В.П. Шенягин

Оптимальность в гармонии

Содержание

В открытом море вода синяя, как лепестки красивейших васильков,
и прозрачная, как тончайшее стекло. Но зато и глубоко же там!
Так глубоко, что никакие якори не достанут до дна,
и на него пришлось бы поставить немало колоколен одну на другую,
чтобы верхняя высунулась из воды. На дне морском живут русалки.
Ганс Христиан Андерсен. “Русалочка”

Оптимальность в гармонии: задача поиска

Гармоничных соотношений множество. Они составляют несколько групп, в числе которых обобщенные золотые, металлические (мантиссовые), корневые, дробные и иные пропорции, обозначаемые символами p-, s-, r-, f-пропорции [1-5].

По всей видимости, их взаимодействия и сочетания должны характеризоваться определенной оптимальностью. Выявим её, т. е. *оптимальность в гармонии* или *гармонию гармонии*.

Для чего рассмотрим две задачи.

Задача 1. Найти отношение двух частей целого: большей части A и меньшей a.

Если при этом учесть и величину самого целого и его соотношение с большей частью, то идеальное решение известно как золотое сечение или золотая пропорция, т. е.

$$\frac{A}{a} = \frac{a+A}{A} = \phi .$$

Задача 2. Найти коэффициент, уравнивающий части A и a при умножении меньшей и делении большей части на некоторый коэффициент k, который и станет искомым, т. е.

$$\frac{A}{k} = ka, \qquad (1)$$

где $A + a = 1$ или $A + a = 100\,\%$; $a \le 0{,}5$ или $50\,\%$.

Этот уравнивающий коэффициент находится по формуле

$$k = \sqrt{\frac{A}{a}} . \qquad (2)$$

Назовем его коэффициентом оптимальности.

Правило Парето «80/20»

Проверка на оригинальность для идеи: главное –
не отсутствие одного единственного предшественника,
а наличие многих, но не совместимых друг с другом.
Н.Н. Талеб

Одно из решений (1) известно как оптимальность по Парето для $k = 2$, при котором части соотносятся в пропорции 80/20, приводя к соотношению

$$\frac{80}{2} = 2 \cdot 20.$$

«Соотношение «80/20» одновременно несет в себе только ему присущие бинарные признаки в виде «удвоения меньшего и половинки большего» [6]. Собственно последнее равенство, приведенное Сергеем Василенко, и натолкнуло автора настоящей статьи на изыскания, приведенные ниже.

Начнем с констатации, что имеется множество вариантов, удовлетворяющих соотношению (1).

Парето-оптимальность в целых *A* и *a*

В таблице 1 приведем соотношения для целых значений k при целых значениях долей A и a, выраженных в процентах.

Таблица 1

Парето-оптимальность при целых k

A/a, %	A/a, доли	k^2	k	$A/k = ka$
50/50	0,5/0,5	1	1	50
80/20	0,8/0,2	4	2	40
90/10	0,9/0,1	9	3	30

Например, соотношение «90/10» используется в радиотехнике при измерении параметров видеоимпульса, а именно:

– длительность переднего фронта между уровнями 0,1 и 0,9 от максимального значения импульса, принятого за единицу;

– длительность заднего фронта между уровнями 0,9 и 0,1;

– длительность импульса на уровне 0,1;

– длительность импульса на уровне 0,9.

Коэффициент, уравнивающий части в соотношении 90/10, равен 3.

Выражение равенства частей принимает вид

$$\frac{90}{3} = 3 \cdot 10,$$

означающий, по терминологии [6], *утроение меньшего и треть большего*.

Таблицу 1 дополним соотношениями для целых значений долей, выраженных в процентах, пусть и не при целых k.

Таблица 1 (дополнение)

Парето-оптимальность при целых *A* и *a* и нецелых *k*

A/a, %	A/a, доли	k^2	k	$A/k = ka$
60/40	0,6/0,4	3/2	$\sqrt{\frac{3}{2}}=1{,}225$	49
70/30	0,7/0,3	7/3	$\sqrt{\frac{7}{3}}=1{,}528$	45,8

Разумеется, встречаются соотношения, выраженные в процентах нецелыми значениями частей *A* и *a*. Некоторые из них соответствуют известным гармоничным отношениям.

Рассмотрим последнее более детально и системно, опираясь на дробные, металлические и корневые пропорции.

Величины частей *A* и *a* приведем в долях единицы путем отбрасывания знаков мантисс, а не посредством округления.

Первичным здесь станет нахождение величины

$$k_m^2 = \frac{A_m}{a_m} \tag{3}$$

и её равенство гармоничным пропорциям или близость к ним. Желательно, чтобы мантиссы коэффициентов k_m^2 и частей A_m или a_m были бы равными.

Вторичным (производным) по действию, но основным по сути, будет нахождение величины $k_m = \sqrt{\frac{A_m}{a_m}}$ и, по возможности, установление её связи с гармоничными пропорциями на “языке” последних.

При этом возможны две модели конструирования соотношений в зависимости от того, что задается первично: бóльшая часть *A* или меньшая *a*, т. е:

$$\frac{A}{1-A} \tag{4}$$

$$\frac{1-a}{a} \tag{5}$$

Итак… Или лучше выразимся словами Г.Х. Андерсена из сказки «Снежная королева»: «Ну, начнем! Вот дойдем до конца…, тогда будем знать больше, чем теперь».

Парето-оптимальность и дробные *f*-пропорции

Известны дробные f_m-пропорции [5].

Малые дробные пропорции составляют ряд чисел в пределах $0{,}618... > \bar{f}_m > 1$:

$$0{,}618…;\ 0{,}732…;\ 0{,}791…;\ …;\ \bar{f}_m = \frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}.$$

Поэтому оптимальность по Парето организуем по модели (4), приняв малую дробную *f*-пропорцию $\bar{f}_m$ за бóльшую часть *A*.

Получим следующий примечательный результат.

Отношения долей целого по принципу Парето $\frac{A_m}{a_m}$, большую часть которого A_m представляют малые дробные *f*-пропорции $\bar{f}_m = \frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}$, равны большой дробной *f*-пропорции $f_m = \frac{\sqrt{m^2+4m}+m}{2}$:

$$\frac{A_m}{a_m} = \frac{\bar{f}_m}{1-\bar{f}_m} = f_m. \qquad (6)$$

При этом $k_m^2 = f_m$; $k_m^2 = \bar{f}_m + m$.

Пример.

$\frac{\bar{f}_2}{1-\bar{f}_2} = f_2$; $\frac{0{,}732}{1-0{,}732} = 2{,}732$.

То есть отличительной *особенностью дробных f-пропорций является их эквивалентность правилу Парето* в виде отношения большей и меньшей частей, т. е.

$$\frac{A_m}{a_m} = f_m,$$

где $A_m = \bar{f}_m$; $a_m = 1-\bar{f}_m$.

Численные значения Парето-оптимальности в дробных *f*-пропорциях представим в таблице 2.

Таблица 2

Парето-оптимальность в дробных *f*-пропорциях
(здесь и далее пропорциональные коэффициенты для однозначной узнаваемости приведены без округлений; отсюда, например, 0,618 + 0,381 не равно 1, что не должно смущать читателя)

m	A/a, доли	k^2	k^2	$k_m^2 = f_m$	$\bar{f}_m$	A/a, %, по Парето
1	0,618…/0,381…	1,618…	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$f_1 = \phi$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ldots$	60/40
2	0,732…/0,267…	2,732…	$\sqrt{3}+1$	f_2	$\sqrt{3}-1 = 0{,}732\ldots$	
3	0,791…/0,208…	3,791…	$\frac{\sqrt{21}+3}{2}$	f_3	$\frac{\sqrt{21}-3}{2} = 0{,}791\ldots$	80/20
4	0,828…/0,171…	4,828…	$2\sqrt{2}+2$	f_4	$2\sqrt{2}-2 = 0{,}828\ldots$	
5	0,854…/0,145…	5,854…	$\frac{3\sqrt{5}+5}{2}$	f_5	$\frac{3\sqrt{5}-5}{2} = 0{,}854\ldots$	85/15
6	0,872…/0,127…	6,872…	$\sqrt{15}+3$	f_6	$\sqrt{15}-3 = 0{,}872\ldots$	
7	0,887…/0,112…	7,887…	$\frac{\sqrt{77}+7}{2}$	f_7	$\frac{\sqrt{77}-7}{2} = 0{,}887\ldots$	
8	0,898…/0,101…	8,898…	$2\sqrt{6}+4$	f_8	$2\sqrt{6}-4 = 0{,}898\ldots$	90/10

Продолжение таблицы 2

m	A/a, доли	k^2	k^2	$k_m^2 = f_m$	$\bar{f}_m$	A/a, %, по Парето
9	0,908…/0,091…	9,908…	$\frac{\sqrt{117}+9}{2}$	f_9	$\frac{\sqrt{117}-9}{2}=0{,}908\ldots$	90/10
10	0,916…/0,083…	10,916…	$\frac{\sqrt{140}+10}{2}$	f_{10}	$\frac{\sqrt{140}-10}{2}=0{,}916\ldots$	
11	0,922…/0,077…	11,922…	$\frac{\sqrt{165}+11}{2}$	f_{11}	$\frac{\sqrt{165}-11}{2}=0{,}922\ldots$	
12	0,928…/0,071…	12,928…	$\frac{\sqrt{192}+12}{2}$	f_{12}	$\frac{\sqrt{192}-12}{2}=0{,}928\ldots$	
13	0,933…/0,066…	13,933…	$\frac{\sqrt{221}+13}{2}$	f_{13}	$\frac{\sqrt{221}-13}{2}=0{,}933\ldots$	
m	$\frac{\bar{f}_m}{1-\bar{f}_m}$	–	$\frac{\sqrt{m^2+4m}+m}{2}$	f_m	$\frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}$	

Доказательство равенства (6).

Разность $\frac{\bar{f}_m}{1-\bar{f}_m} - f_m$ должна быть равна нулю.

Подставив в нее значения $\bar{f}_m = \frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}$ и $f_m = \frac{\sqrt{m^2+4m}+m}{2}$, получим:

$$\frac{\frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}}{1-\frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}} - \frac{\sqrt{m^2+4m}+m}{2} = \frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2-\sqrt{m^2+4m}+m} - \frac{\sqrt{m^2+4m}+m}{2} =$$

$$= 2\sqrt{m^2+4m} - 2m - 2\sqrt{m^2+4m} - 2m + \left(\sqrt{m^2+4m}\right)^2 + m\sqrt{m^2+4m} - m\sqrt{m^2+4m} - m^2 = 0.$$

Красным цветом в таблице 2 выделены значения, близкие к целым величинам долей по принципу Парето.

Парето-оптимальность в целых числах (в %), близких к дробным f-пропорциям (округленным), приведена в таблице 3.

Таблица 3

Парето-оптимальность в целых числах (в %), близких к дробным *f*-пропорциям

A/a, %, по Парето	A/a, %	f_m	k_m^2
60/40	61,8/38,2	f_1	1,618
80/20	79,1/20,8	f_3	3,791
85/15	85,4/14,6	f_5	5,854
90/10	89,8/10,2	f_8	8,898
90/10	90,8/9,2	f_9	9,908

Какие соотношения выбрать в качестве наиболее распространенных? Ответ на этот вопрос сформулируем ниже после увязки с правилом Парето металлических и, особенно, корневых пропорций.

Парето-оптимальность и металлические (мантиссовые) *s*-пропорции

Организуем оптимальность по Парето согласно модели (5) $\frac{1-a}{a}$, где a – искомая пропорция, принимаемая за малую часть отношения по Парето.

Очевидно, что модель следует привести к виду $1-a=a\left(\frac{1}{a}-1\right)$.

Обозначив обратное значение пропорции через $\bar{a}$, получим $1-a=a\bar{a}-a$.

Для выполнения равенства должно выполняться условие $a\bar{a}=1$.

Решение задачи заложено в поиске пригодных пропорций, для которых произведение большой (прямой) и малой (обратной) пропорции равно единице. Данному условию отвечает единственная группа пропорций, имеющая равные мантиссы обратных величин. Это наши мантиссовые s_m-пропорции (или металлические λ_m-пропорции по В. Шпинадель) [2,3].

Их малые (обратные) пропорции составляют ряд чисел в пределах $0>\bar{s}_m>0{,}618\ldots$:

$$0{,}618\ldots;\ 0{,}414\ldots;\ 0{,}303\ldots;\ 0{,}236\ldots;\ 0{,}193\ldots;\ \ldots;\ \bar{s}_m=\frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}.$$

Решение найдено. Оптимальность по Парето по модели (5) надо организовать, приняв малую металлическую мантиссовую *s*-пропорцию $\bar{s}_m$ за малую часть a_m.

Получим следующий результат.

Отношения долей целого по принципу Парето $\frac{A_m}{a_m}$, меньшую часть которого a_m представляют малые металлические (мантиссовые) *s*-пропорции $\bar{s}_m=\frac{\sqrt{m^2+4m}-m}{2}$, равны большим металлическим (мантиссовым) *s*-пропорциям $s_m=\frac{\sqrt{m^2+4m}+m}{2}$ за вычетом единицы:

$$\frac{A_m}{a_m}=\frac{1-\bar{s}_m}{\bar{s}_m}=s_m-1. \quad (7)$$

Пример.

$$\frac{1-\bar{s}_2}{\bar{s}_2}=s_2-1;\ \frac{1-0{,}414}{0{,}414}=2{,}414-1.$$

Численные значения Парето-оптимальности в металлических (мантиссовых) s-пропорциях представим в таблице 4.

Таблица 4

Парето-оптимальность в металлических (мантиссовых) s-пропорциях

m	A/a, доли	k^2	k^2	k^2	$\bar{s}_m$	A/a, %, по Парето
1	0,381…/0,618…	0,618…	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$s_1-1=$ $=\phi-1=$ $=\bar{\phi}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618\ldots$	40/60
2	0,585…/0,414…	1,414…	$\sqrt{2}$	s_2-1	$\sqrt{2}-1=0{,}414\ldots$	60/40
3	0,697…/0,302…	2,302…	$\frac{\sqrt{13}+1}{2}$	s_3-1	$\frac{\sqrt{13}-3}{2}=0{,}302\ldots$	70/30
4	0,763…/0,236…	3,236…	$\sqrt{5}+1$	s_4-1	$\sqrt{5}-2=0{,}236\ldots$	
5	0,807…/0,192…	4,192…	$\frac{\sqrt{29}+3}{2}$	s_5-1	$\frac{\sqrt{29}-5}{2}=0{,}192\ldots$	80/20
6	0,837…/0,162…	5,162…	$\sqrt{10}+2$	s_6-1	$\frac{2\sqrt{10}-6}{2}=0{,}162\ldots$	
7	0,859…/0,140…	6,140…	$\frac{\sqrt{53}+5}{2}$	s_7-1	$\frac{\sqrt{53}-7}{2}=0{,}140\ldots$	
8	0,872…/0,123…	7,123…	$\sqrt{17}+3$	s_8-1	$\sqrt{17}-4=0{,}123\ldots$	
9	0,890…/0,109…	8,109…	$\frac{\sqrt{85}+7}{2}$	s_9-1	$\frac{\sqrt{85}-9}{2}=0{,}109\ldots$	
10	0,900…/0,099…	9,099…	$\sqrt{26}+4$	$s_{10}-1$	$\sqrt{26}-5=0{,}099\ldots$	90/10
11	0,909…/0,090…	10,090…	$\frac{\sqrt{125}+9}{2}$	$s_{11}-1$	$\frac{\sqrt{125}-11}{2}=0{,}090\ldots$	90/10
12	0,917…/0,082…	11,082…	$\frac{\sqrt{148}+10}{2}$	$s_{12}-1$	$\frac{\sqrt{148}-12}{2}=0{,}082\ldots$	
13	0,923…/0,076…	12,076…	$\frac{\sqrt{173}+11}{2}$	$s_{13}-1$	$\frac{\sqrt{173}-13}{2}=0{,}076\ldots$	
14	0,928…/0,071…	13,071…	$\frac{\sqrt{200}+12}{2}$	$s_{14}-1$	$\frac{\sqrt{200}-14}{2}=0{,}071$	
15	0,933…/0,066…	14,066…	$\frac{\sqrt{229}+13}{2}$	$s_{15}-1$	$\frac{\sqrt{229}-15}{2}=0{,}066$	
m					$\frac{\sqrt{m^2+4}-m}{2}$	

Доказательство равенства (7) очевидно.

$\frac{1-\bar{s}_m}{\bar{s}_m} = s_m - 1$. Откуда $1-\bar{s}_m = s_m\bar{s}_m - \bar{s}_m$.

Левая часть выражения равна правой, поскольку $s_m\bar{s}_m = 1$.

Более формальное доказательство равенства (7), которое, впрочем, излишне, заключается в следующем:

$$\frac{1-\bar{s}_m}{\bar{s}_m} = \frac{1-\frac{\sqrt{m^2+4}-m}{2}}{\frac{\sqrt{m^2+4}-m}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{m^2+4}-m}{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{m^2+4}-m} - 1 = \frac{\sqrt{m^2+4}+m}{2} - 1 = s_m - 1.$$

Здесь $\frac{2}{\sqrt{m^2+4}-m} = \frac{\sqrt{m^2+4}+m}{2}$, поскольку $\left(\sqrt{m^2+4}+m\right)\left(\sqrt{m^2+4}-m\right) = 4$;

$\left(\sqrt{m^2+4}\right)^2 - m^2 = 4$; $m^2+4-m^2 = 4$. Что и требовалось доказать.

Парето-оптимальность в целых числах (в %), близких к металлическим (мантиссовым) *s*-пропорциям, приведена в таблице 5.

Таблица 5

Парето-оптимальность в целых числах (в %),
близких к металлическим (мантиссовым) *s*-пропорциям

A/*a*, %, по Парето	*A*/*a*, %	$s_m - 1$	k^2
40/60	38,2/61,8	$s_1 - 1$	0,618
60/40	58,6/41,4	$s_2 - 1$	1,414
70/30	69,8/30,2	$s_3 - 1$	2,302
80/20	80,8/19,2	$s_5 - 1$	4,192
90/10	90,1/9,9	$s_{10} - 1$	9,099

Парето-оптимальность и корневые *r*-пропорции

Известны корневые r_m-пропорции [4].

Большие r_m-пропорции составляют ряд чисел в пределах $1 < r_m < \infty$:

$$1;\ 1{,}618\ldots;\ 2;\ 2{,}302\ldots;\ 2{,}561\ldots;\ 2{,}791\ldots;\ 3;\ \ldots;\ r_m = \frac{\sqrt{1+4m}+1}{2}.$$

Малые, но не обратные $\bar{r}_m$-пропорции составляют ряд чисел в пределах $0 < \bar{r}_m < \infty$:

$$0;\ 0{,}618\ldots;\ 1;\ 1{,}302\ldots;\ 1{,}561\ldots;\ 1{,}791\ldots;\ 2;\ \ldots;\ \bar{r}_m = \frac{\sqrt{1+4m}-1}{2}.$$

Поскольку в корневых пропорциях, за исключением 0,618…, нет чисел, меньших 1, приходится организовывать оптимальность по Парето по модели, приняв мантиссы пропорций за одну из частей отношения вида Парето.

Численные значения Парето-оптимальности в корневых *r*-пропорциях представим в таблице 6.

Таблица 6

Парето-оптимальность в корневых r-пропорциях

m	A/a, доли	k^2	k^2	$k^2 = r_m$	r_m и $\bar{r}_m$	A/a, %, по Парето
1	0,618…/0,381…	1,618	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$r_1 = \phi$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618\ldots$	60/40
3	0,697…/0,302…	2,302	$\frac{\sqrt{13}+1}{2}$	r_3	$\frac{\sqrt{13}+1}{2} = 1{,}302\ldots$	70/30
4	0,561…/0,439…	1,280				
5	0,791…/0,208…	3,791	$\frac{\sqrt{21}+3}{2}$	$r_5 + 1$	$\frac{\sqrt{21}+1}{2} = 2{,}791\ldots$	80/20
7	0,807…/0,192…	4,192	$\frac{\sqrt{29}+3}{2}$	$r_7 + 1$	$\frac{\sqrt{29}+1}{2} = 3{,}192\ldots$	80/20
8	0,627…/0,372…	1,686				
9	0,541…/0,458…	1,180				
10	0,701…/0,298	2,350				
11	0,854…/0,145…	5,854	$\frac{\sqrt{45}+5}{2}$	$r_{11} + 2$	$\frac{\sqrt{45}+1}{2} = 3{,}854\ldots$	85/15
13	0,859…/0,140…	6,140	$\frac{\sqrt{53}+5}{2}$	$r_{13} + 2$	$\frac{\sqrt{53}+1}{2} = 4{,}140$	85/15
14	0,725…/0,274…	2,637				
15	0,594…/0,405…	1,468				
16	0,531…/0,468…	1,132				
17	0,653…/0,346…	1,884				
18	0,772…/0,227…	3,386				
19	0,887…/0,112…	7,887	$\frac{\sqrt{77}+7}{2}$	$r_{19} + 3$	$\frac{\sqrt{77}+1}{2} = 4{,}887\ldots$	89/11
21	0,890…/0,109…	8,109	$\frac{\sqrt{85}+9}{2}$	$r_{21} + 3$	$\frac{\sqrt{85}+1}{2} = 5{,}109$	89/11
22	0,783…/0,216…	3,608				
23	0,678…/0,321…	2,107				
24	0,575…/0,424…	1,356				
25	0,524…/0,475…	1,104				
26	0,623…/0,376…	1,655				
27	0,720…/0,279…	2,573				
28	0,815…/0,184…	4,407				
29	0,908…/0,091…	9,908	$\frac{\sqrt{117}+9}{2}$	$r_{29} + 4$	$\frac{\sqrt{117}+1}{2} = 5{,}408\ldots$	90/10
31	0,909…/0,090…	10,090	$\frac{\sqrt{125}+9}{2}$	$r_{31} + 4$	$\frac{\sqrt{125}+1}{2} = 6{,}090\ldots$	90/10
32	0,821…/0,178…	4,589				
33	0,733…/0,266…	2,755				
…						

Продолжение таблицы 6

m	A/a, доли	k^2	k^2	$k^2 = r_m$	r_m и $\bar{r}_m$	A/a, %, по Парето
41	0,922…/0,077…	11,922	$\frac{\sqrt{165}+11}{2}$	$r_{41}+5$	$\frac{\sqrt{165}+1}{2}=6{,}922\ldots$	92/8
43	0,923…/0,076…	12,076	$\frac{\sqrt{173}+11}{2}$	$r_{43}+5$	$\frac{\sqrt{173}+1}{2}=7{,}076\ldots$	92/8
…						
55	0,933…/0,066…	13,933	$\frac{\sqrt{221}+13}{2}$	$r_{55}+6$	$\frac{\sqrt{221}+1}{2}=7{,}933\ldots$	93/7
57	0,933…/0,066…	14,066	$\frac{\sqrt{229}+13}{2}$	$r_{57}+6$	$\frac{\sqrt{229}+1}{2}=8{,}066\ldots$	93/7
m		–			$\frac{\sqrt{1+4m}+m}{2}$	

Парето-оптимальность в целых числах (в %), близких к дробным, металлическим и корневым пропорциям

Ко всему надо прикладывать свою мерку.
Убеждение и позиция автора

Ко всему надо прикладывать свою мерку.

Такой меркой для разрешения вопроса о согласованности Парето-оптимальности с гармоничными коэффициентами пропорций становятся корневые r-пропорции.

Итоговые результаты сведем в таблицу 7.

Обратим внимание на оптимальность, выраженную в f-пропорциях, но не получившую “подтверждения” со стороны r-пропорций, выделенную синим цветом.

Соотношения частей, приведенные в итоговой таблице 7, позволяют воспринимать ее сообразно «*оптимальной гармоничной матрицы*».

f-пропорции и s-пропорции, равные r-пропорциям, коррелирующие с Парето-оптимальностью, нечетные, а именно:

$$f_{2n-1},\ s_{2n+1}-1.$$

Парето-оптимальность объединяет r-, f- и s-пропорции в своем проявлении в этой оптимальности, делая их равными.

Найдем выражение для общего члена r-пропорции в таблице 7.

Рассмотрим полученный ряд индексов r в графе 4 таблицы для соответствующих f_m:

1, 5, 11, 19, 29, 41, 55, …

$1;\ 1+2\cdot2=5;\ 5+2\cdot3=1+2\cdot2+2\cdot3=11;\ 11+2\cdot4=1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4=19;\ \ldots$

Индекс для r:

$$1+2(2+3+4+\ldots+n)=1+2[(1+2+3+4+\ldots+n)-1]=1+2\frac{n(n+1)}{2}-2=n(n+1)-1.$$

В результате общий член в графе 4 таблицы 7 запишется в виде $r_{n(n+1)-1}+n-1$.

Аналогично общий член в графе 5 таблицы 7 есть $r_{n(n+1)+1}+n-1$, поскольку первый индекс r для соответствующих s_m равен 3.

Таблица 7

Парето-оптимальность в целых числах (в %),
близких к дробным, металлическим (мантиссовым) и корневым пропорциям

A/a	k^2	k^2	r_m	r_m	f_m	s_m	Парето A/a, %
0,381/ 0,618	0,618	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		–			40/60
0,585/ 0,414	1,414	$\sqrt{2}$		–		s_2-1	60/40
0,618/ 0,381	1,618	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$r_1=\phi$	–	$f_1=\phi$	–	60/40
0,698/ 0,302	2,302	$\frac{\sqrt{13}+1}{2}$	–	r_3	–	s_3-1	70/30
0,791/ 0,208	3,791	$\frac{\sqrt{21}+3}{2}$	r_5+1	–	f_3	–	80/20
0,807/ 0,192	4,192	$\frac{\sqrt{29}+3}{2}$	–	r_7+1	–	s_5-1	80/20
0,854/ 0,146	5,854	$\frac{\sqrt{45}+5}{2}$	$r_{11}+2$	–	f_5	–	85/15
0,859/ 0,140	6,140	$\frac{\sqrt{53}+5}{2}$	–	$r_{13}+2$	–	s_7-1	85/15
0,887/ 0,112	7,887	$\frac{\sqrt{77}+7}{2}$	$r_{19}+3$	–	f_7	–	89/11
0,890/ 0,109	8,109	$\frac{\sqrt{85}+7}{2}$	–	$r_{21}+3$	–	s_9-1	89/11
0,908/ 0,091	9,908	$\frac{\sqrt{117}+9}{2}$	$r_{29}+4$	–	f_9	–	90/10
0,909/ 0,090	10,090	$\frac{\sqrt{125}+9}{2}$	–	$r_{31}+4$	–	$s_{11}-1$	90/10
0,922/ 0,077	11,922	$\frac{\sqrt{165}+11}{2}$	$r_{41}+5$	–	f_{11}	–	92/8
0,923/ 0,076	12,076	$\frac{\sqrt{173}+11}{2}$	–	$r_{43}+5$	–	$s_{13}-1$	92/8
0,933/ 0,066	13,933	$\frac{\sqrt{221}+13}{2}$	$r_{55}+6$	–	f_{13}	–	93/7
0,933/ 0,066	14,066	$\frac{\sqrt{229}+13}{2}$	–	$r_{57}+6$	–	$s_{15}-1$	93/7
			$r_{n(n+1)-1}+n-1$	$r_{n(n+1)+1}+n-1$	f_{2n-1}	$s_{2n+1}-1$	

0,898/ 0,102	8,898	$2\sqrt{6}+4$	–		f_8	–	90/10
0,900/ 0,099	9,099	$\sqrt{26}+4$			–	$s_{10}-1$	90/10

Обобщенная Парето-оптимальность

Решим оптимизационную задачу в общем виде, приведя соответствующие уравнения и тождества.

Ситуация 1: части *A* и *a* заданы:

– соотношение частей $\frac{A}{a}$, где $A+a=100\,\%$ или $A+a=1$;

– коэффициент соотношения частей $k^2=\frac{A}{a}$;

– алгебраический коэффициент, уравнивающий части путем арифметической процедуры $\frac{A}{k}=ka$,

$$k=\sqrt{k^2}=\sqrt{\frac{A}{a}}.$$

Решению данной ситуационной задачи соответствует вышеизложенный материал.

Ситуация 2: задан уравнивающий коэффициент *k*:

– величина меньшей части целого

$$a=\frac{100}{1+k^2}, \tag{8}$$

– величина большей части целого

$$A=\frac{100k^2}{1+k^2} \tag{9}$$

или

$$A=100-a. \tag{10}$$

Пример. Задан коэффициент $k=\sqrt{2}\approx 1{,}414$.

Меньшая часть согласно (8): $a=\frac{100}{1+2}\approx 33{,}3$.

Бо́льшая часть согласно (10): $A=100-33{,}3=66{,}7$.

Большую часть можно определить и по формуле (9): $A=\frac{100\cdot 2}{1+2}\approx 66{,}7$.

Соотношение частей: $\frac{66{,}7}{33{,}3}=2$.

Соотношение, уравнивающее части: $\frac{66{,}7}{1{,}414}=1{,}414\cdot 33{,}3=47{,}1$.

Выполним расчеты для некоторых соотношений и сведем их в таблицы 8 и 9.

Таблица 8

Парето-оптимальность

$a/100$	A/a, доли	A/a, %	k^2	k	$A/k = ka$
1/2	0,5/0,5	50/50	1	1	50
1/3	0,667/0,333	66,7/33,3	2	$\sqrt{2}=1{,}414$	47,1
1/4	0,75/0,25	75/25	3	$\sqrt{3}=1{,}732$	43,3
1/5	0,8/0,2	80/20	4	2	40
1/6	0,833/0,167	83,3/16,7	5	$\sqrt{5}=2{,}236$	37,2

Продолжение таблицы 8

$a/100$	A/a, доли	A/a, %	k^2	k	$A/k = ka$
1/7	0,857/0,143	85,7/14,3	6	$\sqrt{6} = 2{,}449$	35
1/8	0,875/0,125	87,5/12,5	7	$\sqrt{7} = 2{,}646$	33,1
1/9	0,888/0,111	88,8/11,1	8	$2\sqrt{2} = 2{,}828$	31,4
1/10	0,9/0,1	90/10	9	3	30

Таблица 9

A/a, %	A/a, доли	k^2	k	$A/a = ka$
72,4/27,6	0,724/0,276	ϕ^2	$\phi = 1{,}618$	44,7
69,2/30,8	0,692/0,308	2,25	1,5	46,1
58,6/41,4	0,586/0,414	$\sqrt{2}$	$\sqrt[4]{2} = 1{,}189$	49,2

Соотношение 61,8/38,2 или оптимальность по П. Сергиенко для $k = \sqrt{\phi}$

Рассмотрим оптимальность частей целого в виде золотого сечения, т. е. поделенного в золотой пропорции 61,8/38,2 или $\frac{100\bar{\phi}}{100 - 100\bar{\phi}} = \frac{\bar{\phi}}{1 - \bar{\phi}}$, где $\bar{\phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$.

Уравнивающий коэффициент

$$\sqrt{\frac{\bar{\phi}}{1 - \bar{\phi}}} = \sqrt{\phi} \approx 1{,}272.$$

П.Я. Сергиенко считает, что именно пропорция $\sqrt{\phi} \approx 1{,}272$, возможно, является главной пропорцией, иллюстрируемой соответствующим прямоугольником [7]. Он пишет: «Таким образом, гармония пространственного континуума прямоугольной системы координат базируется на гармонии радикальных отношений пространственной триады прямоугольного треугольника: $\frac{\textit{гипотенуза}}{\textit{больший катет}} = \frac{\textit{больший катет}}{\textit{меньший катет}} = \sqrt{\phi}$ ».

Однако коэффициент пропорциональности $\sqrt{\phi} \approx 1{,}272$ всё же является производным от именно золотой пропорции, в т. ч. золотого сечения целого на две части.

Отметим, что в оригинальной идее Петра Сергиенко, кстати, приведшей С.Л. Василенко к выводам, изложенным в [8], к тому же заложен *двойной смысл золотой пропорции*: собственно золотая пропорция и уравнивающий коэффициент частей по принципу оптимальности по Парето.

О применяемости принципа Парето 80/20

Приведем ряд высказываний исследователей по этому поводу.

С.Л. Василенко считает, что [6]: «Главным здесь служат не столько цифры процентного соотношения, сколько сам факт, что распределение между причиной и результатом (вкладываемыми и получаемыми средствами) предсказуемо несогласованно. Только небольшая доля причин или потребляемых ресурсов отвечает за большую часть результатов».

В.А. Королев акцентирует внимание на следующем [9]:

«Так как же быть с «принципом Парето»? Применять, конечно, но помнить:

1. Этот принцип – только форма, в которой человек воспринимает избыточность, обеспечивающую эволюционную гибкость предприятий.

2. Норма избыточности в каждой области деятельности человека имеет своё характерное значение, не обязательно равное отношению 80:20 и предопределяемое вполне управляемыми факторами.

3. Избыточность <u>должна быть</u> не платой за прошлые ошибки и несовершенство, а инвестицией в будущее.

4. Принцип приносит пользу только в сочетании с хорошо освоенными технологиями моделирования процессов, прогноза и решения оптимизационных задач».

Мысль, изложенная в п. 3, весьма оригинальна. Поэтому было бы нелишним подчеркнуть словосочетания “<u>инвестиции в будущее</u>”.

Приведенные суждения свидетельствуют о перспективности результатов наших настоящих исследований во взаимоувязке и согласованности с известными *r*-, *s*-, *f*-пропорциями.

Выводы

1. Главная тайна принципа Парето, видимо, в том, что он является моделью оптимальности, согласованности гармоничных соотношений, т. е. *оптимальностью в гармонии* или *гармонией гармонии*.

2. Правило 80/20 характеризует связь с дихотомией $\frac{80}{2} = 2 \cdot 20$ [6].

3. Правило 61,8…/38,1…, т. е. деление целого в золотом сечении, характеризует связь с золотой пропорцией

$$\frac{61{,}8\ldots}{\sqrt{\phi}} = \sqrt{\phi} \cdot 38{,}1\ldots$$

Другими словами,

Деление целого в золотой пропорции характеризует его связь с самой золотой пропорцией согласно принципу Парето, получая шедевр в виде “золотая пропорция в золотой пропорции”, некую “золотую” “вещь в себе”.

4. Данный вывод 3 позволяет именно так воспринимать идею Петра Сергиенко [7] о роли золотой пропорции в сфере пропорций. Извлечение квадратного корня из золотой пропорции, как из числа, переносит ее (золотую пропорцию) из линейных координат в плоскостные. Это и трактует прямоугольный треугольник, на котором П.Я. Сергиенко конструирует свои убеждения.

Расширением идеи П.Я. Сергиенко на многомерность явилась модель, предложенная С.Л. Василенко, иллюстрируемая револьвентой [8].

5. Разумеется, золотая пропорция ϕ не уступает своей главенствующей роли в гармонии, позволяя проявлению принципа Парето через связующий коэффициент $\sqrt{\phi}$, но не позволяя ему $\left(\sqrt{\phi}\right)$ «свергать» себя с доминирующего пьедестала гармонии.

В мироздании (природе, науке, технике, экономике, обществе…) уживаются, по всей вероятности бесконфликтно, и золотая пропорция, и пропорция $\sqrt{\phi}$, и многомерность (револьвента).

Более того, такая бесконфликтная уживаемость является следствием действия принципа Парето, к которому также причастны дробные и металлические (мантиссовые) пропорции, и особенно корневые пропорции, где во всех из них частным случаем выступает золотая пропорция.

6. Корневые r-пропорции выступают мерой для разрешения вопроса о согласованности Парето-оптимальности с гармоничными коэффициентами дробных и металлических (мантиссовых) пропорций.

7. Отношения большей и меньшей частей есть большие дробные f-пропорции:

$$k_m^2 = \frac{A_m}{a_m} = f_m .$$

Большие дробные f-пропорции, по сути, являются сущностью коэффициентов, уравнивающих части A_m и a_m при умножении меньшей и делении большей части на коэффициент $\sqrt{f_m}$:

$$\frac{A_m}{\sqrt{f_m}} = \sqrt{f_m} \cdot a_m .$$

Иными словами, равнозначно пункту 1 подчеркнута основная особенность дробных пропорций:

отличительной особенностью дробных f-пропорций является их эквивалентность правилу Парето в виде отношения большей и меньшей частей, т. е.

$$\frac{A_m}{a_m} = f_m .$$

Да и с их названием, – дробные, вышло в меру удачно: бо́льшая часть дробится, как и подобает, с помощью дробной пропорции, уравниваясь с меньшей частью после ее умножения на ту же дробную величину – коэффициент оптиммальности.

Сущность дробных f-пропорций $\sqrt{f_m}$ – это коэффициент оптимальности соотношения двух частей целого по принципу Парето.

8. Даже гармонии необходима внутренняя гармония или оптимальность, согласованность.

Тайны нужны для того, чтобы их раскрывали.

Раскрывая тайны, исследователь, в первую очередь, находит себя.

Если исследователь находит себя в поисках гармонии, он находит гармонию.

«Время в каждую эпоху дарило людям некоторые истины, но у него осталось для нас еще много даров» (Клод Адриан Гельвеций, (1715-1771), французский философ-материалист).

Настоящий материал лишний раз свидетельствует в пользу необходимости и своевременности выделения в математике третьего направления в ее миссии – *математики гармонии*, что осуществил Алексей Стахов [10].

Вероятно, *в мироздании ничто не вечно, кроме гармонии и самого мироздания*.

Источники

1. *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

2. *Шенягин В.П.* Пифагор, или Каждый создает свой миф. Философское эссе / Ежемесячный литературный журнал Союза писателей Молдовы “Кодры. Молдова литературная”. – Кишинев, Кодры. Молдова литературная, 1997, № 9-10. – 288 с., с.204-227.

2а. *Шенягин В.П.* «Пифагор, или Каждый создает свой миф» – четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых s-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm.

3. *Vera W. de Spinadel*, From the Golden Mean to Chaos, Nueva Librerнa (1998), second edition Nobuko (2004).

3а. *Vera W. de Spinadel*. The metallic means family and forbidden symmetries the metallic means family and forbidden symmetries // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12603, 18.11.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320033.htm.

4. *Шенягин В.П.* Корневые *r*-пропорции // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17112, 17.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322086.htm.

5. *Шенягин В.П.* Дробные *f*-пропорции // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17213, 13.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322120.htm.

6. *Василенко С.Л.* «Золотые» сечения в распределении Парето // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 15292, 17.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322066.htm.

7. *Сергиенко П.Я.* Гармоничные («золотые») прямоугольные системы координат двухмерного пространства // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 16992, 17.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322033.htm.

8. *Василенко С.Л.* Главная тайна золотой пропорции // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17178, 04.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322109.htm.

9. *Королев В.А.* О природе “принципа Парето“. – http://www.certicom.kiev.ua/pareto-prinzyp.html.

10. *Стахов А.П.* Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и новые направления в развитии математики, теоретической физики и информатики // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ.14135, 12.01.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321064.htm.