

ОБОБЩЁННАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗОЛОТЫХ СЕЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

В ряде работ (см., напр. [1-5]) автором статьи показано, что появлению в некоторых математических и физических объектах соотношений гармонии, выражающихся через константы золотого сечения $\phi = (-1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 0,618$, $\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = \phi + 1 = 1 / \phi \approx 1,618$ и другие фундаментальные математические константы могут соответствовать экстремумы некоторых, характерных для данного объекта функций средних значений. Это связано, в частности, с тем, что введённая автором статьи в [6,7] обобщённая геометрическая модель золотых сечений, оказывается одновременно и моделью функций средних значений, как это показано в [8]. В данной работе проводится детальное рассмотрение этой общей модели.

Как известно, средние n -го порядка k величин m_p ($1 \leq p \leq k$) определяются выражением $\bar{M}(n, m_p) = [\sum_{p=1}^k m_p^n / k]^{1/n}$. Обычно используются 5 средних: гармоническое \bar{M}_H ($n = -1$), геометрическое \bar{M}_G ($n \rightarrow 0$), арифметическое \bar{M}_A ($n = 1$), квадратичное \bar{M}_S ($n = 2$) и кубическое \bar{M}_C ($n = 3$) (M - Mean, H - Harmonic, G - Geometric, A - Arithmetic, S - Square, C - Cubic). В общем случае будем использовать вместо целого числа n произвольное число λ ($-\infty < \lambda < \infty$).

Рассмотрим теперь две геометрических модели для случая средних двух величин c и d ($c \leq d$), который мы и будем анализировать. В 1-й модели (рис. 1) c и d длины верхнего и нижнего основания любой трапеции. Тогда можно показать, что средние c, d равны длинам отрезков, получаемых при пересечении определяемых ниже прямых, параллельных основаниям трапеции,

с боковыми сторонами: $\bar{M}_H = 2 / (1/c + 1/d) = 2c \cdot d / (c + d)$ - прямая проходит через точку пересечения диагоналей трапеции; $\bar{M}_G = \sqrt{c \cdot d}$ - прямая делит трапецию на две подобные трапеции; $\bar{M}_A = (c + d) / 2$ - прямая равно отстоит от оснований трапеции; $\bar{M}_S = \sqrt{(c^2 + d^2) / 2}$ - трапеции равны по площади; $\bar{M}_C = \sqrt[3]{(c^3 + d^3) / 2}$ - равны объёмы усечённых конусообразных фигур, площади оснований которых равны соответственно $\pi d^2 / 4$, $\pi \bar{M}_C^2 / 4$ и $\pi c^2 / 4$, а высоты равны расстояниям отрезка \bar{M}_C до оснований трапеции.

Аналогично \bar{M}_C через равенство псевдо n -мерных объёмов введём средние $\bar{M}_n = [(c^n + d^n) / 2]^{1/n}$ для $|n| > 3$. При этом $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{M}_n = d$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} \bar{M}_n = c$.

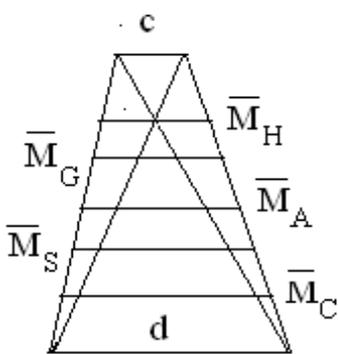


Рис. 1

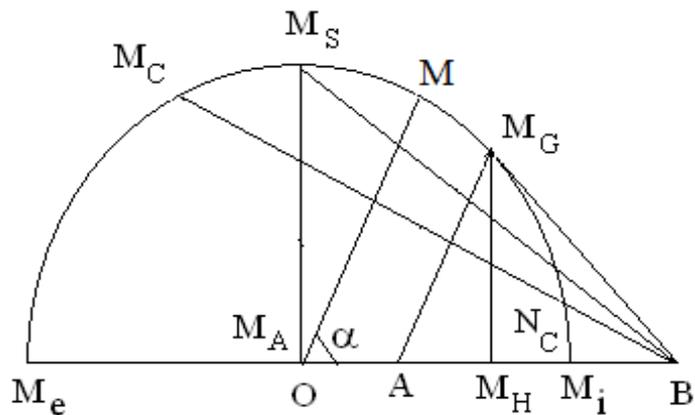


Рис. 2

В соотношениях $2c \cdot d / (c + d) \leq \sqrt{c \cdot d} \leq (c + d) / 2 \leq \sqrt{(c^2 + d^2) / 2} \leq \sqrt[3]{(c^3 + d^3) / 2}$ знак равенства имеет место при $c = d$, когда трапеция превращается в прямоугольник.

Вторая модель средних значений показана на рис. 2. От точки В в одном направлении откладываются два отрезка $BM_i = c$ и $BM_e = d$ (смысл индексов i, e указан ниже). На отрезке $M_e M_i$ как на диаметре строится полуокружность с центром в точке О и радиусом $R = OM_e = OM_i = (d - c) / 2$. Тогда легко

показать, что $BO = BM_A = (c+d)/2 = \overline{MA}$, а длина отрезка BM_G , проведённого из точки B и касающегося окружности, равна $\overline{MG} = \sqrt{c \cdot d}$. Действительно, в этом случае $BM_G^2 = BM_i \cdot BM_e = c \cdot d$, кроме того, при этом $OM_G \perp BM_G$.

Опустим теперь перпендикуляр $M_G M_H$ из точки M_G на отрезок BO . Тогда можно показать, что $BM_H = 2c \cdot d / (c+d) = \overline{MH}$.

Поместим начало координат в точку $O(0,0)$, тогда координаты точки B равны $((c+d)/2, 0)$, а координаты любой точки окружности (x, y) определяются уравнением: $x^2 + y^2 = R^2 = ((d-c)/2)^2$. Отсюда находим координаты точки M_S , для которой $BM_S = \sqrt{((d+c)/2 - x_S)^2 + (y_S - 0)^2} = \overline{MS} = \sqrt{(c^2 + d^2)/2}$. Из этого соотношения следует, что $x_S = 0$, а $y_S = (d-c)/2$. Таким образом, $BM_S = \overline{MS}$, когда отрезок OM_S перпендикулярен отрезку OB .

Наконец, найдём координаты точки $M_C(x_C, y_C)$, лежащей на окружности, когда $BM_C = \overline{MC} = \sqrt{(c^3 + d^3)/2}$. Расчёты, аналогичные расчётам для нахождения x_S, y_S , показывают, что $y_C = \sqrt{R^2 - x_C^2}$,

$$x_C = -[(((c^3 + d^3)/2)^{2/3} - (c^2 + d^2)/2] / (c+d).$$

Принципиально то, что при $c = \phi$, $d = 2 + \phi$ вторая геометрическая модель средних значений совпадает с обобщённой моделью золотых сечений, введённой автором статьи в [6,7]. При этом $R = 1$, $BM/AM = \text{const} = \phi$ для всех точек M , находящихся на окружности ($AO = \phi$, BM_i и BM_e - отрезки, соответствующие внутреннему и внешнему делению отрезка $AB = 1$ в отношении золотой пропорции). Более того, все найденные в [6,7]

соотношения гармонии по константам ϕ, φ выполняются и для средних значений при тех же геометрических конфигурациях.

Повернув BM_H и BM_A вокруг точки B на угол 36° , мы разместим все точки M_n на окружности.

Введя угол $\alpha = \angle BOM$ и учитывая следующие соотношения:

$$AM(\alpha) = \sqrt{2 - \phi \cdot (2 \cos \alpha + 1)}, \quad BM(\alpha) = \sqrt{3 - 2(1 + \phi) \cos \alpha + \phi} \quad (1-2),$$

получим, что $BM_H = \overline{M}_H = 1$ при $\alpha_H = \arccos(\varphi / 2) = 36^\circ$;

$BM_G = \overline{M}_G = \sqrt{\varphi}$ при $\alpha_G = \arccos \varphi \approx 51,827^\circ$; $BM_A = \overline{M}_A = \varphi$ при

$\alpha_A = \arccos(\phi / 2) = 72^\circ$; $BM_S = \overline{M}_S = \sqrt{2 + \phi}$ при $\alpha_S = 90^\circ$;

$BM_C = \overline{M}_C = \sqrt[3]{5\phi + 1} = \sqrt[3]{9 + \phi^5}$ при $\alpha_C = \arccos[(2 + \phi - (5\phi + 1)^{2/3}) / 2\phi] \approx 103,175 \approx 2\alpha_G \approx 103,654^\circ$.

Отметим, во-первых, то, что значения $\overline{M}_H = 1$, $\overline{M}_G = \sqrt{\varphi}$, $\overline{M}_A = \varphi$ являются членами геометрической прогрессии со знаменателем $q = \sqrt{\varphi}$.

Далее, введём угол $\beta = \angle OBM$ и, используя то, что $\sin \beta = \sin \alpha / BM(\alpha)$, построим графики зависимостей $\beta(\alpha)$ и $\alpha - \beta(\alpha)$, см. кривые 1, 2 на рис. 3.

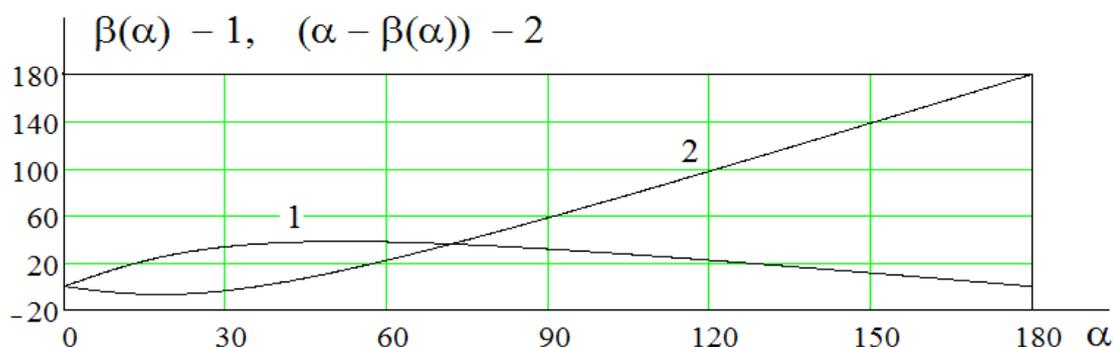


Рис. 3

Как следует из рис. 3, зависимость $\beta(\alpha)$ немонотонна и имеет максимум:

$\beta_{\max} = \arcsin \varphi \approx 38,173^\circ$ при $\alpha = \arccos \varphi \approx 51,827^\circ$, соответствующим случаю

$BM = \overline{M}_G$.

При $\beta = \arccos(\varphi/2) = 36^\circ$ отрезки BM_H и BM_A лежат на одной прямой, пересекающей окружность в точках M_H и M_A . В общем случае для любых двух отрезков BM и BN , лежащих на одной прямой и пересекающих окружность в точках M и N , выполняется соотношение: $BN \cdot BM = c \cdot d = \varphi$, при этом $BN = \overline{M}_{-|\lambda|} < BM = \overline{M}_{|\lambda|}$.

Зависимость $\alpha - \beta(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha_m \approx 17,942\ 283^\circ$, причём этот минимум соответствует реализации следующей средней величины:

$$BM(\alpha_m) = \overline{M}_{-4} = \sqrt{\varphi/3} \approx 0,734\ 401. \text{ Кроме того, } \alpha = \beta(\alpha) \text{ при } \alpha = 36^\circ.$$

Важно то, что, как было установлено, реализации основных средних значений $\overline{M}_H, \overline{M}_G, \overline{M}_A, \overline{M}_S$ соответствуют экстремумы длин, площадей или их производных.

Так, $MB = \overline{M}_H = 1$ при $\alpha = \arccos(\varphi/2) = \pi/5$. В этом случае $\triangle OMB$ равнобедренный ($OM = BM = 1$), и минимум, равный нулю, при $\alpha = \pi/5$ имеет функция $Y_H(\alpha)$, равная разности средне-арифметического и средне-геометрического от сторон $OM = \text{const} = 1$ и $BM(\alpha)$:

$$Y_H(\alpha) = (OM + BM(\alpha)) / 2 - \sqrt{OM \cdot BM(\alpha)} = 1/2 + BM(\alpha)/2 - \sqrt{BM(\alpha)} \quad (3)$$

Аналогично, $MB = \overline{M}_A = \varphi$ при $\alpha = \arccos(\varphi/2) = 2\pi/5$. В этом случае $\triangle OMB$ также равнобедренный (но при этом $BO = BM = \varphi$) и минимум равный нулю при $\alpha = 2\pi/5$ имеет функция $Y_A(\alpha)$, равная разности средне-арифметического и средне-геометрического от сторон $BO = \text{const} = \varphi$ и $BM(\alpha)$:

$$Y_A(\alpha) = (BO + BM(\alpha)) / 2 - \sqrt{BO \cdot BM(\alpha)} = \varphi/2 + BM(\alpha)/2 - \sqrt{\varphi \cdot BM(\alpha)} \quad (4)$$

$BM = \overline{M}_G = \sqrt{\varphi}$ при $\alpha = \arccos \varphi \approx 51,827^\circ$, $\angle OMB = 90^\circ$. В этом случае производные от $AM(\alpha)$ и $BM(\alpha)$ имеют максимум именно при $\alpha = \arccos \varphi$, при этом $dAM(\alpha)/d\alpha = \varphi$, $dB M(\alpha)/d\alpha = 1$. Кроме того, в этом случае

минимален радиус окружности, описанной около прямоугольного $\triangle OMB$:
 $R_{OMB} \min = \varphi / 2$.

$BM = \overline{M}_S = \sqrt{2 + \varphi}$ при $\alpha = \pi / 2$. В этом случае, очевидно, максимальна площадь $\triangle OMB$, $\triangle OMA$ и $\triangle AMB$.

Множество экстремальных соотношений можно получить и из анализа площади $\triangle OMN$, где, как уже отмечалось, N, M - точки пересечения прямой BM с окружностью ($BN < BM$). Обозначив $\angle BON = \alpha_N$, $\angle BOM = \alpha_M$, получим, что эта площадь определяется соотношениями;

$$S_{\triangle OMN}(\alpha_M) = (\varphi / 2) \cdot (\sin \alpha_M - \sin \alpha_N(\alpha_M)) = (1 / 2) \cdot \sin(\alpha_M - \alpha_N(\alpha_M)) \quad (5),$$

$$\alpha_N(\alpha_M) = \arccos[\cos \alpha_M + BM^2(\alpha_M) / 2\varphi - \varphi / 2BM^2(\alpha_M)] \quad (6)$$

Зависимость $S_{\triangle OMN}(\alpha_M) = S(\alpha)$ показана на рис. 4, кривая – 1.

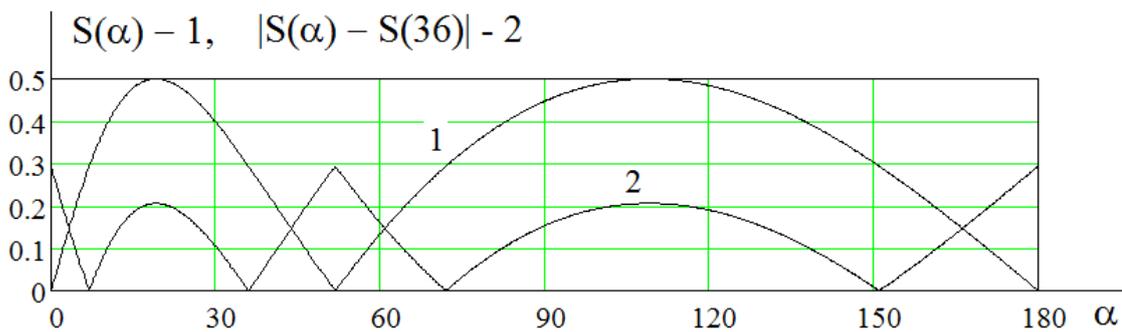


Рис. 4

Как и должно быть, $S(0) = S(\pi) = 0$. Кроме того, площадь $\triangle OMN$ обращается в ноль для случая среднего геометрического: $S(\alpha_G = \arccos \varphi) = 0$, когда точки M и N совмещаются. Для среднего гармонического и арифметического $S(\alpha_H = \pi / 5) = S(\alpha_A = 2\pi / 5) = \sin(\pi / 5) / 2 = \sqrt{2 - \varphi} / 4$. Для среднего квадратичного $S(\alpha_S = \pi / 2) = 1 / (\varphi + \varphi)$.

$S(\alpha) = S_{\max} = 1 / 2$ при $\alpha_1 \approx 19,026^\circ$ и $\alpha_2 \approx 109,086^\circ$. Эти углы соответствуют следующим значениям $\lambda_{1,2}$ в формуле (8) для функций средних значений: $\lambda_1 \approx -3,597$ и $\lambda_2 \approx 3,597$. Отметим при этом, что $3,597 \approx 3,6$, а

$3,6 = (3 + 3/5)$. В то же время числа $3 = \phi^2 + \phi^2$, $5 = (\phi + \phi)^2$ симметрично и красиво выражаются через константы золотого сечения ϕ, ϕ .

Числа 3, 5 и $2 = (\phi + \phi)^2 - (\phi^2 + \phi^2)$ часто обнаруживаются и в соотношениях гармонии для различных физических объектов (см., напр. [5,7,8]). При этом также обнаруживаются как точные, гармонические соотношения, так и квазигармонические соотношения, выполняющиеся с точностью $\leq 0,1\%$.

Как следует из рис. 4, данное значение площади $0 < S < 1/2$ реализуется при четырёх значениях угла α . Введя функцию $|S(\alpha) - S(\alpha_0)|$ можно найти для неё четыре минимума для $0 < \alpha_0 < 180^\circ$, $\alpha_0 \neq \alpha_G$. На рис. 4 показан график функции $|S(\alpha) - S(36)|$. Эта функция имеет два минимума при $\alpha_{1,2} = 36^\circ, 72^\circ$. Этим углам соответствуют $\lambda_{1,2} = -1,1$ (см. также рис. 5) Кроме того, функция $|S(\alpha) - S(36)|$ имеет ещё два минимума при $\alpha_3 \approx 6,989\ 843^\circ$ и $\alpha_4 \approx 150,989\ 843^\circ$ ($\alpha_4 - \alpha_3 = 144^\circ = 2(\alpha_2 - \alpha_1)$). Углам $\alpha_{3,4}$ соответствуют $\lambda_3 = -22,702$ и $\lambda_4 = -22,702$, при этом $22,7 \approx 2^{5/2} 3^2 5^{-1/2}$. Таким образом, и в этом случае значения λ выражаются квазигармонически через «магические» числа из последовательности Фибоначчи 2, 3, 5.

Отметим также, что $\int_0^{180} S(\alpha) d\alpha \approx 1$, т. е. площадь под кривой $S(\alpha)$ с высокой точностью ($< 10^{-6}$) равна 1 ! В то же время длина кривых $|S(\alpha) - S(\alpha_0)|$ является инвариантом, так как не зависит от α_0 . При любых α_0 эта длина равна $L = \int_0^\pi \sqrt{1 + (dS(\alpha)/d\alpha)^2} d\alpha \approx 3,901 \approx 2\pi\phi \approx 3,883$ (точность аппроксимации $\approx 4,6 \cdot 10^{-3}$).

Для данной модели найдены и другие интересные соотношения, напр.:

$$BN_S = \overline{M}_G^2(c, d) / \overline{M}_S(c, d) = [\overline{M}_H(c^2, d^2)]^{1/2}, \quad \overline{M}_{-\lambda} \cdot \overline{M}_\lambda = \overline{M}_0^2 \quad (7)$$

Общий характер зависимости средних значений для данной геометрической модели демонстрирует график функции

$$\bar{M}_1(\lambda) = [(\phi^\lambda + (2 + \phi)^\lambda) / 2]^{1/\lambda} \quad (8),$$

показанный на рис. 5 (кривая 1). Производная этой функции (кривая 3) имеет максимум при $\lambda \approx 0,493185 \approx \text{ctg} \sqrt{2/\phi} \approx 0,494217$. При $\lambda \rightarrow \infty$ $\bar{M}_1(\lambda) \rightarrow \phi + 2$, при $\lambda \rightarrow -\infty$ $\bar{M}_1(\lambda) \rightarrow \phi$.

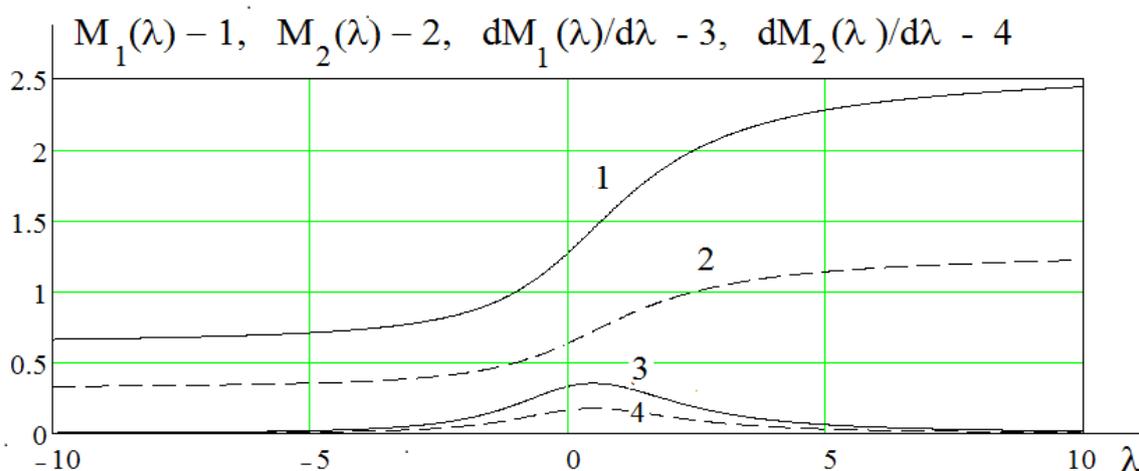


Рис. 5

Полагая $c = \phi / 2$, $d = 1 + \phi / 2$, $AM_1 = \phi^2 / 2$, получим что радиус окружности $R = (d - c) / 2 = 1 / 2$, $BM / AM = \text{const} = \phi$, а длины отрезков $AM(\alpha)$ и $BM(\alpha)$ определяются выражениями:

$$AM(\alpha) = \sqrt{2 - \phi \cdot (2 \cos \alpha + 1)} / 2, \quad BM(\alpha) = \sqrt{3 - 2(1 + \phi) \cos \alpha + \phi} / 2 \quad (9)$$

В этом случае $\bar{M}_H = 1 / 2 = \cos(\pi / 6)$, $\bar{M}_G = \sqrt{\phi} / 2 \approx 0,636 \approx \text{ctg} 1 \approx 0,642$, $\bar{M}_A = \phi / 2 = \cos(\pi / 5)$, $\bar{M}_S = \sqrt{2 + \phi} / 2 = \cos(\pi / 10)$, $\bar{M}_C = \sqrt[3]{5\phi + 1} / 2 \approx \text{tg}(\phi / 2)$.

Общий характер зависимости средних значений для последней геометрической модели средних демонстрирует график функции

$$\bar{M}_2(\lambda) = [(\phi / 2)^\lambda + (1 + \phi / 2)^\lambda] / 2]^{1/\lambda} \quad (10),$$

показанной на рис. 5 (кривая 2). Производная функции $\overline{M}_2(\lambda)$ (кривая 4) также имеет максимум при $\lambda \approx 0,493185 \approx \text{ctg}(\sqrt{2/\phi})$. При $\lambda \rightarrow \infty$ $\overline{M}_2(\lambda) \rightarrow 1 + \phi/2$, при $\lambda \rightarrow -\infty$ $\overline{M}_2(\lambda) \rightarrow \phi/2$. Наконец, $\overline{M}_1(\lambda)/\overline{M}_2(\lambda) = 2$ при любых λ .

Литература

1. *Шелаев А.Н.* Бистабильность масштабов математического маятника и золотые сечения (коды да Винчи) для гравитационных полей. Актуальные проблемы современной науки, 2008, № 4, - С.82-88.

2. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для внутренних и внешних гравитационных полей однородных тел и экстремумы функций средних значений для потенциалов и ускорений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, С.115-118.

3. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии в прямом и обратном циклах Карно и экстремумы функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, №1, С.115-117.

4. *Шелаев А.Н.* Инварианты, экстремумы и соотношения гармонии в круговых бильярдах и оптических резонаторах. Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 5, - С.61-63.

5. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы функций средних значений для перехода сверхпроводник-проводник в магнитном поле. Актуальные проблемы современной науки, 2012, № 3.

6. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы длин площадей и их производных в обобщённой модели золотого сечения. Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 6, С. 160-162.

7. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных. Сайт Академии Тринитаризма. М., Эл. № 77-6567 публ. 17431, 29.04.2012.

8. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии в обобщённой геометрической модели золотых сечений и функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 1, С.118-120.

Сведения об авторе

Шелаев Анатолий Николаевич – доктор физ.-мат. наук, профессор

Место работы – НИИ ядерной физики МГУ им. М.В. Ломоносова

Автор и соавтор более 200 научных работ

Лауреат научной премии им. акад. Р.В.Хохлова

Основные направления исследований – нелинейная динамика, в том числе динамика генерации вращающихся кольцевых лазеров; невзаимные оптические эффекты и методы управления лазерным излучением и конкурентным взаимодействием встречных световых волн в усиливающих и нелинейных средах; системная гармония и методы исследования нестандартных математических и физических задач

E-mail: Shelaev@rambler.ru