А.П. Стахов

Новые горизонты «математики гармонии»
(реплика на статьи В.П. Шенягина и Н.Ф. Семенюты)

Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии.

Альберт Эйнштейн

В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем.

Иоганн Кеплер

С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения

Алексей Лосев

1. **Введение**

Прежде всего, мне приятно отметить, что на сайте АТ возобновились публикации по тематике чисел Фибоначчи и «золотого сечения» и их обобщений – «металлических пропорций», что подтверждается серией статей на эту тему, написанных известными авторами В.П. Шенягиным [1,3], А.Н. Шелаевым [2] и корифеем «золотосеченского» движения Н.Ф. Семенютой [4]. И я хочу выразить благодарность Вадиму Татуру за такое решение и за публикацию указанных выше прекрасных статей. У меня даже возникло ощущение, что эти статьи возрождают наш Международный семинар по Математике Гармонии [5], который длился 3 месяца (ноябрь, декабрь 2011-январь 2012) и стал настояшим праздником науки.

В ознаменование этого важного события в деятельности Института Золотого Сечения и под впечатлением указанных выше публикаций я принял решение представить на сайте АТ третью часть моей книги «Основы математики гармонии и ее приложения», опубликованной издательством Lambert Academic Publishing (Геомания) в 2012 г. [6].

Настоящая статья задумывалась как реплика на статьи В.П. Шенягина [1] и Н.Ф. Семенюты [4], но в процессе ее написания она превратилась в некоторое эссе-размышление, касающееся новых горизонтов «математики гармонии». При написании данного эссе использованы материалы книги [6] и новых статей автора, опубликованных в известных электронных журналах [7,8].

2. О «космическом религиозном чувстве» Альберта Эйнштейна

В качестве эпиграфов к данному эссе автор использовал широко известные высказывания Альберта Эйнштейна, Иоганна Кеплера и Алексея Лосева. Современная наука не в состоянии дать ответы на многие загадки мира (тайна возникновении Вселенной, тайна рождения и смерти, тайна возникновения разума, тайна генетического кода, тайна филлотаксиса, тайна физического вакуума и др.). И вряд ли удастся получить ответ на эти вопросы в рамках «материалистического научного мировоззрения». Для ответа на эти вопросы необходимо объединение научного и религиозного мировоззрений и возвращение к истокам науки, в частности, к «Герметической Философии» Древнего Египта и к возрождению «Доктрины о числовой гармонии Мироздания» древних греков.

Говоря о сближении религиозного и научного мировоззрений, что наблюдается в современной культуре, необходимо отметить отношение к религии многих известных ученых, включая Альберта Эйнштейна, Макса Планка и Владимира Вернадского. Их объединяет осознание единства человека с природой, ощущение наличия вселенского разума и восприятие гармонии мира. Альберт Эйнштейн назвал это «космическим религиозным чувством». Высказывание Эйнштейна наилучшим образом отражает его «космическое религиозное чувство».

Главное, что объединяет В.П. Шенягина и Н.Ф. Семенюту в их статьях, - это глубокая вера в «гармонию мироздания» и именно эта вера привела их к получению новых научных результатов.

3. В чем суть «законов мироздания» В.П. Шенягина?

Для ответа на этот вопрос я воспользуюсь основными понятиями «теории λ-чисел Фибоначчи», изложенной в главе 16 моей книги [6].

Зададимся действительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n). \tag{1}$$

При начальных условиях

$$F_\lambda(0) = 0; \quad F_\lambda(1) = 1 \tag{2}$$

рекуррентное соотношение (1) «генерирует» бесконечное количество новых числовых последовательностей, так как каждому $\lambda > 0$ соответствует своя числовая последовательность. Важно подчеркнуть, что их частными случаями являются некоторые числовые последовательности, получившие широкую известность в современной науке, в частности, числа Фибоначчи ($\lambda = 1$): 0,1,2,3,5,8,13,21,... и числа Пелля ($\lambda = 2$): $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \ldots$.

Разделим теперь обе части рекуррентного соотношения (1) на $F_\lambda(n+1)$ и представим его в следующем виде:

$$\frac{F_\lambda(n+2)}{F_\lambda(n+1)} = \lambda + \frac{F_\lambda(n)}{F_\lambda(n+1)} = \lambda + \frac{1}{\frac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}}. \tag{3}$$

Если обозначить через x предел отношения $\frac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}$ при $n \to \infty$, то, осуществляя предельный переход в выражении (3), мы получим следующее квадратное уравнение:

$$x^2 = \lambda x + 1. \tag{4}$$

Мы будем пользоваться также следующей традиционной формой записи квадратного уравнения (4):

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0 \tag{5}$$

Положительный корень уравнения (5) имеет вид:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}. \tag{6}$$

Обратная величина от этого корня имеет следующее выражение:

$$\phi_\lambda = \frac{1}{\Phi_\lambda} = \frac{\sqrt{4 + \lambda^2} - \lambda}{2} \tag{7}$$

Самое удивительное состоит в том, что при $\lambda = 1$ выражения (6) и (7) сводятся к хорошо известным нам выражениям, задающим «золотую пропорцию»:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad \phi = \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \tag{8}$$

Из этих рассуждений вытекает, что выражение (6) задает новый класс математических констант, частным случаем которых при $\lambda = 1$ является «золотая пропорция».

В этих рассуждениях нет ничего нового. К этим математическим соотношениям независимо друг от друга пришло много исследователей из разных стран и континентов: Vera de Spinadel (Аргентина), Jay Kappraff (США), Gazale Midhat (Франция), Falcon Sergio, Plaza Angel (Испания), В.П. Шенягин (Россия), Александр Татаренко (Россия), Грант Аракелян (Армения), Николай Косинов (Украина) и др. [9 - 21].

За выражением (6), с легкой руки Веры де Шпинадель [9], закрепилось название «металлические попорции». Если в (6) мы примем $\lambda = 1, 2, 3, 4$, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие, согласно Шпинадель, следующие названия:

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\text{золотая пропорция}, \lambda = 1\right); \quad \Phi_2 = 1+\sqrt{2} \left(\text{серебряная пропорция}, \lambda = 2\right);$$

$$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \left(\text{бронзовая пропорция}, \lambda = 3\right); \quad \Phi_4 = 2+\sqrt{5} \left(\text{медная пропорция}, \lambda = 4\right).$$

А теперь возвратимся снова к статье В.П. Шенягина [1]. Введенные им непонятные «факторы» S_m и s_m - это и есть ни что иное, как «металлические пропорции», задаваемые выражениями (6) и (7).

А дальше Шенягин пользуется тривиальными свойствами «металлических пропорций»

$$\begin{cases} \Phi_\lambda \times \phi_\lambda = 1 \\ \Phi_\lambda - \phi_\lambda = \lambda \end{cases} \tag{9}$$

для формулировки «законов мироздания» В.П. Шенягина:

1. Закон целостного или закон размера
2. Закон масштабирования.
3. Закон согласования масштаба и размера
4. Закон сохранения единицы

Все эти законы Шенягин выражает с помощью одних и тех же математических констант – «металлических пропорций», которые вслед за Верой де Шпинадель, Александром Татаренко, Грантом Аракеляном, Николаем Косиновым и другими исследователями, Шенягин рассматривает как главные математические константы Мироздания.

Главные «нематематические выводы» статьи Шенягин формулирует следующим образом:

«1.. Противоречия уживаются только в гармонии. На то она и гармония, вернее, за счет этого она и гармония.

2. В мироздании ничто не вечно, кроме гармонии и самого мироздания».

И с этим нельзя не согласиться. Эти выводы полностью согласуются с утверждением Альберта Эйнштейна, взятым в качестве эпиграфа к данной статье.

Можно по-разному относиться к «законам мироздания» В.П. Шенягина. Чтобы убедить нас, что это, действительно, «законы мироздания», Шенягину предстоит проделать большую исследовательскую работу и привести убедительные физические примеры, подтверждающие действие этих законов в Природе.

Но тем не менее мне хотелось бы поддержать статью Шенягина по той причине, что она содержит интресную научную идею и открывает новые горизонты в развитии «математики гармонии».

4. Математическое учение о Природе древних греков

В своих истоках статья Шенягина восходит к «математическому учению о природе» древних греков. В этой связи хотелось бы привлечь внимание к высказываниям Кеплера и Лосева, взятым в качестве эпиграфов к данной статье. Эти высказывания подчеркивают роль «золотого сечения» в древнегреческой науке.

Древние греки создали математическое учение о природе, которое было воплощено Евклидом в его «Началах». В книге [23] Морис Клайн пишет:

«Подлинной целью греков было исследование природы. Этой цели служило все – даже геометрические истины высоко ценились лишь постольку, поскольку они были полезны при

изучении физического мира. Греки понимали, что в структуре Вселенной воплощены геометрические принципы, первичным компонентом которых является пространство. Именно поэтому исследование пространства и пространственных фигур явилось существенным вкладом в изучение природы. Геометрия входила составной частью в более широкую программу космологических исследований... Подобные факты и более полное знание того, как происходило развитие математики в последующие времена, позволяют утверждать, что у греков к постановке математических проблем приводили естественнонаучные исследования и что математика была неотъемлемой частью изучения природы».

В книге Владимира Димитрова (Dimitrov Vladimir) [24] эти идеи Мориса Клайна конкретизируются следующим образом:

«Гармония была ключевой концепцией греков, с помощью которой осуществлялась связь трех значений. Его корневое значение было ***aro****, соединение, гармония было то, что соединяет. Другое значение было пропорция, баланс вещей, который позволял простое соединение. Качество соединения и пропорции позже стали рассматриваться в музыке и других видах искусства.*

Предпосылка для гармонии для греков была выражена во фразе "ничего лишнего". Эта фраза содержала таинственные положительные качества, которые стали объектом исследования лучших умов. Мыслители, такие как Пифагор, стремились раскрыть тайну гармонии как нечто невыразимое и освещенное математикой. Математика гармонии, изученная древними греками, по-прежнему является вдохновляющей моделью для современных ученых. Решающее значение для этого имело открытие количественного выражение гармонии, во всем удивительном разнообразии и сложности природы, через золотое сечение Ф (фи): $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$*, что приблизительно равно 1,618. Золотое сечение описано Евклидом в Книге V его «Начал»: "Говорят, что прямая линия, может быть разделена в крайнем и среднем отношении, когда, вся линия так относится к большей части, как большая часть к меньшей".*

В своем высказывании Алексей Лосев достаточно убедительно сформулировал «золотую» парадигму античной космологии. В ее основе лежат важнейшие идеи античной науки, которые в современной науке иногда трактуются как «курьезный результат безудержной и дикой фантазии». Прежде всего – это пифагорейская идея о числовой гармонии мироздания и космология Платона, основанная на Платоновых телах. Обратившись к геометрической структуре мироздания и арифметическим отношениям, выражающим гармонию, пифагорейцы предвосхитили возникновение математического естествознания, которое начало стремительно развиваться в 20-м веке. Идея Пифагора и Платона о всеобщей гармонии мироздания оказалась бессмертной.

Таким образом, в центре созданного древними греками математического учения о природе стояла «концепция гармонии», а сама математика древних греков и была «математикой гармонии» (“the mathematics of harmony”), которая непосредственно связана с золотым сечением - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии [24].

Самое удивительное состоит в том, что пророческие предсказания древних греков начали активно воплощаться в современном теоретическом естествоознании. Идея гармонии становится ключевой идеей современного теоретического естествознания. В главе 18 моей книги [6] приведены примеры современных научных открытий, основанных на Платоновых телах, золотом сечении и числах Фибоначчи. Наиболее убедительными примерами являются фуллерены и квазикристаллы, удостоенные Нобелевских Премий, закон структурной гармонии систем Эдуардо Сороко, «геометрия Боднара», основанная на «золотых» гиперболических функциях [25], «золотые» геноматрицы Сергея Петухова, фибоначчиевая интепретация Периодичского закона Меднделеева (Сергей Якушко) и др.

В.П. Шенягин в своей статье развивает «математику гармонии» древних греков. И в этом стоит главное методологическое значение «законов мироздания» В.П. Шенягина. Но в центре Мироздания он ставит новый класс математических констант - «металлические пропорции» [9], которые являются обобщением «золотой пропорции». Очень хочется надеяться, что «металлические пропорции» подобно «золотой пропорции» широко войдут в современную науку и станут источником новых научных открытий.

5. Новые гиперболические миры Природы

В связи с созданием нового класса гиперболических функций, основанных на “металлических пропорциях» и названных гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка (см. главу 16 книги [6]), автор поставил перед теоретическим естествознанием задачу поиска новых гиперболических миров Природы, основанных на «металлических пропорциях» (см. главу 17 книги [6]). Насколько корректна постановка такой задачи? Для ответа на этот вопрос мы должны еще раз обратиться к «геометрии Боднара» [25]. Новая геометрия филлотаксиса, вселяет надежду, что гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка найдут практические приложения в современной науке. «Геометрия Боднара» показывает, что «мир филлотаксиса», одного из самых удивительных явлений ботаники, является «гиперболическим миром», основанным на «золотой пропорции». При этом, к этому гиперболическому миру относится огромное количество ботанических объектов, с которыми мы сталкивемся в окружающей природе: сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника, корзинки цветов, деревья и т.д.. Таким образом, в ботаническом явлении филлотаксиса «гиперболичность» проявляет себя в «золоте». Эта гипотеза, выдвинутая Боднаром, оказалась весьма плодотворной и привела к созданию новой геометрической теории филлотаксиса, имеющей огромное междисциплинарное значение [25].

Однако, «золотые» гиперболичесие функции Фибоначчи и Люка, использованные Боднаром, являются лишь частным случаем более общего класса функций - гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка. Последние основываются на «металлических пропорциях» (6), в частности, на «серебряной», «бронзовой», «медной» и других видах «металлических пропорций». В этой связи у нас есть все основания высказать предположение, что и другие типы гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что современной науке были неизвестны гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка и перед ней никто не ставил такой задачи. Основываясь на блестящий успех «геометрии Боднара» [25], мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка.

При этом, возможно, первым кандидатом на «революцию» в естествознании может стать «серебряная пропорция» $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ и основанные на ней «серебряные» гиперболические функции.

Интерес к «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ и «серебряным» гиперболическим функциям значительно возрос в последние годы. В этой связи особый интерес представляет статья [21] известного российского исследователя Александра Татаренко. В статье [21] Александр Татаренко развивает теорию T_m-гармоний, которые по существу совпадают с «металлическими пропорциями». При этом особую роль в дальнейшем развитии теоретического естествознания он отводит «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$, которую он называет T_2-гармонией:

«Важнейшим и неожиданным результатом исследований T_m-гармоний было установление двух фактов:

1) вторая Золотая $T_{m=\pm 2} = \sqrt{2} \pm 1$- гармония (а не первая — согласно нумерации в ряде $T_{\pm m}$-чисел — классическая «золотая пропорция» Ф) является доминантой, царствующей в беспредельном мире T_m-гармоний.

2) «функцией» второй Золотой $T_{m\pm2}$-гармонии является число $\sqrt{2}$ - реликтовое число – корень из двух, встречающийся в архи-громадном множестве формул и закономерностей различных областей естествознания, что равнозначно причастности T_2 непосредственно или косвенно ко множеству (а возможно и ко всем) законов Природы и ее констант. Таким образом, T_2 буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам.

Установление факта доминантности T_2-гармонии, а с ней и особого статуса ее «функции» $\sqrt{2}$ является заключительным аккордом — важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника.

Требуется кардинально новое мышление о Гармонии Мира».

Таким образом, Татаренко обращает особое внимание на «серебряную» пропорцию $T_2 = 1+\sqrt{2}$, которая «буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам». Более того, он считает введение «серебряной» пропорции» $T_2 = 1+\sqrt{2}$ в современную науку *«важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птолемеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника»*.

Но ведь «законы мироздания» В.П. Шенягина имеют прямое отношение к «новым гиперболическим мирам Природы», потому что они основаны на одних и тех же математических константах – «металлических пропорциях».

6.Гармонические электрические цепи Н.Ф. Семенюты

Если статья В.П. Шенягина [1] содержит новые теоретические идеи в «законах мироздания» и открывает новые горизонты в будущем развитии «математики гармонии», то статья Н.Ф. Семенюты [4], как и многие другие его статьи, открывают нам удивителный мир «гармонических электрических цепей», основанных на «золотой пропорции» и числах Фибоначчи. В заключение своей статьи [4] Н.Ф. Семенюта написал:

«Связь параметров однородной электрической цепи и соотношения Кассини еще раз подтверждает фундаментальность электрической моделей золотого сечения как структуры природы, искусства, общества, науки и техники ..., ее связь с гиперболическими функциями, филлотаксисом и др.»

В этом и состоит суть нового результата, изложенного в статье Н.Ф. Семнюты [4], - обнаружение связи однородной электрической цепи с соотношением Кассини. Это тем более удивительно, что «сотношение Кассини» было выведено великим астрономом Кассини в 17 в. без какой-либо связи с теорией электрических цепей, которой в тот период просто не существовало.

В заключение хочу порекомендовать Н.Ф. Семенюте внимательно изучить мою статью «Теория λ-чисел Фибоначчи» [26] (см. также главу 16 моей книги [6]), где выведена формула Кассини для λ-чисел Фибоначчи. Я убежден в том, что новая формула Кассини есть источник новых открытий в «гармонических электрических цепях» Н.Ф. Семенюты. Кстати, для этого случая «гармонические электрические цепи» Н.Ф. Семенюты окажутся связанными с «металлическими пропорциями», то есть в таких «гармонических электрических цепях» начнут действовать законы Шенягина.

Литература

1. В.П. Шенягин, Законы мироздания // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17963, 30.03.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02021156.htm

2. А.Н. Шелаев, К раскрытию геометрических тайн великих пирамид // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17965, 31.03.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162092.htm

3. В.П. Шенягин, Оптимальность в гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17967, 03.04.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321266.htm

4. Н.Ф. Семенюта, Связь параметров лестничных электрических цепей с матрицами чисел Фибоначчи и соотношением Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17969, 03.04.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321267.htm

5. А.П. Стахов, К завершению Международного online семинара по Математике Гармонии (ноябрь, декабрь 2011-январь 2012) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17273, 31.01.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322146.htm

6. А.П. Стахов, Основы математики гармонии и ее приложения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17970, 04.04.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/007a/02321014.htm

7. Стахов А.П. Математика гармонии: от Евклида до современной математикии компьютерной науки. Интернет журнал «Науковедение» Институт Государственного управления, права и инновационных технологий (ИГУПИТ), №4, 2012, 105 с.

8. Alexey Stakhov. On the general theory of hyperbolic functions based on the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and on Hilbert's Fourth Problem. Visual Mathematics, Volume 15, №1, 2013.

9. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).

10. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (Русский перевод: Мидхат Газале. Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.)

11. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001. – 490 p.

12. Kappraff Jay. “Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth and Number”. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2002. – 584 p.

13. Аракелян Грант. Числа и величины в современной физике. Ереван: Изд. АН, 1989.

14. Шенягин В.П. «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых s-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm

15. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm

16. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm

17. Falcon Sergio, Plaza Angel. On the Fibonacci k-numbers Chaos, Solitons & Fractals, Volume 32, Issue 5, June 2007 : 1615-1624.

18. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and “Golden” Fibonacci Goniometry. Applied Mathematics, 2011, 2 (January), 74-84.

19. Stakhov A., Aranson S.. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part II. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar's Geometry). Applied Mathematics, 2011, 2 (February), 181-188.

20. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (March).

21. Татаренко А.А. Золотые T_m – гармонии и D_m – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm
22. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, 23(2): 379-389.
23. Клайн М. Математика. Утрата определенности (пер. с англ.). Москва: Мир, 1984. 434 с.
24. Dimitrov Vladimir. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics. Morrisville Lulu Press, 2005.
25. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994. – 204 с.
26. А.П. Стахов Теория λ -чисел Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17407, 05.04.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321250.htm