В.П. Шенягин

Связь фундаментальных констант ϕ, e, π с участием мнимой единицы

Исследователей занимает вопрос взаимосвязи фундаментальных констант ϕ, *e*, *π*.

В статье [1] Иван Семенович Ткаченко представил формулы, содержащие константы φ, ϕ, *e*, *π* с применением мнимой единицы *i* и натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 10.

Формулы, полученные им в целях нахождения взаимосвязи этих констант, достаточно четкие, и путь их получения логичен, несмотря на незначительную неточность в нахождении некоторых из них, которые, впрочем, ничуть не умаляют качество материала.

Так, при выводе формул (3) и (3') в статье [1] допущены две ошибки:

– синус половинного угла, в данном случае $\sin\frac{\pi}{5}$ не равен $\pm\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{5}}$, а равен $\sin\frac{\pi}{5}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{2}}$;

– выражение $\sqrt{4-4\cos\frac{2\pi}{5}}$ не равно $\sqrt{4-\phi^2}$, где $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618\ldots=2\cos\frac{\pi}{5}$, поскольку $4\cos\frac{2\pi}{5}\neq\phi^2$.

Хотя удивительно, что результат в формулах (3) и (3') в итоге получился верный:

$$2e^{i\frac{\pi}{5}}=\phi\pm i\sqrt{4-\phi^2} \text{ и } 2e^{i\frac{\pi}{5}}=\phi\pm i\sqrt{4+\varphi^2}.$$

Этому, видимо, способствовало наличие именно этих двух отмеченных ошибок-опечаток.

Исправим их.

1. Представление связи констант с применением мнимой единицы *i*, чисел 2 и 5

Еще раз подчеркнем, что путь решения задачи взаимосвязи указанных констант логичен, поскольку из формул Эйлера известно, как и отмечено в [1], что:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x; \tag{1}$$

$$e^{i\pi}=-1 \text{ при } x=\pi; \tag{2}$$

$$e^{2i\pi}=1 \text{ при } x=2\pi. \tag{3}$$

Для связи констант *e* и *π* с константой ϕ логично применены формулы:

$$2\cos\frac{\pi}{5}=\phi; \tag{4}$$

$$2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{\phi}=\bar{\phi}, \tag{5}$$

где $\quad \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\ldots;$

$\bar{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ldots = \frac{1}{\phi}$, в работе [1] обозначенная φ.

Следовательно, в (1) с целью введения в уравнение связи константы ϕ нужно согласно (4) принять $x = \frac{\pi}{5}$, что и сделал И.С. Ткаченко, получив

$$e^{\frac{i\pi}{5}} = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}. \qquad (6)$$

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = 2\cos\frac{\pi}{5} + i\cdot 2\sin\frac{\pi}{5}. \qquad (7)$$

Дальнейшие преобразования приводят к виду:

$$2\sin\frac{\pi}{5} = \pm 2\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \pm\sqrt{4\cdot\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{2}} = \pm\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{5}} = \pm\sqrt{2-\frac{1}{\phi}} = \pm\sqrt{2-\bar{\phi}}.$$

Откуда

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = \phi \pm i\sqrt{2-\frac{1}{\phi}};$$

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = \phi \pm i\sqrt{2-\bar{\phi}}; \qquad (8)$$

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = \phi \pm i(2-\bar{\phi})^{\frac{1}{2}}.$$

Формула (8) соответствует формулам (3) и (3') в работе [1], поскольку

$$2-\bar{\phi} = 4-\phi^2 = 1+\bar{\phi}^2.$$

Она связывает константы e и π с константами $\bar{\phi}$ и ϕ, представленными без степеней, взаимодействуя с использованием мнимой единицы i и двух натуральных чисел 2 и 5.

Проверим соответствие выражений комплексного числа $z = \rho e^{i\alpha} = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, выраженного в алгебраической, тригонометрической и показательной формах путем нахождения его модуля и аргумента.

Комплексное число z в алгебраической форме следует из формулы (8):

$$z = \phi \pm i\sqrt{2-\bar{\phi}}.$$

Найдем модуль комплексного числа:

$$|z| = \rho = \sqrt{\phi^2 + 2 - \bar{\phi}} = \sqrt{4} = 2.$$

Приведем комплексное число к тригонометрической форме:

$$z = 2\left(\frac{\phi}{2} \pm i\frac{\sqrt{2-\bar{\phi}}}{2}\right).$$

При этом среди углов α, удовлетворяющих неравенствам $0 \le \alpha \le 2\pi$, существует, и притом единственный, такой, что

$$\frac{\phi}{2} = 0{,}809016994\ldots = \cos\alpha, \quad \frac{\sqrt{2-\bar{\phi}}}{2} = 0{,}587785252\ldots = \sin\alpha.$$

Очевидно, $\alpha = \frac{\pi}{5}$ и

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, что соответствует правой части (7).

Приведем комплексное число к показательной форме:

$z = \rho e^{i\alpha} = 2e^{\frac{i\pi}{5}}$, что соответствует левой части (7).

Найдём главное значение аргумента комплексного числа, т. е. аргумента в приведенном виде:

$$\alpha = \arg\left(\phi \pm i\sqrt{2-\bar{\phi}}\right) = \arg\frac{\sqrt{2-\bar{\phi}}}{\phi} = \arg\frac{\sqrt{2-0{,}618033989}}{1{,}618033989} = \arg 0{,}726542527 =$$

$$= 0{,}62831853 = \frac{\pi}{5},$$

что соответствует (6) и (7).

Попутно отметим, что, поскольку в (8) $2-\bar{\phi} = 2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, можно выразить взаимосвязь e и π с помощью обычной и мнимой единицы i, натуральных чисел 2 и 5 и квадратных корней из них:

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \pm i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

2. Представление связи констант квадратным уравнением относительно $e^{\frac{i\pi}{5}}$

Рассмотрим формулу (3) из статьи И.С. Ткаченко:

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = \phi \pm i\sqrt{4-\phi^2}.$$

Она напоминаем выражение, полученное при нахождении корней квадратного уравнения, которое становится более очевидным после следующей записи:

$$e^{\frac{i\pi}{5}} = \frac{\phi \pm i\sqrt{4-\phi^2}}{2};$$

$$e^{\frac{i\pi}{5}} = \frac{\phi \pm \sqrt{\phi^2 - 4}}{2}.$$

Последнее выражение является корнем квадратного уравнения

$$x^2 - \phi x + 1 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{\phi \pm \sqrt{\phi^2 - 4}}{2} = e^{\frac{i\pi}{5}}.$$

Учитывая значения корней, уравнение примет вид

$$\left(e^{\frac{i\pi}{5}}\right)^2 - \phi e^{\frac{i\pi}{5}} + 1 = 0;$$

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} - \phi e^{\frac{i\pi}{5}} + 1 = 0. \qquad (9)$$

3. Предостережение при попытке избавления от мнимой единицы

Зададимся целью избавиться в (9) от мнимой единицы, преобразовав уравнение к виду

$$\sqrt[5]{e^{2i\pi}} - \phi\sqrt[5]{e^{i\pi}} + 1 = 0. \qquad (10)$$

Учитывая (2) и (3), получим

$$e^{\frac{i\pi}{5}} = \sqrt[5]{e^{i\pi}} = \sqrt[5]{-1} = -1;$$

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} = \sqrt[5]{e^{2i\pi}} = \sqrt[5]{1} = 1.$$

Откуда уравнение (10), казалось бы, будет равно следующему:

$$\sqrt[5]{1} - \phi\sqrt[5]{-1} + 1 = 0;$$

$$1 + \phi + 1 = 0.$$

Однако это неверно, т. е.

$$\sqrt[5]{1} - \phi\sqrt[5]{-1} + 1 \neq 0;$$

$$1 + \phi + 1 \neq 0.$$

Полученный результат (10) после исключения мнимой единицы не соответствует действительности.

Это, возможно, объясняется разными численными значениями мнимой единицы i в различных точках комплексной плоскости.

4. Поиск взаимосвязи констант продолжается

В статье И.С. Ткаченко и в настоящем материале установленная взаимосвязь фундаментальных констант ϕ, e, π, можно сказать, является мнимой, поскольку в ней участвует мнимая единица, что затрудняет понимание и использование этих взаимосвязей. Поэтому по-прежнему необходим поиск истинно реальной связи констант.

Одним из первых эту задачу сформулировал А.И. Иванус [2]: «… можно утверждать, что существует некоторая функция F, для которой справедливо $F(e, \pi, \phi) = 0$ или (что эквивалентно) существуют некоторые функции F_1, F_2 и F_3, для которых справедливо $\phi = F_1(e, \pi)$ или $e = F_2(\pi, \phi)$, или $\pi = F_3(e, \phi)$, т. е. три константы взаимосвязаны между собой». В цитате мы обозначили коэффициент золотой пропорции строчной буквой ϕ, тогда как А.И. Иванус обозначает его прописной буквой Φ.

Выводы

Связь констант ϕ, e, π дополнительно к выражениям, полученным И.С. Ткаченко, определяется формулами:

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = \phi \pm i\sqrt{2 - \frac{1}{\phi}};$$

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} - \phi e^{\frac{i\pi}{5}} + 1 = 0.$$

Связь констант $\bar{\phi}$, ϕ, e, π определяется выражением

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = \phi \pm i\sqrt{2 - \bar{\phi}}.$$

Данные связи используют мнимую единицу i и натуральные числа 1, 2 и 5, т. е. можно заключить, что связь мнимая. Наличие мнимой единицы затрудняет восприятие формального выражения связи констант.

Задача поиска функциональной зависимости этих констант требует дальнейшего решения.

Литература

1. *Ткаченко И.С.* Множественность взаимосвязей констант π, φ, e в представлении комплексного числа // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16719, 03.08.2011.

2. *Иванус А.И.* О связи констант e и π с золотым сечением // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14848, 13.07.2008.

$$2e^{\frac{i\pi}{5}} = \phi \pm i\sqrt{2 - \bar{\phi}}$$

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} - \phi e^{\frac{i\pi}{5}} + 1 = 0$$