^{1822527}$
$7{,}8276\cdot 10^{529}$	**7,82**42$\cdot 10^{5084}$	**7**,6564$\cdot 10^{228279}$	**7**,4888$\cdot 10^{456029}$	$6{,}5580\cdot 10^{1822529}$
$8{,}2980\cdot 10^{531}$	**8,29**44$\cdot 10^{5086}$	**8**,1165$\cdot 10^{228281}$	**7**,9389$\cdot 10^{456031}$	$6{,}9521\cdot 10^{1822531}$
$8{,}7967\cdot 10^{533}$	**8,79**28$\cdot 10^{5088}$	**8**,6042$\cdot 10^{228283}$	**8**,4160$\cdot 10^{456033}$	$7{,}3698\cdot 10^{1822533}$
$9{,}3253\cdot 10^{535}$	**9,32**12$\cdot 10^{5090}$	**9**,1213$\cdot 10^{228285}$	8,9217$\cdot 10^{456035}$	$7{,}8127\cdot 10^{1822535}$
$9{,}8857\cdot 10^{537}$	**9,88**14$\cdot 10^{5092}$	**9**,6694$\cdot 10^{228287}$	**9**,4579$\cdot 10^{456037}$	$8{,}2822\cdot 10^{1822537}$
$1{,}0479\cdot 10^{539}$	**1,047**5$\cdot 10^{5095}$	**1,0**250$\cdot 10^{228290}$	**1,0**026$\cdot 10^{456040}$	$8{,}7799\cdot 10^{1822539}$
$1{,}1109\cdot 10^{541}$	**1,11**04$\cdot 10^{5097}$	**1**,0866$\cdot 10^{228292}$	**1**,0628$\cdot 10^{456042}$	$9{,}3076\cdot 10^{1822541}$

Как видим, в первом периоде, то есть для членов последовательности, отстоящих от соответствующих чисел начального интервала на 2249 номеров, выполняется правило сохранения не только первого, но и второго, третьего, а в одном случае и четвертого десятичного знака. Сохранение первого знака имеет место и при значении N = 50 и даже кроме двух случаев при N = 100, а это уже очень далеко отстоящие от начала ряда числа: для полной десятичной записи каждого из них понадобится не менее сотни страниц. Лишь начиная с номеров порядка N = 100 наблюдается слабое нарушение указанного правила; приближённую формулу для стоящих перед степенью 10^n чисел b можно представить в виде

$$b = a\frac{c(N)}{N + c(N)}$$

где a значение в начальном интервале Δu_4, $c(N)$ параметр, близкий при N = 1 к 2249 и медленно дрейфующий в сторону уменьшения с увеличением номера периода N.

Хотя u_4 взята как образец комбинированной целочисленной последовательности общего типа, не следует думать, что все установленные для неё закономерности справедливы и в других случаях. Далеко не все серебряные последовательности включая ряд Фибоначчи, не говоря уж о других, нецелочисленных последовательностях золотого семейства, обнаруживают свойства периодичности, сходные с только что рассмотренными. Не останавливаясь на этом, покажем на частном примере, что закон первого знака универсально значим для всего семейства. Дадим для наглядности статистику первого знака для какой-либо достаточно “нестандартной” последовательности, например состоящей начиная с 29-го члена из одних отрицательных чисел последовательности с нецелыми значениями всех параметров $2m/k$:

$$u_5 = 7F_{1/3(n+3)} - 2F_{7/5(n-11)} - 4F_{3/7(n)} + 7F_{11/9(n+5)} - 13F_{5/6(n-8)} + 11F_{2/3(n-2)} - F_{9/7(n-14)} + 3F_{3/5(n+4)} - 9F_{123/101(n+1)} \qquad (8.8.3)$$

Поскольку правилу сохранения первого знака последовательность u_5, оказалось, не подчиняется, возьмём для тестирования какой-либо не слишком большой и не слишком малый отрезок бесконечного ряда, например первые 100 членов.

Цифра	Частота вхождения
1	302 (301)
2	177 (176)
3	125 (125)
4	96 (97)
5	80 (79)
6	66 (67)
7	56 (58)
8	47 (51)
9	51 (46)

Сравнение с теоретическими значениями в скобках говорит о пусть не идеальном, но достаточно хорошем выполнении закона логарифмического распределения даже в случае небольшого отрезка бесконечного ряда.

Таким образом, существование различных типов последовательностей золотого семейства, связанное с теми или иными значениями параметра m/k в экспоненте $\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/k)}$, позволяет выделить правила и законы как частного, так и общего характера. По отношению ко всем классам серебряных последовательностей это правило третьего члена, по отношению к некоторым из них – наличие больших и малых периодов и квазипериодов наряду со слабо нарушаемым для больших номеров правилом сохранения первого знака. А общезначимым для всего золотого семейства является

ОБОБЩЁННЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРВОГО ЗНАКА:

В любой связанной с экспонентой $\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/k)}$ *золотой последовательности или в любой конечной комбинации таких последовательностей вероятность* $P(q)$ *появления на первом месте знака* q *в системе счисления с основанием a определяется формулой*

$$P(q) = \frac{\ln(1 + 1/q)}{\ln a} \quad (q = 1, 2, \ldots, a-1) \tag{8.8.4}$$

Действие данного закона в отличие от закономерностей частного образца не ограничено рамками десятеричной системы счисления и в форме (8.8.4) закон справедлив не только для любой комбинации золотых последовательностей, но и в любой системе счисления с целочисленным основанием a. Добавим без дальнейшего обсуждения, что закономерности сходные с указанными, например существование малых и больших периодов в чередовании первых знаков, имеются и в других помимо десятеричной системах счисления, но общего аналитического закона, тем более относящегося ко всем золотым последовательностям, здесь пока не видно. Можно полагать по крайней мере на качественном уровне, что если наличие подобных закономерностей обусловлено как свойствами материнских функций экспоненты и логарифма, так и особенностями записи числа в позиционной системе счисления, а также конкретными характеристиками той или иной системы, то закон Бенфорда обусловлен главным образом существованием тонких связей материнских функций с целыми числами, которые при переходе от одной системы к другой меняет лишь свою количественную специфику, сохраняя содержание и формальную структуру самой связи.

Сказанного выше достаточно для понимания заложенных в экспоненте $\psi(\operatorname{arsh} m/k)$ потенций, имеющих множество разнообразных проявлений. Это в частности получение бесконечного множества последовательностей, выявление больших и малых периодов, относящихся к отдельным рядам и ко всему их множеству в целом. Особенно важны результаты, ведущие к более глубокому пониманию и широкому применению логарифмического закона Бенфорда, с абсолютной, можно сказать, точностью выполняемого для определённых рядов, с выстраивающимися в строго регламентированном порядке знаками n-ичной системы счисления и статистически справедливого для всех последовательностей золотого семейства, независимо от выбора системы счисления.

8.9. Формула Леви и семейство золотых чисел

В контексте обобщённой теории обратимся снова к формуле Леви, известной нам из раздела 5.4. Напомним, что для большинства действительных чисел эта формула даёт в пределе число $\exp(\pi^2/12 \ln 2) \approx 3{,}27582$, называемое константой Хинчина–Леви. Исключение составляют лишь числа включая члены золотого семейства, чья мера множества нуль. Характерно, что многие из полученных тогда результатов справедливы или легко обобщаются на случай произвольного ϕ_{mk}. Исходя из простейших свойств экспоненты и используя не приведённую на этот раз базу конкретных статистических данных, укажем сперва на относящиеся ко всем членам золотого множества результаты, а потом на справедливые лишь для отдельных подмножеств.

Как и для всех чисел с нулевой мерой множества малейшее отклонение ε от фиксированного значения, определяющего принадлежность семейству ϕ_{mk}, или от целого n в показателе степени любого ϕ^{n}_{mk} (n = ±1, ±2, ±3,…) приводит к числу, относящемуся уже к классу величин, общим пределом которых является константа Хинчина–Леви. Отметим далее равенство пределов

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/\phi_{mk})^{\frac{1}{n}} \tag{8.9.1}$$

для знаменателей Q_n и числителей P_n подходящих дробей всех чисел ϕ_{mk}. Одинаковы пределы и для любой пары взаимно обратных чисел ϕ^{n}_{mk}, ϕ^{-n}_{mk}. Наряду с общими для всего золотого семейства свойствами – выделенностью численного значения, равноправием числителей и знаменателей подходящих дробей, прямой и обратной величин – есть и принципиальные различия в свойствах между основными классами множества величин ϕ_{mk}. Числа с нецелыми значениями параметра $a = 2m/k$ подпадают под общее правило с константой Хинчина–Леви в пределе, поэтому предметом особого интереса являются лишь серебряные числа.

В зависимости от целочисленных показателей степени n имеем три класса чисел:

1) $\phi^{\pm1}_{m2}$, $\phi^{\pm2}_{m2}$; 2) $\phi^{\pm2p}_{m2}$; 3) $\phi^{\pm(2p+1)}_{m2}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$

Формула Леви даёт для них результаты вполне аналогичные ранее полученным для золотого числа. Учитывая формулу (8.9.1), утверждающую равенство пределов для числителей и знаменателей, достаточно записать результаты лишь для разделенных на ϕ^{r}_{m2} (r = ±1, ±2; ±2p, ±(2p + 1); p = 1, 2, 3, …) соответствующих числителей P_n:

$$\lim_{n\to\cdot}(P_n/\phi^{\pm1}_{m2})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\cdot}(P_n/\phi^{\pm2}_{m2})^{\frac{1}{n}} = \phi_{m2} \tag{8.9.2}$$

$$\lim_{n\to\cdot}(P_n/\phi^{\pm2p}_{m2})^{\frac{1}{n}} = \phi^{p}_{m2} \tag{8.9.3}$$

$$\lim_{n\to\cdot}(P_n/\phi^{\pm(2p+1)}_{m2})^{\frac{1}{n}} = \phi^{2p+1}_{m2} \tag{8.9.4}$$

Таким образом, во всех трёх случаях в результате предельных переходов для числителей и знаменателей подходящих дробей получается не константа Хинчина–Леви, а серебряное число либо его степень. При этом с увеличением показателя степени в последних двух формулах соответствующий предел стремится к бесконечности. Сравнивая подходящие дроби

$$-\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/2)} = -(m+1) + \cfrac{1}{-(m+1) + \cfrac{1}{-(m+1) + \cfrac{1}{-(m+1)_{\ddots}}}} \tag{8.9.5}$$

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}[(m+1)/2)]} = (m+1) + \cfrac{1}{(m+1) + \cfrac{1}{(m+1) + \cfrac{1}{(m+1)_{\ddots}}}} \tag{8.9.6}$$

сразу приходим к равенству пределов для чисел $-\phi_{m/2}$ и $\phi_{(m+1)/2}$:

$$\lim_{n\to\cdot}(P_n/-\phi_{m/2})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\cdot}(P_n/\phi_{(m+1)/2})^{\frac{1}{n}} = \phi_{(m+1)/2} \tag{8.9.7}$$

Частный случай этой формулы – ранее полученная формула (5.4.7), устанавливающая равенство константе да Винчи предела для взятого со знаком минус золотого числа. Для самой константы да Винчи

$$-\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(2/2)} = -3 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{1}{-3_{\ddots}}}$$

и поскольку

$$e^{\operatorname{arsh}(3/2)} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3\ddots}}$$

имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{2/2})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/\phi_{3/2})^{\frac{1}{n}} = \phi_{3/2} \qquad (8.9.8)$$

выражающее предел для ϕ_{22} через $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. А в целом как и во многих других случаях предельные отношения для отрицательных серебряных чисел $-\phi_{m/2}$ и степеней $-\phi^{\,n}_{m/2}$ вполне аналогичны ранее полученным для золотого числа, обобщение здесь фактически сводится к замене $\phi_{1/2} \to \phi_{m/2}$ в формулах раздела 5.4, то есть просто к замене там индекса 1 на индекс m:

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2}^{\pm1})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2}^{\pm2})^{\frac{1}{n}} = \phi_{(m+1)/2} \qquad (8.9.9)$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2}^{\pm 2p})^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}\,\phi_{m2}^{\,p} \qquad (8.9.10)$$

$$\lim_{n\to\infty}(P_n/-\phi_{m2}^{\pm(2p+1)})^{\frac{1}{n}} = \phi_{m2}^{\,2p+1} \qquad (8.9.11)$$

Есть и другие связанные с формулой Леви вопросы, касающиеся например пределов для чисел типа $\rho\phi_{m2}^{\pm1}$, $\rho\phi_{m2}^{\pm2}$, $\rho\phi_{m2}^{\pm2p}$, $\rho\phi_{m2}^{\pm(2p+1)}$, где ρ произвольное ненулевое действительное число, или относящиеся к различным комбинациям чисел ϕ_{mk}, но ограничимся сказанным.

8.10. Дополнения и выводы

Сегодня теория золотого сечения и рядов Фибоначчи представляет собой, как указывалось, целую отрасль чистой математики, имеющую множество всевозможных применений в самой математике и за её пределами. Трудно даже приблизительно подсчитать общее количество полученных здесь соотношений и формул, среди которых немало диковинок, достойных быть выставленными в математической кунсткамере. Понятно, что и возможности обобщённой теории в деле получения формул – простых или замысловатых, большей или меньшей значимости – практически безграничны. Но сейчас интерес для нас представляет лишь то, что связано с ядром теории, с исходной экспонентой, с логарифмом, с выведенными выше основными формулами. При всей своей значимости золотая пропорция частный случай экспоненты и все её формальные свойства целиком обусловлены свойствами материнских функций. Мы знаем, что характерной особенностью экспоненциально-логарифмического представления многих математических величин являются общность и простота. В этом можно убедиться и на примере недавно полученных формул.

Вне материнских функций не стоит даже пытаться искать например простое функциональное выражение для суммы и разности произвольных действительных степеней числа ϕ_{mk}. Между тем посредством гиперболических косинуса и синуса вопрос решается очень легко:

$$\phi_{mk}^{\rho} + \phi_{mk}^{-\rho} = 2\operatorname{ch}[\rho \operatorname{arcsh}(m/k)] \qquad (8.10.1)$$

$$\phi_{mk}^{\rho} - \phi_{mk}^{-\rho} = 2\operatorname{sh}[\rho \operatorname{arcsh}(m/k)] \qquad (8.10.2)$$

Эти формулы, справедливые для любого действительного и комплексного ρ, могут быть приведены к привычному виду для частных случаев целых n и целых или полуцелых m/k. С помощью гиперболических функций формула Бине для произвольного F_{mkn} запишется в виде

$$F_{mkn} = \frac{\operatorname{ch}[n \operatorname{arsh}(m/k)]}{{}_{mk} - m/k} \quad \text{для нечетных } n \qquad (8.10.3)$$

$$F_{mkn} = \frac{\operatorname{sh}[n \operatorname{arsh}(m/k)]}{\phi_{mk} - m/k} \quad \text{для четных } n \qquad (8.10.4)$$

достаточно удобном для нахождения любого члена обобщённого ряда Фибоначчи. Воспользуемся этим для записи тех нецелочисленных рядов, квадратные уравнения, цепные и подходящие дроби которых нам уже известны.

$\phi_{2/11}$ $1, \frac{4}{11}, \frac{137}{11^2}, \frac{1032}{11^3}, \frac{20705}{11^4}, \frac{207692}{11^5}, \frac{3336073}{11^6}, \frac{38475024}{11^7}, \ldots$

$\phi_{4/11}$ $1, \frac{8}{11}, \frac{185}{11^2}, \frac{2448}{11^3}, \frac{41969}{11^4}, \frac{631960}{11^5}, \frac{10133929}{11^6}, \frac{157538592}{11^7}, \ldots$

$\phi_{1/3}$ $1, \frac{2}{3}, \frac{13}{3^2}, \frac{44}{3^3}, \frac{205}{3^4}, \frac{806}{3^5}, \frac{3457}{3^6}, \frac{14168}{3^7}, \frac{59449}{3^8}, \frac{246410}{3^9}, \ldots$

Взяв в любом из этих рядов любые три рядом стоящих члена, нетрудно убедиться прямой подстановкой в правильности для них обобщённого правила третьего члена (8.6.18). С учётом того, что во всех случаях знаменатель увеличивается в k раз, попытаемся установить формулу связи между четырьмя стоящими один за другим членами F_{mkn}, $F_{mk(n+1)}$, $F_{mk(n+2)}$, $F_{mk(n+3)}$, что фактически сводится к формуле для их числителей. После нескольких прикидок для нечетных, а затем четных n приходим к формуле

$$F_{mk(n+1)}F_{mk(n+2)} - F_{mkn}F_{mk(n+3)} = (-1)^n a \qquad (8.10.5)$$

которую можно доказать математической индукцией с использованием закона третьего члена. Получено обобщение формулы (5.9.34′′′) для чисел Фибоначчи, связанное с ней принципом соответствия. В случае целых положительных и отрицательных значений r, h, t, s, l, для которых $h + t = s + l$, имеем для всего золотого семейства уже не содержащую параметра a обобщённую формулу

$$F_{mkh}F_{mkt} - F_{mks}F_{mkl} = (-1)^r F_{mk(h-r)}F_{mk(t-r)} - F_{mk(s-r)}F_{mk(l-r)} \qquad (8.10.6)$$

с точностью до обозначений воспроизводящую формулу (5.9.34).

Особенности исходной экспоненты позволяют с особой легкостью и в самом общем виде получить один важный, хотя относительно малоизвестный результат. Принимая во внимание фундаментальное свойство прямой и обратной функций – правило сокращения функциональных знаков (см. 2.3), для любой, не обязательно действительной переменной z имеем:

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arsh} z} - \mathrm{e}^{-\operatorname{arsh} z} = 2\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} z) = 2z \qquad (8.10.7)$$

В частном случае действительного рационального $z = m/k$

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/k)} - \mathrm{e}^{-\operatorname{arsh}(m/k)} = 2m/k \equiv a \qquad (8.10.8)$$

Если наконец a целое число, иначе говоря для тех членов семейства ϕ_{mk}, для которых

$m/k = m/2, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$

формула запишется в очень простом виде

$$\phi_{m2} - \frac{1}{\phi_{m2}} = m \qquad (8.10.9)$$

Разность между числом и обратным ему числом равна целому числу – это свойство называют серебряным сечением (серебряным средним, серебряной пропорцией). Соответствующее алгебраическое уравнение получается из последней формулы заменой $\phi_{m2} \to x$:

$$x^2 - mx - 1 = 0 \qquad (8.10.10)$$

Это частный случай уравнения (8.4.9), следовательно множество серебряных чисел является подмножеством семейства ϕ_{mk} и ясно, что других таких чисел нет. Используя формулу

$$\phi_{m2} = \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (8.10.11)$$

для положительного корня квадратного уравнения, выпишем несколько начальных и дальних членов серебряного подсемейства золотого семейства ϕ_{mk}, а для сравнения с рядом Фибоначчи приведем начальные (положительные) члены соответствующих последовательностей.

$\phi_{12} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(1/2)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ $\qquad m = 1$

$\phi_{22} = \phi_{11} = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh} 1} = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414$ $\qquad m = 2$

1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, …

$$\phi_{32} = e^{\operatorname{arsh}(3/2)} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}302 \qquad m = 3$$

1, 3, 10, 33, 109, 360, 1189, 3927, 12970, 42837, 141481, 467280, …

$$\phi_{42} = \phi_{21} = e^{\operatorname{arsh}2} = 2 + \sqrt{5} \approx 4{,}236 \qquad m = 4$$

1, 4, 17, 72, 305, 1292, 5473, 23184, 98209, 416020, 1762289, …

$$\phi_{52} = e^{\operatorname{arsh}(5/2)} = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \approx 5{,}192 \qquad m = 5$$

1, 5, 26, 135, 701, 3640, 18901, 98145, 509626, 2646275, 13741001, …

$$\phi_{62} = \phi_{31} = e^{\operatorname{arsh}3} = 3 + \sqrt{10} \approx 6{,}162 \qquad m = 6$$

1, 6, 37, 228, 1405, 8658, 53353, 328776, 2026009, 12484830, …

$$\phi_{72} = e^{\operatorname{arsh}(7/2)} = \frac{7+\sqrt{53}}{2} \approx 7{,}140 \qquad m = 7$$

1, 7, 50, 357, 2549, 18200, 129949, 927843, 6624850, 47301793, …

. . . .

$$\phi_{137/2} = e^{\operatorname{arsh}(137/2)} = \frac{137+\sqrt{18773}}{2} \approx 137{,}00729 \qquad m = 137$$

1, 137, 18770, 2571627, 352331669, 48272010280, 6613617740029, …

. . . .

$$\phi_{1836/2} = e^{\operatorname{arsh}(1836/2)} = \frac{1836+\sqrt{3370900}}{2} \approx 1836{,}000545 \qquad m = 1836$$

1, 1836, 3370897, 6188968728, 11362949955505, 20862382307275908, …

Приближённые десятичные значения даны не случайно. После простых расчётов нетрудно получить “обращенную” относительно (8.10.9) приближённую формулу

$$m + \frac{1}{m} \approx \phi_{m2} \tag{8.10.12}$$

Смысл её в том, что, складывая любое m с обратной ему величиной, получаем вполне определённое серебряное число, притом судя и по приведённым примерам с тем большей точностью чем больше m. А точная формула в виде бесконечной цепной дроби

$$m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \ddots}}} \equiv [m;\, m,\, \dots] = \phi_{m2} \tag{8.10.13}$$

получается из уравнения (8.10.10) обычным способом, изложенном в разделе 5.2. С этой точки зрения подсемейство ϕ_{m2} есть множество бесконечных цепных дробей типа $[m;\ m,\ \dots]$, частный случай ($m = 1$) которых – константа ϕ.

Получены наиболее важные формулы обобщённой теории, но возможности экспоненциального обобщения использованы далеко не полностью. Исходная формула (8.4.1) фактически ограничивает обобщение элементарной теории золотого сечения рассмотрением рациональных значений переменной: берутся лишь действительные, в частности целые, степени чисел семейства ϕ_{mk}. Между тем можно в принципе за исходную формулу обобщения брать экспоненту

$$e^{\operatorname{arsh} z} = e^{\operatorname{arsh}(x+iy)} \tag{8.10.14}$$

для любого комплексного z. Этому соответствует квадратное уравнение

$$z^2 - 2z - 1 = 0$$

или

$$z^2 + 2z - 1 = 0$$

с комплексными корнями. Используя далее свойства материнской функции e^z, то есть фактически аппарат раздела математического анализа, известного как теория функций комплексного переменного, можно получить комплексные ряды Фибоначчи и формулы Бине, комплексные цепные и подходящие дроби, произвольные комплексные степени чисел типа ϕ_{x+iy} и т.д. Всё это однако увело бы нас слишком далеко в сторону от той области, где явно или косвенно, с полной очевидностью или предположительно обнаруживается действие принципа золотого сечения. В конце концов наша задача не столько в максимальном использовании возможностей формально-экспоненциального обобщения, сколько в установлении тонкой связи между потенциями математического формализма и их реализацией в рамках как чистой математики, так и за её пределами. Представленного выше экспоненциального обобщения элементарной теории до уровня рациональных дробей здесь вполне достаточно; на очереди общий анализ характерных фамильных черт и экстраординарных особенностей наиболее видных членов семейства чисел ϕ_{mk}.

8.11. Константа да Винчи

Выбор математического формализма, наделяемого значимым онтологическим содержанием, похож на выбор правильного курса корабля при прохождении между Сциллой и Харибдой. История науки подсказывает, что в своих формальных первоистоках математическая система, претендующая на широкую применимость и адекватное описание внешнего мира, не бывает обычно чересчур сложной, но и как это ни странно слишком простой. При всей неоднозначности критериев формальной простоты теория, начинающаяся с неуклюжих, громоздких положений, не внушает никакого доверия, считается изначально ущербной, и неслучайно простота почти всегда и всеми расценивается как неотъемлемый атрибут “правильной”, содержательно значимой теории или модели. Это тема, к которой каждый раз в новом контексте приходится возвращаться. Но есть и другая сторона медали. Максималистское, доведенное до крайности понимание тезиса о простоте формальных оснований подобно опасному приближению корабля ко второму из двух чудовищ, стерегущих узкий проход в открытое море. Нередко крайняя упрощенность начала ограничивает сферу применимости теории и губительно влияет на прогресс в данной области. Например идея неделимых атомов Левкиппа–Демокрита, концепция первичности натуральных чисел, аксиомы евклидовой геометрии, рассматриваемые как постулаты физического пространства, постоянство силы взаимодействия между двумя телами можно отнести к числу наиболее элементарных и математически просто оформляемых положений. По крайней мере они проще чем элементарные частицы современной физики, концепция первичности ФМК, риманова геометрия и закон обратных квадратов соответственно, однако в этих и других случаях простота не становится залогом истинности и универсальной значимости. Если уж говорить о простоте как о фундаментальном эвристическом принципе развития науки и построения научной теории, надо иметь в виду простоту теории в целом, а не только её исходного формализма.

Это следует учитывать при оценке индивидуальных особенностей членов семейства чисел ϕ_{mk}. Как установлено в разделе 8.5 наибольший интерес представляют центральные числа семейства, поскольку при больших по модулю значениях m/k выполняются приближённые формулы (8.5.2), а при малых значениях корни соответствующего квадратного уравнения стремятся к ± 1. Среди всех ненулевых рациональных дробей m/k вероятно простейшая та, для которой числитель равен знаменателю. Следовательно изначально простейшим членом семейства можно считать число $e^{\operatorname{arsh} 1}$, которое проще чем $\phi \equiv \phi_{12}$ не только в исходной экспоненциальной форме, но и в записи посредством радикалов:

$$\phi_{11} = e^{\operatorname{arsh} 1} = 1 + \sqrt{2} \tag{8.11.1}$$

На примере этого числа, которое лучше других подходит на роль достаточно серьёзного по исходным данным конкурента золотому числу, можно будет делать выводы, относящиеся к семейству ϕ_{mk} в целом. Родственная ϕ_{11} вторичная константа $\sqrt{2}$, называемая нередко константой Пифагора, относится к классу важнейших математических величин, но всё же членом золотого семейства ϕ_{mk} “по прямой линии” является число

$$\phi_{11} = 1 + \sqrt{2} = 2{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ 2420\ldots \tag{8.11.2}$$

наделенное и характерными фамильными признаками и специфическими индивидуальными особенностями. Между прочим константа Пифагора, а значит и ϕ_{11} известны на середину 2011 г. с той же точностью в триллион десятичных знаков что и константы e и ϕ, уступая (в пять раз) лишь мировому лидеру – числу π **[**Constants and Records of Computation**]**. Это пусть косвенный, но достаточно весомый показатель важности данного числа. В любом случае знаменательно, что ϕ_{11} и ϕ_{12}, а потому и родственные им $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ члены одного и того же весьма специфического, особо отметим – экспоненциального семейства чисел. Всё необходимое для быстрого обзора основных свойств любого члена семейства ϕ_{mk} у нас есть, поэтому без выводов и доказательств нетрудно набросать математический портрет числа ϕ_{11} в сопоставлении с золотым числом.

Если геометрически золотая пропорция ассоциируется с правильными пяти- и десятиугольниками, то число ϕ_{11} с квадратом и правильным восьмиугольником. Аналог треугольников золотого сечения – прямоугольный равнобедренный треугольник. Это один из двух треугольников, из которых состоят все первоэлементы платоновской космологии, образующие беспредельное многообразие вещей природы; кстати у второго треугольника “гипотенуза вдвое длиннее меньшего катета” [Платон, 53c−54d]. Небольшой отрывок из “Тимея” ясно показывает, каково значение этих треугольников в построениях бога-демиурга, о которых ведает лишь он сам и его избранные друзья: “…Каждому, разумеется, ясно, что огонь и земля, вода и воздух суть тела, а всякая форма тела имеет глубину. Между тем любая глубина по необходимости должна быть ограничена природой поверхности; притом всякая плоская поверхность состоит из треугольников. Однако все вообще треугольники восходят к двум, из которых каждый имеет по одному прямому углу и по два острых, но при этом у одного по обе стороны от прямого угла лежат равные углы величиной в одну и ту же долю прямого угла, ограниченные равными сторонами, а у другого – неравные углы, ограниченные неравными сторонами. Здесь-то мы и полагаем начало огня и всех прочих тел, следуя в этом вероятности, соединённой с необходимостью; те же начала, что лежат ещё ближе к истоку, ведает бог, а из людей разве что тот, кто друг богу” [там же, 53c−53d]. Четыре первоэлемента → тела → форма тела → его глубина → поверхность, ограничивающая тело → треугольники, из которых состоит всякая плоская поверхность → два единственно возможных прямоугольных треугольника – такова логическая цепочка понятий и рассуждений платоновского демиурга, ведущая к числу ϕ_{11}.

Принимая во внимание и сказанное в разделе 7.3, можно утверждать, что последовательное построение даже столь упрощенной геометрической модели мира как пифагорейско-платоновская оказалось невозможным на основе одного лишь принципа золотого сечения. Это поучительный урок для многих. Симпатии демиурга, вложенные Платоном в уста пифагорейца Крития, похоже, разделились между константами ϕ_{11} для мира вещей (прямоугольные треугольники, куб) и ϕ_{12} в символическом изображении Вселенной (правильные пятиугольники, додекаэдр, частично икосаэдр). Добавим, что прямоугольный равнобедренный треугольник делится биссектрисой-медианой прямого угла пополам на два таких же треугольника; процесс деления на убывающие по площади подобные треугольники может быть неограниченно продолжен. Но чтобы из прямоугольного четырёхугольника с отношением длин сторон равным ϕ_{11} получить такой же прямоугольник меньших размеров, надо вписать в него не квадрат как в случае золотого сечения, а прямоугольник с отношением сторон 2:1, то есть вместо $1/(\phi - 1) = \phi$ имеем формулу

$$\frac{1}{\phi_{11} - 2} = \phi_{11} \qquad (8.11.3)$$

Отсюда

$$\phi_{11}^2 = 2\phi_{11} + 1 \qquad (8.11.4)$$

и после умножения обеих частей последнего равенства на ϕ_{11}^n приходим к формуле

$$\phi_{11}^{n+2} = 2\phi_{11}^{n+1} + \phi_{11}^n \qquad (8.11.5)$$

отличающейся от аналогичной формулы для ϕ множителем 2. Далее, если одним из двумерных геометрических символов золотого сечения служит вписанная в правильный пятиугольник пятиконечная звезда, то одним из геометрических символов числа ϕ_{11} может считаться вписанная в правильный восьмиугольник восьмиугольная звезда, параметры которой указаны на двух рисунках.

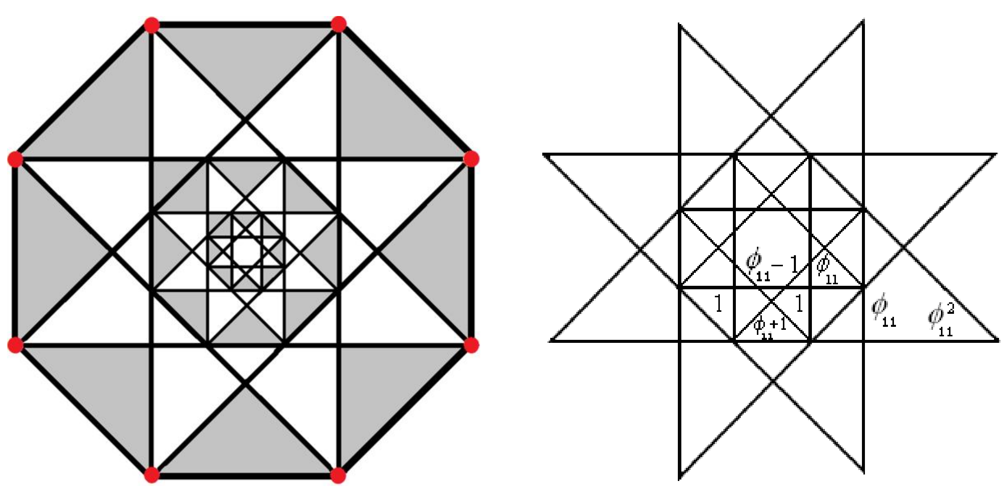


Рис. 8.11.1
Восьмиугольник, восьмиугольная звезда и её параметры

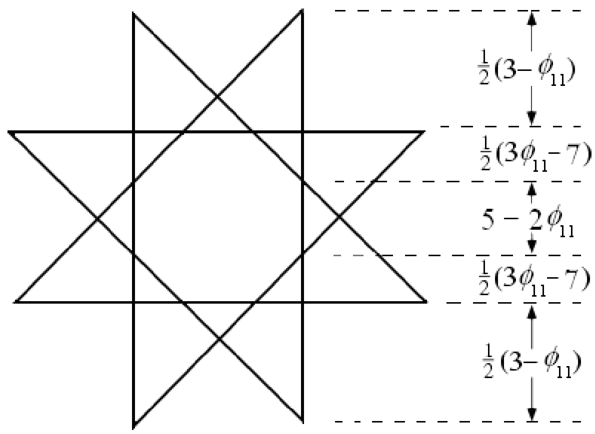


Рис. 8.11.2
Параметры восьмиугольной звезды

Знаменательно, что этот звездчатый восьмиугольник как и золотое сечение исследовался Леонардо да Винчи и даже носит его имя, см. **[**Пидоу, 155**]**. Справедливость требует назвать его именем и саму константу ϕ_{11}. Уравнению её логарифмической спирали

$$r = e^{\frac{2\ln\phi_{11}}{\pi}\theta} = \phi_{11}^{\frac{2}{\pi}\theta} \qquad (8.11.6)$$

соответствует постоянный параметр

$$\operatorname{arcctg}\left(\frac{2\ln\phi_{11}}{\pi}\right) = 1{,}05947\ 11164\ 58249\ldots \qquad (8.11.7)$$

для которого угол

$$\varphi_{11} \approx 60{,}70322° \qquad (8.11.8)$$

Поскольку спираль $r = e^{\theta\operatorname{ctg}\varphi}$ в полярных координатах с приближением угла φ между радиусом-вектором и касательной к 90° стремится в пределе к окружности, ясно, что кривая этой спирали ($\varphi_{11} \approx 60{,}7°$) закручена меньше золотой ($\varphi \approx 73°$).

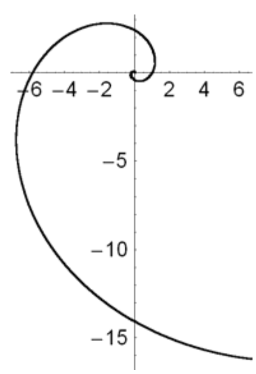


Рис. 8.11.3
Кривая спирали $\phi_{11}^{\frac{2}{\pi}\theta}$

Константа да Винчи имеет разумеется и трёхмерные представления. В какой-то степени это три из пяти платоновых тел: дуальный сам себе тетраэдр и дуальная пара куб – октаэдр. Так, через константу ϕ_{11} может быть выражен объём тетраэдра, угол между его гранями, угол между гранью и ребром, радиус описанной сферы и т.н. *угол тетраэдра* равный $2\operatorname{arctg}(\phi_{11} - 1)$; ϕ_{11} фигурирует в выражениях для радиуса вписанной сферы и диагоналей граней и куба, радиуса описанной сферы и объёма октаэдра и т.д. Если сторону октаэдра принять равной 1, сторона двойственного ему куба равна, как видно из рисунке, ϕ_{11} и наоборот: если единичный куб вписать в октаэдр, длина стороны последнего больше длины стороны куба в той же пропорции.

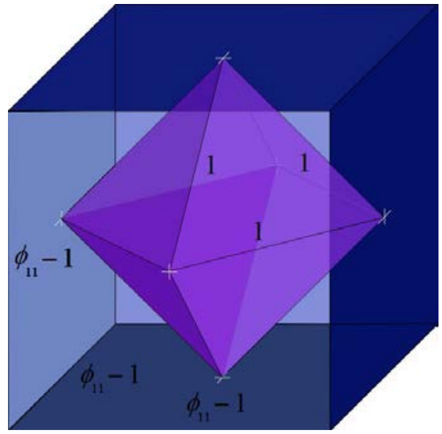


Рис. 8.11.4
Октаэдр вписанный в двойственный ему куб

Более явным трёхмерным носителем числа ϕ_{11} является усечённый кубооктаэдр **[**Truncated cuboctahedron**]**. Он состоит из 12 квадратов, 8 шестиугольников и 6 восьмиугольников, относится к семейству архимедовых тел и кстати дуален ромбододекаэдру, составленному из 12 одинаковых ромбов (вместо 12 пятиугольников у платонова додекаэдра).

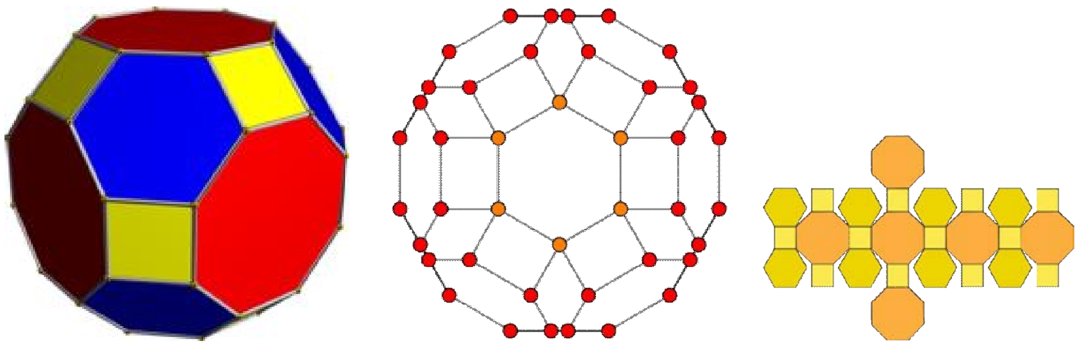


Рис. 8.11.5
Кубооктаэдр, его ортогональная проекция и развёртка на плоскость

Все основные параметры этого многогранника связаны с константой да Винчи, если же поместить его в начало трёхмерной декартовой системы координат и как обычно принять длину ребра кубооктаэдра равной двум, то 48 его вершин окажутся в точках (± 1, $\pm\phi_{11}$, $\pm 2\phi_{11} - 1$).

С интересующей нас точки зрения заслуживает некоторого внимания относящийся к семейству архимедовых тел усечённый куб, состоящий из 8 треугольников и 6 восьмиугольников **[**Truncated cube**]**. Здесь также немало параметров содержащих константу да Винчи, а если длину ребра усечённого куба принять за 1, ребра дуального ему триакисоктаэдра будут равны 2 и $\phi_{11} + 1$.

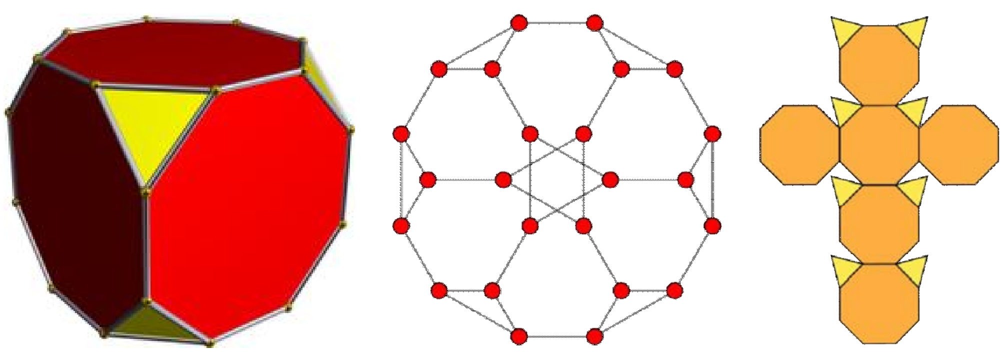


Рис. 8.11.5
Усечённый куб, его ортогональная проекция и развёртка на плоскость

Можно и дальше продолжать увлекательную тему полуправильных многогранников соотносящихся с константой да Винчи, но сказанного думается вполне достаточно.

Любопытства ради впишем в окружность на знаменитом рисунке Леонардо да Винчи его же восьмиугольную звезду. Обратив внимание на соответствие горизонтальной линии с нижним положением рук и на пересечение диагоналей на переносице носа, об остальном предоставим судить читателю.

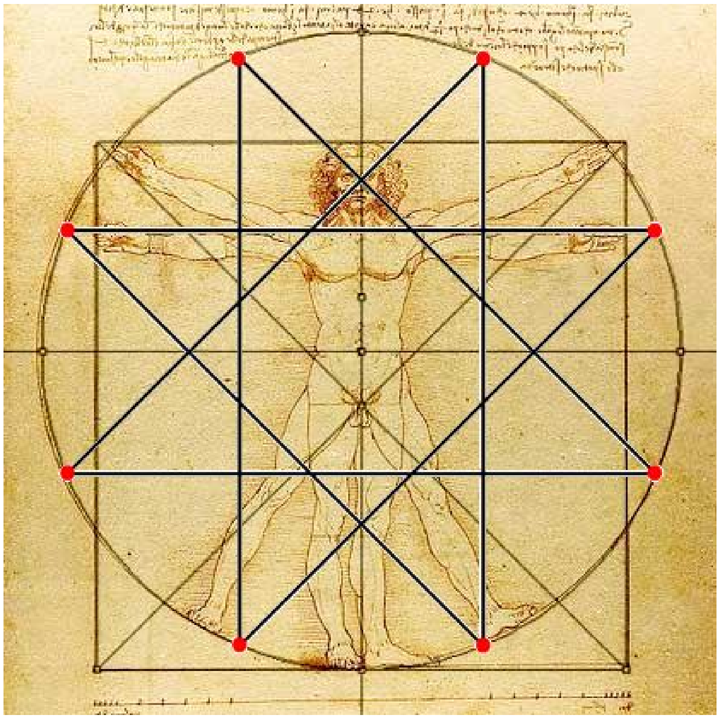


Рис. 8.11.6
Восьмиугольная звезда вписанная в окружность *Витрувианского человека*

Чрезвычайно интересна связь между двумя важнейшими членами семейства ϕ_{mk}, выявляемая посредством гамильтониана Фибоначчи (Fibonacci Hamiltonian), представляющего собой дискретный оператор Шрёдингера **[**Damanik *et al.***]**

$$[Hu](n) = u(n+1) + u(n-1) + V(n)u(n) \qquad (8.11.8)$$

Здесь $V(n) = \lambda\chi_{[1-\phi^{-1},\ 1)}(n\phi^{-1} + \theta \bmod 1)$, $\lambda > 0$ константа связи, $\theta \in [0,\ 1)$ фаза. Размерность Хаусдорфа гамильтониана при $\lambda \to \infty$ стремится к определённому пределу, который оказывается равным

$$\ln \phi_{11} = 0{,}881\,373\,587\ldots$$

Другими словами, размерность Хаусдорфа фрактала, называемого спектром гамильтониана Фибоначчи (Spectrum of Fibonacci Hamiltonian **[**List of fractals by Hausdorff dimension**]**) и связанного с золотым числом ϕ, равна логарифму константы да Винчи!

Напомним также, что в предыдущей главе нам уже встречался Фрактал фибоначчиева слова (Fibonacci word fractal) с размерностью Хаусдорфа равной утроенному отношению логарифмов констант ϕ_{12} и ϕ_{11}.

Фрактал Фибоначчиева слова $3\dfrac{\ln\phi_{12}}{\ln\phi_{11}} = 3\dfrac{\ln[(1+\sqrt{5})/2]}{\ln(1+\sqrt{2})} = 1{,}637\,938\ldots$	

Одними только восьмиугольниками, как и пятиугольниками и в отличие от правильных трёх-, четырёх и шестиугольников нельзя заполнить плоскость без пробелов и наложений. В простейшем случае плотного заполнения плоскости двумя геометрическими фигурами наряду с восьмиугольниками требуются ещё и квадраты (ср. с рис. 7.11.6 – 7.11.8).

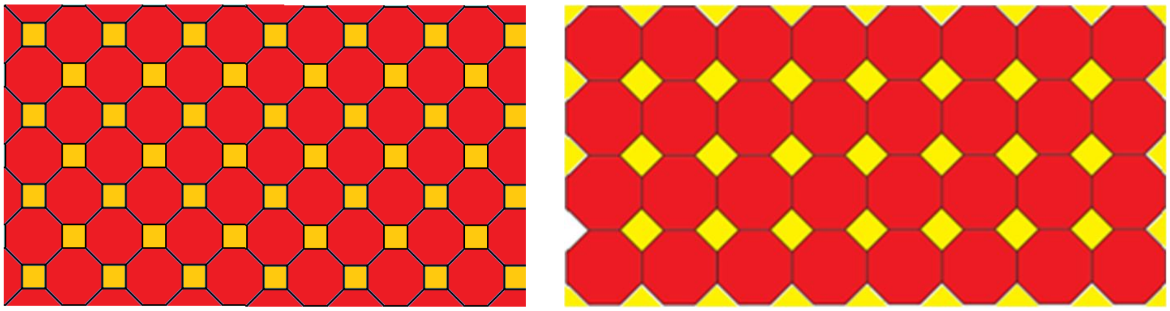


Рис. 8.11.7
Два способа заполнения плоскости восьмиугольниками и квадратами

В принципе все формальные характеристики константы ϕ_{11} непосредственно даны в приведённых выше примерах либо могут быть получены прямой подстановкой в формулы и соотношения ОТЗС. Знакомые уже нам квадратное уравнение (8.5.15)

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

цепная дробь [2; 2, …] и подходящие дроби

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{29}{12},\ \frac{70}{29},\ \frac{169}{70},\ \frac{408}{169},\ \frac{985}{408},\ \frac{2378}{985},\ \frac{5741}{2378},\ \frac{13860}{5741},\ldots$$

приводят к аналогу ряда Фибоначчи, то есть к бесконечной начиная с $F_{11}(0) = 0$ последовательности чисел F_{11}

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, 33461, 80782, 195025\ldots \qquad (8.11.9)$$

которая сходится к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{11(n+1)}}{F_{11(n)}} = \phi_{11} \qquad (8.11.10)$$

Правило третьего члена этой последовательности согласно справедливой для всех целочисленных a общей формуле (8.6.5) таково:

$$F_{11(n+2)} = 2F_{11(n+1)} + F_{11(n)} \qquad (8.11.11)$$

Заметим, что последовательность (8.11.9), определяемая приводящей к предельному соотношению (8.11.10) формулой (8.11.11), называется последовательностью Пелла (Pell’s sequence). Как и для чисел Фибоначчи для чисел Пелла, обозначаемых обычно символом P_n, а также их квадратов, сумм и т.п. существует множество различных представлений посредством рядов, факториалов и т. д.; некоторые из них приводятся ниже **[**Ram**]**:

$$P_k = \sum_{m=1}^{\frac{k+1}{2}} 2^{k-2m+1}\binom{k-m}{m-1}$$

$$P_k^2 = \sum_{m=1}^{k} 4^{k-m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1}\binom{2k-m-j}{m-j}$$

$$\sum P_k = \sum_{m=1}^{k} 2^{m-1} \sum_{j=0}^{\frac{k-m}{2}} \binom{m-1+j}{j}$$

Формулы, преобразующие степенные выражения ϕ_{11}^{n} и ϕ_{11}^{-n} в линейные, и формулы, преобразующие сумму $\phi_{11}^{2i} + \phi_{11}^{-2i}$ и разность $\phi_{11}^{2i-1} - \phi_{11}^{-(2i-1)}$ в целые числа, получаются прямой подстановкой ϕ_{11} вместо ϕ_{mk} в общие формулы (8.6.11 – 16). А суммы и разности для любых действительных степеней ρ получаются той же подстановкой в формулы (8.10.1) и (8.10.2), построенные посредством гиперболических косинуса и синуса. Из формулы (8.6.21) сразу получается формула Бине для ряда (8.11.9):

$$F_{11(n)} = \frac{\phi_{11}^{n} - (-1)^{n}\phi_{11}^{-n}}{2(\phi_{11} - 1)} \tag{8.11.12}$$

Обобщение её на случай произвольного действительного числа r это формула

$$F_{mkn} = \frac{\phi_{11}^{r} - (\phi_{11}^{-1})^{r}\cos(r\pi)}{2(\phi_{11} - 1)} \tag{8.11.12$'$}$$

тождественная предыдущей при целых значениях показателя степени r. А таблицу значений $2\sin(n\frac{\pi}{8})$ и $2\cos(n\frac{\pi}{8})$, сходную с таблицей 7.12.1, нетрудно построить, зная значения функций синуса и косинуса для аргументов $\pi/4$ и $\pi/2$. Не обошел вниманием число ϕ_{11} Рамануджан, открывший удивительную формулу, см. **[**Левин, 36**]**, связывающую эту константу с ФМК e, π, 2 и натуральным рядом:

$$1 - \frac{2}{3^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5^2} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9^2} - + \ldots = \frac{(\pi/2)^2 - \ln^2\phi_{11}}{2}$$

Интересны и приведённые например в **[**Knopp; Gradshteyn and Ryzhik**]** формулы

$$\phi_{11} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{2n-1}} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \ldots$$

$$\phi_{11} = 1 + \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right) = 1 + \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)\ldots$$

для бесконечной суммы и произведения. Не забудем также, что константа да Винчи – член особого в смысле предыдущего раздела подсемейства серебряных чисел $\phi_{n2} \equiv [n;\, n,\, \ldots]$ для случая $n = 2$.

Вот, пожалуй, и всё о формальных характеристиках константы ϕ_{11} как основного конкурента золотого числа в споре за первенство в благородном семействе ϕ_{mk}. Можно привести множество примеров применимости константы да Винчи, а в неменьшей степени её ближайшего родственника и гомолога – константы Пифагора в математике и за её пределами, но здесь мы отметим лишь “скрытую” природу этих констант, их так сказать формальную неприметность. Поясним: числа π и e – без труда узнаваемые практически в любом научном тексте математические константы, а вот распознание и признание числа 2 фундаментальной константой в силу его “обыденности” и простоты психологически намного сложнее, даже если двойка фигурирует в математической формуле или важнейшем физическом законе там, где в принципе могло стоять совершенно другое число, как в случае силы гравитационного и электромагнитного взаимодействия и вообще закона обратных квадратов. Аналогично появление $\sqrt{5}$, обычно, хоть и не всегда, свидетельствующее о присутствии константы ϕ, намного заметнее чем $\sqrt{2}$, предвещающий (тоже не всегда) константу да Винчи или Пифагора. Поэтому если вдуматься, лидерство золотого числа в семействе ϕ_{mk} не так бесспорно как кажется на первый взгляд.

А что в данных обстоятельствах вообще понимать под первенством – формальное совершенство и числовую уникальность или многообразие приложений и содержательных интерпретаций? Впрочем, это не дилемма, а замкнутая цепочка взаимосвязанных факторов: в основе содержательной значимости лежит формальная исключительность, которая в свою очередь нуждается в содержательном осмыслении. Конкретно задача в том чтобы разобраться, почему в бесконечном и формально равноправном семействе чисел лишь очень немногие являются избранными, и выяснить, есть ли среди них особо привилегированные. Решить эту задачу можно сравнительным анализом содержательно оцениваемых формальных особенностей отдельных членов семейства, используя при этом все необходимые наличные средства. В содержательном отношении известно многое о золотом числе, немало о константе да Винчи и почти ничего об остальных числах множества ϕ_{mk}. Важнее однако то, что в нашем распоряжении развёрнутые формализмы теории золотого сечения и её экспоненциального обобщения – теории семейства ϕ_{mk}. Это немалое количество формул общего и частного типа, дополненных соотношениями, цепными и подходящими дробями, целочисленными, дробными и иррациональными последовательностями и рядами, другими данными об отдельных наиболее интересных членах семейства. Можно поэтому полагать, что имеющегося в наличии достаточно для сравнений, анализа и выводов.

8.12. Итоги

Свести *всё* или *многое* к чему-то *одному* всегда трудно, если вообще осуществимо. Возможности – в любом смысле этого слова – отдельно взятой числовой величины довольно ограниченны, даже если речь идёт о фундаментальных константах математики и физики. Лишь система чисел, пусть неодинаковой значимости, но формально более или менее равноправных, способна достаточно полно представить количественный каркас теории, модели, области исследования. Наивно в частности полагать, будто константа ϕ, даже с многочисленной "свитой" вторичных относительно её величин, в состоянии (если такую постановку вопроса вообще можно считать корректной) отразить например все "наилучшие" пропорции в архитектуре. Помимо принадлежности к континууму всякое число имеет в соответствии с принятой нами классификацией определённый ранг, относится к тому или иному типу, является членом различных семейств и т. п. Константа ϕ и принцип золотого сечения определяются совокупностью рассмотренных ранее формальных характеристик и свойств, связей и отношений с другими константами, в первую очередь с ФМК в контексте ОТЗС и в сопоставлении с родственными величинами, прежде всего константой да Винчи. Используя все имеющиеся результаты и учитывая задачи настоящей главы, можно приступить к краткому подведению итогов.

1. **С** точки зрения теории ЛМФ число ϕ – **математическая константа второго ранга**, непосредственно выражаемая посредством материнских функций экспоненты и логарифма через ФМК формулами

   $$\phi = \mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(1/2)}, \quad \ln\phi = \operatorname{arsh}(1/2)$$

   Это основная форма представления золотого числа, утверждающая не только её вторичность относительно ФМК, но и принадлежность к множеству чисел типа $\{\mathrm{e}^{\operatorname{arsh} z}\}$, где z любое число. Если ограничиться положительными или отрицательными рациональными значениями $z = m/k$, получим семейство "золотых" в более узком смысле чисел типа $\{\phi_{mk}\} = \{\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/k)}\}$. Последовательное раскрытие свойств и характеристик экспоненты такого типа равнозначно построению обобщённой (до уровня рациональных чисел) теории золотого сечения, частным случаем которой является теория константы ϕ, соответствующая значениям $m = 1$, $k = 2$

2. **Д**ля чисел семейства ϕ_{mk} при $m/k \to \pm\infty$ выполняются **приближённые соотношения** (8.5.2) и **точные предельные равенства** (8.5.1). Содержательно наиболее значимы члены семейства, относящиеся по принятому нами соглашению к классу центральных чисел; в эту группу величин входит и константа ϕ. Хотя семейство чисел ϕ_{mk} определяется через экспоненту (или логарифм) определённого типа, но явной выделенности числа ϕ или допустим константы да Винчи ϕ_{11} в этой первичной форме представления "золотых чисел" нет

3. **З**апись экспоненты $\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/k)}$ в виде **непрерывной дроби** позволяет генерировать бесконечное множество золотых последовательностей включая ряд Фибоначчи, соотносящихся с различными целочисленными значениями переменных m и k. Для всех подобных последовательностей и их комбинаций с исключительно высокой точностью и во всех системах счисления с основанием $a \geq 2$ соблюдается логарифмический закон распределения первого знака – обобщённый закон Бенфорда. Этот закон свидетельствует о том, что между материнскими функциями и целыми числами существуют тонкие связи, формальная структура которых инвариантна относительно перехода от одной системы счисления к другой

4. **Д**ля разных последовательностей, обусловленных экспонентой типа $\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/2)}$, а также многих их комбинаций строгое выполнение **обобщённого закона Бенфорда** обеспечивается определённой **периодичностью** в расположении знаков n-ичной, в частности десятеричной, системы счисления. Благодаря малым периодам закон первого знака выполняется уже для очень малых, состоящих всего из несколько десятков членов отрезков бесконечной числовой последовательности, а наличие больших квазипериодов даёт помимо прочего знание первого знака даже для очень далеко отстоящих от начала ряда членов

5. **Периодичность**, ранее известная для приведённого к однозначному виду ряда Фибоначчи, наблюдается и для других генерируемых экспонентой $\mathrm{e}^{\operatorname{arsh}(m/2)}$ рядов и их произвольных комбинаций. Это своеобразный синтез некоторых свойств экспоненты и особенностей позиционной n-ичной системы счисления. В десятеричной системе наименьший приведённый период состоит из одного, а наибольший из 24 элементов, сумма которых неизменно равна 117; период из 24 членов строится по (приведённому) правилу третьего члена. С десятеричной системой связана и *периодичность периода* 8.7.7, то есть повторяемость одного и того же приведённого периода через каждые 9 номеров параметра m

6. **П**еревод экспоненты в алгебраическую форму приводит в действительных переменных к **квадратному уравнению** типа

   $$x^2 - ax - 1 = 0$$

   где $a = 2m/k$ произвольное рациональное число. Так, для константы ϕ параметр $a = 1$, для ϕ_{11} он равен 2. На данном этапе исследования свойств первичной экспоненты не видно серьёзных формальных преимуществ одних членов семейства перед другими

7. **Т**е числа ϕ_{mk}, для которых параметр a целое число, образуют семейство **серебряных чисел**, являющееся подмножеством золотых. Это числа $\phi_{n2} = e^{\operatorname{arsh}(n/2)}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), для которых выполняется условие (8.10.9):

$$\phi_{n2} - 1/\phi_{n2} = n$$

а соответствующее квадратное уравнение

$$x^2 - nx - 1 = 0$$

– очень частный случай предыдущего. Константы ϕ и ϕ_{11} являются первым и вторым членами указанного подмножества и в этом можно видеть их преимущество перед остальными и золотыми и серебряными числами

8. **Серебряные числа** относятся к классу величин, чья мера множества нуль, следовательно формула Леви (5.4.1) не приводит для них к константе Хинчина–Леви $\dfrac{\pi^2}{12\ln 2}$. Константа для любого числа, в точности, без малейших отклонений принадлежащего множеству $e^{\pm n \operatorname{arsh}(m/2)}$ (n и m целые положительные числа), это серебряное число либо его степень, при этом различаются три основных случая: $n = \pm 1, \pm 2$; $n > 2$ и четно; $n > 2$ и нечетно. Константой же для любого числа типа $-\phi_{m2}$ является число $\phi_{(m+1)2}$, отсюда предел Леви для золотого числа есть константа да Винчи

9. **П**реимущества случая $n = 1$ обнаруживаются при рассмотрении **логарифмической спирали**, уравнение (6.7.1) которой в полярных координатах имеет вид $r = ae^{k\theta}$ или $\ln(r/a) = k\theta$ в логарифмической записи. При любом значении параметра k спираль представляет собой обладающее рядом уникальных свойств соединение материнских функций, ФМК, арифметической и геометрической прогрессий, законов сохранения, в частности угла φ между радиусом-вектором и касательной, однако отмеченность золотой спирали (φ ≈ 73°) видна не сразу. Дело в том, что она не только равноугольная, как любая другая логарифмическая спираль, но и *равносторонняя*. Этому соответствует легко обнаруживаемое при построении спирали известными способами равенство $\phi - 1/\phi = 1$, иначе говоря значение $n = 1$ в уравнении для серебряного подсемейства золотых чисел. Под двойным “гнетом” законов сохранения и угла и отношения сторон рост и развитие в природе осуществляются в форме логарифмической спирали, близкой к золотой

10. **П**ереход от квадратного уравнения к **цепной дроби –** фактически решающий для признания уникальности числа ϕ. В условной записи $[a_0; a_1, \ldots, a_m, \ldots]$, принятой для представления цепных дробей (иррациональных чисел) члены элитного подсемейства ϕ_{m2} семейства ϕ_{mk} запишутся в виде (8.10.13):

$$\phi_{m2} = [m; m, \ldots] \equiv m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \ddots}}$$

В простейшем случае $m = 1$ имеем составленную из одних единиц цепную дробь, сходящуюся к числу ϕ, отсюда целый букет её поистине уникальных свойств. Это единственное иррациональное число, которое в данной форме может быть записано с использованием лишь одного графического знака единицы; такая кодировка будет одинаковой во всех системах счисления включая двоичную с минимальной кодировкой посредством знаков 0, 1; $[1; 1, \ldots]$; это наиболее медленно сходящаяся к своему пределу цепная дробь, а потому ϕ – число наиболее сильно сопротивляющееся “рационализации”, то есть приближённой записи в виде отношения двух целых чисел. Обычно говорят, что это *самое иррациональное число* континуума. Содержательно данное свойство можно толковать как *предельную сопротивляемость изменению*, как *максимальную сохраняемость, устойчивость, стабильность*. В этом и состоит основной смысл принципа золотого сечения как закона о минимизированном изменении количества с сохранением формы

11. **К**онкретная форма реализации принципа золотого сечения нередко соотносится с **числами Фибоначчи** F_n. Один из известных способов построения целочисленного ряда $F_1, F_2, F_3, \ldots$ связан с последовательностью рациональных приближений к иррациональной константе ϕ в виде подходящих дробей цепной дроби, которая составлена из одних единиц. В этой форме принцип золотого сечения проявляется в разных задачах чистой математики и её приложений, в разных явлениях природы скорее как закон оптимального распределения, выбора, упаковки и т. п., короче, как *закон оптимума*

12. **В** силу того что любое действительное число может быть записано в виде суммы серебряных чисел, основанием системы счисления может служить не только определённое число, но и бесконечная последовательность чисел $\{F_{m2}\}$. Однако лишь в случае порождаемой константой ϕ последовательности Фибоначчи, для которой параметр $a = 1$ и правило третьего члена имеет максимально упрощенную форму, возможна такая запись числа в виде суммы типа (7.6.1), куда каждый член последовательности входит **не более одного раза**

13. **В** своем классическом варианте **формула Бине** определяет любой член F_n ряда Фибоначчи, а в общем случае любой член F_{nmk} золотого семейства лишь для целых значений переменной n. Если полагать, что эта переменная может быть любым действительным или комплексным числом, то в **обобщённой формуле Бине** появляется множитель $\cos(\rho\pi)$, то есть e-i-2-преобразование с выделенными целыми значениями в точках кратных константе π. Посредством гиперболических функций (e-2-преобразование) выражается сумма и разность чисел ϕ^{ρ}_{mk} и $\phi^{-\rho}_{mk}$ для любого действительного ρ

14. **П**ринцип золотого сечения может рассматриваться как частный случай универсального физико-математического **принципа наименьшего действия**, лучше сказать *принципа минимума* во избежание жесткой увязки с известной физической величиной. Одно из проявлений этого принципа обнаруживается при рассмотрении возвратных последовательностей, строящихся по правилу $n + k$-го члена

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n$$

Применение принципа минимума приводит здесь к *правилу третьего члена* ($k = 2$) с множителями $a_1 = a_2 = 1$, а им соответствует характеристическое уравнение, являющееся квадратным уравнением для константы ϕ. Но и независимое применение правила третьего члена в самом общем случае двух произвольных комплексных чисел (см. 5.6) даёт начиная с некоторого номера четыре ряда F_n. Следовательно, к принципу золотого сечения приводит минимизация как в случае цепных дробей так и в случае возвратных последовательностей и правила третьего члена

15. **П**одводя окончательный итог, ещё раз отметим, что **вся математика золотого сечения и её обобщений может быть получена из свойств экспоненциальной (или логарифмической) функции определённого типа и из принципа минимума**. Природа, образно говоря, любит только хорошую математику и избегает излишеств. В этом, собственно, магия золотого числа и его гомологов, в этом причина широкой распространенности принципа золотого сечения

Литература

Аракелян Г.Б. Фундаментальная теория ЛМФ. Ереван, 2007

– От логических атомов к физическим законам. Ереван: “Лусабац”, 2007*a*

– *Пик “острова стабильности” и принцип золотого сечения* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161801.htm

Левин В.И. *Рамануджан – математический гений Индии*. М.: Знание, 1968

Пидоу Д. *Геометрия и искусство*. М.: Мир, 1979

Платон. *Тимей*. В кн.: Платон. Соч. в трёх томах, т.3, ч.1. М.: Мысль, 1971, с. 455–541

Попов В.С. *Квантовая электродинамика сверхсильных полей.* В кн.: Современная теория элементарных частиц. М.: Наука, 1984, с. 127–144

Arakelian H. LMP Fundamental Theory. Yerevan: Sarvard, 2010

Constants and Records of Computation http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/Records.html

Damanik D., Embree M, Gorodetski A, and Tcheremchantse S. *The Fractal Dimension of the Spectrum of the Fibonacci Hamiltonian* www.ruf.rice.edu/~dtd3/DEGT-FD.pdf

Guy R.K. *The Second Strong Law of Small Numbers*. The Math. Magazine **63** (examples 3, 45, 46), p. 3–21 (1990)

Gradshteyn L.S. and **Ryzhik I.M.** *Tables and Integrals, Series and Products*. N.Y: Academic Press, 1980

Knopp K. *Theory and Application of Infinite Series*. New York: Hafner, 1951

Knott R. *Fibonacci Forgeries* http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibforgery.html

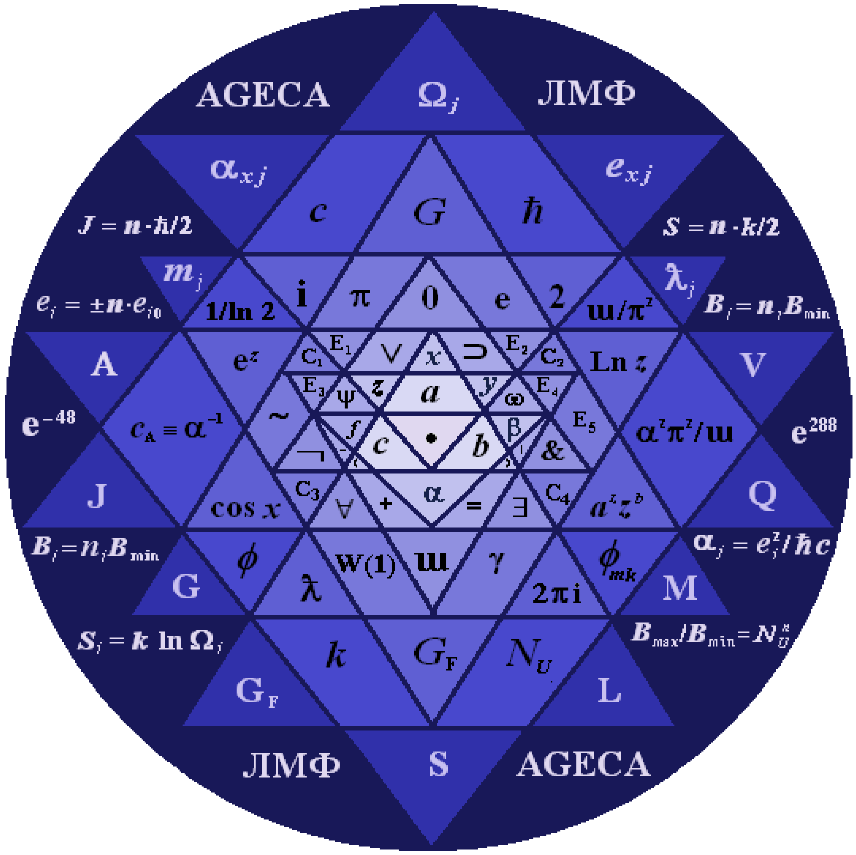
List of fractals by Hausdorff dimension. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension

Ram R. *Pell Numbers Formulae* http://users.tellurian.net/hsejar/maths/pell/

Stewart I. *Daisy, Daisy, Give Me Your Answer, Do.* Sci. Amer., Jan 1995

Truncated cube. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_cube

Truncated cuboctahedron. Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_cuboctahedron

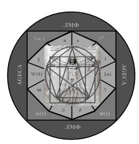


Символ теории ЛМФ:
шри янтра со вписанными в неё основными элементами теории

Введение

Глава 1. Логика и формальная математика

⇧



Глава 7. ⇦
“Золотая” смесь

⇨ **Заключение.**
Теория ЛМФ и ОТЗС: основные положения, формулы, графики

⇩

Персональный сайт

.

E-mail: hrantara@gmail.com