

СИММЕТРИЯ ОБЪЕКТА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО РЯД ФИБОНАЧЧИ

В работе [1] число Фидия (Φ) рассматривается как необходимый атрибут математической модели конкретного физического объекта – лестничной электрической схемы. Отмечено также, что это число характеризует определенный тип симметрии.

Википедия дает следующее определение понятию, вынесенному в заглавие статьи [2]:

Симметрия (в широком смысле слова) – это сохранение некоторого свойства объекта при преобразованиях (например: положения, энергии, информации, другого). Такая ситуация обычно определяется как сохранение соответствия, неизменность (инвариантность).

Энциклопедия приводит 11-ть видов симметрии. Конечно, этот список не может быть окончательным, так как с развитием науки он обязательно будет пополняться.

Лестничную схему, как модельный объект, исследовали многие авторы сайта «Академия Тринитаризма», иллюстрируя разные свойства «золотого сечения», а также рядов Фибоначчи и Люка, например [3, 4, 5]. Как правило, изучалась однородная лестничная схема, у которой все параметры элементов равны единице. Приведем удачный пример из статьи [5], который наглядно показывает преимущества модельного объекта при исследовании свойств ряда Фибоначчи, рис.1.

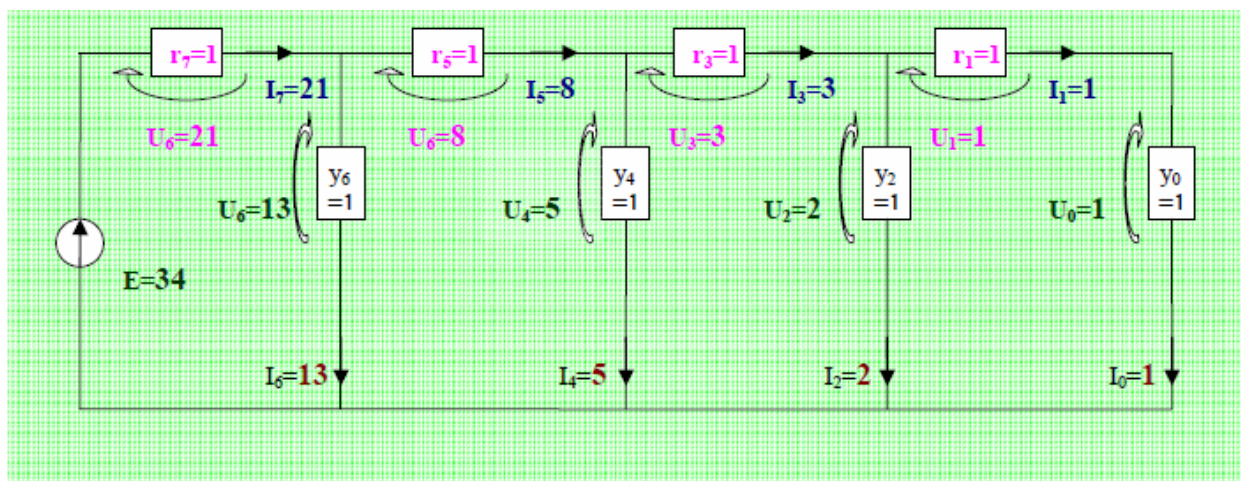


Рис. 1. Напряжения и токи однородной лестничной схемы

Величины токов и напряжений элементов однородной лестничной схемы соответствуют значениям членов ряда Фибоначчи. Применяя законы Ома и Кирхгофа для математического описания схемы, мы также оперируем этими числами.

Восстановим подробно алгоритм определения величин токов и напряжений электрической цепи рис.1, приведенный в работе [5]. Он позволяет найти все указанные на схеме значения, поочередно применяя законы Ома и Кирхгофа.

Для того чтобы алгоритм начал действовать необходимо задать начальные условия: $U_0 = 1[V]$, $I_0 = 1[A]$. Так как сопротивление любой ветви схемы равно единице, то начальные условия соответствуют закону Ома для этой ветви:

$$I_0 = y_0 \cdot U_0 = 1 \cdot 1 = 1[A]. \quad (a)$$

Далее, применяя первый закон Кирхгофа для узла (устраняемого), находим значение тока в первом элементе цепи:

$$I_0 - I_1 = 0, \quad I_1 = I_0 = 1[A]. \quad (б)$$

Кроме того, по закону Ома находим напряжение первой ветви ($R_1 = 1 \text{ Ом}$):

$$U_1 = R_1 \cdot I_1 = 1 \cdot 1 = 1 [\text{В}]. \quad (\text{в})$$

Из уравнения второго закона Кирхгофа, составленного для первого контура, находим значение напряжения второй ветви:

$$-U_0 - U_1 + U_2 = 0, \quad U_2 = U_0 + U_1 = 1 + 1 = 2 [\text{В}]. \quad (\text{г})$$

По закону Ома, находим значение тока этой ветви:

$$I_2 = U_2 \cdot y_2 = 2 \cdot 1 = 2 [\text{А}]. \quad (\text{д})$$

Затем последовательность действий повторяется, начиная с пункта (б), например:

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0, \quad I_3 = I_1 + I_2 = 1 + 2 = 3 [\text{А}], \text{ и т.д.} \quad (\text{б1})$$

Заметим, что формулы в пунктах (г) и (б1) – особенно в численной форме – напоминают выражение, по которому вычисляется следующий член ряда Фибоначчи:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (1)$$

Легко убедиться, что формула (1) может быть использована в схеме рис.1 как структура для уравнений любого из законов Кирхгофа.

Отметим и другие особенности изображения цепи на рис.1. Нумерация ячеек лестничной схемы начинается от ветви, содержащей элемент U_0 , хотя со времен В.Кауэра традиционно она начинается от источника ЭДС [6]. Кроме того, стрелки напряжений на элементах схемы ориентированы по отношению к стрелкам тока так, как принято в львовской и польской школах теории электрических цепей.

Упростим изображение электрической цепи рис.1 таким образом, чтобы новое графическое представление отражало только одно, главное, свойство цепи – связность ее элементов, рис.2. Осуществим это преобразование следующим образом. Во-первых, параметры «продольных» ветвей лестничной схемы и ветви, содержащей источник напряжения, примем равными нулю. Во-вторых, параметры «поперечных» ветвей примем равными бесконечности. Полученный таким образом граф представляет только схему соединений электрической цепи, т.е. структуру объекта.

Изображение структуры электрической цепи, рис.2, содержит узлы и соединения между ними, пронумерованы только связи между узлами.

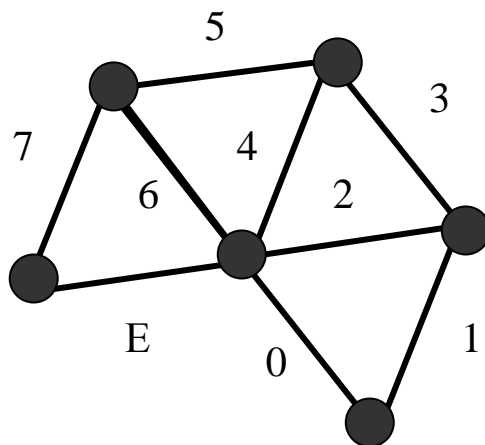


Рис. 2. Структура электрической цепи рис.1

Приведем определение понятия структуры, которое соответствует объекту исследования [7]:

Решетка, структура – частично упорядоченное множество, в котором каждое двухэлементное подмножество имеет как точную верхнюю, так и точную нижнюю границу:

двух элементное множество $\{a, b\}$, $a < b$;

верхняя граница $\sup\{a, b\} = b$;

нижняя граница $\inf\{a, b\} = a$.

Очевидно, что граф рис.2, соответствует определению, взятому из Математической энциклопедии.

Рассматривая упрощенное представление электрической цепи рис.1, отметим, что граф структуры электрической цепи, рис.2, обладает аксиальной симметрией, т.е. после поворота одной из ячеек вокруг общего узла на угол 60° она совпадает с соседней ячейкой. Количество контуров электрической цепи рис.1 и графа структуры рис.2 может быть увеличено до любого, наперед заданного числа, при этом изображение структуры становится многослойным. Конечно, плоский граф легко «растягивается» вверх без разрыва связей между ячейками, в результате чего получается трехмерный объект, отдаленно напоминающий винтовую лестницу. Ступеньки такой лестницы будут касаться внутренней поверхности воображаемого цилиндра и несущих столбов, в которые превращаются как общий узел, так и независимые узлы схемы.

Приведем другое геометрическое построение, соответствующее началу ряда Фибоначчи, рис.3 [8].

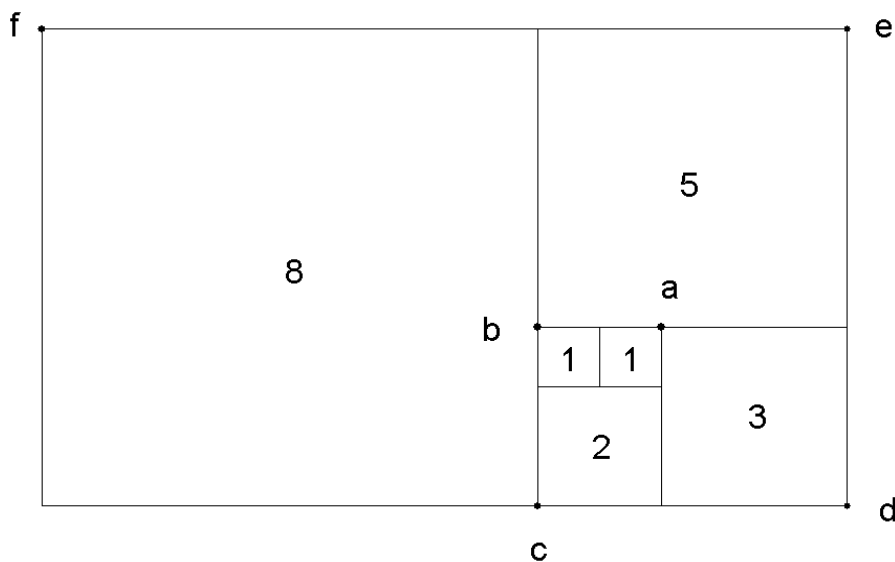


Рис. 3. Другое графическое представление ряда Фибоначчи

На рис.3 буквами $\{a, b, c, d, e, f, \dots\}$ отмечены некоторые вершины квадратов, через которые можно провести логарифмическую спираль (завиток Фибоначчи), представленный на рис.4.

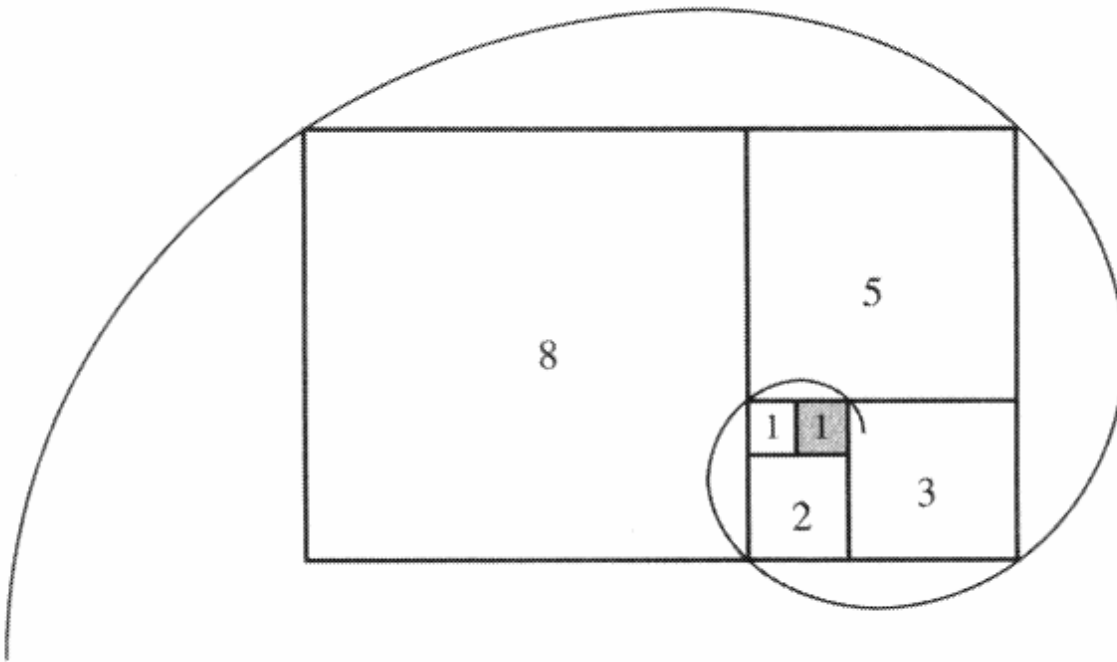


Рис.4. Изображение логарифмической спирали [8]

Логарифмическую спираль можно также «вытянуть» вверх. В этом случае мы получаем объемную фигуру, которая касается внутренней поверхности воображаемого конуса. Заметим, что расстояния между отмеченными точками объемной спирали будут соответствовать значениям элементов ряда Фибоначчи. Объемное изображение такого геометрического объекта напоминает атмосферный вихрь (торнадо). В векторной алгебре такой объект соответствует понятию ротора, вектор силы которого направлен вверх.

В теории электромагнитного поля ротор определяется как производная векторной величины по элементу площади. В качестве примера приведем ротор напряженности электрического поля (2):

$$\text{rot}\bar{E} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{s}}, \quad (2)$$

где \bar{E} - напряженность электрического поля, В/м;
 \bar{s} - площадь некоторой поверхности, м².

Вихрь (2) имеет размерность [В/м³], т.е. характеризует потенциальный запас энергии в бесконечно малом объеме. Авторы статьи [9] используют наглядное изображение вихря, представляя поток энергии в среде.

Продолжим построение нашего вихря. Наложим числовую ось на объемную логарифмическую спираль, рис.4. Располагаем ноль в точке начала объемной кривой, а далее, выделяем на ней точки, соответствующие значениям потенциалов узлов (напряжений «поперечных» ветвей) электрической цепи, рис.1.

Преобразуем изображение структуры электрической цепи, придавая ветвям длину, пропорциональную значениям напряжений ветвей электрической цепи, рис.1. Закрепляем «продольные» ветви электрической цепи в точках числовой оси, соответствующих значениям потенциалов узлов. Общий узел ячеек схемы располагаем на нулевой отметке. Таким образом, внутри объемной логарифмической спирали будут размещены «выпуклые» (неплоские) треугольные ячейки электрической цепи. Независимые узлы схемы будут возвышаться на величину напряжения «поперечных» ветвей над горизонтальной плоскостью.

Конечно, было бы лучше представить трехмерный рисунок такого сложного объекта как объемная спираль, совмещенная с графом электрической цепи рис.1, но, к сожалению, у автора нет для этого, ни соответствующих программных средств, ни мощного компьютера. Остается только найти аналог площади каждой из закрепленных на числовой оси треугольных ячеек, а также

выяснить насколько они отличаются друг от друга. Такая возможность может быть реализована только на вольт-амперной плоскости.

Представим вектором одно из напряжений схемы, пусть это будет одна из ветвей ячейки 2, рис.5.

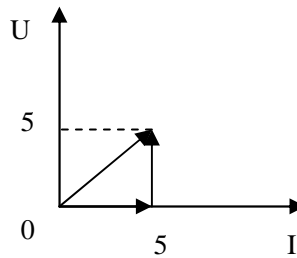


Рис. 5. Векторное представление ветви ячейки 2

Площадь прямоугольного треугольника рис.5, катетами которого выступают слагаемые вектора, равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}U \cdot I = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12,5 \text{ [Вт]}. \quad (3)$$

Величина площади треугольника (3) имеет размерность мощности, поэтому можно признать мощность аналогом геометрической площади на вольт-амперной плоскости. Не будем делить результат произведения катетов на два, чтобы сохранить возможность проверки значений «электрической» площади, полученных по другим формулам. Запишем координаты слагаемых вектора в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \Delta \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 25. \quad (4)$$

Значение детерминанта матрицы (4) равно величине мощности рассеиваемой данной ветвью. Проверим этот результат по традиционной формуле

$$P_4 = R_4 I_4^2 = 1 \cdot (5)^2 = 25 \text{ Вт}. \quad (5)$$

Будем считать сумму «электрических» площадей, связанных с ветвями контура, величиной «электрической» площади самого контура. Для ячейки 2 эта величина будет равна:

$$P_{\Sigma 2} = P_2 + P_3 + P_4 = R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 = 4 + 9 + 25 = 38 \text{ Вт}. \quad (6)$$

Конечно, найденное значение (6) является лишь аналогом геометрической площади ячейки 2, поэтому его можно сравнивать только с подобной величиной ячейки 3. «Электрическая» площадь ячейки 3 вычисляется по такой же формуле как и площадь ячейки 2:

$$P_{\Sigma 3} = P_4 + P_5 + P_6 = R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = 25 + 64 + 169 = 258 \text{ Вт}. \quad (7)$$

Соотношение величин «электрических» площадей ячеек равно:

$$\frac{P_{\Sigma 3}}{P_{\Sigma 2}} = \frac{258}{38} = 6,789473... \quad (8)$$

Результат (8) с точностью до 0,94% повторяет значение числа Фидия, возведенного в четвертую степень – $\Phi^4 = 6,854034$. Таким образом, коэффициент подобия площадей треугольных ячеек схемы рис.1 стремится к числу, связанному с величинами элементов ряда Фибоначчи.

Заключение. Итак, симметрию графа электрической цепи рис.1, введенного в объемную логарифмическую спираль, нельзя назвать строго аксиальной, так как треугольные ячейки различаются по площади. Однако легко заметить, что ячейки схемы подобны и их стороны

соответствуют значениям членов ряда Фибоначчи. Коэффициент подобия сторон соседних ячеек стремится к числу, которое также следует из ряда Фибоначчи – $\Phi^2 = 2,618021$.

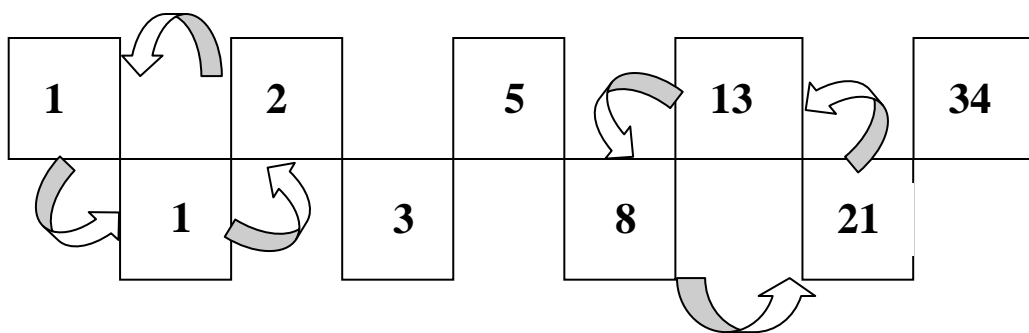
Например, соотношение сторон последней ячейки:

$$\frac{34}{13} = 2,615384.$$

Структурное сходство элементов при отсутствии равенства типично для фракталов. По этой причине назовем этот тип симметрии – фрактально-аксиальной.

Следует отметить, что в статье исследовалась однородная лестничная схема, изображение которой обладает очевидной симметрией – каждый контур содержит три ветви, каждый узел включает в себя также три ветви. Рекуррентная формула (1), по которой вычисляются значения членов ряда Фибоначчи, содержит такое же число элементов, что делает возможным подобие между формулой (1) и уравнениям Кирхгофа, составленными для этой схемы.

Запишем отрезок ряда Фибоначчи в две строчки, как показано ниже. Ветви с напряжениями 1, 1, 2 образуют контур, ветви с токами 8, 13, 21 – узел схемы. В первом случае контурное множество ветвей содержит один элемент из нижней строчки, в то время как узловое множество ветвей содержит один элемент верхней строчки нашего представления отрезка ряда.



Получилась хорошая иллюстрация двойственности (дуальности) понятий контура и узла.

При увеличении числа ячеек однородной лестничной схемы она становится фракталом, как и сам ряд Фибоначчи, что показано на рис.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерохов И.В. Физическая трактовка «золотой константы»// «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ. 16594, 28.06.2011.
2. Статья «Симметрия»//ru.wikipedia.org/wiki/Симметрия.
3. Семенюта Н.Ф. Связь чисел Фибоначчи и Люка и параметров однородных электрических цепей// «Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ. 15150, 12.03.2009.
4. Семенюта Н.Ф. Математика гармонии и теория линейных электрических цепей// «Академия Тринитаризма», Эл№77-6567, публ. 17057, 04.12.2011.
5. Владимиров В.Л. Бриллиант Золотого Сечения засверкал «эффектом бабочки» благодаря исключительному свойству числа Фидия// «Академия Тринитаризма», Эл№77-6567, публ. 17119, 19.12.2011.
6. Cauer W. Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. – Berlin: Akademie Verlag, 1954. – 586 s.
7. Математическая энциклопедия/ Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Советская Энциклопедия, т.4. 1984, 980с.
8. Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272с.
9. Большаков Б.Е., Кузнецов О.Л. Кузнецов и проблема устойчивого развития человечества в системе «природа – общество – человек»//«Академия Тринитаризма», М., Эл№77-6567, публ.17225, 18.01.2012.