А.П. Стахов

Теория λ-чисел Фибоначчи

Содержание

1. Введение

В конце 20-го и начале 21-го вв. сразу несколько исследователей из разных стран – аргентинский математик **Вера Шпинадель [1]**, французский математик египетского происхождения **Мидхат Газале [2]**, американский математик **Джей Каппрафф [3]**, российский исследователь **Александр Татаренко [4]**, армянский философ и физик **Грант Аракелян [5]**, российский исследователь **Виктор Шенягин [6]**, украинский физик **Николай Косинов** [7] и др. независимо друг от друга начали изучать новый класс рекуррентных числовых последовательностей, которые являются обобщением классических чисел Фибоначчи. Эти числовые последовательности, названные λ-числами Фибоначчи, привели к открытию нового класса математических констант, названных **Верой Шпинадель** «металлическими пропорциями» [1]. Количество металлических пропорций теоретически бесконечно, а их частным случаем является классическая золотая пропорция.

Интерес большого количества серьезных исследователей из разных стран (США, Аргентина, Франция, Россия, Армения, Украина) не может быть случайным. Это означает, что «проблема созрела». И ученые разных стран начали ее изучать независимо друг от друга.

Как показало изучение работ [1-7], большее внимание исследователей было обращено на «металлические пропорции», в то время как свойства самих λ-чисел Фибоначчи изучены недостаточно. В настоящей статье сделана попытка привлечь внимание к некоторым необычным свойствам именно λ-чисел Фибоначчи.

2. Лямбда-числа Фибоначчи

Зададимся действительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \qquad F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1. \tag{1}$$

Рекуррентное соотношение (1) «генерирует» бесконечное количество новых числовых последовательностей, так как каждому $\lambda > 0$ соответствует своя числовая последовательность. Важно подчеркнуть, что частными случаями этих числовых последовательностей являются некоторые числовые последовательности, получившие широкую известность в современной науке.

В частности, для случая $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (1) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_1(n+2) = F_1(n+1) + F_1(n); \; F_1(0) = 0, F_1(1) = 1, \tag{2}$$

которое задает *числа Фибоначчи*: $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...$. Основываясь на этом факте, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (1), были названы λ*-числами Фибоначчи.*

При $\lambda = 2$ рекуррентное соотношение (1) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_2(n+2) = 2F_2(n+1) + F_2(n); \; F_2(0) = 0, F_2(1) = 1, \tag{3}$$

которое задает так называемые *числа Пелля*: $0,1,2,5,12,29,70,...$

При $\lambda = 3,4$ рекуррентное соотношение (1) сводится к следующим рекуррентным соотношениям:

$$F_2(n+2) = 3F_2(n+1) + F_2(n); \; F_2(0) = 0, F_2(1) = 1 \tag{4}$$

$$F_2(n+2) = 4F_2(n+1) + F_2(n); \; F_2(0) = 0, F_2(1) = 1. \tag{5}$$

Лямбда-числа Фибоначчи обладают многими замечательными свойствами, подобными свойствам классических чисел Фибоначчи. Доказано, что λ-числа Фибоначчи так же, как классические числа Фибоначчи, могут быть «расширены» в сторону отрицательных значений дискретной переменной *n*.

В Табл. 1 приведены четыре расширенные последовательности λ-чисел Фибоначчи, соответствующие значениям $\lambda = 1,2,3,4$.

Таблица 1. Расширенные λ-числа Фибоначчи ($\lambda = 1,2,3,4$)

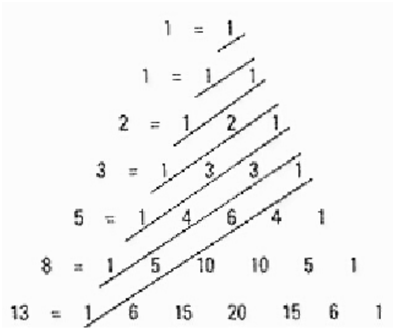
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21
$F_1(-n)$	0	1	−1	2	−3	5	−8	13	−21
$F_2(n)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408
$F_2(-n)$	0	1	−2	5	−12	29	−70	169	−408
$F_3(n)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927
$F_3(-n)$	0	1	−3	10	−33	109	−360	1199	−3927
$F_4(n)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184
$F_4(-n)$	0	1	−4	17	−72	305	−1292	5473	−23184

3. Связь λ-чисел Фибоначчи с биномиальными коэффициентами

О «диагональных суммах» треугольника Паскаля

Считается, что первым начал изучать «диагональные суммы» треугольника Паскаля американский математик Джордж Пойа. В книге «Математическое открытие» [8] он обратил внимание на необычное свойство треугольника Паскаля, показанное в Табл.1

Таблица 1. Диагональные суммы треугольника Паскаля



В книге Алексея Стахова [9] для изучения «диагональных сумм» использован более удобный способ представления треугольника Паскаля в виде прямоугольного треугольника (Табл.2).

Таблицы 2. Прямоугольный треугольник Паскаля

(а)

	0	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
0	C_0^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	$\cdots$	C_n^0	$\cdots$
1		C_1^1	C_2^1	C_3^1	$\cdots$	C_n^1	$\cdots$
2			C_2^2	C_3^2	$\cdots$	C_n^2	$\cdots$
3				C_3^3	$\cdots$	C_n^3	$\cdots$
$\vdots$						$\vdots$	$\vdots$
n						C_n^n	$\cdots$

(б)

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6
2			1	3	6	10	15
3				1	4	10	20
4					1	5	15
5						1	6
6							1
	1	2	4	8	16	32	64

Строки треугольника Паскаля будем нумеровать сверху вниз, причем верхнюю строку, состоящую из одних единиц, будем считать нулевой. Столбцы треугольника будем нумеровать слева направо, причем левый крайний столбец, состоящий из одной единицы ($C_0^0 = 1$) будем считать нулевым столбцом.

Известно, что сумма биномиальных коэффициентов, составляющих n-й столбец треугольника Паскаля, равна:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n \qquad (6)$$

Теперь сдвинем каждую строку треугольника Паскаля (Табл.2) на один столбец вправо относительно предыдущей строки. В результате получим следующую таблицу биномиальных коэффициентов, которую назовем «деформированным» треугольником Паскаля (Табл.3).

Таблица 3. «Деформированный» треугольник Паскаля

(а)

	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	$2m$	$2m+1$
0	C_0^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	C_4^0	C_5^0	$\cdots$	C_{2m}^0	C_{2m+1}^0
1			C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1	$\cdots$	C_{2m-1}^1	C_{2m}^1
2					C_2^2	C_3^2	$\cdots$	C_{2m-2}^2	C_{2m-1}^2
								$\vdots$	$\vdots$
m								C_m^m	C_{m+1}^m

(б)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1			1	2	3	4	5	6	7	8	9
2					1	3	6	10	15	21	28
3							1	4	10	20	35
4									1	5	15
5											1
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты по столбцам в «деформированном» треугольника Паскаля (Табл.2), то мы неожиданно придем к *числам Фибоначчи*! Этот результат впервые был получен в книге «Математическое открытие» американского математика Джорджа Пойа [8].

Из Табл. 3 вытекает, что сумма биномиальных коэффициентов, входящих в n-й столбец «деформированного» треугольника Паскаля, равна $(n+1)$-му числу Фибоначчи F_{n+1}. Пусть $n = 2m + r$, где m-частное, а r - остаток от деления n на 2. Тогда

$$F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{m+r}^m . \qquad (7)$$

В частности, согласно (7) начальные числа Фибоначчи могут быть выражены через биномиальные коэффициенты следующим образом:

$$\begin{aligned} &F_1 = 1 = C_0^0; F_2 = 1 = C_1^0; F_3 = 2 = 1+1 = C_2^0 + C_1^1; F_4 = 3 = 1+2 = C_3^0 + C_2^1; \\ &F_5 = 5 = 1+3+1 = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2; F_6 = 8 = 1+4+3 = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2; \\ &F_7 = 13 = 1+5+6+1 = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3; F_8 = 21 = 1+6+10+4 = C_7^0 + C_6^1 + C_5^2 + C_4^3 \end{aligned} \qquad (8)$$

Выражение λ-чисел Фибоначчи через степени числа λ

Вычислим начальные λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$, воспользовавшись рекуррентным соотношением (1):

$$F_\lambda(1)=1; F_\lambda(2)=\lambda; F_\lambda(3)=\lambda^2+1; F_\lambda(4)=\lambda^3+2\lambda;$$
$$F_\lambda(5)=\lambda^4+3\lambda^2+1; F_\lambda(6)=\lambda^5+4\lambda^3+3\lambda; \tag{9}$$
$$F_\lambda(7)=\lambda^6+5\lambda^4+6\lambda^2+1; F_\lambda(8)=\lambda^7+6\lambda^5+10\lambda^3+4\lambda$$

А теперь сравним выражения (8) и (9) (Табл. 4).

Таблица 4. Сравнение чисел Фибоначчи и λ-чисел Фибоначчи

n	F_n	$F_\lambda(n)$
1	$F_1=1=C_0^0$	$F_\lambda(1)=1=C_0^0$
2	$F_2=1=C_1^0$	$F_\lambda(2)=\lambda=C_1^0\lambda$
3	$F_3=2=1+1=C_2^0+C_1^1$	$F_\lambda(3)=\lambda^2+1=C_2^0\lambda^2+C_1^1$
4	$F_4=3=1+2=C_3^0+C_2^1$	$F_\lambda(4)=\lambda^3+2\lambda=C_3^0\lambda^3+C_2^1\lambda$
5	$F_5=5=1+3+1=C_4^0+C_3^1+C_2^2$	$F_\lambda(5)=\lambda^4+3\lambda^2+1=C_4^0\lambda^4+C_3^1\lambda^2+C_2^2$
6	$F_6=8=1+4+3=C_5^0+C_4^1+C_3^2$	$F_\lambda(6)=\lambda^5+4\lambda^3+3\lambda=C_5^0\lambda^5+C_4^1\lambda^3+C_3^2\lambda$
7	$F_7=13=1+5+6+1=C_6^0+C_5^1+C_4^2+C_3^3$	$F_\lambda(7)=\lambda^6+5\lambda^4+6\lambda^2+1=C_6^0\lambda^6+C_5^1\lambda^4+C_4^2\lambda^2+C_3^3$
8	$F_8=21=1+6+10+4=C_7^0+C_6^1+C_5^2+C_4^3$	$F_\lambda(8)=\lambda^7+6\lambda^5+10\lambda^3+4\lambda=C_7^0\lambda^7+C_6^1\lambda^5+C_5^2\lambda^3+C_4^3\lambda$

Из сопоставления представлений чисел Фибоначчи через биномиальные коэффициентов (8) с представлениями λ-чисел Фибоначчи через степени λ (9) вытекает неожиданный вывод: **коэффициенты при степенях числа λ в выражениях (9) в точности совпадают с биномиальными коэффициентами в соответствующих представлениях чисел Фибоначчи (8).**

Из Табл.4 вытекает, что при заданном $\lambda>0$ существует простой алгоритм получения аналитической формулы для любого λ-числа Фибоначчи в виде суммы степеней числа λ, взятых с биномиальными коэффициентами из «деформированного» треугольника Паскаля (Табл.3). Общее правило получения такой формулы состоит в следующем. Для получения аналитической формулы для λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n+1)$ используется *n*-й столбец «деформированного» треугольника Паскаля (Табл.3). В этом столбце выделяются биномиальные коэффициенты $C_n^0, C_{n-1}^1, C_{n-2}^2, C_{n-3}^3, \ldots$, которые используются в качестве коэффициентов при следующих степенях числа λ: $\lambda^n, \lambda^{n-2}, \lambda^{n-4}, \lambda^{n-6}, \ldots$

В качестве примера рассмотрим получение формулы для числа $F_\lambda(11)=F_\lambda(10+1)$. Поскольку в данном случае $n=10$, то используется 10-й столбец (Табл.3-б), в котором содержатся следующие биномиальные коэффициенты:

$$C_{10}^0=1, C_9^1=9, C_8^2=28, C_7^3=35, C_6^4=15, C_4^4=1.$$

Эти биномиальные коэффициенты умножаются на следующие степени числа λ:

$$\lambda^{10}, \lambda^8, \lambda^6, \lambda^4, \lambda^2, \lambda^0 .$$

В результате получаем аналитическое выражение для λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(11) = 1+9+28+35+15+1 = 89$:

$$F_\lambda(11) = \lambda^{10} + 9\lambda^8 + 28\lambda^6 + 35\lambda^4 + 15\lambda^2 + 1 .$$

Используя полученное выражение для $F_\lambda(11)$, нетрудно подсчитать, что при $\lambda = 1$ эта «диагональная сумма» равна числу Фибоначчи

$$F_{11} = 1+9+28+35+15+1 = 89 ,$$

а при $\lambda = 2$ - числу Пелля

$$P_{11} = 2^{10} + 9\times 2^8 + 28\times 2^6 + 35\times 2^4 + 15\times 2^2 + 1 = 4287 .$$

4. Формула Кассини для λ-чисел Фибоначчи

Напомним, что формула Кассини

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}, \tag{10}$$

связывающая три соседних числа Фибоначчи F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, является одним из самых известных тождеств для чисел Фибоначчи.

Оказывается, что такое же свойство присуще и λ-числам Фибоначчи:

$$F_\lambda^2(n) - F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1) = (-1)^{n+1} \tag{11}$$

Докажем это свойство индукцией по *n*. При $n = 1$ λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n-1), F_\lambda(n), F_\lambda(n+1)$ в формуле (11) согласно (9) принимают следующие значения: $F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1, F_\lambda(2) = \lambda$ $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$, откуда вытекает справедливость тождества (11) для случая $n = 1$:

$$(1)^2 - 0\times 1 = (1)^2 . \tag{12}$$

Основание индукции доказано.

Сделаем следующее индуктивное предположение. Предположим, что тождество (11) справедливо для любого заданного целого n и докажем, что из этого индуктивного предположения вытекает его справедливость и для целого $n+1$.

Докажем, что, если выполняется тождество (11), то тождество

$$F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda(n)F_\lambda(n+2) = (-1)^{n+2} \tag{13}$$

также выполняется.

Для этого представим левую часть тождества (13) в виде:

$$\begin{aligned}&F_\lambda^2(n+1)-F_\lambda(n)F_\lambda(n+2)=F_\lambda^2(n+1)-F_\lambda(n)\left[F_\lambda(n)+\lambda F_\lambda(n+1)\right]=\\&F_\lambda^2(n+1)-F_\lambda^2(n)-\lambda F_\lambda(n)F_\lambda(n+1)=F_\lambda(n+1)\left[F_\lambda(n+1)-\lambda F_\lambda(n)\right]=\\&F_\lambda(n+1)F_\lambda(n-1)-F_\lambda^2(n)\end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) вытекает, что

$$F_\lambda(n+1)F_\lambda(n-1)-F_\lambda^2(n)=-(-1)^{n+1}=(-1)^{n+2}, \tag{15}$$

что и доказывает справедливость тождества (13).

Приведем примеры выполнения тождества (11) для различных последовательностей, приведенных в Табл.1. Для $F_2(n)-$последовательности тождество (11) проверим для случая n=7. Для этого случая мы должны рассмотреть следующую тройку чисел: $F_2(6)=70, F_2(7)=169, F_2(8)=408$. Произведя вычисления над ними согласно (11), получим следующий результат:

$$(169)^2-70\times 408=28561-28560=1,$$

что соответствует тождеству (11), поскольку $(-1)^{n+1}=(-1)^8=1$.

Теперь рассмотрим $F_3(n)-$последовательность из Табл.1 для случая $n=6$. Для этого случая мы должны рассмотреть следующую тройку чисел:

$$F_3(5)=109, F_3(6)=360, F_3(7)=1189.$$

Произведя вычисления над ними согласно (11), получим следующий результат:

$$(360)^2-109\times 1189=129600-129601=-1,$$

что соответствует тождеству (11), поскольку $(-1)^{n+1}=(-1)^7=-1$.

Наконец, рассмотрим $F_4(-n)-$последовательность из Табл.1 для случая $n=-5$. Для этого случая мы должны рассмотреть следующую тройку чисел:

$$F_4(-4)=-72, F_4(-5)=305, F_4(-6)=-1292.$$

Произведя вычисления над ними согласно (11), получим следующий результат:

$$(305)^2-(-72)\times(-1292)=93025-93024=1,$$

что соответствует тождеству (11), поскольку $(-1)^{n+1}=(-1)^{-4}=1$.

Таким образом, изучая обобщенную формулу Кассини (11) для λ-чисел Фибоначчи, мы пришли к открытию бесконечного количества целочисленных рекуррентных последовательностей, простирающихся от $+\infty$ до $-\infty$, обладающих уникальным математическим свойством, выражаемым обобщенной формулой Кассини (11), которая гласит следующее:

Квадрат некоторого λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ всегда отличается от произведения двух соседних λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n-1)$ и $F_\lambda(n+1)$, которые

его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от четности числа *n*; если число *n* является четным числом, то 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

До сих пор мы считали, что только классические числа Фибоначчи обладают таким необычным свойством. Оказывается, это не так. Все λ-числа Фибоначчи, задаваемые (1), обладают этим же свойством!

5. Лямбда-матрицы Фибоначчи

Зададимся действительным числом $\lambda > 0$ и введем в рассмотрение квадратную матрицу следующего типа

$$Q_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

которую будем называть λ-*матрицей Фибоначчи*.

Вычислим детерминант матрицы (16):

$$\det Q_\lambda = \lambda \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \tag{17}$$

λ-матрица (16) связана с λ-числами Фибоначчи $F_\lambda(n)$ следующим соотношением:

$$Q_\lambda^n = \begin{pmatrix} F_\lambda(n+1) & F_\lambda(n) \\ F_\lambda(n) & F_\lambda(n-1) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $F_\lambda(n-1), F_\lambda(n), F_\lambda(n+1)$ – λ-числа Фибоначчи.

Выражение (18) легко доказывается методом математической индукции. Действительно, для случая n=1, матрица (18) сводится к λ-матрице Фибоначчи (16), поскольку

$$Q_\lambda^1 = \begin{pmatrix} F_\lambda(2) & F_\lambda(1) \\ F_\lambda(1) & F_\lambda(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Основание индукции доказано.

Сделаем следующее индуктивное предположение: для произвольного k справедливо следующее выражение:

$$Q_\lambda^k = \begin{pmatrix} F_\lambda(k+1) & F_\lambda(k) \\ F_\lambda(k) & F_\lambda(k-1) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Q_\lambda^{k+1} = Q_\lambda^k \times Q_\lambda = \begin{pmatrix} F_\lambda(k+1) & F_\lambda(k) \\ F_\lambda(k) & F_\lambda(k-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda F_\lambda(k+1) + F_\lambda(k) & F_\lambda(k+1) \\ \lambda F_\lambda(k) + F_\lambda(k-1) & F_\lambda(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\lambda(k+2) & F_\lambda(k+1) \\ F_\lambda(k+1) & F_\lambda(k) \end{pmatrix}$$

Утверждение (18) доказано.

Вычислим теперь детерминант матрицы (18). С одной стороны, используя известное свойство степеней квадратных матриц, мы можем записать:

$$\det\left(Q_\lambda^n\right)=\left(\det Q_\lambda\right)^n \tag{19}$$

С другой стороны, используя (17), мы можем переписать (19) следующим образом:

$$\det\left(Q_\lambda^n\right)=\left(-1\right)^n \tag{20}$$

Вычислим теперь детерминант матрицы (18):

$$\det Q_\lambda^n = F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1)-F_\lambda^2(n). \tag{21}$$

Объединяя результаты (20) и (21), окончательно запишем:

$$\det Q_\lambda^n = F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1)-F_\lambda^2(n)=(-1)^n. \tag{22}$$

Выражение (22) может быть записано следующим образом:

$$\det Q_\lambda^n = F_\lambda^2(n)-F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1)=(-1)^{n+1}. \tag{23}$$

Сравнивая выражение (23) с *обобщенной формулой Кассини* (11), мы приходим к неожиданному заключению: **детерминант λ-матрицы Фибоначчи (23) совпадает с обобщенной формулой Кассини (11)**!

Воспользовавшись рекуррентной формулой для λ-чисел Фибоначчи (1), мы можем представить матрицу (18) в следующем виде:

$$\begin{gathered}Q_\lambda^n=\begin{pmatrix}\lambda F_\lambda(n)+F_\lambda(n-1) & \lambda F_\lambda(n-1)+F_\lambda(n-2)\\ \lambda F_\lambda(n-1)+F_\lambda(n-2) & \lambda F_\lambda(n-2)+F_\lambda(n-3)\end{pmatrix}=\\ \lambda\begin{pmatrix}F_\lambda(n) & F_\lambda(n-1)\\ F_\lambda(n-1) & F_\lambda(n-2)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_\lambda(n-1) & F_\lambda(n-2)\\ F_\lambda(n-2) & F_\lambda(n-3)\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{24}$$

откуда вытекает представление матрицы (18) в рекуррентной форме:

$$Q_\lambda^n=\lambda Q_\lambda^{n-1}+Q_\lambda^{n-2}. \tag{25}$$

Мы можем представить рекуррентное соотношение (25) в следующем виде:

$$Q_\lambda^{n-2}=Q_\lambda^n-\lambda Q_\lambda^{n-1}. \tag{26}$$

Используя рекуррентные соотношения (25) и (26), мы можем для каждого $\lambda>0$ представить все λ-матрицы Фибоначчи типа Q_λ^n и обратные к ним матрицы Q_λ^{-n} в явном виде. Ниже в таблицах 5, 6, 7 представлены λ-матрицы Фибоначчи, соответствующие случаям $\lambda=1,2,3$.

Таблица 5. λ-матрицы Фибоначчи для случая $\lambda=1$

n	0	1	2	3	4	5
$Q_{\lambda=1}^n$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix}$
$Q_{\lambda=1}^{-n}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&5\\5&-8\end{pmatrix}$

Таблица 6. λ-матрицы Фибоначчи для случая $\lambda = 2$

n	0	1	2	3	4	5
$Q_{\lambda=2}^{n}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}12 & 5\\5 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}29 & 12\\12 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}70 & 29\\29 & 12\end{pmatrix}$
$Q_{\lambda=2}^{-n}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 5\\5 & -12\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5 & -12\\-12 & 29\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-12 & 29\\29 & -70\end{pmatrix}$

Таблица 7. λ-матрицы Фибоначчи для случая $\lambda = 3$

n	0	1	2	3	4	5
$Q_{\lambda=3}^{n}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}33 & 10\\10 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}109 & 33\\33 & 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}360 & 109\\109 & 33\end{pmatrix}$
$Q_{\lambda=3}^{-n}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -3\\-3 & 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & 10\\10 & -33\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10 & -33\\-33 & 109\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-33 & 109\\109 & -360\end{pmatrix}$

Таблицы 5-7 содержит прямые λ-матрицы Q_λ^n и обратные к ним матрицы Q_λ^{-n}. Из таблиц 5-7 вытекает очень простое правило вычисления обратной матрицы Q_λ^{-n} из прямой матрицы Q_λ^n. Они различны для λ-матриц Q_λ^n с четными ($n = 2k$) и нечетными ($n = 2k+1$) степенями:

$$Q_\lambda^{2k} = \begin{pmatrix} F_\lambda(2k+1) & F_\lambda(2k) \\ F_\lambda(2k) & F_\lambda(2k-1) \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$Q_\lambda^{2k+1} = \begin{pmatrix} F_\lambda(2k+2) & F_\lambda(2k+1) \\ F_\lambda(2k+1) & F_\lambda(2k) \end{pmatrix} \tag{28}$$

Как следует из таблиц 5-7, в случае λ-матрицы с четными степенями ($n = 2k$), задаваемой (27), для получения обратной матрицы Q_λ^{-2k} необходимо члены $F_\lambda(2k)$ взять с обратным знаком, а члены $F_\lambda(2k+1)$ и $F_\lambda(2k-1)$ поменять местами, то есть,

$$Q_\lambda^{2k} = \begin{pmatrix} F_\lambda(2k-1) & -F_\lambda(2k) \\ -F_\lambda(2k) & F_\lambda(2k+1) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Для получения обратной матрицы Q_λ^{-2k-1} из матрицы (28) необходимо члены $F_\lambda(2k+2)$ и $F_\lambda(2k)$ поменять местами и взять их с обратным знаком, то есть,

$$Q_\lambda^{-2k-1} = \begin{pmatrix} -F_\lambda(2k) & F_\lambda(2k+1) \\ F_\lambda(2k+1) & -F_\lambda(2k+2) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

6. «Металлические пропорции»

Последующие результаты взяты из книг Веры Шпинадель [1], Мидхата Газале [2] и статьи Алексея Стахова [10].

Разделим обе части рекуррентного соотношения (1) на $F_\lambda\left(n+1\right)$ и представим его в следующем виде:

$$\frac{F_\lambda(n+2)}{F_\lambda(n+1)}=\lambda+\frac{F_\lambda(n)}{F_\lambda(n+1)}=\lambda+\frac{1}{\frac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}}. \qquad (31)$$

Если обозначить предел отношения $\frac{F_\lambda\left(k+1\right)}{F_\lambda\left(k\right)}$ при $k\to\infty$ через *x,* то, осуществляя предельный переход в (31), мы получим следующее квадратное уравнение:

$$x^2=\lambda x+1 \qquad (31)$$

или

$$x^2-\lambda x-1=0 \qquad (32)$$

Обозначим через Φ_λ положительный корень x_1, задаваемый (33), и рассмотрим новый класс математических констант, задаваемых следующим выражением:

$$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \qquad (34)$$

Заметим, что для случая $\lambda=1$ формула (34) задает классическую золотую пропорцию:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (35)$$

Уже этот факт должен привлечь наше внимание к формуле (34), которая является обобщением одной из известных математических формул.

Аргентинский математик **Вера Шпинадель** [1] назвала математические константы, задаваемые выражением (34), *металлическими пропорциями,* а Александр Татаренко - T_m-гармониями [4]. Если в (34) мы примем λ =1, 2, 3, 4, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие, согласно Шпинадель [1], следующие названия:

$$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\text{золотая пропорция}, \lambda=1\right);\quad \Phi_2=1+\sqrt{2}\left(\text{серебряная пропорция}, \lambda=2\right);$$

$$\Phi_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\left(\text{бронзовая пропорция}, \lambda=3\right);\quad \Phi_4=2+\sqrt{5}\left(\text{медная пропорция}, \lambda=4\right).$$

Остальные *металлические пропорции* $(\lambda\geq5)$ не имеют специальных названий:

$$\Phi_5=\frac{5+\sqrt{29}}{2};\quad \Phi_6=3+2\sqrt{10};\quad \Phi_7=\frac{7+2\sqrt{14}}{2};\quad \Phi_8=4+\sqrt{17}\ldots$$

Ясно, что количество «металлических пропорций», задаваемых (34), теоретически бесконечно, так каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответсвует своя металлическая пропорция типа (34).

7. Замечательные алгебраические свойства «металлических пропорций»

Если подставить корень (34) вместо переменной *x* в уравнении (31), то получим следующее тождество для «металлической пропорции»:

$$\Phi_\lambda^2 = \lambda\Phi_\lambda + 1 . \qquad (36)$$

Тождество (36) является источником интересных свойств «металлической пропорции». Представим тождество (36) в виде:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1 + \lambda\Phi_\lambda} . \qquad (37)$$

Если теперь вместо Φ_λ в подкоренном выражении (37) подставить выражение для Φ_λ, задаваемое (37), то получим следующее представление:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1 + \lambda\sqrt{1 + \lambda\Phi_\lambda}}$$

Продолжая процесс такой подстановки до бесконечности, мы получим следующее представление «металлических пропорций» в радикалах, справедливое для любого $\lambda > 0$:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1 + \lambda\sqrt{1 + \lambda\sqrt{1 + \lambda\sqrt{1 + ...}}}} \qquad (38)$$

Заметим, что при $\lambda = 1$ выражение (38) сводится к широко известному представлению золотой пропорции в радикалах:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{...}}}} . \qquad (39)$$

Теперь представим тождество (36) в виде:

$$\Phi_\lambda = \lambda + \frac{1}{\Phi_\lambda} . \qquad (40)$$

Если теперь вместо Φ_λ в правой части выражения (140) многократно подставлять выражение для Φ_λ, задаваемое (40), то мы получим представление Φ_λ в виде цепной дроби:

$$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + ...}}} \qquad (41)$$

Заметим, что при $\lambda = 1$ выражение (41) сводится к широко известному представлению золотой пропорции в виде:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}} \qquad (42)$$

Запишем еще некоторые важные тождества для «металлической пропорции» Φ_λ:

$$\Phi_\lambda + \frac{1}{\Phi_\lambda} = \sqrt{4+\lambda^2} \tag{43}$$

$$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2}, \tag{44}$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, … .

8. Формулы Газале

Формула Газале для λ-чисел Фибоначчи

Формула (1) задает λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ рекурсивно. Однако, λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ могут быть выражены в аналитической форме через металлические пропорции Φ_λ, подобно тому как числа Фибоначчи представляются аналитически через золотую пропорцию с использование *формул Бине*.

Опуская промежуточные выкладки, запишем формулу Газале для λ-чисел Фибоначчи

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \tag{45}$$

где n=0,±1,±2,±3,…

Важно еще раз подчеркнуть, что формула Газале (45) для λ-чисел Фибоначчи является обобщением широко известной формулы Бине для чисел Фибоначчи. При этом формула Газале (45) порождает бесконечное количество формул типа (45), так как каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответствует своя формула Газале типа (45).

Формула Газале для λ-чисел Люка

В работе [10] выведена формула Газале для λ-чисел Люка:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}, \tag{46}$$

а также рекуррентная формула для λ-чисел Люка:

$$L_\lambda(n) = \lambda L_\lambda(n-1) + L_\lambda(n-2); \quad L_\lambda(0) = 2, L_\lambda(1) = \lambda \tag{47}$$

Важно подчеркнуть, что формула Газале (46) для λ-чисел Люка является обобщением широко известной формулы Бине для чисел Люка. При этом формула Газале (46) порождает бесконечное количество формул типа (46), так как каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответствует своя формула Газале типа (46).

9. Гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка

В работе [10] введены *гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка*:

<u>Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи</u>

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{48}$$

$$cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]. \quad (49)$$

<u>Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка</u>

$$sL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \quad (50)$$

$$cL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \quad (51)$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda>0$ - заданное положительное действительное число.

λ-числа Фибоначчи и Люка определяются через гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F_\lambda(n) = \begin{cases} sF_\lambda(n), & n=2k \\ cF_\lambda(n), & n=2k+1 \end{cases}; \quad (52)$$

$$L_\lambda(n) = \begin{cases} cL_\lambda(n), & n=2k \\ sL_\lambda(n), & n=2k+1 \end{cases}. \quad (53)$$

Из формулы (52) вытекает, что при четных значениях $n=2k$ функция гиперболического λ-синуса Фибоначчи $sF_\lambda(n)=sF_\lambda(2k)$ совпадает с λ-числом Фибоначчи $F_\lambda(n)=F_\lambda(2k)$, а при всех нечетных значениях $n=2k+1$ функция гиперболического λ-косинуса Фибоначчи $cF_\lambda(n)=cF_\lambda(2k+1)$совпадает с λ-числом Фибоначчи $F_\lambda(n)=F_\lambda(2k+1)$. В то же время из формулы (53) вытекает, что при четных значениях $n=2k$ функция гиперболического λ-косинуса Люка $cF_\lambda(n)=cF_\lambda(2k)$ совпадает с λ-числом Люка $L_\lambda(n)=L_\lambda(2k)$, а при нечетных значениях $n=2k+1$ функция гиперболического λ-синуса Люка $sFs(n)=sFs(2k+1)$ совпадает с λ-числом Люка $L_\lambda(n)=L_\lambda(2k+1)$. То есть, λ-числа Фибоначчи и Люка как бы вписываются в гиперболические функции Фибоначчи и Люка, что будет показано ниже.

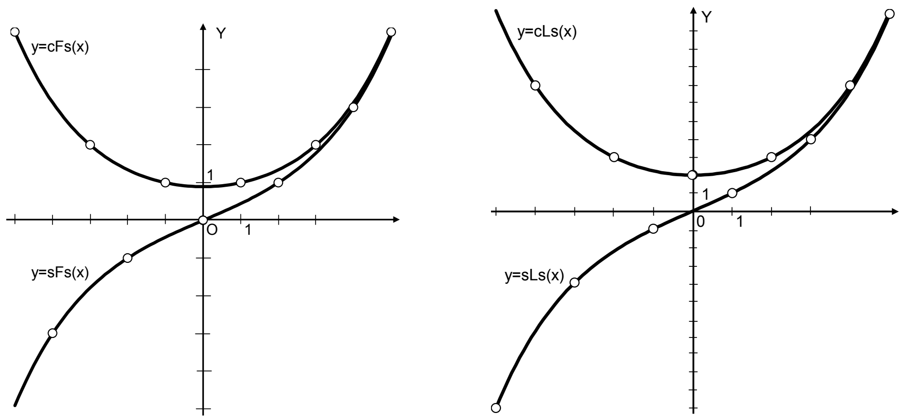
Нетрудно видеть, что функции (48)-(51) связаны друг с другом простыми соотношениями:

$$sF_\lambda(x) = \frac{sL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}; \qquad cF_\lambda(x) = \frac{cL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}. \quad (54)$$

Заметим, что для случая $\lambda=1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (48)-(51) сводятся к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка, введённым в работах [11,12].

Графики гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка

Графики гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка по форме совпадают с симметричными гиперболических функций Фибоначчи и Люка, введенными в [11,12] (Рис. 1).



(а) (*б*)

Рисунок 1. Графики симметричных гиперболических функций Фибоначчи (*а*) и Люка (*б*)

Отличие графиков гиперболических $\lambda-$функций Фибоначчи и Люка состоит от графиков на Рис.1 состоит в том, что в точке *x*=0, гиперболический λ-косинус Фибоначчи (49) принимает значение $cF_\lambda(0)=\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}$, а гиперболический λ-косинус Люка (51) принимает значение $cL_\lambda(0)=2$.

Важно также подчеркнуть, что λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ с четными значениями $n=0,\pm2,\pm4,\pm6,...$ «вписываются» в график гиперболического λ-синуса Фибоначчи $sF_\lambda(x)$ в «дискретных» точках непрерывной переменной $x=0,\pm2,\pm4,\pm6,...$, в то же время λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ с нечетными значениями $n=\pm1,\pm3,\pm5,...$ «вписываются» в график гиперболического λ-косинуса Фибоначчи $sF_\lambda(x)$ в «дискретных» точках непрерывной переменной $x=\pm1,\pm3,\pm5,...$ (Рис.1-*а*).

С другой стороны, λ-числа Люка $L_\lambda(n)$ с четными значениями n «вписываются» в график гиперболического λ-косинуса Люка $cL_\lambda(x)$ в точках $x=0,\pm2,\pm4,\pm6,...$, и λ-числа Люка $L_\lambda(n)$ с нечетными значениями n «вписываются» в график гиперболического λ-синуса Люка $sL_\lambda(x)$ в точках $x=\pm1,\pm3,\pm5,...$ (Рис.1-*б*).

10. Частные случаи гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка

«Золотые», «серебряные», «бронзовые» и «медные» гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка

Формулы (48)-(51) задают бесконечное количество различных гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, поскольку каждое число $\lambda > 0$ генерирует свой собственный вариант гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка типа (48)-(51).

Рассмотрим характерные случаи гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка (48)-(51), соответствующие различным значениям λ.

Для случая $\lambda = 1$ *золотая пропорция* (35) является основанием гиперболических 1-функций Фибоначчи и Люка ($\lambda = 1$), которые для этого случая совпадают с симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка, введённым в работах [11,12]. В дальнейшем мы будем называть ГФФЛ, введенные в [11,12], *«золотыми» гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка,* соответственно.

Для случая $\lambda = 2$ *серебряная пропорция* $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть *«серебряными» гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_2(x) = \frac{\Phi_2^x - \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right], \tag{55}$$

$$cF_2(x) = \frac{\Phi_2^x + \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right], \tag{56}$$

$$sL_2(x) = \Phi_2^x - \Phi_2^{-x} = \left(1+\sqrt{2}\right)^x - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}, \tag{57}$$

$$cL_2(x) = \Phi_2^x + \Phi_2^{-x} = \left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}. \tag{58}$$

Для случая $\lambda = 3$ *бронзовая пропорция* $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть *«бронзовыми» гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_3(x) = \frac{\Phi_3^x - \Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{59}$$

$$cF_3(x) = \frac{\Phi_3^x + \Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{60}$$

$$sL_3(x) = \Phi_3^x - \Phi_3^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}, \tag{61}$$

$$cL_3(x) = \Phi_3^x + \Phi_3^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}. \tag{62}$$

Для случая $\lambda = 4$ *медная пропорция* $\Phi_4 = 2+\sqrt{5}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть *«медными» гиперболическими* λ*-фунциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_4(x) = \frac{\Phi_4^x - \Phi_4^{-x}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^x - \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}\right], \tag{63}$$

$$cF_4(x) = \frac{\Phi_4^x + \Phi_4^{-x}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^x + \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}\right], \tag{64}$$

$$sL_4(x) = \Phi_4^x - \Phi_4^{-x} = \left(2+\sqrt{5}\right)^x - \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}, \tag{65}$$

$$cL_4(x) = \Phi_4^x + \Phi_4^{-x} = \left(2+\sqrt{5}\right)^x + \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}. \tag{66}$$

Связь с классическими гиперболическими функциями

Сравним теперь гиперболические λ-функции Люка (50) и (51) с классическими гиперболическими функциями. Нетрудно доказать [10], что для случая

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2} = e \tag{67}$$

гиперболические λ-функции Люка (50) и (51) совпадают с классическими гиперболическими функциями с точностью до постоянного коэффициента 1/2 , то есть,

$$sh(x) = \frac{sL_\lambda(x)}{2} \quad \text{и} \quad ch(x) = \frac{cL_\lambda(x)}{2}. \tag{68}$$

Используя (67), после несложных преобразований мы можем вычислить значение λ_e, для которого выражение (67) является верным:

$$\lambda_e = e - \frac{1}{e} = 2sh(1) \approx 2.35040238. \tag{69}$$

Таким образом, согласно (68) классические гиперболические функции является частным случаем гиперболических λ-функций Люка для случая (67).

11. Важнейшие формулы и тождества для гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка

Еще раз подчеркнем, что перечень гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (48)-(51), можно продолжить до бесконечности. Наиболее любопытное состоит в том, что они имеют прямое отношение к некоторым широко известным числовым последовательностям: *числам Фибоначчи, числам Люка* и *числам Пелля.* Эти функции сохраняют все важнейшие свойства *симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка* [11,12], при этом они обладают, с одной стороны, такими же *рекуррентными свойствами*, как и λ-числа Фибоначчи и Люка, с другой стороны, *гиперболическими свойствами*, как классические гиперболические функции, которые, кстати, являются частным случаем гиперболических λ-функций Люка.

Основанием этих функций являются «металлические пропорции» (34), которые являются обобщением классической «золотой пропорции». В таблице

Таблица 8. Связь золотой пропорции с металлическими пропорциями

Золотая пропорция ($\lambda = 1$)	**Металлические пропорции ($\lambda > 0$)**
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$
$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}$	$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{\ldots}}}}$
$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\ldots}}}$
$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}$	$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda \times \Phi_\lambda^{n-1}$
$F(n) = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$L(n) = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}$	$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}$
$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$ $cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$ $cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}$ $cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}$	$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}$ $cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}$

В Табл.9 приведены основные формулы, связывающие классические гиперболические функции λ-функции Фибоначчи с классическими гиперболическими функциями. Эти формулы задают *гиперболические свойства* гиперболических λ-функций Фибоначчи.

Таблица 9. Гиперболические свойства λ-функций Фибоначчи

Формулы для классических гиперболических функций	**Формулы для гиперболических λ-функций Фибоначчи**
$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2};ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}};cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sh(x+2)=2sh(1)ch(x+1)+sh(x)$ $ch(x+2)=2sh(1)sh(x+1)+ch(x)$	$sF_\lambda(x+2)=\lambda cF_\lambda(x+1)+sF_\lambda(x)$ $cF_\lambda(x+2)=\lambda sF_\lambda(x+1)+cF_\lambda(x)$
$sh^2(x)-ch(x+1)ch(x-1)=-ch^2(1)$ $ch^2(x)-sh(x+1)sh(x-1)=ch^2(1)$	$\left[sF_\lambda(x)\right]^2-cF_\lambda(x+1)cF_\lambda(x-1)=-1$ $\left[cF_\lambda(x)\right]^2-sF_\lambda(x+1)sF_\lambda(x-1)=1$
$ch^2(x)-sh^2(x)=1$	$\left[cF_\lambda(x)\right]^2-\left[sF_\lambda(x)\right]^2=\frac{4}{4+\lambda^2}$
$sh(x+y)=sh(x)ch(x)+ch(x)sh(x)$ $sh(x-y)=sh(x)ch(x)-ch(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}sF_\lambda(x+y)=sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)+cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}sF_\lambda(x-y)=sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)-cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(x+y)=ch(x)ch(x)+sh(x)sh(x)$ $ch(x-y)=ch(x)ch(x)-sh(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x+y)=cF_\lambda(x)cF_\lambda(x)+sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x-y)=cF_\lambda(x)cF_\lambda(x)-sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(2x)=2sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(2x)=sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)$
$\left[ch(x)\pm sh(x)\right]^n=ch(nx)\pm sh(nx)$	$\left[cF_\lambda(x)\pm sF_\lambda(x)\right]^n=\left(\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\right)^{n-1}\left[cF_\lambda(nx)\pm sF_\lambda(nx)\right]$

Заметим, что таблица формул для гиперболических λ-функций Люка легко может быть получена из Табл.9, если воспользоваться соотношениями (54), связывающими гиперболические λ-функции Люка с гиперболическими λ-функциями Фибоначчи.

12. Новая задача для теоретического естествознания

Заметим, что все формулы, приведенные в Табл.8, 9, вызывают эстетическое чувство. Математическая красота этих формул завораживает. Теоретическое значение этих формул не вызывает сомнений. Возникает вопрос: имеют ли введенные гиперболические λ-функции какое-либо практическое значение? Видимо, новая геометрическая теория филлотаксиса, созданная украинским исследователем **Олегом Боднаром** [13], вселяет надежду, что гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка также могут найти приложения в современной науке. «Геометрия Боднара» показывает, что «мир филлотаксиса» является «гиперболическим миром», основанным на ГФФЛ, основанием которых является классическая «золотая пропорция». При этом к этому гиперболическому миру относится огромное количество ботанических объектов (сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника и корзинки цветов). Таким образом, в ботаническом явлении филлотаксиса «гиперболичность» проявляет себя в «золоте». Эта гипотеза, выдвинутая Боднаром, оказалась весьма плодотворной и привела к созданию новой геометрической теории филлотаксиса.

ГФФЛ являются частным случаем гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка (48)-(51). Последние основываются на «металлических пропорциях» (34), в частности, на «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим видам «металлических пропорций». В этой связи у нас есть все основания высказать предположение, что и другие типы гиперболических λ-функций, задаваемых (48)-(51), могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что современной науке были неизвестны гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка. **И мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (48)-(51).**

При этом, возможно, первым кандидатом на «революцию» в естествознании может стать «серебряная пропорция» $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$ и основанные на ней «серебряные» гиперболические функции, задаваемые (55)-(58).

Интерес к «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$ и «серебряным» гиперболическим функциям значительно возрос в последние годы. В этой связи особый интерес представляют статья Олега Боднара «Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций» [14] и статья [4] известного российского исследователя Александра Татаренко. В статье [4] Александр Татаренко развивает теорию T_m-гармоний, которые по существу совпадают с «металлическими пропорциями». При этом особую роль в дальнейшем развитии теоретического естествознания он отводит «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$, которую он называет T_2-гармонией:

«Важнейшим и неожиданным результатом исследований T_m-гармоний было установление двух фактов:

1) вторая Золотая $T_{m=\pm 2}=\sqrt{2} \pm 1$ гармония (а не первая — согласно нумерации в ряде $T_{\pm m}$ чисел — классическая Ф) является доминантой, царствующей в беспредельном мире T_m-гармоний.

2) «функция» второй Золотой $T_m=\pm 2$ гармонии является число $\sqrt{2}$ - реликтовое число – корень из двух, встречающийся в архи-громадном множестве формул и закономерностей различных областей естествознания, что равнозначно причастности T_2 непосредственно или косвенно ко множеству (а возможно и ко всем) законов Природы и ее констант. ***Таким образом T_2 буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам.***

Установление факта доминантности T_2-гармонии, а с ней и особого статуса ее «функции» $\sqrt{2}$ является заключительным аккордом — важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника.

Требуется кардинально новое мышление о Гармонии Мира».

Таким образом, в этих словах Татаренко обращает особое внимание на «серебряную» пропорцию $T_2 = 1+\sqrt{2}$, которая *«буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам»*. Более того, он считает введение «серебряной» пропорции» $T_2 = 1+\sqrt{2}$ в современную науку *«важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника»*.

13. Решение 4-й проблемы Гильберта

Немного истории

В работах Алексея Стахова и Самуила Арансона [15-18] приведено оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта, которую после почти столетних попыток ее решения математики 20 в. признали весьма «расплывчатой» для ее решения, то есть, возложили ответственность за ее решение на самого Гильберта.

В своей знаменитой лекции «Математические проблемы», прочитанной на пленарном заседании Международного Конгресса Математиков, состоявшемся в Париже в 1900 г., Гильберт формулирует 4-ю проблему следующим образом: *«Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии»*.

Детальный анализ всех попыток решения 4-й проблемы Гильберта дан в статье Самуила Арансона «Еще раз о 4-й проблеме Гильберта» [19].

В основу решения 4-й проблема Гильберта положены гиперболические λ-функции Фибоначчи, разработанные Алексеем Стаховым в 2006 г. [10]. Сама идея решения принадлежит доктору физико-математических наук Самуилу Арансону.

Суть решения состоит в следующем. Как известно, классическая модель *плоскости Лобачевского* в *псевдосферических координатах* (u,v), $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, имеющей гауссову кривизну $K = -1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере), имеет вид:

$$\left(ds\right)^2 = \left(du\right)^2 + sh^2\left(u\right)\left(dv\right)^2 \qquad (70)$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус. Как вытекает из (70), ключевую роль в *плоскости Лобачевского* играет *гиперболический синус*.

«Золотые» метрические λ-формы плоскости Лобачевского

Как было доказано выше, существует бесконечное количество гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых выражениями (48)-(51). Их частными случаями (для λ=1) являются симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка, введенные в работах [11,12], а также классические гиперболические функции, соответсвующие значению $\lambda_e = e - \frac{1}{e} = 2sh(1) \approx 2.35040238.$ При этом, как показано выше, гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (48)-(51) сохраняют все известные свойства классических гиперболических функций и поэтому могут быть использованы для введения новых метрических форм плоскости Лобачевского. Эта идея и лежит в основе статей **Алексея Стахова** и **Самуила Арансона** [15-18].

Развивая идею метрической формы плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (70), в работах [15-18] предложено бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи (48)-(49). Доказано [15-18], что эти метрические формы, задаваемые в координатах $(u,v), 0 < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$, имеют *гауссову кривизну* $K = -1$ и представляются в виде

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \tag{71}$$

где $\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - *металлическая пропорция* и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи (48). Формы (71) названы в [15-18] *метрическими* λ*-формами плоскости Лобачевского.*

Опуская промежуточные доказательства, приведенные в [15-18], мы сведем полученные результаты (общий и частные случаи) в Табл.10.

Общий итог исследования, выполненного в работах [15-18], состоит в том, что получено бесконечное множество метрических $\lambda-$форм плоскости Лобачевского ($\lambda > 0$ -заданное положительное число), задаваемых выражением (71). Все эти формы изометричны классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (70). А это означает, что полученные в работах [15-18] новые *модели плоскости Лобачевского,* основанные на «металлических пропорциях» (34), вместе с классическими геометриями Лобачевского, Римана и Минковского, а также Боднара [13] *“могут рассматриваться как ближайшие геометрии к обыкновенной геометрии Евклида”* (Давид Гильберт).

Таблица 10. Метрические λ – формы Лобачевского

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая λ – форма Лобачевского	$\lambda > 0$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}[sF_\lambda(u)]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda = 1$	$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}[sFs(u)]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda = 2$	$\Phi_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.1421$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2[sF_2(u)]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda = 3$	$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}[sF_3(u)]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda = 4$	$\Phi_4 = 2+\sqrt{5} \approx 4.23607$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5[sF_4(u)]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e \approx 2.350402$	$\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$	$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2$

Таким образом, результаты, полученные **Алексеем Стаховым** и **Самуилом Арансоном** в работах [15-18], являются важным вкладом в решение 4-й проблемы Гильберта, которая считается одной из сложнейших проблем Гильберта. Ясно, что это решение не может рассматриваться как окончательное решение этой важной математической проблемы. И оно, несомненно, будет стимулировать математиков в поисках новых решений 4-й проблемы Гильберта. Важно подчеркнуть, что публикация большой заказной статьи Алексея Стахова и Самуила Арансона по этой теме в международном журнале “Applied Mathematics” является косвенным признанием этого решения со стороны международного математического сообщества.

14. Заключение

В настоящей работе получено ряд новых результатов, касающихся теории λ-чисел Фибоначчи, а именно:

1. Установлена связь λ-чисел Фибоначчи с биномиальными коэффициентами и «биномиальными суммами» треугольника Паскаля, что ранее было известно только для классических чисел Фибоначчи [8].
2. Выведена обобщенная формула Кассини для λ-чисел Фибоначчи. При этом установлено, что все λ-числа Фибоначчи (их количество бесконечно) обладают уникальным математическим свойством, а именно:

Квадрат любого λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ всегда отличается от произведения двух соседних λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n-1)$ и $F_\lambda(n+1)$, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от четности числа *n*; если число *n* является четным числом, то 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

Это свойство является особенно неожиданным, если учесть, что количество λ-чисел Фибоначчи теоретически бесконечно (их столько же, сколько существует действительных чисел $\lambda > 0$). Заметим, что раньше считалось, что такое свойство присуще только одной числовой последовательности – классическим числам Фибоначчи.

3. Развита теория λ-матриц Фибоначчи, введенных в работе [10], в частности, выведены формулы для обратных λ-матриц Фибоначчи.

4. В статье привлечено внимание к формулам Газале для λ-чисел Фибоначчи и Люка [10] и вытекающим из них гиперболическим λ-функциям Фибоначчи и Люка, которые являются обобщением симметричных ГФФЛ, введенным в [11,12].
5. Основываясь на «геометрии Боднара» [13], в статье поставлена новая задача перед теоретическим естествознанием (теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания): **поиск новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (48)-(51).** Обращено внимание, что, возможно, первым претендентом на «революцию» в естествознании является **«серебряная» пропорция $1+\sqrt{2}$ и основанные на ней «серебряные» гиперболические функции (55)-(58).** При этом обращено также внимание на тот факт, что интерес к «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ и «серебряным» гиперболическим функциям значительно возрос в последние годы. В этой связи особый интерес представляют статья Олега Боднара [14] и статья [4] известного российского исследователя Александра Татаренко. В статье Александра Татаренко подчеркивается, что введение «серебряной» пропорции» $T_2 = 1+\sqrt{2}$ в современную науку является *«важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника»*.

6. Еще раз обращено внимание на оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта [15-18], основанное на гиперболических λ-функций Фибоначчи. Решение этой сложнейшей математической задачи, основанное на новых математических результатах, полученных в рамках «математики гармонии» [20], вместе с решением 10-й проблемы Гильберта, полученным **Юрием Матиясевичем** в 1970 г. с использованием новейших достижений в области теории чисел Фибоначчи (Николай Воробьев), еще больше повышает интерес к «математике гармонии» со стороны современного математического сообщества.

7. Приведенные в статье новые математические результаты в области теории λ-чисел Фибоначчи подтверждают, что «математика гармонии», основы которой изложены в книге [20], является активно развивающимся разделом современной математики. Настоящая статья является достаточно убедительным свидетельством того, что в рамках «математики гармонии» возникла новая математическая теория – *теория λ-чисел Фибоначчи,* которая расширяет область фибоначчиевых исследований до бесконечности.

В заключение автор выражает благодарность **Борису Розину**, который подсказал автору очень простое доказательство известной *формулы Кассини*. Идея этого доказательства была использована автором при доказательстве *обобщенной формулы Кассини* (11).

Литература

1. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
2. Газале Мидхат. Гномон. От фараонов до фракталов (пер. с англ.). Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002
3. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.
4. Татаренко А.А. Золотые Tm – гармонии и Dm – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm
5. Аракелян Грант. Числа и величины в совеменной физике. Ереван: Изд. АН, 1989
6. Шенягин В.П. «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых *s*-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm
7. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htmHoggat V.E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
8. Пойа Джордж. Математическое открытие. М.: Наука, 1970. – 452 с.
9. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г. – 288 с.
10. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
11. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
12. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
13. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
14. Олег Боднар, Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17259, 26.01.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322135.htm
15. А.П. Стахов, С.Х. Арансон, «Золотая» фибоначчиевая гониометрия, четвёртая проблема Гильберта, преобразования фибоначчи-лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15225, 12.04.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322036.htm

16. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and "Golden" Fibonacci Goniometry. Applied Mathematics, 2011, 2 (January), 74-84
17. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part II. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar's Geometry). Applied Mathematics, 2011, 2 (February), 181-188
18. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (March).
19. С.Х. Арансон, Ещё раз о 4-й проблеме Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15677, 01.12.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321180.htm
20. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009.