

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗОЛОТЫХ СЕЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

Обобщённая геометрическая модель золотых сечений - окружности золотых сечений была введена автором статьи в [1,2]. В [3,4] установлена связь этой модели с обобщёнными функциями средних значений. В работе [5] найдена физическая интерпретация окружностей золотых сечений и функций средних значений как эквипотенциальных линий длинных тонких параллельных противоположно-заряженных тел. В данной работе проводится детальный анализ предложенной в [5] электростатической модели.

Итак, пусть в точках A, B (см. рис. 1) находятся центры сечений длинных тонких тел с линейной плотность зарядов $\pm\sigma$ соответственно:

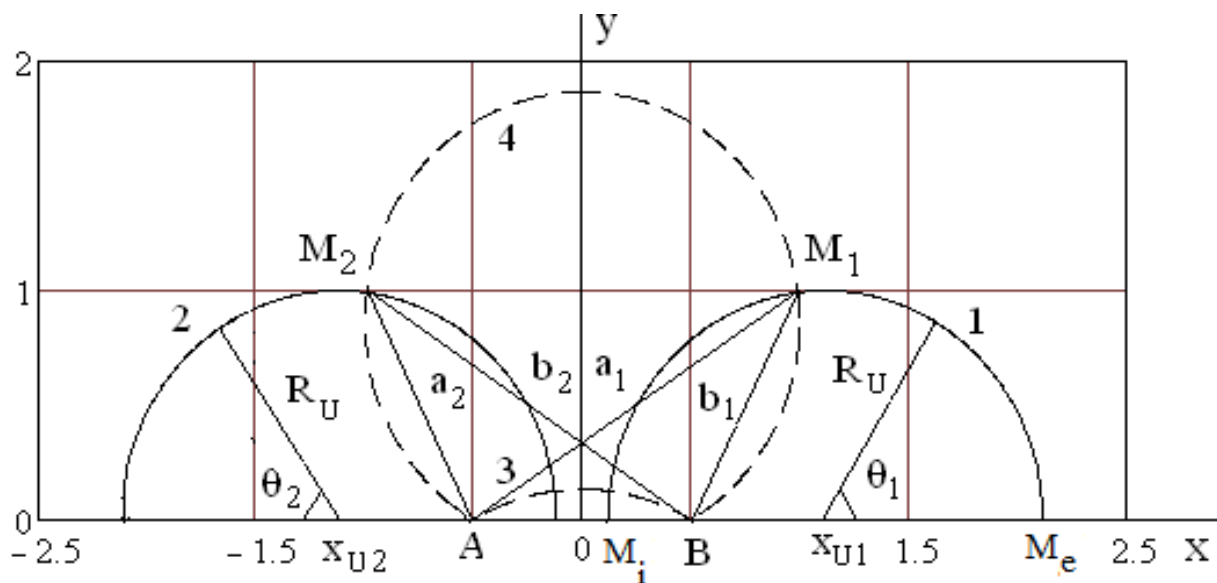


Рис. 1

Применяя теорему Гаусса и полагая потенциал в точке O , лежащей в середине отрезка AB ($AO = BO = c$), равным нулю, получим, что суммарный потенциал в любой точке M ($AM = a$, $BM = b$, об индексах 1,2 ниже) равен:

$$U = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \cdot \ln(c / a) + (-\sigma / 2\pi\epsilon_0) \cdot \ln(c / b) = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \cdot \ln(b / a) \quad (1)$$

Эквипотенциальные линии $U = \text{const}$, имеют место при $b / a = \text{const} = k$.

Пусть в системе координат XOY точка M имеет координаты (x, y) , тогда

$$k^2 = (b/a)^2 = [(c-x)^2 + y^2] / [(c+x)^2 + y^2] \quad (2)$$

В (2) учтено, что $c > 0$, а координата x может быть и > 0 , и < 0 . Выделяя в (2) полный квадрат по x , получим уравнение окружностей:

$$[x + c(k^2 + 1)/(k^2 - 1)]^2 + y^2 = 4c^2 k^2 (k^2 - 1)^2 \quad (3)$$

с центром в точке $(x_u = -c(k^2 + 1)/(k^2 - 1), y_u = 0)$ и радиусом, равным

$$R_u = \pm 2ck / (k^2 - 1). R_u > 0 \text{ при знаке «+» для } k > 1 \text{ и знаке «-» для } k < 1.$$

При $k = 1$ $R_u = \infty$, $x_u = \pm \infty$ и $U = \text{const} = 0$ на оси ординат $OY \perp AB$.

При $c = 1/2$, $AB = 1$, $k_1 = \phi = (-1 + \sqrt{5})/2$, получим 1-ю окружность золотой пропорции с центром в точке $(x_{u1} = \phi + 1/2, y_{u1} = 0)$, радиусом $R_u = 1$, в которой точка точка M_1 , движущаяся по этой окружности, даёт постоянное отношение отрезков: $BM_1 / AM_1 = b_1 / a_1 = k_1 = \phi$.

2

При $c = 1/2$, $AB = 1$, $k_2 = \varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, получим 2-ю окружность золотой пропорции с центром в точке $(x_{u2} = -(\phi + 1/2), y_{u2} = 0)$, радиусом $R_u = 1$, в которой точка точка M_2 , движущаяся по этой окружности, также даёт постоянное отношение отрезков: $BM_2 / AM_2 = b_2 / a_2 = k_2 = \varphi$.

Потенциал на окружности 1: $U_1 = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \ln(\phi) < 0$, на окружности 2: $U_2 = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \ln(\varphi) > 0$, $U_1 = -U_2$, так как $\varphi = 1/\phi$. В общем случае

$$U_{1,2} = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \cdot \ln[(|x_u| \mp c) / R_u], \quad 1 - \text{знак «-»}, \quad 2 - \text{знак «+»} \quad (4)$$

Напряжённость поля $\vec{E} = -\text{grad}U$ равна сумме 2-х компонент (см. рис 2):

$$E_a = \sigma / 2\pi\epsilon_0 a \text{ и } E_b = -\sigma / 2\pi\epsilon_0 b, \text{ имеющих составляющие по осям } X, Y.$$

В итоге суммарное поле $\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j}$ и его модуль $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ равны:

$$\vec{E} = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \cdot [(\cos \alpha / a + \cos \beta / b) \cdot \vec{i} + (\sin \alpha / a - \sin \beta / b) \cdot \vec{j}] \quad (5)$$

$$E = (\sigma / 2\pi\epsilon_0) \cdot \sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 2\cos(\alpha + \beta) / ab} = \sigma c / \pi\epsilon_0 ab \quad (6)$$

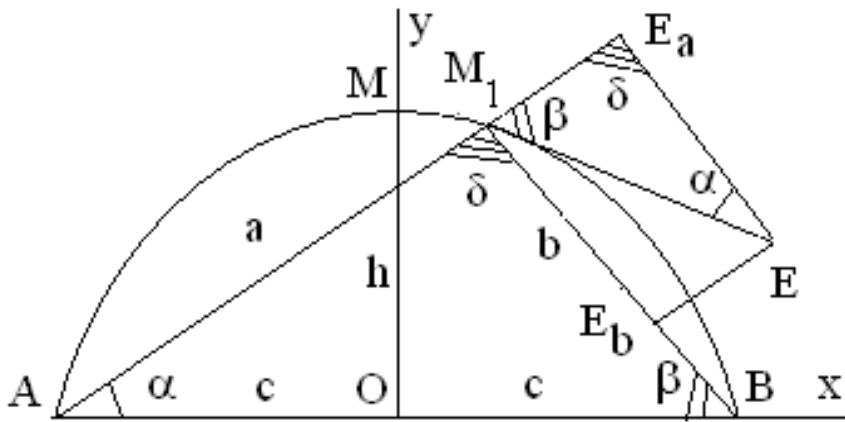


Рис. 2

Модуль поля E постоянен при $c / ab = \text{const}$ и направлен по касательной к силовой линии. Силовые же линии, ортогональные эквипотенциальным окружностям (1, 2 на рис. 1), сами являются окружностями (3, 4 на рис. 1).

Радиус окружностей силовых линий равен: $R_E = c / \sin \delta = c / \sin(\alpha + \beta)$. 3

Силовые линии проходят через точки расположения зарядов A, B , поэтому при движении по данной силовой линии хорда AB видна под постоянным углом δ , и отрезок $OM = h = c / \text{tg}(\delta / 2) = c \cdot \text{tg}((\alpha + \beta) / 2)$. Центр силовых линий располагается на оси ординат в точке $(x_E = 0, y_E = c / \text{tg} \delta = -c / \text{tg}(\alpha + \beta))$. При $\delta = \alpha + \beta = \pi / 2$ хорда AB становится диаметром окружности силовой линии.

При движении вдоль окружностей золотых сечений 1,2, являющихся эквипотенциальными линиями, поле \vec{E} направлено по радиусу окружностей, а модули поля $E_{1,2}$ зависят от углов $\theta_{1,2}$ (см. рис. 1). Учитывая, что $R_u = \pm 2ck / (k^2 - 1)$, $R_u^2 = x_u^2 - c^2$, $k = (|x_u| \pm c) / R_u$, $ab = b^2 / k$, получим:

$$E_{1,2} / (\sigma / 2\pi\epsilon_0) = c / R_u (|x_u| + R_u \cos \theta_{1,2}) \quad (7)$$

Так как $\theta_2 = \pi - \theta_1$, $c = 1/2$, $R_u = 1$, $|x_u| = \phi + 1/2$ введём функции:

$$F_1(\theta) = 1/(2\phi + 1 + 2\cos\theta), \quad F_2(\theta) = 1/(2\phi + 1 + 2\cos(\pi - \theta)) \quad (8)$$

$$f_{1,2}(\theta) = F_{1,2}(\theta) / (F_1(\theta) + F_2(\theta)) = 1/2 \mp \cos\theta / (\phi + \varphi) \quad (9)$$

Графики функций $F_1(\theta)$, $F_2(\theta)$, $F_1(\theta) + F_2(\theta)$ показаны на рис. 3 (кривые 1, 2, 3). Графики функций $f_{1,2}(\theta)$ показаны на рис. 4 (кривые 1, 2). При этом

$$F_1(0) = F_1(2\pi) = F_2(\pi) = \phi^3, \quad F_2(0) = F_2(2\pi) = F_1(\pi) = \varphi^3 \quad (10)$$

$$F_{1,2}(\pi/2) = F_{1,2}(3\pi/2) = 1/(\phi + \varphi) \quad (11)$$

$$f_1(0) = f_1(2\pi) = f_2(\pi) = 1/(1 + \varphi^6), \quad f_2(0) = f_2(2\pi) = f_1(\pi) = \varphi^6 / (1 + \varphi^6) \quad (12)$$

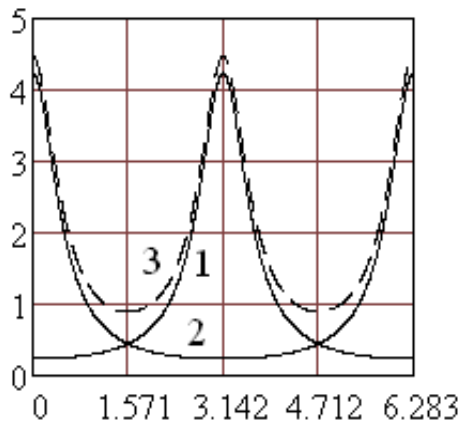


Рис. 3

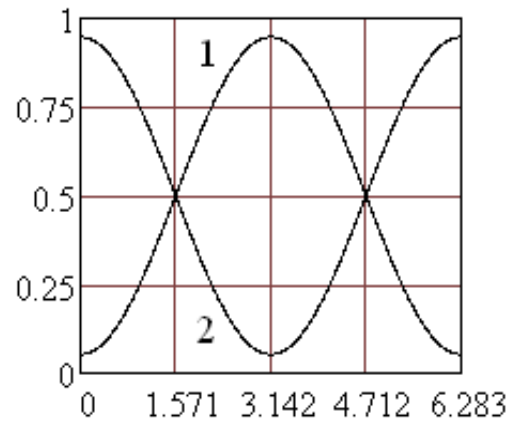


Рис. 4

4

В то же время было установлено, что для введённых в ходе решения данной физической задачи функций, определяющих амплитуду электростатических полей, существует ряд интегральных соотношений гармонии, выражающихся через фундаментальные математические константы ϕ, φ, π . Напр., учитывая то, что $\text{arctg}(\pm\infty) = \pm\pi/2$, и то, что при $W = p^2 - q^2 > 0$

$$J_I = \int d\theta / (p + q \cdot \cos\theta) = (2/\sqrt{W}) \cdot \text{arctg}[(p - q) \cdot \text{tg}(\theta/2) / \sqrt{W}] \quad (13)$$

$$J_{II} = \int d\theta / (p + q \cdot \cos\theta)^2 = q \cdot \sin\theta / (W \cdot (p + q \cdot \cos\theta)) - (p/W) \cdot J_I \quad (14)$$

получаем нетривиальные закономерности для полей и квадратов полей:

$$\int_0^{2\pi} F_{1,2}(\theta) d\theta = 2 \cdot \int_0^{\pi} F_{1,2}(\theta) d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} f_{1,2}(\theta) d\theta = \pi \quad (15)$$

$$\int_0^{2\pi} F_{1,2}^2(\theta) d\theta = 2\pi \cdot (\phi + \varphi), \quad \int_0^{2\pi} f_{1,2}^2(\theta) d\theta = 7\pi / 2(\phi + \varphi)^2 \quad (16)$$

$$\int_0^{2\pi} (F_1(\theta) - F_2(\theta)) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} |F_1(\theta) - F_2(\theta)| d\theta = 16 \cdot \arctg\phi \quad (17)$$

$$2 / (1 / F_1(\theta) + 1 / F_2(\theta)) = \text{const} = 1 / (\phi + \varphi) \quad (18)$$

Так как $3 = \phi^2 + \varphi^2$, $4 = \varphi^3 - \phi^3$, $7 = \varphi^4 + \phi^4$, получаем, что правые части (16), (17) также точно и изящно выражаются через фундаментальные математические константы ϕ , φ , π .

Далее, так как при движении по окружности 1 против часовой стрелки (по окружности 2 по часовой стрелке) модуль поля $E = E / (\sigma / 2\pi\epsilon_0)$ изменяется от ϕ^3 до φ^3 можно составить геометрическую прогрессию со знаменателем φ , разбивающую полуокружность на 6 частей (окружность на 12 частей). При этом значения модуля поля изменяются как по геометрической прогрессии, так и по соотношению Фибоначчи $N_{k+1} = N_k + N_{k-1}$:

$$E_0 = \phi^3 = 2\phi - 1, \quad E_1 = \phi^2 = 1 - \phi, \quad E_2 = \phi, \quad E_3 = 1, \quad E_4 = \varphi = \phi + 1,$$

$$E_5 = \varphi^2 = \phi + 2, \quad E_6 = \varphi^3 = 2\phi + 3. \quad \text{При } \theta = 90^\circ, 270^\circ \quad E = 1 / (\phi + \varphi).$$

Соответствующие значения углов θ_n , получаемые из соотношения

$$\cos \theta_n = (1 / 2 E_n) - (\phi + 1 / 2) \quad (19),$$

следующего из (7), равны:

$$\theta_0 = \arccos(1) = 0^\circ, \quad \theta_1 = \arccos((1 - \phi) / 2) \simeq 78,989 843^\circ,$$

$$\theta_2 = \arccos(-\phi / 2) = 108^\circ, \quad \theta_3 = \arccos(-\phi) \simeq 128,172 708^\circ,$$

$$\theta_4 = \arccos(-(\phi + 1) / 2) = 144^\circ, \quad \theta_5 = \arccos(-3\phi / 2) \simeq 157,979 686^\circ,$$

$$\theta_6 = \arccos(-1) = 180^\circ. \text{ Причём } \theta_2 = 3 \cdot 36^\circ, \theta_4 = 4 \cdot 36^\circ, \theta_6 = 5 \cdot 36^\circ, \\ \cos(\pi/5) = \cos(\pi/(\phi + \phi^2)) = \phi/2, \theta_5 = 2\theta_1, \theta_1/\theta_3 \approx 0,616 \approx \phi.$$

Полученную последовательность точек на эквипотенциальной окружности, определяемую углами θ_n и делящую эту окружность на 12 частей, можно, во-первых, попытаться связать с некоторым календарём. Однако смысл такого неравномерного календаря пока неясен.

Во-вторых, поскольку в число углов θ_n входят углы 108° и 144° , соответствующие тупым углам в «тонком» и «толстом» ромбах мозаики Пенроуза [6], то, возможно, углы θ_n определяют также и другие важные геометрические фигуры (может быть, даже неплоские).

Наконец, в-третьих, поскольку эквипотенциальные окружности являются одновременно и окружностями золотых сечений и функций средних значений можно сопоставить данным углам θ_n характерные функции средних значений.

Для этого, в соответствии с работами [3,4], введём вначале точки M_i и M_e (см. рис 1), делящие отрезок $AB=1$ в отношении золотого сечения внутренним (точка M_i) и внешним (точка M_e) образом. При этом $AM_i = \phi$, $BM_i = 1 - \phi = \phi^2$, $AM_i / BM_i = \phi$, $AM_e = \phi + 2$, $BM_e = \phi + 1$, $AM_e / BM_e = \phi$.

Далее введём угол $\sigma = 180 - \theta$, тогда длины отрезков $a_1 = AM_1$, $b_1 = BM_1$ (см. рис. 1) будут определяться соотношениями:

$$a_1 = \sqrt{3 - 2\phi \cos \sigma + \phi}, \quad b_1 = \sqrt{2 - \phi(2 \cos \sigma + 1)} \quad (20)$$

В тоже время длина переменного отрезка a_1 при движении точки M_1 по окружности соответствует некоторому значению λ следующей функции средних значений для отрезков $AM_i = \phi$ и $AM_e = \phi + 2$:

$$\overline{M}(\lambda) = [(\phi^\lambda + (\phi + 2)^\lambda) / 2]^{1/\lambda} \quad (21)$$

Для $\sigma = 0^\circ$ $a_1 = \phi$, $\lambda = -\infty$; для $\sigma \approx 22,020\,313^\circ$ $a_1 = \sqrt{\phi} \approx 0,786\,151$, $\lambda \approx -2,809\,468 \approx -2\pi / (\phi + \varphi) \approx -2,809\,926$; для $\sigma = 36^\circ$ $a_1 = 1$, $\lambda = -1$; для $\sigma = 51,827\,292^\circ$ $a_1 = \sqrt{\varphi} \approx 1,272\,026$, $\lambda = 0$; для $\sigma = 72^\circ$ $a_1 = \varphi$, $\lambda = 1$; для $\sigma \approx 101,010\,157^\circ$ $a_1 = \varphi^{3/2} \approx 2,058\,171$, $\lambda \approx 2,809\,468 \approx 2\pi / (\phi + \varphi) \approx 2,809\,926$; для $\sigma = 180^\circ$ $a_1 = \phi + 2$, $\lambda = \infty$.

Отметим, что, в силу симметрии, аналогичные результаты можно получить и для второй окружности.

Полученные соотношения устанавливают неожиданную и интересную связь углов σ , θ и модуля поля E с основными функциями средних значений: средним гармоническим ($\lambda = -1$), геометрическим ($\lambda = 0$), арифметическим ($\lambda = 1$). Кроме того, установлено соответствие $a_1 = \varphi^{3/2}$, $\phi^{1/2}$ необычных средних с показателями $\lambda \approx \pm 2\pi / (\phi + \varphi)$, с высокой точностью ($< 1,7 \cdot 10^{-4}$) аппроксимируемыми комбинацией из фундаментальных математических констант π , ϕ , φ и $2 = \phi^0 + \phi^1 + \phi^2$.

Отметим также, что хотя среднее квадратичное ($\lambda = 2$) не соответствует рассмотренной последовательности углов σ_n (θ_n), оно определяется характерным значением этих углов: $\sigma = \theta = 90^\circ$. Но при этом значение $a_1 = \sqrt{2 + \varphi}$ не попадает в члены геометрической прогрессии со знаменателем $q = \sqrt{\varphi}$, в которую входят значения a_1 , соответствующие среднему гармоническому ($a_1 = 1$), геометрическому ($a_1 = \sqrt{\varphi}$) и арифметическому ($a_1 = \varphi$).

Подчеркнём, что наряду с соотношениями гармонии, полученными в [1-4] из чисто математических соображений, в данной работе получены новые

нетривиальные соотношения, следующие из найденной электростатической модели золотых сечений и функций средних значений.

Таким образом, введённые модели золотых сечений не только обобщают геометрическое толкование золотого сечения, но и связывают его с функциями средних значений и с базовым физическим объектом.

При этом существенно то, что наряду с обычно рассматриваемым внутренним делением отрезка, в данных моделях рассматривается и внешнее деление (в том же числовом отношении), о котором редко упоминают. Более того, введённая обобщённая геометрическая модель золотых сечений показывает непрерывный переход от внутреннего деления к внешнему через бесконечное число стадий при движении точки деления по окружности золотого сечения.

Электростатическая же модель золотых сечений показывает также, что существует две симметричных окружности золотых сечений, определяемых двумя эквипотенциальными окружностями (напр., с единичным радиусом) в системе двух противоположно-заряженных тел.

8

Литература

1. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы длин, площадей и их производных в обобщённой модели золотого сечения. Актуальные проблемы современной науки, 2010, № 6, - С.169-162.

2. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных. М., Эл. № 77-6567, публ. 17431, 29.04.2012. www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/1252-shl.pdf

3. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии в обобщённой геометрической модели золотых сечений и функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 1, - С.118-120.

4. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений. М., Эл. № 77-6567, публ. 17485, 28.05.2012.

www.trinitas.ru/doc/0232/009a/1252-shl.pdf

5. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для электростатической модели обобщённых золотых сечений – длинных параллельных противоположно-заряженных тел. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, - С.131-134.

6. *Пенроуз Р.* Новый ум короля. М., УРСС, 2003.

Сведения об авторе

Шелаев Анатолий Николаевич – доктор физ.-мат. наук, профессор

Место работы – НИИ ядерной физики МГУ им. М.В. Ломоносова

Автор и соавтор более 200 научных работ

Лауреат научной премии им. акад. Р.В.Хохлова

Основные направления исследований – нелинейная динамика, в том числе динамика генерации вращающихся кольцевых лазеров; невзаимные оптические эффекты и методы управления лазерным излучением и конкурентным взаимодействием встречных световых волн в усиливающих и нелинейных средах; системная гармония и методы исследования нестандартных математических и физических задач

E-mail: Shelaev@rambler.ru