А.П. Стахов

«Родовые признаки» для обобщенных золотых сечений

Можно ли обобщать «золотое сечение»? В некоторых статьях, касающихся обобщений «золотого сечения» и «золотой пропорции» делаются категорические утверждения, что нельзя обобщать эти понятия, потому что они уникальны и неповторимы. В качестве аргумента обычно приводятся некоторые парадоксальные примеры, основанные на представлении иррациональных чисел в виде цепных дробей. Из этих примеров вытекает, что любая цепная дробь является обобщением ЗП, что, действительно, абсурдно. Эти примеры приводятся с целью показать, что цепная форма «золотой пропорции» «*позволяет легко вскрыть логику псевдонаучного обобщения золотого сечения, которой изобилуют работы отдельных авторов*».

Эти рассуждения направлены против двух обобщений, которые хорошо известны в теории «золотого сечения» - *золотых p-сечений и золотых p-пропорций*, которые являются пределом отношения соседних *p*-чисел Фибоначчи и при $p=1$ сводятся к классическому золотому сечению и классической золотой пропорции, и «*металлических пропорций*» (*$T_m -$гармоний* или *$\lambda -$пропорций*), которые при $\lambda = 1$ совпадают с классической «золотой пропорцией».

Возникает вопрос: являются ли *золотые p-пропорции* и «*металлические пропорции*» (*$T_m -$гармонии* или *$\lambda -$пропорции*) обобщениями золотой пропорции. Другими словами, является ли теория *золотых p-пропорций* и «*металлических пропорций*» (*$T_m -$гармоний* или *$\lambda -$пропорций*) обобщением теории классической «золотой пропорции»?

Статья Гранта Аракеляна. Для ответа на этот вопрос обратимся к замечательной статье Гранта Аракеляна «О мировой гармонии, теории золотого сечения и ее обобщениях» [1] http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm

Аракелян пишет:

«***И****стория удачных, неудачных и уводящих в дальние дали обобщений числовых множеств (не путать это стандартное словосочетание с теоретико-множественными фантазиями на тему “всё есть множество”) подсказывает нам долгожданные правила обобщения применительно к интересующему нас случаю теории золотого сечения.*

Правило 1. Обобщаемое есть частный случай обобщённого.

Правило 2. Обобщённое отличается от обобщаемого новыми объектами и константами.

Правило 3. Фундаментальные особенности обобщаемого сохраняются в обобщённом.

Правило 1 выполняется практически во всех обобщениях, правило 2 более конструктивно и работает, как мы видели, в случае замены двух начальных членов классического ряда Фибоначчи произвольными комплексными числами, но “зарыта собака” всё же в правиле 3»

Правило 3 Гранта Аракеляна. И далее Аракелян раскрывает суть Правила 3, в котором и «зарыта собака». Аракелян приводит пример уравнения золотых *p*-пропорций

$$x^{p+1} - x^{p} = 1, (p = 1,2,3,...), \tag{1}$$

которое претендует на обобщение уравнения золотого сечения (p=1):

$$x^{2} - x - 1 = 0. \tag{2}$$

Алгебраические уравнения (1), (2) являются частными случаями уравнения:

$$a_0 x^{n} + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{3}$$

Если a_0 = 1, а остальные множители равны –1, имеем уравнение *k*-ой степени

$$x^k - x^{k-1} - \ldots - x^2 - x - 1 = 0 \quad (4)$$

которое кажется естественным обобщением золотого уравнения (2).

Значит ли это, что корни любых уравнений (3) и (4) могут претендовать на роль обобщенных золотых пропорций? Аракелян отвечает:

«Мы видим, что все эти константы k-наччи имеют мало общего с золотым числом и едва ли могут удовлетворять Правилу 3, требующему сохранения фундаментальных признаков константы ϕ. Хотя выявление этих признаков, один из ключевых моментов всей работы, ещё впереди, и так ясно, хотя бы на интуитивном уровне, что говорить об узах кровного родства здесь вряд ли приходится».

Наиболее удачно роль Правила 3 Аракелян раскрывает при анализе «металлических пропорций». А далее приведем цитату из работы Аракеляна [1]:

***«Правило 3. М**ы наконец добрались до кульминационной для настоящей работы точки, когда решается вопрос о том, можно ли обобщать теорию ЗС и если да, то как. Надо, уточним, попытаться отыскать фундаментальный родовой признак, имманентно присущий числам определенного типа и только им и реально объединяющих их в единое золотое семейства. Найти некое формальное свойство, настолько убедительное, что оно способно проломить самый толстый лёд недоверия наиболее "упёртых" противников обобщения, фидианцев, нечто такое, что можно сравнить с ДНК-тестом, выявляющим кровное родство между людьми. После такой прелюдии может создаться ложное представление об искомом признаке как о чём-то совершенно необычном. "Таинственный" признак действительно необычен, уникален, но вместе с тем прост, небезызвестен и лежит на поверхности.*

***С**равним десятичные дробные части (мантиссы) константы ϕ и её обратной величины:*

$$\phi = 1{,}61803\,39887\ldots \qquad 1/\phi = 0{,}61803\,39887\ldots$$

Они совпадают. Разумеется не только в десятичной, но и в любой другой системе счисления. Назовём это свойство ***Правилом сохранения мантиссы (ПСМ)*** (выделено А.С.) *и, обозначив мантиссу числа x символом m, запишем его в виде уравнения*

$$\frac{1}{x} = x - m. \quad (5)$$

Отсюда квадратное уравнение

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad (6)$$

с корнями

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2} \quad (7)$$

Вот, собственно говоря, и всё».

Правило сохранения мантиссы. Таким образом, согласно Аракеляну, существует уникальное свойство, объединяющее «золотую пропорцию» со всеми «металлическими пропорциями», задаваемыми (7) - ***Правило сохранения мантиссы (ПСМ).***

Это правило Аракелян демонстрирует с помощью нижеследующей таблицы, в которой с помощью x_+ и x_-, обозначены положительные и отрицательные корни уравнения $x^2 - mx - 1 = 0$, десятичные значения корней и их обратных величин

m	**Корни**	x_+	$\frac{1}{x_+}$	x_-	$\frac{1}{x_-}$
2	$1\pm\sqrt{2}$	2.41435623...	0.41435623...	–0.41435623...	–2.41435623...
3	$\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$	3.3027756377...	0.3027756377...	–0.3027756377...	–3.3027756377...
4	$2\pm\sqrt{5}$	4.2360679775...	0.2360679775...	–0.2360679775...	–4.2360679775...
5	$\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$	5.19258224035...	0.19258224035...	–0.19258224035...	–5.19258224035...
24	$12\pm\sqrt{145}$	24.0415945787...	0.0415945787...	–0.0415945787...	–24.0415945787...
137	$\frac{137\pm\sqrt{18773}}{2}$	137.0072988812...	0.0072988812...	–0.0072988812...	–137.0072988812...

Я вспоминаю, с каким восторгом подобную таблицу мне демонстрировал Александр Татаренко во время нашей первой встречи в Таганроге (2001), а затем и во время второй встречи в Виннице (2003), где он сделал замечательный доклад по T_m-гармониям на пленарном заседании «золотой» конференции.

Формула Кассини. Но есть еще один «родовой признак», который объединяет классические числа Фибоначчи и $\lambda-$числа Фибоначчи, задаваемые рекуррентной формулой

$$F_\lambda(n+1)=\lambda F_\lambda(n)+F_\lambda(n-1) \tag{8}$$

Речь идет о **«обобщенной формуле Кассини»** для любых трех соседних $\lambda-$чисел Фибоначчи [2] http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321250.htm

$$F_\lambda^2(n+1)-F_\lambda(n)F_\lambda(n+2)=(-1)^{n+1}, \tag{9}$$

которая при $\lambda=1$ совпадает с классической формулой Кассини:

$$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n+1}. \tag{10}$$

Ниже в таблице приведены так называемые расширенные λ-числа Фибоначчи ($\lambda=1,2,3,4$).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21
$F_1(-n)$	0	1	–1	2	–3	5	–8	13	–21
$F_2(n)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408
$F_2(-n)$	0	1	–2	5	–12	29	–70	169	–408
$F_3(n)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927
$F_3(-n)$	0	1	–3	10	–33	109	–360	1199	–3927
$F_4(n)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184
$F_4(-n)$	0	1	–4	17	–72	305	–1292	5473	–23184

Приведем примеры выполнения тождества (9) для различных последовательностей, приведенных в таблице. Для $F_2(n)-$последовательности тождество (9) проверим для случая n=7. Для этого рассмотрим следующую тройку чисел: $F_2(6)=70, F_2(7)=169, F_2(8)=408$. Произведя вычисления над ними согласно (9), получим следующий результат:

$$(169)^2 - 70\times 408 = 28561 - 28560 = 1,$$

что соответствует тождеству (9), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^8 = 1$.

Теперь рассмотрим $F_3(n)$ – последовательность из указанной таблицы для случая $n = 6$. Для этого мы должны рассмотреть следующую тройку чисел:

$$F_3(5) = 109, F_3(6) = 360, F_3(7) = 1189.$$

Произведя вычисления над ними согласно (9), получим следующий результат:

$$(360)^2 - 109\times 1189 = 129600 - 129601 = -1,$$

что соответствует тождеству (9), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^7 = -1$.

Наконец, рассмотрим $F_4(-n)$ – последовательность из указанной таблицы для случая $n = -5$. Для этого мы должны рассмотреть следующую тройку чисел:

$$F_4(-4) = -72, F_4(-5) = 305, F_4(-6) = -1292.$$

Произведя вычисления над ними согласно (9), получим следующий результат:

$$(305)^2 - (-72)\times(-1292) = 93025 - 93024 = 1,$$

что соответствует тождеству (9), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^{-4} = 1$.

Таким образом, в случае λ-чисел Фибоначчи (для целых значений λ) мы имеем бесконечное количество целочисленных последовательностей, простирающихся от $+\infty$ до $-\infty$, обладающих уникальным математическим свойством, выражаемым «обобщенной формулой Кассини» (9), которая гласит:

Квадрат некоторого λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ всегда отличается от произведения двух соседних λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n-1)$ и $F_\lambda(n+1)$, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от четности числа *n*; если число *n* является четным числом, то 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

«Родовые признаки» для «золотых *p*-пропорций». Возникает вопрос: какими общими «родовыми признаками» обладают классическая «золотая пропорция» и «золотые *p*-пропорции»? Этот признаки хорошо известны и многократно описаны в моих работах, начиная с книги [3] . Речь идет о следующем тождестве, связывающем «золотые *p*-пропорции» Φ_p :

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{n-1}, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ... \quad (11)$$

Заметим, что для случая $p = 0\,(\Phi_0 = 2)$ тождество (11) сводится к следующему тривиальному тождеству для двоичных чисел:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2\times 2^{n-1}, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$$

Для $p = 1$ имеем: $\Phi_1 = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; тогда тождество (11) сводится к следующему известному тождеству для «золотой пропорции»:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad (12)$$

Наверное, еще одним «родовым признаком», связывающим «золотую пропорцию» с «золотыми *p*-пропорциями» является **«обобщенная формула Кеплера»**:

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p\left(p = 0,1,2,3,\ldots\right), \quad (13)$$

где $F_p(n), F_p(n-1)$ - соседние *p*-числа Фибоначчи.

Заметим, что числа $F_p(n), F_p(n-1)$ связаны с треугольником Паскаля и равны его «диагональным суммам (это тоже можно считать «родовым признаком», связывающим числа Фибоначчи с *p*-числами Фибоначчи).

Частным случаем (12) является классическая формула Кеплера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Выводы:

1. Не нужно тиражировать заблуждения о том, что, поскольку всякая цепная дробь является обобщением цепной дроби для «золотой пропорции», то отсюда вытекает, что «золотую пропорцию» в принципе нельзя обобщить.
2. Не нужно тиражировать заблуждения о том, что, поскольку любое алгебраическое уравнение является обобщением уравнения золотого сечения, то отсюда вытекает, что уравнение золотого сечения не может быть обобщено.
3. Среди бесчисленного множества алгебраических уравнений типа $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ можно выделить, по меньшей мере два типа алгебраических уравнений типа $x^{p+1} - x^p = 1, \left(p = 1,2,3,\ldots\right)$, порождающие *«золотые p-пропорции»*, и $x^2 - \lambda x - 1 = 0$, порождающие «*металлические пропорции*».
4. Применительно к *«золотым p-пропорциям»* «родовыми признаками», связывающими их с классической «золотой пропорцией», является **тождество (12)** и **«обобщенная формула Кеплера»** (13).
5. Применительно к «металлическим пропорциям» «родовыми признаками», связывающим их с классической «золотой пропорцией», является **Правило сохранения мантиссы»** и **«обобщенная формула Кассини».**
6. Таким образом, в современной «математике гармонии» [4] успешно развиваются две обобщенные теории «золотого сечения: первая основана на «золотых *p*-пропорциях» [3], вторая – на «металлических пропорциях» [1,2].
7. Это не означает, что не может возникнуть других обобщенных теорий «золотого сечения», но при этом должно быть строго соблюдено **Правило 3 Гранта Аракеляна – существование уникальных математических свойств, объединяющих новые «обобщенные золотые пропорции» с классической «золотой пропорцией».** В качестве примера новой «обобщенной теории золотых сечений» можно привести работы Анатолия Шелаева [5-7].

Можно порекомендовать Анатолию Шелаеву привести примеры «родовых признаков» для новых обобщенных золотых сечений.

Литература:

1. Грант Аракелян, О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011
2. А.П. Стахов, Теория λ -чисел Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17407, 05.04.2012
3. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Советское Радио, 1977. – 288 с.
4. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathemartics and Computer Science. New Jersy, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2009.
5. А.Н. Шелаев, Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17431, 29.04.2012
6. А.Н. Шелаев, Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17485, 28.05.2012
7. А.Н. Шелаев, Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17511, 08.06.2012