Н. Ф. Семенюта

ЕЩЕ НЕМНОГО О СООТНОШЕНИИ КАССИНИ

Троичная связь чисел Фибоначчи $F_n = F_{n\text{-}2} + F_{n-1}$ изначально объединяет их в рекуррентную последовательность:

$$\begin{array}{ccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9\ldots, \\ 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & 34\ldots \end{array} \qquad (1)$$

с начальными числами $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$.

Более сложную троичную связь чисел последовательности Фибоначчи (1), установил в 1680 г. французский астроном Жан-Доменик Кассини:

$$F_n^2 - F_{n\text{-}1}F_{n+1} = (-1)^{n+1} \qquad (2)$$

или соответственно для нечетных и четных членов:

$$F_{2n-1}^2 - F_{2n\text{-}2}F_{2n} = +1, \qquad F_{2n}^2 - F_{2n\text{-}1}F_{2n+1} = -1. \qquad (3)$$

Для последовательности Фибоначчи с начальными числами $F_1 = 1$ и $F_2 = 2$

$$\begin{array}{ccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9\ldots, \\ 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21. & 34 & 55 \end{array} \qquad (4)$$

соотношение типа Кассини имеет вид:

$$F_n^2 - F_{n\text{-}1}F_{n+1} = (-1)^n \qquad (5)$$

или соответственно для нечетных и четных членов:

$$F_{2n-1}^2 - F_{2n\text{-}2}F_{2n} = -1, \qquad F_{2n}^2 - F_{2n\text{-}1}F_{2n+1} = +1. \qquad (6)$$

За счет изменения начальных чисел последовательности (4) произошла смена знаков разности (6) по сравнению с (3).

Для последовательности чисел Люка $L_n = L_{n\text{-}2} + L_{n-1}$ с начальные числами $L_1 = 1$ и $L_2 = 3$

$$\begin{array}{ccccccccc} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9\ldots, \\ 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 & 29 & 47 & 76\ldots, \end{array} \qquad (7)$$

соотношение типа Кассини имеет вид

$$L_n^2 - L_{n\text{-}1}L_{n+1} = (-5)^n \qquad (8)$$

или соответственно для нечетных и четных членов

$$L^2_{2n-1} - L_{2n-2}L_{2n} = -5, \qquad L^2_{2n} - L_{2n-1}L_{2n+1} = 5. \qquad (9)$$

Соотношение Кассини привлекало умы многих исследователей и ученых прошлых лет и наших современников. Так в работе [1, 2, 3] приведены общие сведения о соотношении Кассини, в [4, 5, 6] выполнено обобщение соотношения Кассини для последовательности чисел Фибоначчи и Люка, в [7] установлена связь соотношения Кассини и уравнения передачи электрических цепей.

При исследовании гармонических пропорций в электрических цепях и моделях, возник вопрос, – почему Кассини рассмотрел только случай разности $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}$, а случай суммы $F_n^2 + F_{n-1}F_{n+1}$, выпал из поля зрения как Кассини, так и других исследователей рекуррентных последовательностей чисел (может я ошибаюсь?) [8, 9]. Почему это произошло автору неизвестно. Как и неизвестно происхождение соотношения Кассини (2). Поэтому было выполнено исследование свойств суммы F_n^2 + $F_{n-1}F_{n+1}$ для последовательностей (1), (4) и $L_n^2 + L_{n-1}L_{n+1}$ для последовательности (7).

Для последовательности (1) в работе М. М. Яглома «Как разрезать квадрат?» [10] приведено соотношение:

$$F_1F_2 + F_2F_3 + ... + F_{n-1}F_n = \frac{F_{n-1}F_{n+1} + F_n^2 - 1}{2}. \qquad (10)$$

Сумма произведений смежных членов последовательности (1):

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F^2_{2n}, \qquad (11)$$

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n}F_{2n+1} = F^2_{2n+1} - 1. \qquad (12)$$

С учетом (11) и (12) соотношение чисел (10) принимают вид:

$$2(F^2_{2n+1} - 1) = F^2_{2n+1} + F_{2n}F_{2n+2} - 1, \qquad 2F^2_{2n} = F^2_{2n} + F_{2n-1}F_{2n+1} - 1. \qquad (13)$$

После преобразования (13), получим

$$F^2_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+2} = +1, \qquad F^2_{2n} - \mathrm{F}_{2n-1}F_{2n+1} = -1, \qquad (14)$$

которые соответствуют классическим соотношениям Кассини (3). Неожиданный результат!

Для последовательности Фибоначчи (4) суммы произведений смежных членов

$$F_1F_2+F_2F_3+\ldots+F_{n-1}F_n=\frac{F_{n-1}F_{n+1}+F_n^2-3}{2}. \qquad (15)$$

Сумма произведений смежных членов последовательности (4):

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2 - 2, \qquad (16)$$

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1. \qquad (17)$$

С учетом (12) и (13) соотношение чисел (11) принимают вид:

$$2(F_{2n}^2 - 2) = F_{2n}^2 + F_{2m-1}F_{2n+1} - 3, \qquad 2(F_{2n+1}^2 - 1) = F_{2n+1}^2 + F_{2n}F_{2n+2} - 3. \qquad (18)$$

После преобразования,(18), получим

$$F_{2n+1}^2 - F_{2n+2}F_{2n} = -1, \qquad F_{2n}^2 - F_{2n-1}F_{2n+1} = +1. \qquad (19)$$

т. е. и в этом случае результат также соответствуют соотношениям типа Кассини (15).

Для последовательности чисел Люка (4) суммы произведений смежных членов

$$L_1L_2+L_2L_3+\ldots+L_{n-1}L_n=\frac{L_{n-1}L_{n+1}+L_n^2-7}{2} \qquad (20)$$

Суммы произведений смежных чисел последовательности Люка (4)

$$L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_4 + \ldots + L_{2n-1}L_{2n} = L_{2n}^2 - 6, \qquad (21)$$

$$L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_4 + \ldots + L_{2n}L_{2n+1} = L_{2n+1}^2 - 1. \qquad (22)$$

Тогда

$$L_{2n}^2 + L_{2n-1}L_{2n+1} = 2(L_{2n}^2 - 6) + 7, \quad L_{2n}^2 + L_{2n-1}L_{2n+1} = 2(L_{2n+1}^2 - 1) + 7.. \qquad (23)$$

После преобразования,(23), получим

$$L_{2n+1}^2 - L_{2n-2}L_{2n} = -5, \qquad L_{2n}^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5. \qquad (24)$$

Соотношения (24) также равны соотношениям типа Кассини (9) для числовой последовательности Люка (6).

Таким образом, в результате преобразования сумм $F_n^2 + F_{n-1}F_{n+1}$ для последовательностей Фибоначчи (1) и (7), а также суммы $L_n^2 + L_{n-1}L_{n+1}$ для последовательности Люка (6), получили классические соотношения типа Кассини для разности составляющих. Удивительный результат, удивительное свойство гармонических пропорций на основе золотого сечения.

Литература

1 Грехем, Р**.,** Кнут Д., Поташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир,1998. – 703 с.

2. Стахов А. П. Формула Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005.

3. Stakhov A. The mathematics of harmoni: from Euclid to contemporary mathematics end computer science. – Singapore: Wordl Scintific. 2009. – 696 p.

4. Мартыненко Г. Я. Обобщение формулы Кассини для последовательностей Фибоначчи и Люка // «Академия Тринитаризма». М., Эл № 77-6567, публ. 15160. 14.03.2009.

5. Василенко С. Л. К обобщению тождества Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17463, 16.05.2012.

6. Владимиров В. Л. Обобщение формул Кассини на любую рекурсию второго порядка с унифицированными начальными условиями // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17413, 10.04.2012.

7. Семенюта Н. Ф. Связь параметров лестничных электрических цепей с матрицами чисел Фибоначчи и соотношением Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17969, 03.04.2013.

8. Семенюта Н. Ф. Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Гармоноческое развитие систем – третий путь человечества. – Одесса, ООО «Институт креативных технологий», 2011. – С. 87–94.

9. Семенюта Н. Ф. Анализ линейных электрических цепей методом лестничных чисел. – Гомель: БелГУТ, 2010. –108 с.

10. Яглом И. М. Как разрезать квадрат? (Математическая библиотека). – М.: Наука, 1968. – 87 с.