Семенюта Н. Ф.

СВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ ЛЕСТНИЧНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С МАТРИЦАМИ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И СООТНОШЕНИЕМ КАССИНИ

Введение. В работе [1] приведены основы анализа линейных электрических цепей методом лестничных чисел. В развитие метода лестничных чисел в настоящей статье рассмотрена связь параметров четырехполюсников, составляющих основу лестничных электрических цепей, с основным уравнением передачи четырехполюсника и последнего с так называемым соотношением Кассини и цепными матрицами (Q-матрицами Фибоначчи) [2, 3].

В связи с появлением в последнее время нескольких работ по анализу свойств соотношения Кассини [4, 5, 6] хочу также обратить внимание, на установленные автором проявления соотношения Кассини в однородных электрических цепях. С моей точки зрения связь соотношения Кассини с основным уравнением передачи электрических четырехполюсников неожиданна и удивительна, так как установлена через сотни лет, она подтверждает фундаментальность электрической модели последовательности Фибоначчи в природе, обществе, науке и технике [8, 9, 10, 11].

Уравнение передачи четырехполюсника. Пассивный четырехполюсник с подключенным генератором E (источником) и приемником $R_к$ (нагрузкой) электрической энергии (рисунок 1) характеризуется уравнениями передачи, которые могут быть выражены через соответствующие коэффициенты (проводимостей, сопротивлений и др.) [2].

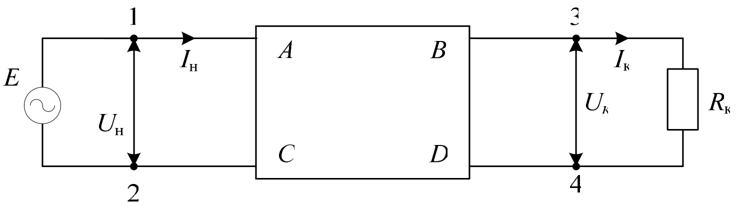

Рисунок 1 – Четырехполюсник с коэффициентами A, B, C и D

Простейшими структурами четырехполюсников являются ⅂- и Г-образные схемы (рисунок 2) на основе которых создаются Т- и П-образные схемы.

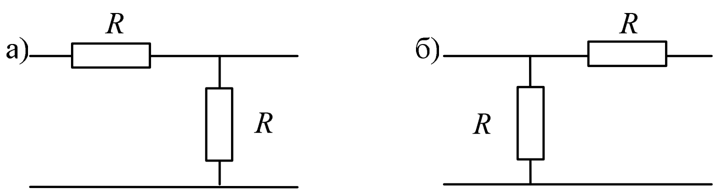

Рисунок 2 – Структуры четырехполюсников: *а* – ⅂-образная; *б* – Г-образный

Соотношения между величинами напряжения и тока на входе ($U_н$ и $I_н$) и выходе ($U_к$ и $I_к$) четырехполюсников определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} U_н &= AU_к + BI_к; \\ I_н &= CU_к + DI_к. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где A, B, C и D – коэффициенты пропорциональности:

$A = U_н/U_к$ – величина обратная коэффициенту трансформации по напряжению при разомкнутых зажимах 3, 4 (см. рисунок 1);

$B = U_н/I_к$ – величина, обратная проводимости передачи при замкнутых зажимах 3, 4;

$C = I_н/U_к$ – величина, обратная сопротивлению передачи при разомкнутых зажимах 3, 4;

$D = I_н/I_к$ – величина, обратная коэффициенту трансформации по току при закороченных зажимах 3, 4.

Связь между коэффициентами A, B. C и D характеризуется следующим уравнением:

$$AD - BC = 1. \qquad (2)$$

Входящие в уравнения (1), (2) коэффициенты пропорциональности A, B. C и D можно представить в виде цепной матрица типа A [2].

$$\|\grave{A}\| = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix}, \qquad (3)$$

В зарубежной литературе матрицу (3) также называют Q-матрицей Фибоначчи [3]. Такое название связано с тем, что коэффициенты A, B. C и D для четырехполюсников, представленных на рисунке 2, определяются числами последовательности Фибоначчи:

$$\begin{matrix} 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & 34, & 55, & 89, & 144, \ldots, \\ F_1, & F_2, & F_3, & F_4, & F_5, & F_6, & F_7, & F_8, & F_9, & F_{10}, & F_{11}, & F_{12}, \ldots \end{matrix} \qquad (4)$$

.

Последовательность (4) – это рекуррентная (возвратная) последовательность, у которой каждый последующий ее член (кроме первых двух $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$) равен сумме двух предыдущих:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \qquad (5)$$

Из последовательности (4) следует также известное соотношение Кассини, что квадрат любого числа Фибоначчи равен

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} - (-1)^n. \qquad (6)$$

а квадратам четных и нечетных членов последовательности равны соответственно соотношениям:

$$F_{2n}^{2} = F_{2n-1}F_{2n+1} - 1, \qquad (7)$$

$$F_{2n-1}^{2} = F_{2n}F_{2n-2} + 1. \qquad (8)$$

Соотношение Кассини (6) одно из замечательных свойств чисел Фибоначчи, обнаруженных в 1680 г. французским астрономом Жан-Домеником Кассини (1625–1712).

Цепные матрицы четырехполюсников. Матрицы электрических цепей, состоящих из одного (n = 1), двух (n = 1) и трех (n = 3) Ꞁ-образных четырехполюсников с резисторами R_1 = R_2 = 1 (рисунок 3), соответственно равны:

$$\|\grave{A}_1\| = \|Q_1\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{Vmatrix}, \qquad n = 1,$$

$$\|\grave{A}_2\| = \|Q_2\| = \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{Vmatrix}, \qquad n = 2,$$

$$\|\grave{A}_3\| = \|Q_3\| = \begin{Vmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_7 & F_6 \\ F_6 & F_5 \end{Vmatrix}, \qquad n = 3.$$

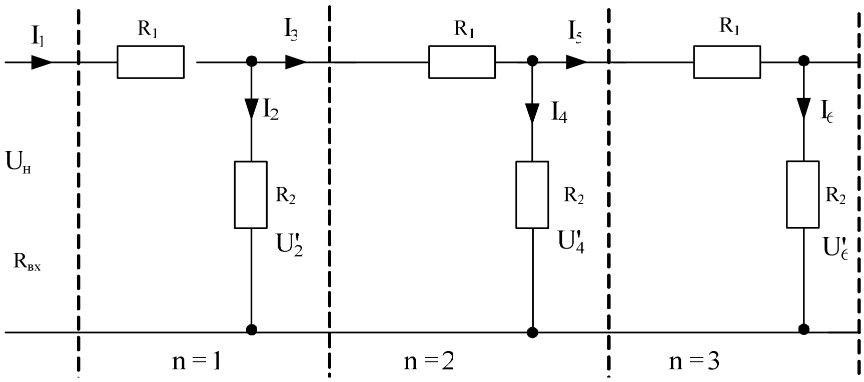

Рисунок 3

Из полученных матриц, следует, что

$$\|\grave{A}\| = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{Vmatrix}, \qquad (9)$$

Матрицы электрических цепей, состоящей из одного (n = 1), двух (n = 1) и трех (n = 3) Г- образных четырехполюсников с резисторами R_1 = R_2 = 1 (рисунок 4), соответственно равны:

$$\|A_1\| = \|Q_1\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{Vmatrix}, \qquad n = 1,$$

$$\|A_2\| = \|Q_2\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4 & F_5 \end{Vmatrix}, \qquad n = 2,$$

$$\|A_3\| = \|Q_3\| = \begin{Vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_5 & F_6 \\ F_6 & F_7 \end{Vmatrix}, \qquad n = 3.$$

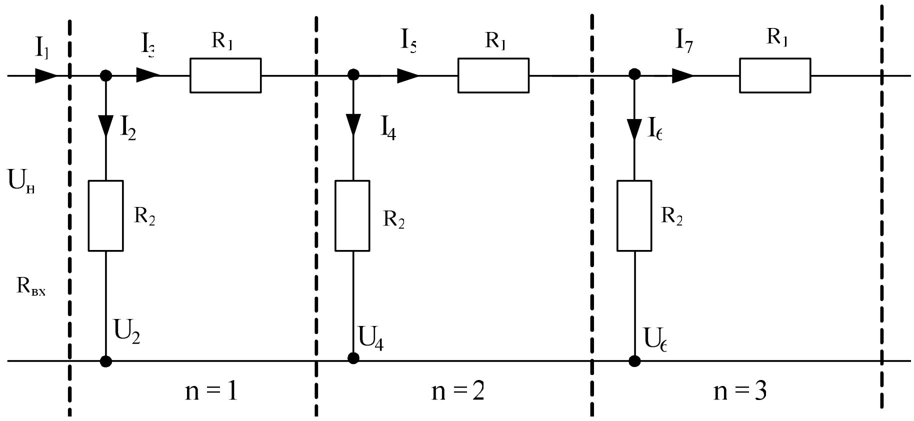

Рисунок 4

Из полученных матриц, следует, что

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Токи (напряжения) в ветвях цепи. В цепи, состоящей из трех четырехполюсников (n = 3) с сопротивлениями $R_1 = R_2 = 1$ (см. рисунок 3), токи (напряжения) приведены в таблице 1.

Таблица 1 – **Токи лестничной Т- цепи ($n = 3$)**

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
$\frac{F_6}{F_7}$	$\frac{F_5}{F_7}$	$\frac{F_4}{F_7}$	$\frac{F_3}{F_7}$	$\frac{F_2}{F_7}$	$\frac{F_1}{F_7}$

Токи (напряжения) в ветвях цепи**,** состоящей из трех Г-образных четырехполюсников (n = 3) с сопротивлениями $R_1 = R_2 = 1$ (см. рисунок 4) приведены в таблице 2.

Таблица 2 – **Токи лестничной Г- цепи ($n = 3$)**

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
$\frac{F_6}{F_5}$	$\frac{F_5}{F_5}$	$\frac{F_4}{F_5}$	$\frac{F_3}{F_5}$	$\frac{F_2}{F_5}$	$\frac{F_1}{F_5}$

Связь основного уравнения электрической цепи с соотношения Кассини. Из (7) и (8) следует, что коэффициенты B и C матриц электрических цепей равны и уравнение (2) для цепочечных Ꞁ- **и** Г-образные схем четырехполюсников принимает вид

$$AD - B^2 = 1 \text{ или } B^2 = AD - 1. \qquad (11)$$

В символах чисел Фибоначчи основное уравнение Ꞁ- и Г-образных схем четырехполюсников (9) для четных и нечетных членов определяются соответственно соотношениями:

$$F_{2n+1}F_{2n-1} - F^2_{2n} = 1 \text{ или } F^2_{2n} = F_{2n+1}F_{2n-1} - 1, \qquad (12)$$

$$F_{2n}F_{2n-2} - F^2_{2n-1} = -1 \text{ или } F^2_{2n-1} = F_{2n}F_{2n-2} + 1, \qquad (13)$$

которые соответствуют соотношению Кассини (6).

Связь токов П- и Т-образных структур электрических цепей и соотношения Кассини. Разделив члены соотношений (10) и (11) на F^2_{2n+2}, получим:

$$\frac{F_{2n+1}F_{2n-1}}{F^2_{2n+2}} - \frac{F^2_{2n}}{F^2_{2n+2}} = \frac{1}{F^2_{2n+2}} \text{ или } \frac{F^2_{2n}}{F^2_{2n+2}} = \frac{F_{2n+1}F_{2n-1}}{F^2_{2n+2}} - \frac{1}{F^2_{2n+2}}, \qquad (14)$$

$$\frac{F_{2n}F_{2n-2}}{F^2_{2n+2}} - \frac{F^2_{2n-1}}{F^2_{2n+2}} = -\frac{1}{F^2_{2n+2}} \text{ или } \frac{F^2_{2n-1}}{F^2_{2n+2}} = \frac{F_{2n}F_{2n-2}}{F^2_{2n+2}} + \frac{1}{F^2_{2n+2}}.$$

Тогда для П- структуры цепей (в электротехнике треугольник сопротивлений) следуют следующие соотношения связи токов продольных и поперечной ветвей цепи:

$$I_{2n+1}I_{2n-1} - I^2_{2n} = \frac{1}{F^2_{2n+2}} \text{ или } I^2_{2n} = I_{2n-1}I_{2n+1} - \frac{1}{F^2_{2n+2}}. \qquad (15)$$

Для Т-структуры цепи (в электротехнике трехлучевая звезда сопротивлений) токи продольных и поперечной ветвей цепи связаны соотношением:

$$I_{2n}I_{2n-2} - I^2_{2n-1} = \frac{1}{F^2_{2n+2}} \text{ или } I^2_{2n-1} = I_{2n}I_{2n-2} + \frac{1}{F^2_{2n+2}}, \qquad (16)$$

В реальных однородных электрических цепях число цепочечно соединенных четырехполюсников $n >> 1$ и цепи приобретают свойства цепей с распределенными элементами. Для таких цепей член $1/F^2_{2n+2} \to 0$ ($F^2_{2n+2} \to \infty$) и из соотношений (15), (16) следуют новые закономерности для токов продольных и поперечных ветвей однородных цепей:

– токи поперечных ветвей однородной лестничной цепи равны среднему геометрическому токов прилегающих к нему продольных ветвей

$$I_{2n} = \sqrt{I_{2n+1} I_{2n-1}}\,, \tag{17}$$

– токи продольных ветвей однородной лестничной цепи равны среднему геометрическому токов прилегающих к нему поперечных ветвей

$$I_{2n-1} = \sqrt{I_{2n} I_{2n-2}}\,. \tag{18}$$

Заключение. Из результатов анализа следует, что параметры однородных лестничных электрических цепей (уравнение передачи цепи) связаны с числами Фибоначчи и цепными матрицами (Q-матрицами Фибоначчи). Кроме того, между коэффициентами уравнения электрических четырехполюсников (1) и соотношениями Кассини (6) также существует связь. Удивительно! Здесь невольно приходят на память слова великого А. С. Пушкина:

«О сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, бог изобретатель.

Заметим, что во времена Кассини (XVII в.) наука располагала только начальными сведениями об электрических зарядах: стеклянном и смоляном (положительном и отрицательном). Исследования электрического тока в простейших одноконтурных цепях начались только в XVIII в. после появления первых источников электрического тока – гальванических элементов и первых законов электрических цепей – Ома и Кирхгофа [12].

Связь параметров однородной электрической цепи и соотношения Кассини еще раз подтверждает фундаментальность электрической моделей золотого сечения как структуры природы, искусства, общества, науки и техники [8–11], ее связь с гиперболическими функциями, филлотаксисом и др. [1]

В целом необходимы дальнейшие исследование связи соотношения Кассини с параметрами электрических четырехполюсников и цепей, а также другими четырехполюсниками (тепловыми, гидравлическими и др.).

Список литературы

1. **Семенюта, Н. Ф.** Анализ линейных электрических цепей методом лестничных чисел / Н. Ф. Семенюта. – Гомель : БелГУТ, 2010. – 109 с.

2. **Гарновский, Н. Н.** Теоретические основы электропроводной связи: часть 1 / Н. Н. Гарновский. – М. : Связьиздат, 1956. – 692 с.

3. **Stakhov, A.** The Mathematics of Harmony – From Euclid to comtemporary Mathematics and Computer Science / A. Stakhov. World Scientific. 2009. – 676 с.

4. **Мартыненко, Г. Я.** Обобщение формулы Кассини для последовательностей Фибоначчи и Люка // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15160, 14.03. 2009. – http:// www.trinitas.ru/rus/doc/02332/012a/02322015.htm.

5. Владимиров, В. Л. Обобщение формулы Кассини на любую последовательность второго порядка с унифицированными начальными условиями // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17413, 10.04. 2012 ./02332/012a/ 02322015.htm.

6. Василенко С. А. К обобщению тождества Кассини // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17463, 16.05. 2012. – http://www/trinitas.ru/rus/doc/02332/012a/02322015.htm.

7. Грехем, Р. Конкретная математика, Основание информатики / Р. Грехем, Д. Кнут, О. Паташник. – М. : Мир, 1998. – 703 с.

8. Семенюта, Н. Ф. Электрическая модель «Золотого сечения» / Н. Ф. Семенюта // Проблеми гармонiї, симетрiї i золотого перетину в природi, науцi та мистецтвi: зб. наук. пр. ВДАУ.– Винница : ВДАУ, 2003. – Вып.15. – С. 330–335.

9. Семенюта, Н. Ф. Электрическая модель обобщенных чисел и рядов / Н. Ф. Семенюта // Академия Тринитаризма –М.: Эл. № 77-6567, опбл. 15194, 27.03.2009. – http://trinitas.ru /rus/doc /0232/012a /02322014 12.03. 2009. htm.

10. Семенюта, Н. Ф. Электрическая модель обобщенных рекуррентных чисел и рядов / Н. Ф. Семенюта: Юбилейная науч.-практ. конф. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2009. – С. 175–179.

11. Семенюта, Н. Ф. Электрическая модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Н. Ф. Семенюта // Гармоническое развитие систем – третий путь человечества. – ООО «Институт креативных технологий». – Одесса, 2012. – С. 87–94.

12. Семенюта, Н. Ф. История электрической связи на железнодорожном транспорте (прошлое, настоящее, будущее) / Н. Ф. Семенюта, И. А Здоровцов. – М. : ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте». 2008. – 324 с.