И.С.Ткаченко

ОБОБЩАЮЩИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
(GENERALIZED HEPERBOLIC FUNCTIONS)

Аннотация. Последние годы активизировались научные исследования о месте и роли золотого сечения (хрусотомии) в природе и обществе. Это привело к появлению новых видов сечений, определяемых, как серебренное, бронзовое, железное, медное и т.п., что, по нашему мнению, является отдельными частными случаями, вытекающими из свойств обобщающих гиперболических функций, суть и особенности которых нами предлагается рассмотреть в данной работе.

Введение. Самым известным классом гиперболических функций, основными из которого являются гиперболический синус

$$sht = \frac{e^t - e^t}{2}; \qquad (1)$$

и гиперболический косинус

$$cht = \frac{e^t + e^t}{2}, \qquad (2)$$

является построенным на основе свойств экспоненциальной функции

$$y = expx = e^x. \qquad (3)$$

При этом отметим, что функция (3) есть отдельным частным случаем функции вида

$$y = Exp_a x = a^x, \qquad (4)$$

которая называется показательной (exponential – показательный) с основанием a, где $x \in]-\infty, +\infty[$ — показатель степени или экспонента (exponent).

Свойства этой функции общеизвестны и поэтому мы на них не будем останавливаться. Однако, обратим внимание только на особенности поведения ее суммы и разности в области определения как функций, которые составят несколько расширенный их класс по сравнению с функциями (1) и (2).

Рассмотрим эти функции, несколько может быть формально, представив их внешне идентичными функции гиперболического синуса и гиперболического косинуса, но уже относительно функции (4) и ей обратной в той, же области определения. По числовому отражению сути функции (4) можно считать, что это есть бесконечно большая и бесконечно малая величины на концах области ее задания:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^{-x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \infty\,.$$

В связи с тем, что выполнение операций с такими величинами вызывает определенный научный интерес, рассмотрим их в следующей постановке.

Постановка задачи. Рассмотрим сумму экспоненциальных функций $y = a^x$ и $y = a^{-x}$:

$$S(x) = a^x + a^{-x} \tag{5}$$

и их разности

$$R(x) = a^x - a^{-x}\,. \tag{6}$$

На концах области определения имеем $\mathrm{S}(\infty) = \infty + 0$ и $\mathrm{S}(-\infty) = 0 + \infty$, а разность $R(\infty) = \infty - 0$ и $R(-\infty) = 0 - \infty$, а при $x = 0$, то есть в средине области: $S(0) = 2$; $R(0) = 0$.

Выполним некоторые арифметические операции с функциями (5) и (6).

Сумма:

$$S(x) + R(x) = 2a^x,$$

разность:

$$S(x) - R(x) = 2a^{-x},$$

произведение:

$$S(x) \cdot R(x) = (a^x + a^{-x}) \cdot (a^x - a^{-x}) = a^{2x} + a^{-2x} = S(2x),$$

квадрат суммы:

$$S^2(x) = a^{2x} + 2 + a^{-2x} = S(2x) + 2,$$

квадрат разности:

$$R^2(x) = a^{2x} - 2 + a^{-2x} = S(2x) - 2,$$

сумма квадратов функций (5) и (6):

$$S^2(x) + R^2(x) = 2S(2x),$$

разность квадратов функций (5) и (6):

$$S^2(x) - R^2(x) = 4,$$

или

$$\frac{S^2(x)}{2^2} - \frac{R^2(x)}{2^2} = 1. \tag{7}$$

Это же и есть уравнение равнобочной гиперболы с полуосями $\alpha = \beta = 2$, то есть геометрическое место точек сумм (5) и разностей (6) есть график гиперболы, соответствующий этому уравнению.

Примечание. Если для функции (4) задать основание $a = \phi$, то получим что сумма

$$S(x) = \phi^x + \phi^{-x}$$

есть функция косинуса Люка симметричного, а разность

$$R(x) = \phi^x - \phi^{-x}$$

функция синуса Люка симметричного. Свойства этих функций есть частный случай для исследований в работе [1] и также еще опубликованных в работе [2] и др., поэтому на них останавливаться не будем.

Таким образом, возникает определенный исследовательский интерес к изучению поведения функций, которые построены на основе функции (4).

Основные результаты. Аналогично как представлены функции (1) и (2) формально запишем такие функции

$$Sh_a(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}; \tag{8}$$

и

$$Ch_a(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \tag{9}$$

Позволим себе назвать эти функции обобщающими гиперболическими функциями (ОГФ), соответственно синуса и косинуса, а также дополним еще и функциями тангенса и котангенса:

$$Th_a(x) = \frac{Sh_a(x)}{Ch_a(x)} = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}; \tag{10}$$

$$CTh_a(x) = \frac{Ch_a(x)}{Sh_a(x)} = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1}. \tag{11}$$

Может возникнуть вопрос: почему их следует называть обобщающими? Это определяется заданием конкретной величины значения для параметра a. При этом могут быть определены конкретные виды функций, такие как классические гиперболические функции Эйлера с основанием $a = e$, они могут быть также и с основанием $a = \phi$, возможны и с основанием $a = \phi^2$, что соответствуют определенным видам функций Фибоначчи и функций Люка [1, 2], серебряным функциям с основанием $a = 1 + \sqrt{2}$ [3], бронзовым с основанием $a = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, медным с основанием $a = 2 + \sqrt{5}$, железным с основанием $a = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$, и любым другим, в зависимости от желаний, или научных необходимостей исследователей.

Однако, при этом рассмотрим некоторые типичные для всего класса ОГФ особенности и свойства.

1.Рассмотрим основные действия с ОГФ.

1.1 Сумма $Ch_a x$ и $Sh_a x$

$$Ch_a x + Sh_a x = \frac{a^x + a^{-x}}{2} + \frac{a^x - a^{-x}}{2} = a^x.$$

1.2 Разность $Ch_a x$ и $Sh_a x$

$$Ch_a x - Sh_a x = \frac{a^x + a^{-x}}{2} - \frac{a^x - a^{-x}}{2} = a^{-x}.$$

1.3 Квадрат $Ch_a x$

$$Ch_a{}^2 x = (\frac{a^x + a^{-x}}{2})^2 = \frac{a^{2x} + 2 + a^{-2x}}{4} = \frac{1}{2}(Ch_a 2x + 1).$$

1.4 Квадрат $Sh_a(x)$

$$Sh_a{}^2 x = (\frac{a^x - a^{-x}}{2})^2 = \frac{a^{2x} - 2 + a^{-2x}}{4} = \frac{1}{2}(Ch_a 2x - 1).$$

1.5 Разность квадратов $Ch_a x$ и $Sh_a x$

$$Ch_a{}^2 x - Sh_a{}^2 x = 1.$$

1.6 Сумма квадратов $Ch_a x$ и $Sh_a x$

$$Ch_a{}^2 x + Sh_a{}^2 x = Ch_a\, 2x.$$

1.7 Произведение $Th_a(x)$ и $CTh_a(x)$

$$Th_a(x) \cdot CTh_a(x) \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} \cdot \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = 1.$$

1.8 Определим квадрат $Th_a(x)$

$$Th_a{}^2(x) = \frac{Sh_a{}^2 x}{Ch_a{}^2 x} = \frac{Ch_a{}^2 x - 1}{Ch_a{}^2 x} = 1 - \frac{1}{Ch_a{}^2 x}.$$

и квадрат $CTh_a(x)$

$$CTh_a{}^2(x) = \frac{Ch_a{}^2 x}{Sh_a{}^2 x} = \frac{Sh_a{}^2 x + 1}{Sh_a{}^2 x} = 1 + \frac{1}{Sh_a{}^2 x}.$$

1.9 . Представим ОГФ одну через другую:

через $Sh_a x$:

$$Ch_a x = \sqrt{1 + Sh_a{}^2 x}.$$

$$Th_a(x) = \frac{Sh_a x}{\sqrt{1 + Sh_a{}^2 x}}.$$

$$CTh_a(x) = \frac{\sqrt{1 + Sh_a{}^2 x}}{Sh_a x}.$$

через $Ch_a x$:

$$Sh_a x = \sqrt{1 - Ch_a{}^2 x}.$$

$$Th_a(x) = \frac{\sqrt{1 - Ch_a{}^2 x}}{Ch_a x}.$$

$$CTh_a(x) = \frac{Ch_a x}{\sqrt{1 - Ch_a{}^2 x}}.$$

через $Th_a(x)$:

$$Sh_a x = \frac{Th_a(x)}{\sqrt{1 - Th_a{}^2 x}}.$$

$$\mathrm{Ch}_a x = \frac{1}{\sqrt{1 - Th_a{}^2 x}}.$$

1.10. Для вывода формул сложения вначале найдем произведения основных ОГФ с различными аргументами:

$$Sh_a x \cdot Sh_a y = \frac{a^x\ -\ a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^y\ -\ a^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{\left(a^{(x+y)} + a^{-(x+y)}\right) - \left(a^{(x-y)} + a^{-(x-y)}\right)}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ (\mathrm{C}h_a(x+y) - \mathrm{C}h_a(x-y)).$$

$$Ch_a x \cdot Ch_a y = \frac{a^x\ +\ a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^y\ +\ a^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{\left(a^{(x+y)} + a^{-(x+y)}\right) + \left(a^{(x-y)} + a^{-(x-y)}\right)}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ (\mathrm{C}h_a(x+y) + \mathrm{C}h_a(x-y)).$$

$$Sh_a x \cdot Ch_a y = \frac{a^x\ -\ a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^y\ +\ a^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{\left(a^{(x+y)} - a^{-(x+y)}\right) + \left(a^{(x-y)} - a^{-(x-y)}\right)}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ (Sh_a(x+y) + Sh_a(x-y)).$$

$$Ch_a x \cdot Sh_a y = \frac{a^x\ +\ a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^y\ -\ a^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{\left(a^{(x+y)} - a^{-(x+y)}\right) - \left(a^{(x-y)} - a^{-(x-y)}\right)}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ (Sh_a(x+y) - Sh_a(x-y)).$$

Теперь определим соответственно суммы и разности аргументов ОГФ синуса, косинуса и тангенса:

$$Sh_a(x+y) = Sh_a x \cdot Ch_a y + Ch_a x \cdot Sh_a y.$$

$$Sh_a(x-y) = Sh_a x \cdot Ch_a y - Ch_a x \cdot Sh_a y.$$

$$Ch_a(x+y) = Ch_a x \cdot Ch_a y + Sh_a x \cdot Sh_a y,$$

$$Ch_a(x-y) = Ch_a x \cdot Ch_a y - Sh_a x \cdot Sh_a y.$$

$$Th_a(x+y) = \frac{Sh_a x \cdot Ch_a y + Ch_a x \cdot Sh_a y}{Sh_a x \cdot Sh_a y + Ch_a x \cdot Ch_a y} = \frac{Th_a x + Th_a y}{1 + Th_a x \cdot Th_a y.}$$

$$Th_a(x-y) = \frac{Sh_a x \cdot Ch_a y - Ch_a x \cdot Sh_a y}{Ch_a x \cdot Ch_a y - Sh_a x \cdot Sh_a y} = \frac{Th_a x - Th_a y}{1 - Th_a x \cdot Th_a y.}$$

1.11. Рассмотрим случай, если ОГФ имеют разные основания, то есть для двух основных функций синуса и косинуса:

$$Sh_a(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} \text{ и } Sh_b(x) = \frac{b^x - b^{-x}}{2};$$

$$Ch_a(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \text{ и } Ch_b(x) = \frac{b^x + b^{-x}}{2}.$$

Примечание. Используя формулу модуля перехода логарифма от одного основания к другому

$$a^{x \cdot \log_a b} = b^x,$$

есть возможность проведения и некоторых упрощений, то есть получим, что

$$Sh_b(x) = \frac{a^{x \cdot \log_a b} - a^{-x \cdot \log_a b}}{2}$$

и

$$Ch_b(x) = \frac{a^{x \cdot \log_a b} + a^{-x \cdot \log_a b}}{2}.$$

Найдем произведения ОГФ с разными основаниями:

- для синусов:

$$Sh_a(x) \cdot Sh_b(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} \cdot \frac{b^x - b^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{(ab)^x + (ab)^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot (Ch_{ab}x - Ch_{\frac{a}{b}}x),$$

или

$$2Sh_a x \cdot Sh_b x = Ch_{ab}x - Ch_{\frac{a}{b}}x;$$

- для косинусов:

$$Ch_a(x) \cdot Ch_b(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \cdot \frac{b^x + b^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{(ab)^x + (ab)^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x + \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(Ch_{ab}x + Ch_{\frac{a}{b}}x\right),$$

или

$$2Ch_a x \cdot Ch_b x = Ch_{ab}x + Ch_{\frac{a}{b}}x.$$

Используя созданные соотношения, можем получить также и следующие результаты.

$$Ch_{ab}x = Sh_a(x)\cdot Sh_b(x) + Ch_a(x)\cdot Ch_b(x)$$

и

$$Ch_{\frac{a}{b}}x = Ch_a(x)\cdot Ch_b(x) - Sh_a(x)\cdot Sh_b(x).$$

-синуса с основанием a и косинуса с основанием b:

$$Sh_a(x)\cdot Ch_b(x) = \frac{a^x\ -\ a^{-x}}{2}\cdot\frac{b^x\ +\ b^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{(ab)^x - (ab)^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(Sh_{ab}x + Sh_{\frac{a}{b}}x\right)$$

или

$$2Sh_a x\cdot Ch_b x = Sh_{ab}x + Sh_{\frac{a}{b}}x.$$

- косинуса с основанием a и синуса с основанием b:

$$Ch_a(x)\cdot Sh_b(x) = \frac{a^x\ +\ a^{-x}}{2}\cdot\frac{b^x\ -\ b^{-x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{(ab)^x - (ab)^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(Sh_{ab}x - Sh_{\frac{a}{b}}x\right)$$

или

$$2Ch_a x\cdot Sh_b x = Sh_{ab}x - Sh_{\frac{a}{b}}x.$$

В этом случае получим, что

$$Sh_{ab}x = Sh_a(x)\cdot Ch_b(x) + Ch_a(x)\cdot Sh_b(x)$$

и

$$Sh_{\frac{a}{b}}x = Sh_a(x)\cdot Ch_b(x) - Ch_a(x)\cdot Sh_b(x).$$

Найдем также

$$Sh_{ab}x + Ch_{ab}x = \left(Sh_a(x) + Ch_a(x)\right)\cdot(Sh_b(x) + Ch_b(x))$$

$$Sh_{\frac{a}{b}}x + Ch_{\frac{a}{b}}x = \left(Sh_a(x) + Ch_a(x)\right)\cdot\left(Ch_b(x) - Sh_b(x)\right).$$

1.12. Для определения сумм квадратов ОГФ синусов и косинусов с различными основаниями, вначале найдем сами их квадраты.

$$Sh_b{}^2x = \left(\frac{b^x - b^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{b^{2x} - 2 + b^{-2x}}{4} = \frac{1}{2}(Ch_b 2x - 1).$$

$$Ch_b{}^2x = \left(\frac{b^x + b^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{b^{2x} + 2 + b^{-2x}}{4} = \frac{1}{2}(Ch_b 2x + 1),$$

а также учитывая, что

$$Ch_a{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x + 1),$$

и

$$Sh_a{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x - 1).$$

Отсюда получим суммы квадратов:

$$Sh_a{}^2x + Sh_b{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x + Ch_b 2x) - 1,$$

$$Ch_a{}^2x + Ch_b{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x + Ch_b 2x) + 1,$$

$$Sh_a{}^2x + Ch_b{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x + Ch_b 2x),$$

$$Sh_b{}^2x + Ch_a{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x + Ch_b 2x),$$

то есть

$$Sh_a{}^2x + Ch_b{}^2x = Sh_b{}^2x + Ch_a{}^2x.$$

И разности квадратов:

$$Sh_a{}^2x - Sh_b{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x - Ch_b 2x)$$

$$Ch_a{}^2x - Ch_b{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x - Ch_b 2x)$$

$$Sh_a{}^2x - Ch_b{}^2x = \frac{1}{2}(Ch_a 2x - Ch_b 2x) - 1.$$

Отсюда следует, что

$$Sh_a{}^2x - Sh_b{}^2x = Ch_a{}^2x - Ch_b{}^2x$$

или

$$Sh_a{}^2x - Ch_a{}^2x = Sh_b{}^2x - Ch_b{}^2x,$$

то есть разность квадратов ОГФ синуса и косинуса не зависит от основания экспоненциальной функции.

1.13. Возвратимся к формулам сложения, когда аргументы ОГФ синуса и косинуса имеют постоянные коэффициенты.

$$Sh_a nx = \frac{a^{nx} - a^{-nx}}{2}, \qquad Ch_a nx = \frac{a^{mx} + a^{-mx}}{2};$$

$$Sh_a my = \frac{a^{mx} - a^{-mx}}{2}, \qquad Ch_a my = \frac{a^{mx} + a^{-mx}}{2}.$$

и

определим по парные произведения этих функций:

$$Sh_a nx \cdot Sh_a my = \frac{a^{nx} - a^{-nx}}{2} \cdot \frac{a^{my} - a^{-my}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{a^{nx+my} + a^{-(nx+my)}}{2} - \frac{a^{nx-my} + a^{-(nx-my)}}{2})$$

$$= \frac{1}{2}(Ch_a(nx+my) - Ch_a(nx-my)),$$

$$Ch_a nx \cdot Ch_a my = \frac{a^{nx} + a^{-nx}}{2} \cdot \frac{a^{my} + a^{-my}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^{nx+my} + a^{-(nx+my)}}{2} + \frac{a^{nx-my} + a^{-(nx-my)}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(Ch_a(nx+my) + Ch_a(nx-my)),$$

$$Sh_a nx \cdot Ch_a my = \frac{a^{nx} - a^{-nx}}{2} \cdot \frac{a^{my} + a^{-my}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^{nx+my} - a^{-(nx+my)}}{2} + \frac{a^{nx-my} - a^{-(nx-my)}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(Sh_a(nx+my) + Sh_a(nx-my)),$$

$$Ch_a nx \cdot Sh_a my = \frac{a^{nx} + a^{-nx}}{2} \cdot \frac{a^{mx} - a^{-mx}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{a^{nx+my} - a^{-(nx+my)}}{2} - \frac{a^{nx-my} - a^{-(nx-my)}}{2})$$

$$= \frac{1}{2}(Sh_a(nx+my) - Sh_a(nx-my)),$$

Это дает нам возможность записать общие соотношения для формул сложения ОГФ синуса, косинуса и тангенса:

$$Sh_a(nx+my) = Sh_a nx \cdot Ch_a my + Ch_a nx \cdot Sh_a my,$$

$$Sh_a(nx-my) = Sh_a nx \cdot Ch_a my - Ch_a nx \cdot Sh_a my,$$

$$Ch_a(nx+my) = Sh_a nx \cdot Sh_a my + Ch_a nx \cdot Ch_a my,$$

$$Ch_a(nx-my) = Sh_a nx \cdot Sh_a my - Ch_a nx \cdot Ch_a my,$$

$$Th_a(nx+my)=\frac{Th_a nx+Th_a my}{1+Th_a nx\cdot Th_a my},$$
$$Th_a(nx-my)=\frac{Th_a nx-Th_a my}{1-Th_a nx\cdot Th_a my}.$$

Множество параметров в созданных соотношениях позволяют при их конкретизации получать отдельные частные случаи, которые описаны во многих публикациях, суть их содержания нетрудно будет понять после рассмотрения следующих конкретных примеров.

Пусть $n=m=y=1$ для соотношения, которое моделирует произведение синусов ОГФ, и тогда получим:

$$Sh_a x\cdot Sh_a 1=\frac{1}{2}(Ch_a(x+1)-Ch_a(x-1)),$$

то есть

$$2\frac{a^1+a^{-1}}{2}Sh_a x=Ch_a(x+1)-Ch_a(x-1),$$

или

$$Ch_a(x+1)=\left(\frac{a^2-1}{a}\right)Sh_a x+Ch_a(x-1),$$

и вот сейчас начинаются вполне интересные частные случаи, которые приведут отдельных исследователей, посвятивших многие годы золотому сечению, в изумление или удивление.

Пусть $\frac{a^2-1}{a}=1,$ тогда имеем $a^2-a-1=0$, получим, что для ОГФ основанием экспоненциальной функции будет ни что иное как хрусотомия (золотое сечение)

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi=1.618033989\ldots \text{ — число Фидия,}$$

что преобразует соотношение

$$Ch_\phi(x+1)=Sh_\phi x+Ch_\phi(x-1),$$

в то самое рекуррентное соотношение, которое известно под именем знаменитого Фибоначчи

$$F(x+1)=F(x)+F(x-1)$$

и при дискретных значениях x генерирует последовательность чисел Фибоначчи (A000045): 0,1,2,3,5,8,13,21,34,….

Когда $\frac{a^2-1}{a} = 2$ имеем $a^2 - 2a - 1 = 0$, откуда $a = 1 + \sqrt{2} = \delta$, что называют серебряным сечением, а соотношение

$$Ch_\delta(x+1) = 2Sh_\delta x + Ch_\delta(x-1)$$

есть генератором формирования при дискретном значении x чисел Пелла (A002203): 0,1,2,5,12,29,70,169,408,…

Когда же $\frac{a^2-1}{a} = 3$, то уравнение $a^2 - 3a - 1 = 0$, позволяет определить основание ОГФ типа бронзового сечения $a = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = br$, что приводит нас к рекуррентному соотношению вида

$$Sh_{br}(x+1) = 3Ch_{br}x + Sh_{br}(x-1)$$

и генерирует при целочисленных значениях x последовательность чисел (A006497): 0,1,3,10,33,109,360,1189,….

В случае, если $\frac{a^2-1}{a} = 4$, то корень этого уравнения $a^2 - 4a - 1 = 0$ приводит нас к получению ОГФ с основанием, которое согласуется с медным сечением $a = 2 + \sqrt{5} = cup$ и при целочисленных значениях аргумента x соотношение

$$Sh_{cup}(x+1) = 4Ch_{cup}x + Sh_{cup}(x-1)$$

генерирует последовательность чисел (A0144448): 0,1,4,17,72,305,….

Пусть рассмотрим еще и такой случай, когда $\frac{a^2-1}{a} = 5$, тогда уравнение $a^2 - 5a - 1 = 0$, дает положительный корень, которого соответствует основанию ОГФ для железного сечения $a = \frac{5+\sqrt{29}}{2} = fer$, то есть соотношение

$$Sh_{fer}(x+1) = 5Ch_{fer}x + Sh_{fer}(x-1)$$

Позволяет при целочисленных значениях аргумента x генерировать последовательность чисел (A118243): 0,1,5,26,135,701,03640,18901,…

Если продолжить этот ряд и далее, то можно получить набор различных сечений, которые будут соответствовать всей таблице Д.И.Менделеева, но и не только ей, а и для любого, необязательно целочисленного значения, выражения $\frac{a^2-1}{a} = q$, q — любое число, может быть и не только действительным. Могут быть и другие соотношения для значений параметров, полученных нами и рассматриваемых соотношений.

Пусть, например, в соотношении, что мы начали рассматривать вначале этого анализа, $n = m = 1$, $y = 2$, имеем

$$Sh_a x \cdot Sh_a 2 = \frac{1}{2}(Ch_a(x+2) - Ch_a(x-2)),$$

или

$$2(\frac{a^4+1}{2a^2})Sh_a x = Ch_a(x+2) - Ch_a(x-2),$$

при этом, если $\frac{a^4+1}{a^2} = 1$, то одним из решений биквадратного уравнения $a^4 - a^2 - 1 = 0$, будет $a = \sqrt{\phi}$, а это значит что соотношение

$$Ch_{\sqrt{\phi}}(x+2) = Sh_{\sqrt{\phi}}x + Ch_{\sqrt{\phi}}(x-2)$$

генерирует при целом четном $[x]$ $(x = 2k, k = 0,1,2,3, \dots)$ последовательность чисел Фибоначчи, так как предыдущее соотношение преобразуется в соотношение

$$Ch_{\phi}(x+1) = Sh_{\phi}x + Ch_{\phi}(x-1),$$

которому соответствует рекуррентное соотношение Фибоначчи:

$$F(x+1) = F(x) + F(x-1).$$

Это свидетельствует о том, что подходов к получению чисел Фибоначчи существует не один вариант.

Рассмотрим, как при отдельных различных значениях параметров будет вести себя произведение косинусов:

$$Ch_a nx \cdot Ch_a my = \frac{1}{2}(Ch_a(nx+my) + Ch_a(nx-my)),$$

Пусть, например, $n = 2$, $m = y = 1$, тогда получим

$$2Ch_a 2x \cdot Ch_a 1 = Ch_a(2x+1) + Ch_a(2x-1)$$

и учитывая, $Ch_a 1 = \frac{a^1+a^{-1}}{2}$, получим

$$(\frac{a^2-1}{a})Ch_a 2x = Ch_a(2x+1) + Ch_a(2x-1),$$

то есть

$$Ch_a(2x+1) = (\frac{a^2-1}{a})Ch_a 2x - Ch_a(2x-1).$$

Итак, предположим, что $\frac{a^2-1}{a} = 3$, или $a^2 - 3a - 1 = 0$, откуда, найдем корни $a_{1,2} = \frac{3\mp\sqrt{5}}{2}$, то есть $a_1 = \phi^2$ и $a_2 = -\phi^{-2}$.

Таким образом, соотношение

$$Ch_{\phi^2}(2x+1) = 3Ch_{\phi^2}2x - Ch_{\phi^2}(2x-1)$$

вновь является генератором чисел Фибоначчи, соответствующих гиперболическому симметричному косинусу, с основанием $a = \phi^2$ для ОГФ.

Рассмотрим и еще один пример на этот раз для смешанного произведения синуса и косинуса ОГФ при тех же значениях параметров $n = 2$, $m = y = 1$, что и в предыдущем случае, получим

$$2Ch_a 2x \cdot Sh_a 1 = Sh_a(2x+1) - Sh_a(2x-1),$$

Учитывая, что $Sh_a 1 = \frac{a^1 - a^{-1}}{2}$, получим

$$(\frac{a^2-1}{a})Ch_a 2x = Sh_a(2x+1) - Sh_a(2x-1),$$

а предположив, $\frac{a^2-1}{a} = 3$, имеем квадратное уравнение $a^2 - 3a - 1 = 0$, решая которое вновь получаем один из корней, который соответствует бронзовому сечению, то есть $a = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = br$, а значит соотношение

$$Sh_{br}(2x+1) = 3Ch_{br}2x + Sh_{br}(2x-1)$$

является генератором бронзовых функций, также как это уже было показано ранее, но только не с удвоенным аргументом.

Рассмотрим еще один из возможных вариантов поведения ОГФ синуса и косинуса с одним основанием, при наличии в одном из них сдвига аргумента на постоянную величину s:

$$Sh_a x \cdot Sh_a(x+s) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^{x+s} - a^{-(x+s)}}{2} =$$

$$= \frac{\left(a^{(2x+s)} + a^{-(2x+s)}\right) - (a^s + a^{-s})}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\,(Ch_a(2x+s) - Ch_a s),$$

или

$$2Sh_a x \cdot Sh_a(x+s) = \mathrm{C}h_a(2x+s) - \mathrm{C}h_a s,$$

а также

$$\mathrm{C}h_a(2x+s) = 2Sh_a x \cdot Sh_a(x+s) + \mathrm{C}h_a s.$$

$$Ch_a x \cdot Ch_a(x+s) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^{x+s} + a^{-(x+s)}}{2} =$$

$$= \frac{\left(a^{(2x+s)} + a^{-(2x+s)}\right) + (a^s + a^{-s})}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\ (\mathrm{C}h_a(2x+s) + \mathrm{C}h_a s).$$

или

$$2Ch_a x \cdot Ch_a(x+s) = \mathrm{C}h_a(2x+s) + \mathrm{C}h_a s,$$

а также

$$\mathrm{C}h_a(2x+s) = 2Ch_a x \cdot Ch_a(x+s) - \mathrm{C}h_a s,$$

кроме этого, справедливо и соотношение

$$\mathrm{C}h_a(2x+s) = Ch_a x \cdot Ch_a(x+s) + Sh_a x \cdot Sh_a(x+s).$$

$$Sh_a x \cdot Ch_a(x+s) = \frac{a^x - a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^{x+s} + a^{-(x+s)}}{2} =$$

$$= \frac{\left(a^{(2x+s)} - a^{-(2x+s)}\right) - (a^s - a^{-s})}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\ (Sh_a(2x+s) - Sh_a s)$$

или

$$2Sh_a x \cdot Ch_a(x+s) = Sh_a(2x+s) - Sh_a s,$$

а также

$$Sh_a(2x+s) = 2Sh_a x \cdot Ch_a(x+s) + Sh_a s;$$

$$Ch_a x \cdot Sh_a(x+s) = \frac{a^x + a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^{x+s} - a^{-(x+s)}}{2}$$

$$= \frac{\left(a^{(2x+s)} - a^{-(2x+s)}\right) + (a^s - a^{-s})}{2 \cdot 2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ (Sh_a(2x+s) + Sh_a s),$$

или

$$2Ch_a x \cdot Sh_a(x+s) = Sh_a(2x+s) + Sh_a s,$$

а также

$$Sh_a(2x+s) = 2Ch_a x \cdot Sh_a(x+s) - Sh_a s;$$

кроме этого, справедливо и соотношение

$$Sh_a(2x+s) = Sh_a x \cdot Ch_a(x+s) - Ch_a x \cdot Sh_a(x+s).$$

В зависимости от знака величины s сдвиги осуществляются или влево или вправо.

Полученные результаты свидетельствуют, что многообразие и разнообразие в восприятии реальности имеют общее начало и это объясняется подходами к проведению научных исследований. Необходимым и достаточным является системный подход, которым есть возможность проанализировать все возможные варианты параметров моделирующих определенную реальность.

2.Рассмотрим особый случай для ОГФ, когда область их определения есть комплексная плоскость.

2.1. Напомним, что комплексная постоянная имеет вид $a = \alpha + i\beta$ в алгебраической форме, а показательной будет представлена через значения ее модуля ρ и аргумента θ:

$$|a| = \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

и

$$arg\, a = \theta = arctg\frac{\beta}{\alpha}.$$

то есть

$$a = \rho \cdot e^{i\theta},$$

а сопряженное ему число $a^* = \alpha - i\beta$ будет представлено в показательной форме

$$a^* = \rho \cdot e^{-i\theta}.$$

Комплексная переменная величина в алгебраической форме имеет вид

$$z = u + iv,$$

а ей, сопряжённая величина

$$z^* = u + iv$$

где u и v действительные переменные.

Известная формула Л. Эйлера связывает показательную форму представления комплексного числа с тригонометрической формой соотношением

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

при действительном x.

Из формулы Л.Эйлера следует, что $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, тогда будет справедливым и соотношение

$$(e^{i\frac{\pi}{2}})^t = i^t,$$

действительно, если $t = 2$, тогда $(e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = e^{i\pi} = -1 = i^2$, а значит, учитывая, что

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

и

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

заменив переменную x на t: $x = \frac{\pi}{2}t$, получим

$$sin\frac{\pi}{2}t = \frac{e^{(i\frac{\pi}{2})^t} - e^{-(i\frac{\pi}{2})^t}}{2i} = \frac{i^t - i^{-t}}{2i}$$

и

$$\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{t} = \frac{e^{(i\frac{\pi}{2})^t} + e^{-(i\frac{\pi}{2})^t}}{2} = \frac{i^t + i^{-t}}{2}.$$

Таким образом, тригонометрические функции синуса и косинуса действительной переменной с частотой $\omega = \frac{\pi}{2}$ представляют собой ОГФ с чисто мнимым основанием $a = i$.

Каким же будут ОГФ, если у них основанием будет комплексное число $a = \alpha + i\beta$ с действительным показателем x?

Учитывая формулы для представления комплексного числа в показательной форме, получим

$$SHx = i\frac{a^x - a^{*x}}{2i} = i\frac{\rho^x \cdot e^{i\theta x} - \rho^x \cdot e^{-i\theta x}}{2i} = i\rho^x \sin\theta x$$

и

$$CHx = \frac{a^x + a^{*x}}{2} = \frac{\rho^x \cdot e^{i\theta x} + \rho^x \cdot e^{-i\theta x}}{2} = \rho^x \cos\theta x.$$

Эти соотношения являются обобщением гиперболических функций для случая, когда основанием есть комплексное число, то есть, если предположить, что в них $a = i$, тогда $\rho = 1$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$, а это, то же самое, что имели вначале.

Рассмотрим вариант, когда основанием показательной функции есть действительное число a, а его показателем сопряжённые комплексные переменные $z = u + iv$ и $z^* = u - iv$.

При этом, имеем $a^z = a^{u+iv} = a^u \cdot a^{iv}$ и $a^{z^*} = a^{u-iv} = a^u \cdot a^{-iv}$.

Итак, получим

$$SHz = i\frac{a^z - a^{*z}}{2i} = i\frac{a^u(a^{iv} - a^{-iv})}{2i} = ia^u sin_a v$$

$$CHz = \frac{a^z + a^{*z}}{2} = \frac{a^u(a^{iv} + a^{-iv})}{2} = a^u cos_a v.$$

И наконец, что же собой представляет ОГФ с комплексным основанием и комплексным показателем?

Исходные данные зададим следующим образом:

$$a = \alpha + i\beta, |a| = \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, arg\, a = \theta = arctg\frac{\beta}{\alpha},$$

$$a = \rho \cdot e^{i\theta}, z = u + iv \text{ и } z^* = u - iv,$$

получим для ОГФ синуса

$$SH_a z = i\frac{(\rho \cdot e^{i\theta})^{u+iv} - (\rho \cdot e^{i\theta})^{u-iv}}{2i} = i(\rho \cdot e^{i\theta})^u \cdot \frac{(\rho \cdot e^{i\theta})^{iv} - (\rho \cdot e^{i\theta})^{-iv})}{2i} =$$

$$= i(\rho \cdot e^{i\theta})^u \cdot \frac{(\frac{\rho^i}{e^\theta})^v - (\frac{\rho^i}{e^\theta})^{-v}}{2i} = i(\rho \cdot e^{i\theta})^u sin_{\frac{\rho^i}{e^\theta}} v$$

аналогично и для ОГФ косинуса

$$CH_a z = \frac{\left(\rho \cdot e^{i\theta}\right)^{u+iv} + \left(\rho \cdot e^{i\theta}\right)^{u-iv}}{2} = \left(\rho \cdot e^{i\theta}\right)^u \cdot \frac{\left(\rho \cdot e^{i\theta}\right)^{iv} + \left(\rho \cdot e^{i\theta}\right)^{-iv})}{2} =$$

$$= (\rho \cdot e^{i\theta})^u \cdot \frac{(\frac{\rho^i}{e^\theta})^v + (\frac{\rho^i}{e^\theta})^{-v}}{2} = (\rho \cdot e^{i\theta})^u cos_{\frac{\rho^i}{e^\theta}} v.$$

Таким образом, получены соотношения, определяющие ОГФ синуса и косинуса на комплексной плоскости.

Резюмируя, проведенное обоснование существования обобщающих гиперболических функций можем утверждать, что они позволят получить новые оригинальные результаты, как в развитии самих функций, так и их приложений в различных отраслях науки и практической деятельности в изучении явлений природы и общества, а также послужить свидетельством гиперболичности мироздания в целом. Кроме этого, заметим, что отдельные моменты этого исследования согласуются с нашими результатами, полученными при доказательстве теоремы о n −х степенях приведенного квадратного уравнения [4].

3. Применим обобщающие гиперболические функции для представления некоторых известных уравнений кривых в двумерной системе координат, осями которых будут:

-осью абсцисс будет $x = Ch_a t$

-осью ординат будет $y = Sh_a t$,

то есть

$$x = Ch_a t = \frac{a^t + a^{-t}}{2} \text{ и } y = Sh_a t = \frac{a^t - a^{-t}}{2}$$

при этом

$$x^2 = {Ch_a}^2 t = \frac{a^{2t} + 2 + a^{-2t}}{4} = \frac{1}{2}(Ch_a 2t + 1).$$

$$y^2 = {Sh_a}^2 t = \frac{a^{2t} - 2 + a^{-2t}}{4} = \frac{1}{2}(Ch_a 2t - 1).$$

откуда

$$x^2 + y^2 = {Ch_a}^2 t + {Sh_a}^2 t = Ch_a\, 2t.$$

$$x^2 - y^2 = {Ch_a}^2 t - {Sh_a}^2 t = 1,$$

то есть в последнем случае имеем соотношение геометрического места точек, связывающего $x = Ch_a t$ и $y = Sh_a t$, или это есть уравнение единичной гиперболы.

Учитывая также, что

$$xy = Ch_a t \cdot Sh_a t = \frac{a^{2t} - a^{-2t}}{4} = \frac{1}{2} Sh_a 2t,$$

Представим в предполагаемом пространстве следующие уравнения.

- Уравнение лемнискаты Бернулли в декартовой системе координат имеет вид

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2\cdot 2m^2=0,$$

в пространстве ОГФ это будет иметь вид

$$({Ch_a}^2t+\ {Sh_a}^2t)^2-({Ch_a}^2t-\ {Sh_a}^2t)^2\cdot 2m^2=0$$

или

$$(Ch_a\ 2t)^2-1\cdot 2m^2=0,$$

то есть

$$Ch_a\ 2t=\mp m\sqrt{2}.$$

- Уравнение лемнискаты Жерано в декартовой системе координат имеет вид

$$x^4=\alpha^2(x^2-y^2),$$

а в предлагаемом пространстве его представим так:

$${Ch_a}^4t=\alpha^2\cdot 1,$$

или

$${Ch_a}^2t=\mp\alpha,$$

также может быть один из вариантов для положительного значения α:

$$Ch_a\ t=\mp\sqrt{\alpha}.$$

- Овал Кассини имеет уравнение в декартовой системе координат:

$$(x^2+y^2)^2-2c^2\cdot(x^2-y^2)^2=\alpha^4-c^4,$$

а в предлагаемой системе координат это будет

$$Ch_a\ 2t=\mp\sqrt{2c^2+\alpha^4-c^4}.$$

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что изменение масштаба осей координат декартовой системы в соответствии значениям ОГФ синуса и косинуса в определенном смысле упрощает их алгебраическое представление.

Вывод. Полученные нами результаты исследований, позволяют заявить о том, что класс ОГФ (обобщающих гиперболических функций) является системным инструментом для изучения различных свойств функций, которые используются в науке в целом и ее отдельных составляющих. Это гиперболические функции Эйлера, гиперболические функции Фибоначчи и функции Люка, серебряные функции и т.п., а использование, созданных нами функций, в качестве параметрических составляющих для задания системы координат, позволяет пересмотреть подходы к общей теории измерений пространства и времени, а также по-иному посмотреть на смысл и содержание геометрии Н.И.Лобачевского.

Литература.

1. И.С Ткаченко, А.П.Стахов. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук Украины, Вып.7: 1993. — С. 9–14.2

2. Стахов А.П., Розин Б.Н. «Золотые» гиперболические модели Природы // «Академия тринитаризма», М., Эл. №77-6567, публ. 12616

3. Олег Боднар. Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций // «Академия Тринитаризма», М. Эл. №776567, публ. 17259, 26.01.2012.

4.И.С.Ткаченко.Теорема о $n-$х степенях приведенного квадратного уравнения//«АкадемияТринитаризма»,М.Эл.№77-6567,публ.17312. 14.02.2012.