В.Л. Владимиров

О «РОДОВЫХ ПРИЗНАКАХ» ОБОБЩЕННОГО И КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЙ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕКУРСИЙ 2-ГО ПОРЯДКА И 2-Й СТЕПЕНИ

Содержание:

Было бы постыдно для людей,
если бы границы умственного мира
оставались в тесных пределах того,
что было открыто древними…
Френсис Бэкон (1561-1626),
английский государственный деятель и философ

Все обобщения ложны, в том числе и это
Бенджамин Дизраэли (1804-1881),
премьер-министр Великобритании

1. Введение

Данная работа является откликом на статью А.П. Стахова «Родовые признаки» для обобщенных золотых сечений» [1].

В статье [1] рассмотрены родовые признаки *золотых p-пропорций,* которые при $p=1$ сводятся к классической золотой пропорции, и «*металлических пропорций*» (или *λ–пропорций*), которые при $\lambda=1$ совпадают с классической «золотой пропорцией». В выводах к статье [1] А.П. Стахов отмечает:

> *«Это не означает, что не может возникнуть других обобщенных теорий «золотого сечения», но при этом должно быть строго соблюдено* ***Правило 3 Гранта Аракеляна – существование уникальных математических свойств, объединяющих новые «обобщенные золотые пропорции» с классической «золотой пропорцией».***

В данной работе рассмотрены (также с целью выделения родовых признаков) следующие обобщения золотого сечения:

- ♦ тождественная гармоническая **пропорция (**обобщенная пропорция произвольных сечений);
- ♦ обобщенные **уравнения** золотого сечения для линейной рекурсии 2-го порядка и 2-й степени;
- ♦ обобщение **формул Бине** для чисел Фибоначчи и Люка на любые унифицированные числовые рекуррентные последовательности;
- ♦ обобщение **формул Кассини** для чисел Фибоначчи и Люка на любые унифицированные числовые рекуррентные последовательности.

Пусть читателя не смущает тот факт, что из этих четырех обобщений в заголовок данной статьи вынесено только обобщенное **уравнение** золотого сечения. Просто автор посчитал это обобщение уравнения наиболее важным. Несмотря на то, что в этой работе подчеркивается и такой далеко не бесспорный факт: можно обобщать и конкретную пропорцию. Но мнение автора, естественно, носит субъективный характер.

Данная статья является попыткой автора развить те обобщения ЗС, которые были сделаны ранее в работах А.П. Стахова и В.Л. Владимирова, особенно в статье «Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения)» [2].

В дискуссии о возможности обобщения золотой пропорции автор данной работы стоит целиком и полностью на стороне Алексея Стахова [1], Дениса Клещева [3] и Гранта Аракеляна [4].

«Золотую пропорцию» обобщать не только можно, но давно необходимо. Конечно, при условии, что этот термин понимать не в бытовом, «кухонном» смысле (например, «гоголь-моголь лучше всего готовить в **пропорции** 2:1, то есть брать две столовых ложки сахара на один желток»). Критики обобщений должны, наконец, усвоить следующие прописные истины:

- в математическом плане «пропорция» – это не число, не одно отношение, а равенство **двух** отношений;
- пропорция может быть выражена (что не обязательно!) **тождеством**;
- пропорцию, в отличие от уравнений, не нужно «**решать**»; можно использовать ее свойства и перейти от нее к уравнению, а уж далее нетождественное равенство, называемое уравнением, решать;
- в «Золотой пропорции» $(a+b)/b=b/a$ совсем не обязательно принимать, что либо $a=1$, либо $b=1$, либо $a+b=1$, ибо именно такой «**узкоединичный**», **статичный** подход сдерживал развитие теории ЗС с уравнением 2-й степени по сравнению с теорией ЗС, в которой рассматриваются уравнения более высоких степеней (например, *p-пропорции*).

2. Правила Г. Аракеляна и законы А. Азимова

Только начнем мы не с пропорции, а с законов… робототехники.

В 1942 году известный ученый и писатель-фантаст Айзек Азимов сформулировал в рассказе «Хоровод» три мудрых закона робототехники:

1. Робот не может причинить вред человеку или своим бездействием допустить, чтобы человеку был причинён вред.
2. Робот должен повиноваться всем приказам, которые даёт человек, кроме тех случаев, когда эти приказы противоречат Первому Закону.
3. Робот должен заботиться о своей безопасности в той мере, в которой это не противоречит Первому или Второму Законам.

И только через 44 года, в 1986 году, в романе «Роботы и Империя» Азимов добавил еще один, нулевой Закон:

0. Робот не может причинить вреда человеку, если только он не докажет, что в конечном счёте это будет полезно для всего человечества.

Вроде простые практичные законы, а сколько в них глубокого философского смысла…

В статье «О мировой гармонии, теории золотого сечения и ее обобщениях» [5] Грант Аракелян сформулировал применительно к теории золотого сечения три простых, но глубоких правила обобщения:

«***Правило 1****. Обобщаемое есть частный случай обобщённого.*

Правило 2. *Обобщённое отличается от обобщаемого новыми объектами и константами.*
Правило 3. *Фундаментальные особенности обобщаемого сохраняются в обобщённом».*

Далее Г. Аракелян сделал существенное замечание:
«Правило 1 выполняется практически во всех обобщениях, … но “зарыта собака” всё же в правиле 3».

С учетом этого замечания, добавим (по аналогии с законами А. Азимова) еще одно, очень важное, на наш взгляд, нулевое Правило:

Правило 0. *Фундаментальные особенности обобщаемого из Правила 3 выбираются произвольно и* ***индивидуально для каждого обобщённого****, но таким образом, чтобы это было полезно науке при замене неполного знания более полным и совершенным.*

3. Родовые признаки Золотой и тождественной гармонической пропорций

Еще Рене Декарт (1596-1650) сделал это замечательное открытие. Он установил, что проблемы физики и математики решаются гораздо успешнее в том случае, если между алгебраическими уравнениями и геометрическими образами устанавливается определенные соответствия. Кроме того, он ввел в математику переменные величины и тем самым показал путь успешного анализа различных процессов в динамике.

Постараемся следовать примеру Декарта при обобщениях Золотого Сечения.

Золотая пропорция в алгебраическом смысле этого термина означает равенство двух отношений: отношения целого Ц к большему Б и отношения большего Б к меньшему М, то есть

$$Ц:Б=Б:М=Ф.$$

Оба отношения равны числу Фидия $Ф=(1+\sqrt{5})/2\approx1,618$, которое нередко (скорее в бытовом, чем в математическом смысле) также называют «золотой пропорцией».

Сечение **–** это геометрическое понятие означает деление отрезка произвольной длины на две также произвольные по длине части «a» и «b».

Не совсем гласно, но уже давно установлено соответствие между параметрами алгебраической Золотой пропорции и параметрами ее геометрического образа – сечения. Целое обычно принимают равым Ц=a+b, большее равно Б=b, меньшее равно М=a. Поэтому Золотая пропорция Ц:Б=Б:М=Ф записывается и так:

$$(a+b):b=b:a=Ф.$$

Но во 2-м отношении в качестве меньшего «М» можно использовать не «a», а некую другую длину, тоже меньшую b. Пусть эта длина равна b–x, где $0<x<b$.

Поставим условие равенства двух отношений (a+b):b и b:(b–x): **(a+b):b=b:(b–x)**. Определим значение «x» на основе основного свойства пропорции (произведение крайних равно произведению средних членов, то есть $b^2=(a+b)(b-x)$). Получим x=ab/(a+b), то есть «x» равно **полугармоническому среднему** «большего» и «меньшего»: x=0,5h(a,b). Далее для полугармонического среднего будем использовать сокращенное обозначение 0,5h. С учетом этого запишем «тождественную гармоническую пропорцию»:

$$(a+b):b=b:(b–0,5h).$$

Эта пропорция тождественна, т.к. справедлива при любых $b \geq a > 0$. Она условно названа «гармонической», так как в нее входит гармоническое среднее h от двух других параметров. При бисекции (b=a) эта пропорция превращается в тождество 2=2.
А при **b–0,5h=a** она преобразуется в Золотую пропорцию, поэтому ее можно считать обобщающей.

Тождественная гармоническая пропорция (a+b):b=b:(b–0,5h) является обобщением Золотой пропорции (a+b):b=b:a.

Таким образом, установлено (по меньшей мере, в тысячный раз) соответствие между алгебраическим описанием ЗС и геометрическим образом ЗС.

Использованные при этом понятия целого Ц=a+b, большего Б=b, меньшего М=a и их математической связи и являются родовыми признаками, общими для тождественной гармонической пропорции (a+b):b=b:(b–0,5h) и ее частного случая – обобщаемой Золотой пропорции (a+b):b=b:a.

Но вспомним «***Правило 2***. *Обобщённое отличается от обобщаемого новыми объектами и константами*». Соблюдается ли оно?

В обобщенную пропорцию (a+b):b=b:(b–0,5h) нами введен новый объект – **гармоническое среднее h** от «большего» и «меньшего». Более того, введено и **новое понятие «меньшего»**: (b–0,5h). В левой части пропорции (a+b):b=b:(b–0,5h) у нас «меньшее» – это «a», в правой – это (b–0,5h). А совпадают по значению эти два «меньших» только в одной точке – точке «золотого» деления отрезка.

Напомним, что из равенства **b–0,5h=a**, или b–a=0,5h, следует **основное условие Золотого сечения**:

$$\mathbf{d=b–a=0,5h}.$$

Выразим это условие словесно. Если разность между «большим» и «меньшим» равна половине их гармонического среднего, то деление целого на части является «золотым». Такому делению (сечению) соответствует Золотая пропорция.

А теперь выполним заветы великого Рене Декарта: примем, что разность между «большим» и «меньшим» d=b–a является переменной величиной: **d=var**. Тем самым перейдем к анализу процесса сечения в **динамике**.

Единственной постоянной в тождественной гармонической пропорции (a+b):b=b:(b–0,5h) будем считать значение гармонического среднего **h(a;b)=h=const**. Собственно говоря, такая форма записи тождественной пропорции теперь будет не совсем правильной. Точнее было бы так: [a(d)+b(d)]:b(d)=b(d):[b(d)–0,5h(a;b)]. Однако, ввиду громоздкости, оставим в силе первоначальную, более простую форму записи.

Итак, разность d=b–a является переменной величиной. А в каких пределах? Пределы устанавливаются крайними режимами бисекции (d=0) и редукции (d=h), которые «редуцируют» алгебраическую форму ЗС – линейную рекурсию 2-го порядка и 2-й степени – в простую рекурсию 1-го порядка.

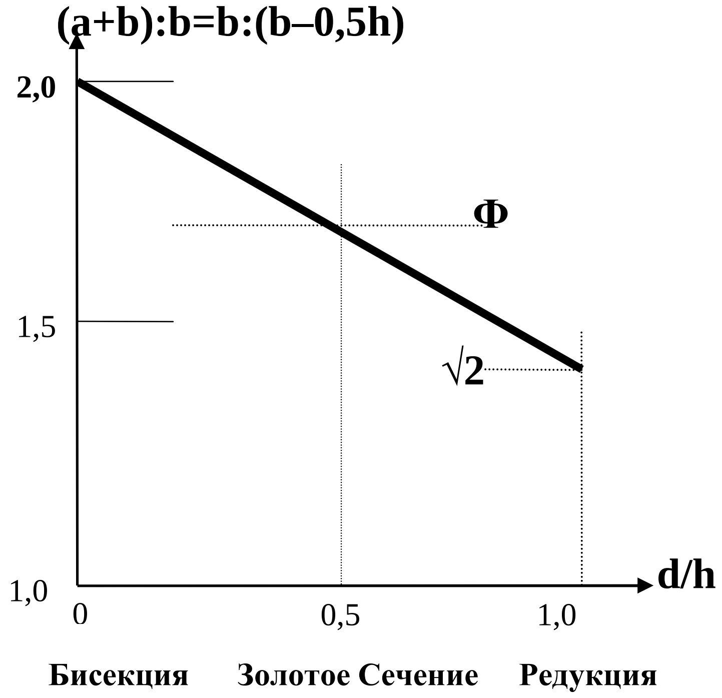


Рис. 1. Динамика значений двух отношений тождественной гармонической пропорции

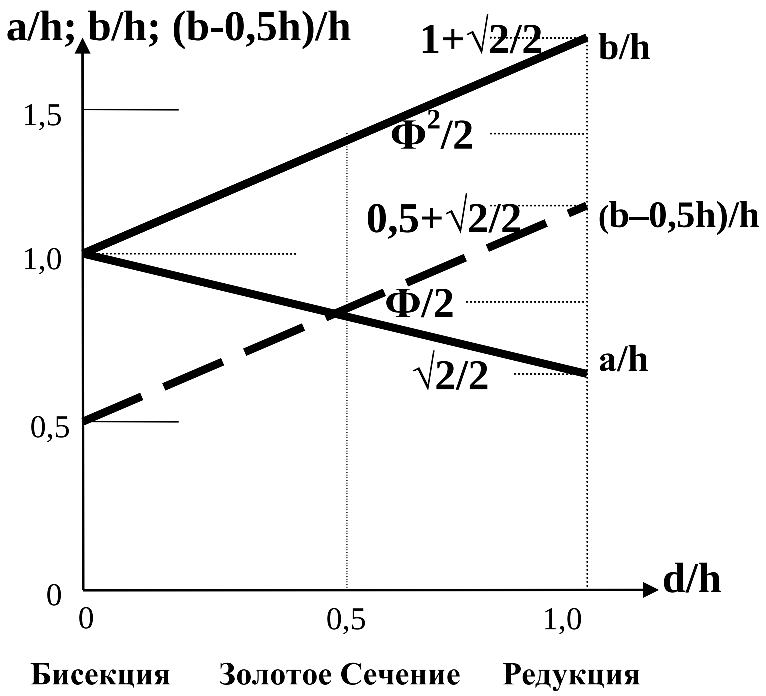


Рис. 2. Динамика безразмерных параметров тождественной гармонической пропорции

На рисунках 1 и 2 впервые сделана попытка наглядно представить «тождественную гармоническую пропорцию» (или «обобщенную пропорцию произвольных сечений») в динамике, для диапазона изменения безразмерной величины d/h от 0 до 1.

Изменение d/h от 0 до 1 может быть достигнуто, например, если принять, что $d/h=0{,}5(1+\sin \omega t)$, где $-\pi/2 \le \omega t \le \pi/2$. Напомним: принято, что h=const.

На Рис. 1 по вертикали отложены значения двух (естественно, равных) отношений (a+b):b и b:(b–0,5h) тождественной гармонической пропорции. По горизонтали отложены безразмерные значения d/h. При росте значений d/h равные значения отношений (a+b):b и b:(b–0,5h) монотонно (почти линейно) уменьшаются от 2 до $\sqrt{2}$.

Ординаты характерных точек, отвечающих режимам бисекции, Золотого Сечения и редукции, на Рис. 1 выражаются через постоянную Пифагора ($\sqrt{2}$), ее квадрат (2) и «золотую» константу (Ф). Золотое Сечение занимает срединное положение относительно режимов бисекции и редукции (d/h=0,5).

На Рис. 2 показана динамика безразмерных параметров тождественной гармонической пропорции при таком же росте значений d/h от 0 до 1. При бисекции относительные значения «Большего» (b) и «Меньшего» (a) равны между собой и равны единице. При росте значений разности «d» «Большее» монотонно увеличивается, а «Меньшее» монотонно уменьшается (изменения близки к линейным).

Штриховой линией на Рис. 2 показано монотонное увеличение от значения 0,5 нового безразмерного «Меньшего» (b–0,5h)/h из правой части тождественной гармонической пропорции. Характерно, что и здесь, на Рис. 2, ординаты точек, отвечающих режимам бисекции, Золотого Сечения и редукции, выражаются через постоянную Пифагора ($\sqrt{2}$), «золотую» константу (Ф), а также квадраты этих постоянных.

Итак, ничего невозможного в достижении динамического режима при h=const нет. Увеличение разности d достигается при этом одновременным ростом «Большего» (b) и уменьшением «Меньшего» (a).

Пересечение линий (b–0,5h)/h и a/h на Рис. 2 отвечает трансформации «тождественной гармонической пропорции» в ее частный случай – уникальную (и «нетождественную») Золотую Пропорцию. Ордината точки пересечения равна Ф – «золотой» константе. В этой точке (и только в этой точке) (a+b):b=b:(b–0,5h)=Ф. И отношение b/a, естественно, также равно Ф.

Таким образом, Золотая Пропорция предстала перед нами лишь как одна реализация одной единственной удивительной точкой (d=h/2) из бесконечного числа возможных реализаций «тождественной гармонической пропорции» на отрезке $0 \le d \le h$. На этом отрезке разность аттракторов «d» может иметь бесконечное число значений: целых, дробных, иррациональных, трансцендентных…

4. Обобщенные уравнения Золотого Сечения и их родовые признаки

Каждому из бесконечных вариантов деления отрезка произвольной длины на части «a» и «b≥a» соответствует своя «тождественная гармоническая пропорция» и своя линейная рекурсия 2-го порядка (двучлен) и 2-й степени (степень многочлена определяется максимальной степенью его одночленов).

Чтобы перейти от пропорции к характеристическому уравнению рекурсии, нужно воспользоваться основным свойством тождественной гармонической пропорции (a+b):b=b:(b–0,5h) и приравнять произведения ее крайних и средних членов. После преобразований, с учетом равенства d=b–a, приходим к квадратному относительно «a» характеристическому уравнению

$$a^2=(h-d)a+0{,}5hd$$

или к квадратному относительно «b» характеристическому уравнению

$$b^2=(h+d)b-0{,}5hd.$$

Сравнение этих уравнений показывает, что смена аттрактора сопровождается лишь формальным изменением знаков перед разностью «d» в характеристических уравнениях.

На основе этих уравнений получаем уравнения рекурсии с аттрактором «a»

$$f_{n+2}=(h-d)f_{n+1}+0{,}5hdf_n$$

или с аттрактором «b»

$$f_{n+2}=(h+d)f_{n+1}-0{,}5hdf_n\,.$$

Как указывалось выше, если разность $d=b-a$ равна половине гармонического среднего $h(a;b)$ чисел «a» и «b», то есть $d=0{,}5h$, получаем «гармоническое золотое сечение». Но тогда $h-d=h-0{,}5h=0{,}5h=d$; $0{,}5hd=d^2$; $h+d=3d$. Следовательно, обобщенные характеристические уравнения гармонического золотого сечения 2-го порядка – это уравнения вида $\mathbf{a^2=d\cdot a+d^2}$ и $\mathbf{b^2=3d\cdot b-d^2}$. Им соответствуют рекурсии вида

$$\mathbf{f_{n+2}=d\cdot f_{n+1}+d^2\cdot f_n} \quad \text{или} \quad \mathbf{f_{n+2}=3d\cdot f_{n+1}-d^2 f_n.}$$

4.1. Первый родовой признак – отношение корней

Есть ли такие фундаментальные свойства корней обобщенных характеристических уравнений золотого сечения $a^2=d\cdot a+d^2$ и $b^2=3d\cdot b-d^2$, которые присущи и корням классического уравнения ЗС ?

Проведенный анализ позволил ответить на этот вопрос утвердительно. Причина такого ответа будет понятна, если мы рассмотрим две следующие леммы.

Лемма 1. Отношение корней (положительного к отрицательному) обобщенного характеристического уравнения Золотого Сечения $\mathbf{a^2=d\cdot a+d^2}$ всегда равно отрицательному значению квадрата золотой константы, то есть $\mathbf{a_1/a_2=-\Phi^2}$.

Доказательство Леммы 1. Взятые со знаком плюс (a_1) перед радикалом и со знаком минус (a_2) два корня характеристического уравнения вида $a^2=d\cdot a+d^2$ равны $a_1=d\cdot\Phi$; $a_2=-d\cdot\Phi^{-1}$. Отношение корней равно $a_1/a_2=-\Phi^2$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Отношение корней (корня, взятого со знаком плюс перед радикалом, к корню, взятому со знаком минус) обобщенного характеристического уравнения Золотого Сечения $\mathbf{b^2=3d\cdot b-d^2}$ равно четвертой степени золотой константы, то есть $\mathbf{b_1/b_2=\Phi^4}$.

Доказательство Леммы 2. Взятые со знаком плюс (b_1) перед радикалом и со знаком минус (b_2) корни уравнения вида $b^2=3d\cdot b-d^2$ равны $b_1=d\cdot\Phi^2$; $b_2=d\cdot\Phi^{-2}$. Отношение корней равно $b_1/b_2=\Phi^4$, что и требовалось доказать.

А теперь проверим, чему равны отношения корней классического характеристического уравнения ЗС.

Классическое золотое сечение получаем при $h(a;b)=2$; $d=1$. Подставим $d=1$ в обобщенные характеристические уравнения $a^2=d\cdot a+d^2$ и $b^2=3d\cdot b-d^2$. Нетрудно убедиться, что для корней полученных таким образом классических характеристических уравнений золотого сечения $\mathbf{a^2=a+1}$ **и** $\mathbf{b^2=3b-1}$ справедливы те же отношения:

$$\mathbf{a_1/a_2=-\Phi^2;\quad b_1/b_2=\Phi^4.}$$

Отсюда следует такой вывод:

отношения корней являются тем фундаментальным свойством, тем родовым признаком, который объединяет обобщенные и классические характеристические уравнения Золотого Сечения.

4.2. Второй родовой признак – соответствие Золотой пропорции

Фундаментальным свойством, объединяющим обобщенные и классические характеристические уравнения Золотого Сечения, является не только отношение корней.

Существует и второй родовой признак, который будет понятен после рассмотрения Лемм 3 и 4.

Лемма 3. Если характеристическое уравнение рекурсии имеет вид $a^2=d\cdot a+d^2$, то соответствующие такой рекурсии параметры сечения «a» и «b=a+d» находятся в Золотой пропорции, то есть b/a=Ф.

Доказательство Леммы 3. Корни характеристического уравнения вида $a^2=d\cdot a+d^2$ равны $a_1=d\cdot Ф$; $a_2= -d\cdot Ф^{-1}$. Но длина меньшего отрезка «a» должна быть, исходя из геометрических соображений, положительной. Следовательно, принимая во внимание только 1-й, положительный корень уравнения, имеем $b_1=a_1+d=d\cdot Ф+d=d(Ф+1)=d\cdot Ф^2$, откуда $b_1=a_1\cdot Ф$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. Если характеристическое уравнение рекурсии имеет вид $b^2=3d\cdot b-d^2$, то соответствующие такой рекурсии параметры сечения «b» и «a=b–d» находятся в Золотой пропорции, то есть b/a=Ф.

Доказательство Леммы 4. Корни уравнения вида $b^2=3d\cdot b-d^2$ равны $b_1=d\cdot Ф^2$; $b_2=d\cdot Ф^{-2}$. Следовательно, $a_1=b_1-d=d\cdot Ф^2-d=d(Ф^2-1)=d\cdot Ф$, откуда $b_1=a_1\cdot Ф$. Аналогично находим $a_2=b_2-d=d\cdot Ф^{-2}-d=d(Ф^{-2}-1)= -d\cdot Ф^{-1}$. Но, исходя из геометрических соображений, длина меньшего отрезка «a» должна быть положительной. Принимая во внимание только 1-й, положительный корень уравнения, имеем $b=a\cdot Ф$, что и требовалось доказать.

Итак, доказанные Леммы 3 и 4 показали неразрывную связь параметров уравнений Золотого Сечения с параметрами Золотой пропорции. Что же тут удивительного?

Удивительно то, что мы столько десятилетий (или веков?) считали уравнение $\mathbf{x^2=x+1}$ единственным уравнением Золотого Сечения. А теперь даже самые оголтелые противники обобщений ЗС должны признать, что не только уравнение вида $a^2=a+1$, но и

$$\mathbf{b^2=3b-1, \quad a^2=d\cdot a+d^2, \quad b^2=3d\cdot b-d^2}$$

также являются уравнениями Золотого Сечения Целого на две «золотые» части «a» и «b», поскольку имеют с уравнением $a^2=a+1$ общие родовые признаки: **равные значения отношений x_1/x_2 корней характеристических уравнений и равные значения отношений b/a=Ф.**

5. Родовые признаки формул Бине: обобщенной и для чисел Фибоначчи и Люка

В статье В.Л. Владимирова, А.П. Стахова «Об унификации числовых рядов рекурсий второго порядка» [6] доказаны Теоремы 2 и 3, имеющие обобщающий характер.

Теорема 2. ***Если $f_0=2$, а $f_1=x_1+x_2$, то любой n-ый член рекурсии ($n\geq0$) 2-го порядка равен*** $\mathbf{f_n=x_1^n+x_2^n}$.

Для «золотой» рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ имеем $x_1=\Phi$ и $x_2=-\Phi^{-1}$, и начальным условиям (2;1) соответствует ряд Люка. Теорема 2 вырождается в свой частный случай, а именно, в известную формулу Бине для чисел Люка [7, стр. 53]:

$$\mathbf{L_n=\Phi^n+(-\Phi^{-n}),}$$

где Φ – «золотая константа» $(1+\sqrt{5})/2$.

Формула Бине для чисел Люка – это частный случай Теоремы 2, предложенной в [6] для любых линейных рекурсий 2-го порядка.

Итак, любой элемент числовых рекурсивных рядов с начальными условиями ($f_0=2$, $f_1=x_1+x_2$) можно выразить через сумму n-ых степеней корней характеристического уравнения рекурсии. Это и есть родовой признак, общий для известной формулы Бине для чисел Люка $L_n=\Phi^n+(-\Phi^{-n})$ и новой обобщенной формулы Бине $f_n=x_1^n+x_2^n$ для «суммарных» рядов $f_0=2$; $f_1=(x_1+x_2)$; … ; $f_n=(x_1^n+x_2^n)$; …

Но в [6] доказана еще и **Теорема 3**, также имеющая общий характер.

Теорема 3. ***Если $f_0=0$, а $f_1=1$, то любой n-ый член линейной рекурсии ($n\geq0$) 2-го порядка равен***

$$\mathbf{f_n=(x_1^n-x_2^n)/(x_1-x_2)}.$$

Для «золотой» рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ имеем $x_1=\Phi$ и $x_2=-\Phi^{-1}$, и начальным условиям (0; 1) соответствует ряд Фибоначчи. **Теорема 3** вырождается в свой частный случай, а именно, в популярную формулу Бине для чисел Фибоначчи [7, стр. 53]:

$$\mathbf{F_n=(\Phi^n+(-\Phi^{-n}))/\sqrt{5}.}$$

Формула Бине для чисел Фибоначчи – это частный случай Теоремы 3, предложенной в [6] для любых линейных рекурсий 2-го порядка.

Любой элемент числовых рекурсивных рядов можно выразить через разность n-ых степеней корней характеристического уравнения рекурсии, деленную на разность этих корней, если приняты начальные условия (0;1). Это и есть родовой признак, общий для известной формулы Бине для чисел Фибоначчи $F_n=(\Phi^n+(-\Phi^{-n}))/\sqrt{5}$ и обобщенной формулы Бине $f_n=(x_1^n-x_2^n)/(x_1-x_2)$ для приведенных «разностных» рядов $f_0=(x_1^0-x_2^0)/(x_1-x_2)=0$; $f_1=(x_1-x_2)/(x_1-x_2)=1$; … ; $f_n=(x_1^n-x_2^n)/(x_1-x_2)$; …

В Википедии можно найти следующий похожий материал на эту тему (http://ru.wikipedia.org/wiki/Линейная_рекуррентная_последовательность). Для последовательности $F_n(F_1, F_2)$, удовлетворяющей линейному рекуррентному уравнению второго порядка $F_n = bF_{n-1} + cF_{n-2}$ с начальными значениями F_1, F_2, справедлива формула: $F_n(F_1, F_2) = F_2F_{n-1}(1, b) + cF_1F_{n-2}(1, b)$.

Для того, чтобы найти $F_n(1, b)$, необходимо решить характеристическое уравнение $q^2 - bq - c = 0$. Если дискриминант этого уравнения отличен от нуля, то

$$F_n(1, b) = \frac{1}{b - 2q}((b - q)^n - q^n),$$

где q— любой из двух корней этого уравнения. Если же дискриминант характеристического уравнения равен нулю, то

$$F_n(1, b) = nq^{n-1}.$$

В этой формуле, сложной и для расчетов, и для понимания ее математической сути, тоже есть разность n-ых степеней фукций от корней характеристического уравнения рекурсии. Зато нужно «расшифровывать» деление на разность этих корней, не применены четкие унифицированные начальные условия (0;1) или (2; x_1+x_2), общие для сравниваемых формул. Автор затрудняется поэтому назвать родовые признаки, общие для формулы Бине и приведенной выше формулы из Википедии.

Формулу из Википедии трудно назвать обобщением формул Бине.

6. Родовые признаки формул Кассини: обобщенной и для чисел Фибоначчи и Люка

Кроме формул французского математика и астронома XIX столетия Жака Филиппа Мари Бине (1786-1856), не менее популярны и изящны формулы итальянского астронома XVII-XVIII веков Джованни Доменико Кассини (1625-1712). Формулы, которые устанавливают взаимосвязь любых трех соседних элементов числовых рядов Фибоначчи и Люка.

С целью обобщения формулы Кассини $F_{n-1}\cdot F_{n+1}-(F_n)^2 = (-1)^n$ для чисел Фибоначчи F [7, стр. 53] в работе [8] была доказана приведенная ниже Теорема А.

Теорема А. Если $f_0=0$, $f_1=1$, то для любого целого $n\geq1$ в числовой последовательности, соответствующей линейной рекурсии 2-го порядка с аттракторами x_1 и x_2, справедливо равенство

$$\mathbf{(f_n)^2 - f_{n-1}\cdot f_{n+1} = (x_1\cdot x_2)^{n-1}}.$$

То есть разность квадрата любого n-го ($n\geq1$) члена любой числовой последовательности с $f_0=0$, $f_1=1$, соответствующей рекурсии 2-го порядка с аттракторами x_1 и x_2, и произведения двух соседних членов этой последовательности всегда равна (n–1)-ой степени произведения аттракторов $x_1\cdot x_2$.

Для «золотой» рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ имеем $x_1=\Phi$ и $x_2= -\Phi^{-1}$, и начальным условиям (0; 1) соответствует ряд Фибоначчи, состоящий из чисел $\mathbf{F_n}$.
И, поскольку $x_1\cdot x_2= -1$, Теорема А для $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ вырождается в свой частный случай, а именно, в известную формулу Кассини для чисел Фибоначчи [7, стр. 53]:

$$(f_n)^2-f_{n-1}\cdot f_{n+1}=(x_1\cdot x_2)^{n-1}; \quad (F_n)^2-F_{n-1}\cdot F_{n+1} =(-1)^{n-1};$$

$$-[(F_n)^2-F_{n-1}\cdot F_{n+1}] = -(-1)^{n-1}; \quad \mathbf{F_{n-1}\cdot F_{n+1}-(F_n)^2 =(-1)^n}.$$

Формула Кассини для чисел Фибоначчи – это частный случай доказанной для любых рекурсий 2-го порядка и 2-й степени Теоремы А.

Перейдем к обобщению формулы Кассини для «суммарных» рядов с $f_0=2$, $f_1=x_1+x_2$.

Формула Кассини для чисел Люка – это частный случай общей Теоремы В для любых линейных рекурсий 2-го порядка.

Теорема В. Если $f_0=2$, $f_1=x_1+x_2$, то для любого целого $n\geq1$ в числовой последовательности, соответствующей рекурсии 2-го порядка с аттракторами x_1 и x_2, справедливо равенство $(f_n)^2-f_{n-1}\cdot f_{n+1} = -(x_1\cdot x_2)^{n-1}\cdot(x_1-x_2)^2$.

То есть разность квадрата любого n-го ($n\geq1$) члена любой числовой последовательности с $f_0=2$, $f_1= x_1+x_2$, соответствующей рекурсии 2-го порядка с аттракторами x_1 и x_2, и произведения двух соседних членов этой последовательности всегда равна взятой со знаком минус (n–1)-ой степени произведения аттракторов $x_1\cdot x_2$, умноженной на квадрат разности этих аттракторов.

Для «золотой» рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ имеем $x_1=\Phi$ и $x_2= -\Phi^{-1}$, и начальным условиям (2; x_1+x_2) соответствует ряд Люка, состоящий из чисел $\mathbf{L_n}$.
Поскольку $x_1\cdot x_2= -1$; $x_1-x_2=\sqrt{5}$, **Теорема В** для рекурсии $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ вырождается в свой частный случай, а именно, в известную формулу Кассини $(L_n)^2-L_{n-1}\cdot L_{n+1}=5\cdot(-1)^n$ для чисел Люка [7, стр. 53]:

$(f_n)^2-f_{n-1}\cdot f_{n+1}= -(x_1\cdot x_2)^{n-1}\cdot(x_1-x_2)^2$; $\quad (L_n)^2-L_{n-1}\cdot L_{n+1} = -(-1)^{n-1}\cdot(\Phi+\Phi^{-1})^2$;

$(L_n)^2-L_{n-1}\cdot L_{n+1} = -5\cdot(-1)^{n-1}$; $\quad \mathbf{(L_n)^2-L_{n-1}\cdot L_{n+1} = 5\cdot(-1)^n}$.

Формула Кассини для чисел Люка – это частный случай Теоремы В для любых рекурсий 2-го порядка и 2-й степени.

По мнению автора, **родовыми признаками**, общими для известных и новых, обобщенных формул Кассини, являются тождественные левые части этих формул. И для чисел Фибоначчи и Люка, и для любых числовых рекуррентных последовательностей с унифицированными начальными условиями рассматриваются разности квадрата любого n-го ($n\geq1$) члена последовательности и произведения двух соседних членов этой последовательности. При этом числа Фибоначчи и Люка являются частными случаями, и на них также прекрасно «работают» обобщенные формулы.

7. Заключение

Итак, благодаря введению нового понятия «родовых признаков» (Г.Аракелян, А.Стахов), удельный вес «золота» в Математике Гармонии несколько увеличился. Можно было рассмотреть ещё и M-пропорции, N-пропорции, D-рекурсии, однако ничего принципиально нового в тему «родовых признаков» это бы не привнесло.

Автор надеется, что ему, как и предыдущим авторам статей на тему «родовых признаков», также удалась попытка обобщения некоторых «золотых» категорий: пропорции, уравнений, некоторых популярных формул.

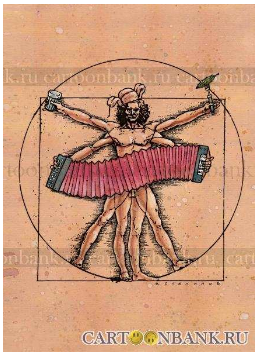
В природе месторождение золота считается промышленным, если содержание золота в породе превышает 2 грамма на тонну. Жестокий порог – всего пятая часть от тысячной доли процента! К сожалению, нельзя сказать, на сколько процентов увеличится доля «золотых» рекурсий после выхода в свет данной статьи. Да это и не нужно.

И не это главное. Важно, что усилия «золотоискателей» по обобщению «золотых» категорий стали более слаженными и гармоничными. Главное то, что мы, по словам Д. Клещёва, убедились в следующем:

«***Если мы хотим, чтобы наши знания расширялись, если мы хотим научиться работать в масштабах, которые пока не доступны современной теории чисел, то в научном сообществе, прежде всего, необходимо покончить с безответственными обвинениями в занятиях «лженаукой». За последние годы в российской науке и без того произошло беспрецедентное сужение компетенции отдельных ученых, которые отучены не только отстаивать, но и высказывать оригинальные мысли, предложения из опасений чем-либо выделиться из общей массы***» **[3]**.

Литература

1. А.П. Стахов, «Родовые признаки» для обобщенных золотых сечений // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.17515, 10.06.2012, http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321260.htm
2. В.Л. Владимиров, А.П. Стахов, Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-67, публ.16523, 22.05.2011
3. Д. Клещев, О движении и неподвижности в науке // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17520, 13.06.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321261.htm
4. Грант Аракелян, Реплика на статью А.П.Стахова «"Родовые признаки" для обобщённых золотых сечений» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17521, 13.06.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321262.htm
5. Грант Аракелян, О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm
6. В.Л. Владимиров, А.П. Стахов, Об унификации числовых рядов рекурсий второго порядка // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.17350, 07.03.2012
7. Scott Olsen. The golden section. Nature`s greatest secret. Walker&Company, New York, 2006.
8. В.Л. Владимиров, Обобщение формул Кассини на любую рекурсию второго порядка с унифицированными начальными условиями // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17413, 10.04.2012.



18.06.12 влв