А.П. Стахов

Об уникальности гиперболических функций Фибоначчи и их неожиданных приложениях в науке и природе

1. Введение

Многие математические результаты, возникшие в рамках «математики гармонии» [1], оказались весьма спорными, впрочем, как и сама «математика гармонии». Дискуссия по этому поводу продолжается до сих пор.

Одним из таких спорных результатов являются **гиперболические функции Фибоначчи,** введенные в [2, 3].

Несколько слов об истории этих функций. В 1984 г. издательство «Радио и связь» опубликовало мою книгу «Коды золотой пропорции» [4]. В этой книге знаменитые **формулы Бине** для чисел Фибоначчи $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ были приведены в виде, который редко используется в математике:

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k \end{cases} \tag{1}$$

В таком виде легко обнаруживается связь формул Бине (1) с классическими гиперболическими функциями:

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{2}$$

Это наблюдение и стало исходным для введения гиперболических функций Фибоначчи. Впервые описание этих функций было дано в препринте Винницкого политехнического института, опубликованном в 1988 г. Но в 1993 г. по рекомендации академика Митропольского в «Докладах Академии наук Украины» была опубликована статья «Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи» (авторы Алексей Стахов и Иван Ткаченко) [2], то есть, с 1993 г. эти функции были введены в большую науку. Дальнейшее развитие теория этих функций получила в статье [3] (авторы Алексей Стахов и Борис Розин).

Следует отметить, что в 1992 г. по рекомендации все того же неутомимого Юрия Алексеевича Миторопольского в «ДАНУ» была опубликована статья Олега Боднара «Геометрия филлотаксиса» [5], автора замечательной книги [6]. Публикации [2], [5], появившиеся в ДАНУ по инициативе Митропольского, свидетельствуют об огромном интересе Митропольского к этой проблематике и о бережном отношении к молодым научным кадрам, которые были докторами наук не обязательно в области математики. Я встречался с Митропольским много раз, когда бывал в Киеве, и наши многочасовые беседы в его кабинете в Институте математики вызывали у нас чувство глубокого взаимного уважения.

Основной аргумент моих оппонентов против г**иперболических функций Фибоначчи** основывается на следующих рассуждениях. Так как показательную функцию a^x можно записать в виде

$$a^x = e^{\{x \ln a\}}, \tag{3}$$

то гиперболические функции Фибоначчи сводятся к обычным гиперболическим функциям (2), но с другим аргументом $x \ln a$ и с постоянным множителем. Графики этих функций получаются из графиков обычных гиперболических функций растяжением вдоль осей координат в постоянное число раз. **Поэтому принципиально новых функций здесь нет.**

Другими словами, в общем виде формулы для гиперболических функций могут быть представлены в виде:

$$sh(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{b}; \quad ch(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{b}. \tag{4}$$

Тогда при *a*=*e* и *b*=2 формулы (4) приобретают традиционный вид (2). Если же принять $a = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $b = \sqrt{5}$, то получим гиперболические функции Фибоначчи, введенные в работе [3]:

<u>Гиперболический синус Фибоначчи</u>

$$sFs(x) \quad = \quad \frac{\Phi^x \quad - \quad \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{5}$$

<u>Гиперболический косинус Фибоначчи</u>

$$cFs(x) \quad = \quad \frac{\Phi^x \quad + \quad \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}, \tag{6}$$

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы опровергнуть ошибочное утверждение моих оппонентов о том, что «**принципиально новых функций здесь нет».** Несмотря на то, что гиперболические функции Фибоначчи (5), (6), действительно, являются частным случаем функций (4), это не означает, что в этих функциях никакой новизны нет, более того, эти функции являются **принципиально новым классом гиперболических функций, которые в качественном отношении превосходят классические гиперболические функции и без ведома математиков давно используются в живой природе.**

2. Расширенные числа Фибоначчи

Обратимся снова к формулам Бине (1). Как известно, эти формулы задают в аналитическом виде так называемые **расширенные числа Фибоначчи**, приведенные в Табл.1.

Таблица 1. Расширенные числа Фибоначчи

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	−1	2	−3	5	−8	13	−21	34	−55

Как следует из этой таблицы, формулы Бине представляют уникальную целочисленную последовательность, задаваемую в бесконечных пределах $\{-\infty \div +\infty\}$ Эта последовательность состоит из двух ветвей - числа Фибоначчи с отрицательными индексами F_{-n}, уходящие в $-\infty$, и числа Фибоначчи с положительными индексами F_n, уходящие в $+\infty$. При этом числа F_{-n} и F_{-n} связаны следующим изящным соотношением:

$$F_{-n} = F_n (-1)^{n+1}. \tag{7}$$

3. Графики ГФФ

Главная отличительная особенность ГФФ состоит в том, что для дискретных значений непрерывной переменной $x = n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ ГФФ (5), (6) совпадают с расширенными числами Фибоначчи (Табл.1), то есть, имеет место следующее соотношение, связывающее числа Фибоначчи с ГФФ (5), (6):

$$F_n = \begin{cases} sFs(n) \text{ для } n = 2k \\ cFs(n) \text{ для } n = 2k+1 \end{cases} \tag{8}$$

где k принимает значения из множества k=0,±1,±2,±3,…

Графики ГФФ (5), (6) имеют традиционный вид (Рис.1).

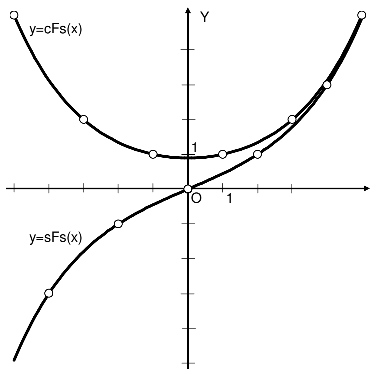

Рис.1. Гиперболические функции Фибоначчи

Однако, существует одна принципиальная особенность этих графиков по сравнению с аналогичными графиками для функций (2). Из формулы (8) вытекает, что при всех четных значениях $n = 2k$ функция гиперболического синуса Фибоначчи $sFs(n) = sFs(2k)$ совпадает с числами Фибоначчи с четными индексами $F_n = F_{2k}$, а при всех нечетных значениях $n = 2k+1$ функция гиперболического косинуса Фибоначчи $cFs(n) = cFs(2k+1)$ совпадает с числами Фибоначчи с нечетными индексами $F_n = F_{2k+1}$, то есть, расширенные числа Фибоначчи как бы «вписываются» в графики функций (5), (6). Это означает, что ГФФ (5), (6) имеют дискретный аналог в виде чисел Фибоначчи, задаваемых Табл.1. Ничего подобного в классических функциях (2) нет и в помине.

4. Гиперболические свойства ГФФ

В работе [3] показано, что гиперболические функции Фибоначчи (ГФФ) обладают, с одной стороны, **гиперболическими** свойствами, подобными свойствам классических гиперболических функций (2), с другой стороны, **рекурсивными** свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи. Начнем с гиперболических свойств.

Свойство четности. Введенные выше ГФФ (5), (6) обладают всеми известными свойствами, присущими классическим гиперболическим функциям (2). Первым из них является **свойство четности**. Действительно, гиперболический синус Фибоначчи (5) являются нечетной функцией, в то время как гиперболический косинус Фибоначчи (6) являются четной функцией, то есть,

$$sFs(-x) = -sFs(x); \quad cFs(-x) = cFs(x) \tag{9}$$

Основное гиперболическое тождество. Но существуют более глубокие математические связи между классическими гиперболическими функциями (2) и ГФФ (5), (6). Например, одним из важнейших свойств классических гиперболических функций (2) является следующее тождество:

$$\left[ch(x)\right]^2 - \left[sh(x)\right]^2 = 1. \tag{10}$$

Доказано [3], что для ГФФ (5), (6) это тождество выглядит следующим образом:

$$\left[cFs(x)\right]^2 - \left[sFs(x)\right]^2 = \frac{4}{5} \tag{11}$$

Таблица гиперболических тождеств для ГФФ. Доказано [3], что для каждого тождества для классических гиперболических функций существует аналог в виде соответствующего тождества для ГФФ. В Табл.2 приведены некоторые формулы для классических гиперболических функций и соответствующие им формулы для гиперболических функций Фибоначчи.

Таблица 2. «Гиперболические» свойства ГФФ

Формулы для классических гиперболических функций	Формулы для гиперболических функций Фибоначчи
$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\ ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$sFs(x)=\frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}};\ cFs(x)=\frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$
$ch^2(x)-sh^2(x)=1$	$\left[cFs(x)\right]^2-\left[sFs(x)\right]^2=\frac{4}{5}$
$sh(x+y)=sh(x)ch(x)+ch(x)sh(x)$ $sh(x-y)=sh(x)ch(x)-ch(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{5}}sFs(x+y)=sFs(x)cFs(x)+cFs(x)sFs(x)$ $\frac{2}{\sqrt{5}}sFs(x-y)=sFs(x)cFs(x)-cFs(x)sFs(x)$
$ch(x+y)=ch(x)ch(x)+sh(x)sh(x)$ $ch(x-y)=ch(x)ch(x)-sh(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{5}}cFs(x+y)=cFs(x)cFs(x)+sFs(x)sFs(x)$ $\frac{2}{\sqrt{5}}cFs(x-y)=cFs(x)cFs(x)-sFs(x)sFs(x)$
$ch(2x)=2sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}cFs(2x)=sFs(x)cFs(x)$
$\left[ch(x)\pm sh(x)\right]^n=ch(nx)\pm sh(nx)$	$\left[cFs(x)\pm sFs(x)\right]^n=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left[cFs(nx)\pm sFs(nx)\right]$

5. Рекурсивные свойства ГФФ

Простейшие рекурсивные свойства. Доказано [3], что рекуррентному соотношению Фибоначчи $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ соответствуют следующие два тождества для ГФФ:

$$sFs(x+2)=cFs(x+1)+sFs(x);\quad cFs(x+2)=sFs(x+1)+cFs(x). \tag{12}$$

Аналог формулы Кассини. Одним из удивительных свойств, связывающих три соседних числа Фибоначчи, является формула Кассини:

$$F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=(-1)^{n+1}. \tag{13}$$

Доказано [3], что этой формуле соответствует два тождества для ГФФ:

$$\left[sFs(x)\right]^2-cFs(x+1)cF(x-1)=-1;\quad \left[cFs(x)\right]^2-sFs(x+1)sF(x-1)=1. \tag{14}$$

Таблица рекурсивных свойств ГФФ. Таким же путем из известных тождеств для чисел Фибоначчи и Люка могут быть выведены новые тождества для ГФФ [3]. Часть из них приведена в Табл. 3.

Из Табл.3 вытекает, что каждому тождеству для чисел Фибоначчи соответствует два тождества для ГФФ. Этот факт объясняется очень просто. Выбор одного из двух тождеств для ГФФ зависит от четности индекса n в числах Фибоначчи. Рассмотрим, например, простейшее тождества $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Если $n=2k$, мы должны использовать первое тождество $sFs(x+2)=cFs(x+1)+sFs(x)$;

в противном случае ($n = 2k + 1$) мы должны использовать другое тождество $cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x)$.

Таблица 3. Рекурсивные свойства ГФФ

Тождества для чисел Фибоначчи	Тождества для ГФФ
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$	$sFs(x+2) = cFs(x+1) + sFs(x)$; $cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x)$
$F_{-n} = F_n(-1)^{n+1}$	$sFs(x) = -sFs(-x)$; $cFs(x) = cFs(-x)$
$F_{n+3} + F_n = 2F_{n+2}$	$sFs(x+3) + cFs(x) = 2cFs(x+2)$; $cFs(x+3) + sFs(x) = 2sFs(x+2)$
$F_{n+3} - F_n = 2F_{n+1}$	$sFs(x+3) - cFs(x) = 2sFs(x+1)$; $cFs(x+3) - sFs(x) = 2cFs(x+1)$
$F_{n+6} - F_n = 4F_{n+3}$	$sFs(x+6) - cFs(x) = 4cFs(x+3)$; $cFs(x+6) - sFs(x) = 4cFs(x+3)$
$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$	$\left[sFs(x)\right]^2 - cFs(x+1)cFs(x-1) = -1$; $\left[cFs(x)\right]^2 - sFs(x+1)sFs(x-1) = 1$
$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$	$cFs(2x+1) = \left[cFs(x+1)\right]^2 + \left[sFs(x)\right]^2$; $sFs(2x+1) = \left[sFs(x+1)\right]^2 + \left[cFs(x)\right]^2$

6. Теория ГФФ как новый этап в развитии «теории чисел Фибоначчи»

Важно подчеркнуть, что каждому «дискретному» тождеству для чисел Фибоначчи соответствуют два «непрерывных» тождества для ГФФ. И наоборот, используя соотношения (8), каждому тождеству для ГФФ мы можем поставить в соответствие некоторое «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи и Люка. Поскольку числа Фибоначчи согласно (8), являются «дискретным» случаем ГФФ, с которыми они совпадают в дискретных точках непрерывной переменной $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, то это означает, что с введением ГФФ «классическая теория чисел Фибоначчи» [7, 8] как бы «вырождается», поскольку она становится частным («дискретным») случаем более общей («непрерывной) теории ГФФ. **Это первое неожиданное приложение теории ГФФ [2, 3] в математике.**

7. Уникальность ГФФ

Уже приведенных выше уникальных свойств ГФФ (5), (6) достаточно, чтобы сделать заключение о том, что **ГФФ (5), (6) являются принципиально новым классом гиперболических функций**, которые отличаются от классических гиперболических функций (2) следующими особенностями:

1. Первая особенность состоит в том, что ГФФ (5), (6) сохраняют все известные гиперболические свойства классических гиперболических функций (2).
2. Однако, принципиальное отличие ГФФ (5), (6) от классических гиперболических функций состоит в том, что ГФФ (5), (6) обладают рекурсивными свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи. Они неразрывными узами связаны с расширенными числами Фибоначчи, которые являются «дискретным» аналогом ГФФ (5) и (6). В класссических гиперболических функциях прямой связи с какой-либо целочисленной числовой последовательностью не существует.

3. Функции (5), (6) уникальны в бесконечном множестве гиперболических функций (4), подобно тому, как уникальна сама «золотая пропорция», которая выделяется среди всех иррациональных чисел, благодаря удивительному представлению «золотой пропорции» в виде цепной дроби:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Поэтому утверждение моих оппонетов, что «**принципиально новых функций здесь нет»,** не выдерживает никакой критики.

8. Авторитет Природы («геометрия Боднара»)

В любом научном споре критерием истины является Природа. В ботанике широко известно **явление филлотаксиса**. Его суть состоит в том, что на поверхности филлотаксисных объектов (сосновых шишек, ананасов, кактусов, головок подсолнечников и т.д.) их чешуйки или семена располагаются на пересечении левых и правых спиралей. Для характеристики филлотаксиса таких ботанических объектов обычно указывается количество левых и правых спиралей, наблюдаемых на поверхности филлотаксисных объектов; при этом закономерности филлотаксиса таких структур описываются отношениями соседних чисел Фибоначчи:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}: \quad \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots . \tag{15}$$

Эти отношения называются **порядком симметрии** филлотаксисного объекта и являются характерными для каждого филлотаксисного объекта [5, 6]. Например, у подсолнечников порядки симметрии могут достигать значений $\frac{89}{55}, \frac{144}{89}$ и даже $\frac{233}{144}$.

Наблюдая филлотаксисные объекты в завершенном состоянии и наслаждаясь упорядоченным рисунком на их поверхности, мы всегда задаем себе вопрос: как в процессе роста на его поверхности формируется фибоначчиевая решетка? Эта проблема и представляет собой одну из наиболее интригующих **загадок филлотаксиса**. Суть ее состоит в том, что у большинства видов биоформ в процессе роста происходит изменение числовых характеристик симметрии, задаваемых (15). Известно, например, что головки подсолнечника, находящиеся на разных уровнях одного и того же стебля, имеют разную симметрию: чем старше диск, тем выше порядок его симметрии (Рис.2). Это означает, что в процессе роста происходит закономерное изменение (возрастание) порядка симметрии и это изменение осуществляется по закону:

$$\frac{2}{1} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{3} \to \frac{8}{5} \to \frac{13}{8} \to \frac{21}{13} \to \ldots \tag{16}$$

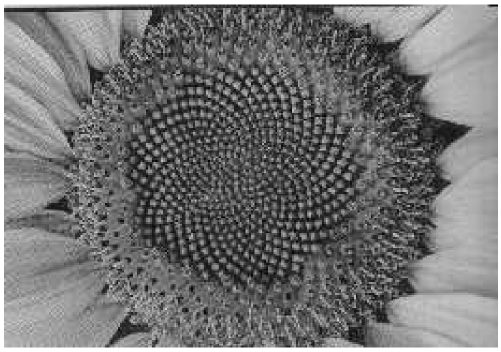

Рис.2. Филлотаксисная закономерность для головки подсолнечника

Изменение порядков симметрии филлотаксисных объектов в соответствии с (16) называется **динамической симметрией** [6]. Все вышеуказанные данные и составляют существо хорошо известной **«загадки филлотаксиса».** Ряд ученых, исследовавших эту проблему, предполагают, что явление филлотаксиса имеет **фундаментальное междисциплинарное значение**. По мнению В.И. Вернадского, проблема биологической симметрии является **ключевой проблемой биологии**.

Итак, явление динамической симметрии (16) обнаруживает свою особую роль в геометрической проблеме филлотаксиса. Напрашивается предположение, что за числовой закономерностью (16) скрываются определенные геометрические законы, которые, возможно, и составляют суть секрета ростового механизма филлотаксиса и их раскрытие имело бы большое значение не только для ботаники и биологии, но и для всего теоретического естествознания.

Исследуя явление «динамической симметрии», украинский исследователь Олег Боднар совершил научное открытие [5, 6]. Он доказал, что **геометрия филлотаксиса является неевклидовой; при этом она является новым вариантом геометрии Лобачевского, основанной на ГФФ (5), (6).**

Таким образом, исследования украинского архитектора Олега Боднара привели к созданию оригинального варианта «геометрии Лобачевского», названной в современной научной литературе **«геометрией Боднара».** Таким образом, Боднар показал, что из бесконечного множества вариантов «геометрии Лобаческого», которые в общем виде могут быть описаны общими формулами (4), для ботанического явлении филлотаксиса Природа выбрала единственный вариант – «геометрию Боднара», особый вариант геометрии Лобачевского, основаный на ГФФ (5), (6). При этом появление фибоначиевых спиралей на поверхности биоформ является естественным следствием свойства (8).

Новая геометрическая теория филлотаксиса, разработанная украинским исследователем Олегом Боднаром, уже вызвала повышенный интерес западной науки, о чем свидетельствуют публикации Боднара в известном электронном журнале “Visual Mathematics”, официальном электронном органе Международного общества симметрии (ISIS SYMMETRY) [9 - 11]

С моей точки зрения, Олег Боднар совершил научное открытие, достойное присуждения Нобелевской Премии. Но он живет на Украине, где еще не получено ни одной Нобелевской Премии, несмотря на внушительное количество академических институтов, в которых трудится огромное количество докторов наук и академиков. В этой связи рекомендую прочитать статью академика НАНУ Олега Кришталя **«Якщо вчений працює в Україні, то шансів на Нобелівську премію у нього нема»**

http://life.pravda.com.ua/technology/2013/07/17/133743/

Как можно оценить «геометрию Боднара» [5, 6, 9 - 11], неразрывно связанную с ГФФ (5), (6), введенными в [3]? В этой связи уместно вспомнить высказывание великого французского ученого Фурье:

«Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо поставленной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке. ***Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы».***

С моей точки зрения **«геометрия Боднара»** [5, 6, 9 - 11] **и связанные с ней гиперболические функции Фибоначчи [3] – это фундаментальные открытия современной науки и в таком качестве им суждено остаться в истории науки!**

В этом и состоит мой ответ на замечание моего оппонента: «**Поэтому принципиально новых функций здесь нет».**

Хочу подчеркнуть, что **«геометрия Боднара» - это первый и очень важный шаг в решении 4-й проблемы Гильберта. Ведь «геометрия Боднара» - это неизвестный ранее вариант «геометрии Лобачевского», который использует природа в ботаническом явлении филлотаксиса.**

В этой связи уместна и следующая мысль. «Геометрия Боднара» поставила перед наукой много новых вопросов, в частности такой. Если Природа на самом деле действует по тому сценарию, который предложил Олег Боднар, то тогда мы должны признать, что Природа является прекрасным математиком; она знает и использует в своих объектах ГФФ (5), (6) уже в течение миллионов или даже миллиардов лет с момента возникновения живой природы.

9. Гиперболические лямбда-функции Фибоначчи

Долгое время я считал, что ГФФ (5), (6) являются единственными и неповторимыми среди общего множества гиперболических функций, задаваемых (4). Но в 2006 г. в работе [12] мне удалось показать, что на самом деле таких гиперболических функций бесконечное число. Речь идет о так называемых **гиперболических лямбда-функциях Фибоначчи.**

Лямбда-числа Фибоначчи. Зададимся натуральным числом $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n);\; F_\lambda(n) = 0, F_\lambda(1) = 1; \tag{17}$$

Рекуррентное соотношение (17) «генерирует» бесконечное количество новых числовых последовательностей, так как каждому $\lambda = 1, 2, 3, ...$ соответствует своя числовая последовательность. Важно подчеркнуть, что их частными случаями являются некоторые числовые последовательности, получившие широкую известность в современной науке.

В частности, для случая $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (17) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_1(n+2) = F_1(n+1) + F_1(n); \quad F_1(0) = 0, F_1(1) = 1, \tag{18}$$

которое задает **числа Фибоначчи**: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$. Основываясь на этом факте, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (17), были названы **λ-числами Фибоначчи** [1].

При $\lambda = 2$ рекуррентное соотношение (17) сводится к рекуррентному соотношению:

$$F_2(n+2) = 2F_2(n+1) + F_2(n); \quad F_2(0) = 0, F_2(1) = 1, \tag{19}$$

которое задает так называемые **числа Пелля**: $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, ...$

При $\lambda = 3, 4$ рекуррентное соотношение (17) сводится к следующим рекуррентным соотношениям:

$$F_3(n+2) = 3F_3(n+1) + F_3(n); \quad F_3(0) = 0, F_3(1) = 1 \tag{20}$$

$$F_4(n+2) = 4F_4(n+1) + F_4(n); \quad F_2(0) = 0, F_2(1) = 1. \tag{21}$$

Расширенные λ-числа Фибоначчи. Лямбда-числа Фибоначчи обладают многими замечательными свойствами, подобными свойствам классических чисел Фибоначчи. Доказано [1], что λ-числа Фибоначчи так же, как классические числа Фибоначчи, могут быть «расширены» в сторону отрицательных значений дискретной переменной n.

В Табл.4 приведены четыре расширенные последовательности λ-чисел Фибоначчи, соответствующие значениям $\lambda = 1, 2, 3, 4$.

Таблица 4. Расширенные λ-числа Фибоначчи ($\lambda = 1, 2, 3, 4$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21
$F_1(-n)$	0	1	–1	2	–3	5	–8	13	–21
$F_2(n)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408
$F_2(-n)$	0	1	–2	5	–12	29	–70	169	–408
$F_3(n)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927
$F_3(-n)$	0	1	–3	10	–33	109	–360	1199	–3927
$F_4(n)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184
$F_4(-n)$	0	1	–4	17	–72	305	–1292	5473	–23184

Обобщение формулы Кассини. Расширенные λ-числа Фибоначчи значительно (до бесконечности) расширяют существующую «теорию чисел Фибоначчи» [7, 8], потому что предметом исследований становятся новые рекуррентные целочисленные последовательности - λ-числа Фибоначчи, частным случаем которых являются классические числа Фибоначчи. Однако, эти числовые последовательности объединены некоторыми общими свойствами. В работе [13] я доказал следующее тождество для λ-чисел Фибоначчи:

$$F_{\lambda}^{2}(n)-F_{\lambda}(n-1)F_{\lambda}(n+1)=(-1)^{n+1} \qquad (22)$$

Приведем примеры выполнения тождества (22) для различных последовательностей, приведенных в Табл.4. Для случая $\lambda=2$ рассмотрим следующую тройку чисел: $F_2(6)=70, F_2(7)=169, F_2(8)=408$, взятых из Табл.4. Произведя вычисления над ними согласно (22), получим следующий результат:

$$(169)^2-70\times 408=28561-28560=1,$$

что соответствует тождеству (22), поскольку $(-1)^{n+1}=(-1)^8=1$.

Теперь рассмотрим $F_3(n)-$последовательность соответствующую случаю $n=6$. Для этого мы должны рассмотреть следующую тройку чисел из Табл.4:

$$F_3(5)=109, F_3(6)=360, F_3(7)=1189.$$

Произведя вычисления над ними согласно (22), получим следующий результат:

$$(360)^2-109\times 1189=129600-129601=-1,$$

что соответствует тождеству (22), поскольку $(-1)^{n+1}=(-1)^7=-1$.

Наконец, рассмотрим $F_4(-n)-$последовательность для случая $n=-5$. Для этого мы должны рассмотреть следующую тройку чисел из Табл.4:

$$F_4(-4)=-72, F_4(-5)=305, F_4(-6)=-1292.$$

Произведя вычисления над ними согласно (22), получим следующий результат:

$$(305)^2-(-72)\times(-1292)=93025-93024=1,$$

что соответствует тождеству (22), поскольку $(-1)^{n+1}=(-1)^{-4}=1$.

Таким образом, в случае λ-чисел Фибоначчи, задаваемых рекуррентным соотношением (17) мы имеем бесконечное количество целочисленных последовательностей, простирающихся от $-\infty$ до, обладающих уникальным математическим свойством, выражаемым обобщенной формулой Кассини (22), которая гласит:

Квадрат некоторого λ-числа Фибоначчи $F_{\lambda}(n)$ всегда отличается от произведения двух соседних λ-чисел Фибоначчи $F_{\lambda}(n-1)$ и $F_{\lambda}(n+1)$, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от четности числа n; если число n является четным числом, то 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

Заметим, что это свойство λ-чисел Фибоначчи $F_{\lambda}(n)$ является обобщением такого же свойства для классических чисел Фибоначчи F_n, задаваемого формулой

Кассини (13). Но если раньше мы считали, что только классические числа Фибоначчи обладают уникальным свойством (13), то сейчас мы доказали, что количество таких числовых последовательностей бесконечно, поскольку все множество числовых последовательностей, задаваемых рекуррентным соотношением (17), обладают подобным свойством, задаваемым (22). **Доказательство существования бесконечного количества целочисленных последовательностей, задаваемых (17) и обладающих уникальным свойством (22), является новым математическим результатом, представляющим несомненный интерес для теории чисел. По существу открыто новое свойство целых чисел!**

«Металлические пропорции». Разделим обе части рекуррентного соотношения (17) на $F_\lambda(n+1)$ и представим его в следующем виде:

$$\frac{F_\lambda(n+2)}{F_\lambda(n+1)}=\lambda+\frac{F_\lambda(n)}{F_\lambda(n+1)}=\lambda+\frac{1}{\frac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}}. \tag{23}$$

Если обозначить через x предел отношения $\dfrac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}$ при $n\to\infty$, то, осуществляя предельный переход в выражении (23), мы получим следующее квадратное уравнение:

$$x^2=\lambda x+1. \tag{24}$$

Мы будем пользоваться также следующей традиционной формой записи квадратного уравнения (24):

$$x^2-\lambda x-1=0 \tag{25}$$

Квадратное уравнение (25) имеет два корня:

$$x_1=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2} \tag{26}$$

$$x_2=\frac{\lambda-\sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{27}$$

Обозначим через Φ_λ положительный корень x_1, задаваемый (26), и рассмотрим новый класс математических констант, задаваемых следующим выражением:

$$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{28}$$

Заметим, что для случая $\lambda=1$ формула (28) сводится к выражению для классической золотой пропорции:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{29}$$

Таким образом, формула (28) является обобщением формулы (29) для золотой пропорции и уже этот факт должен привлечь наше пристальное внимание к формуле (28).

Аргентинский математик Вера Шпинадель [14] назвала математические константы, задаваемые выражением (24), **«металлическими пропорциями».** Если в (28) мы примем $\lambda=1,2,3,4$, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие, согласно Шпинадель, следующие названия:

$$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,(\text{золотая пропорция}, \lambda=1);\quad \Phi_2=1+\sqrt{2}\,(\text{серебряная пропорция}, \lambda=2);$$

$$\Phi_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\,(\text{бронзовая пропорция}, \lambda=3);\quad \Phi_4=2+\sqrt{5}\,(\text{медная пропорция}, \lambda=4).$$

Остальные металлические пропорции ($\lambda\geq 5$) не имеют специальных названий:

$$\Phi_5=\frac{5+\sqrt{29}}{2};\quad \Phi_6=3+2\sqrt{10};\quad \Phi_7=\frac{7+2\sqrt{14}}{2};\quad \Phi_8=4+\sqrt{17}.$$

Ясно, что количество «металлических пропорций», задаваемых (28), теоретически бесконечно, так каждому натуральному числу λ соответствует своя «металлическая пропорция» типа (28). И наиболее важным является тот факт, что «металлические пропорции» (28) являются «естественным» обобщением одной из важнейших математических констант науки и природы - золотой пропорции (29) ($\lambda=1$). Это дает нам основание предположить, что «металлические пропорции» (28) представляют собой новый класс математических констант, которые, возможно, представляют такой же интерес для математики и теоретического естствознания, как и золотая пропорция.

В работах [1, 12] выведено много замечательных свойств «металлических пропорций», в частности, ее представление в виде цепной дроби:

$$\Phi_\lambda=\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\ldots}}}\,. \tag{30}$$

Эти свойства являются еще одним подтверждением того, что «металлические пропорции» (28), действительно, являются новыми математическими константами, обладающими математическими свойствами, подобными свойствам «золотой пропорции». Поэтому изучение свойств «металлических пропорций» (28) и поиск их приложений в теоретическом естествознании является одной из важнейших задач современной науки.

Формула Газале. Формула (17) задает λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ рекурсивно. Однако, λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ могут быть выражены в аналитической форме через металлические пропорции Φ_λ, подобно тому как числа Фибоначчи представляются аналитически через золотую пропорцию с использование формул Бине (1).

Такую аналитическую формулу вывел французский математик Мидхат Газале [15]:

$$F_\lambda(n)=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^n-\left(\frac{\lambda-\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^n\right] \tag{31}$$

Формула Газале (31) является исходной для введения нового класса гиперболических функций **– гиперболических λ-функций Фибоначчи** [12].

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи

$$sF_{\lambda}(x)=\frac{\Phi_{\lambda}^{x}-\Phi_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{x}-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{-x}\right], \tag{32}$$

$$cF_{\lambda}(x)=\frac{\Phi_{\lambda}^{x}+\Phi_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{x}+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^{2}}}{2}\right)^{-x}\right]. \tag{33}$$

где x – непрерывная переменная и λ - заданное натуральное число.

λ-числа Фибоначчи связаны с гиперболическими λ-функциями Фибоначчи следующим образом:

$$F_{\lambda}(n) \;=\; \begin{cases} sF_{\lambda}(n), & n=2k \\ cF_{\lambda}(n), & n=2k+1 \end{cases}; \tag{34}$$

Из формулы (34) вытекает, что при четных значениях $n=2k$ функция гиперболического λ-синуса Фибоначчи $sF_{\lambda}(n)=sF_{\lambda}(2k)$ совпадает с λ-числом Фибоначчи $F_{\lambda}(n)=F_{\lambda}(2k)$, а при всех нечетных значениях $n=2k+1$ функция гиперболического λ-косинуса Фибоначчи $cF_{\lambda}(n)=cF_{\lambda}(2k+1)$ совпадает с λ-числом Фибоначчи $F_{\lambda}(n)=F_{\lambda}(2k+1)$.

Таким образом, основным результатом исследований, проведенных в [1- 3, 12], является создание новых классов гиперболических функций, задаваемых (5), (6), (32), (33), основанных на «золотой» и «металлических» пропорциях. Формально в этих функциях ничего нового нет, потому что все они являются частным случаем общего класса гиперболических функций, задаваемых (4). Однако, эти функции имеют следующие отличительные особенности:

1. Первая особенность состоит в том, что функции (5), (6), (32), (33) сохраняют все известные гиперболические свойства классических гиперболических функций (2).
2. Однако, принципиальное отличие функций (5), (6), (32), (33) от классических гиперболических функций (2), (4) состоит в том, что эти функции обладают рекурсивными свойствами, подобными свойствам λ-чисел Фибоначчи. Они неразрывными узами связаны с расширенными λ-числами Фибоначчи, которые являются «дискретным» аналогом функций (5), (6), (32), (33). В класссических гиперболических функциях (2) прямой связи с какой-либо целочисленной числовой последовательностью не существует.
3. Так же, как и для случая ГФФ (3), (4), которые лежат в основе ботанического явления филлотаксиса («геометрия Боднара»), может оказаться, что в природе функции (32), (33) используются и лежат в основе гиперболичесих преобразований, протекающих в природе. При этом λ-числа Фибоначчи (17) могут стать своеобразными индикаторами гиперболических миров природы, подобно тому, как классические числа Фибоначчи выражают «закон филлотаксиса».

10. О 4-й проблеме Гильберта

В 2011 г. Международный журнал «Applied Mathematics" опубликовал статью Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem [16 - 18]. Статья опубликована в трех частях:
Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and "Golden" Fibonacci Goniometry
Part II. New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar's Geometry).
Part III. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem

Решение 4-й проблемы Гильберта, изложенное в статьях [16 - 18], подсказала нам «геометрия Боднара». Как упоминалось, «геометрия Боднара» является вариантом «геометрии Лобачевского», в которой для описания математических соотношений используются ГФФ (5), (6). При этом эффект новой гиперболической геометрии достигается путем использования нового класса гиперболических функций, основанных на «золотой пропорции». При этом возникла очень простая мысль: не могут ли гиперболические λ-функции Фибоначчи (32), (33) привести к новым вариантам «геометрии Лобачевского», которые могут стать реальными моделями новых «гиперболических миров Природы»?

Считается, что первым вкладом в решение 4-й проблемы Гильберта является диссертация немецкого математика Гамеля, защищённая в 1901 г. под руководством Гильберта. Однако, наибольший вклад в решение этой проблемы внес выдающийся геометр Алексей Погорелов, который написал специальную книгу «Четвертая проблема Гильберта» (1974).

Аннотация к этой книге гласит следующее:
«Книга содержит решение известной проблемы Гильберта об определении всех с точностью до изоморфизма реализаций систем аксиом классических геометрий (Евклида, Лобачевского, эллиптической), если в них опустить аксиомы конгруэнтности, содержащие понятие угла, и пополнить эти системы аксиомой «неравенство треугольника». Книга рассчитана на студентов-геометров старших курсов, аспирантов и научных работников».

В этой связи нас с Арансоном смутил тот факт, что Викпедийное математическое сообщество почему-то не признает решения Погорелова, изложенное в его книге, несмотря на то, что книга была перевелена на английский язык. В англоязычной Википедии [19, 20] нет даже упоминания о вкладе Погорелова в решение этой проблемы.

Я попросил моего соавтора доктора физико-математических наук по специальности «Топология и геометрия» (1990) Самуила Арансона разобраться в этом. Свою точку зрения Арансон изложил в статье **Ещё раз о 4-й проблеме Гильберта** http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321180.htm

В этой статье он написал следующее:

«3. Погорелов выбрасывает аксиому конгуэнтности углов, заменяя её аксиомой неравенства треугольника: «длина любой стороны треугольника всегда не превосходит сумму длин двух его других сторон». В случае такой замены для

каждой из этих геометрий аксиома конгруэнтности углов становится ТЕОРЕМОЙ, если реализовывать геометрии Евклида, Лобачевского или Римана. В противном случае, система аксиом Погорелова не может удовлетворять трём условиям:
независимости, непротиворечивости и полноты. После фактического доказательства этой теоремы, каким бы изящным методом она не получена, состоящей в реализации этих аксиом, автоматически восстанавливаются все прежние системы аксиом для геометрий Евклида, Лобачевского и Римана.
В этом, как нам кажется, и состоит вклад Погорелова в четвёртую проблему Гильберта, и, следовательно, то что он сделал, ***не есть полное решение четвёртой проблемы Гильберта.***
4. Вот когда Н.И.Лобачевский вместо аксиомы Евклида (пятый постулат Евклида) (Аксиома параллельных прямых. «Через любую точку, лежащую вне прямой, можно провести другую прямую, параллельную данной, и притом только одну» предложил свою аксиому «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её», сохранив при этом все остальные аксиомы, то это действительно была революция в геометрии. В геометрии Римана (эллиптическая геометрия) аксиома о параллельных звучит так.«Каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую. Эта аксиома противоречит системе аксиом евклидовой геометрии, если не исключить аксиому о параллельных
Евклида..
5. Ведь вместо аксиомы параллельных прямых мы могли бы использовать в качестве аксиомы свойство углов треугольника («сумма углов треугольника равна 180º для геометрии Евклида, меньше 180º для геометрии Лобачевского и больше 180º для геометрии Римана»). Но тогда необходимо доказывать аксиому о параллельных прямых в ситуации для Евклида, Лобачевского и Римана, которая в этом случае становится ТЕОРЕМОЙ. ***Эта теорема доказывалась у нас в университете для студентов, когда нам читался курс «Основания геометрии». Но никто же никогда не говорил тогда да и теперь, что это есть решение четвёртой проблемы Гильберта.***
6. Именно поэтому в Википедии, последнее обновление которой было 21 сентября 2009 года, для четвёртой проблемы Гильберта говорится, что «она слишком расплывчатая» (чтобы говорить о её полном решении). И при этом не упоминаются ни фамилии Гамеля, ни фамилии Погорелова. Те же слова о «расплывчатости четвёртой проблемы Гильберта» (чтобы говорить о её окончательном решении) приводятся и в недавней украинской газете «Техническая украинская газета» (Киев, март 2009 года) в статье, посвящённой 90-летию со дня рождения А.В. Погорелова».

Недавно я с интересом прочитал замечательную книгу **Yandell Benjamin H. The Honors class- Hilbert's problems and Their Solvers// A.K.Peters.- Naticn. Massachusetts (2003)**. В этой книге мне наиболее понравилось следующая ключевая мысль, высказанная венесуэльским математиком **Juan Carlos Alvarez**, который сейчас работает в США http://www.math.poly.edu/~alvarez/ , в письме к автору книги следующего содержания:

«Вы правы, что эта проблема очень нечетко поставлена. Вначале я думал, что это – слабое место, но сейчас я думаю, что сила проблемы состоит именно в том, что она допускает ряд различных формулировок».

Идея мне понравилась. И мне хотелось бы привести одну из формулировок 4-й проблемы, сделанную самим Гильбертом:

"A common question that arises in this case is the following: is it possible to have other fruitful points of view to build a geometry that with the same right could be considered the closest to the ordinary Euclidean geometry?"

"Самый распространенный вопрос, который возникает в этом случае, заключается в следующем: существуют ли другие плодотворные точки зрения построить геометрию, которая с таким же правом может считаться близкой к традиционной евклидовой геометрии?"

В указанной выше формулировке Гильберт не ставит в качестве обязательного условия, что решение проблемы обязательно должно сводиться к изменению аксиом. Он просто ставит вопрос о построении геометрии, которая **«с таким же правом может считаться близкой к традиционной евклидовой геометрии?"**

Мне представляется, что наше с Арансном решение [16 - 18] полностью находится в русле указанной выше формулировки. В нашем решении получение нового варианта геометрии Лобачевского достигается не путем манипуляции с аксиомами, а путем использования нового вида гиперболических функций – **гиперболических λ-функций Фибоначчи**. При этом мы остаемся в рамках классической геометрии Лобачевского, но это приводит к созданию новых вариантов геометрии Лобачевского, подобных «геометрии Боднара» (нельзя же, в самом деле, отрицать «геометрию Боднара»).

Уже одной «геометрии Боднара» достаточно, чтобы говорить о новом варианте геометрии Лобачевского, лежащем в основе геометрии филлотасиса. То есть, создание «геометрии Боднара» - это уже есть первый шаг в решении 4-й проблемы Гильберта в указанной выше формулировке. Но мы с Арансоном еще более расширили класс новых вариантов геометрии Лобачевского, вводя в рассмотрение гиперболические λ-функции Фибоначчи [16 - 18]. Я считаю, что такой подход к решению 4-й проблемы Гильберта имеет право на существование.

Главный же результат нашего подхода состоит в том, что мы вводим в гиперболическую геометрию античную идею Гармонии, которая воплощена в использовании нового класса гиперболических функций, основанных на «золотой пропорции» - главной гармонической пропорции древаних греков, и на «металлических пропорциях» - новых математических константах, являющихся обобщением «золотой пропорции».

Главная наша идея состоит в том, что наш подход из бесконечного числа вариантов гиперболических функций, задаваемых (4), выделяет счетное множество «гармонических» гиперболических функций, задаваемых (32), (33).

Первый вариант представляют ГФФ, задаваемые (5), (6). Эти функции, связанные с числами Фибоначчи, Природа реализует в ботаническом явлении филлотаксиса («геометрия Боднара»).

Мы выдвигаем гипотезу, что и другие варианты функций (32), (33), могут привести к гиперболическим геометриям, подобным «геометрии Боднара». Это и есть наше с Самуилом Арансоном решение 4-й проблемы Гильберта. Это решение является частным решением этой сложнейшей математической проблемы, которое не отрицает другие решения этой проблемы.

11. Вместо заключения

Предисловие академика Ю.А. Митропольского к книге А.П. Стахова «Новая математика для живой природы. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка» (2003)

Мне приятно представить читателям новую книгу «Новая математика для живой Природы», написанную известным украинским ученым, доктором технических наук, профессором Стаховым Алексеем Петровичем. Его книга является продолжением и развитием его предыдущих публикаций «Введение в алгоритмическую теорию измерения» (1977), «Алгоритмическая теория измерения» (1979), «Коды золотой пропорции» (1984), которые объединены общей математической идеей (числа Фибоначчи и Золотое Сечение) и ставят своей целью показать основополагающую роль Золотого Сечения и чисел Фибоначчи в развитии науки и математики.

Я слежу за научным творчеством проф. Стахова очень давно, наверное, с момента публикации его первой книги «Введение в алгоритмическую теорию измерения» (1977), которая была представлена автором в 1979 г. на научном семинаре Института математики Академии наук Украины. Но особенно мой интерес к научным исследованиям проф. Стахова повысился после его блестящего выступления в 1989 г. на заседании Президиума Академии наук Украины, в *котором проф. Стаховым были представлены научные и инженерные разработки в области «выполненные под его научным руководством. Однако, в последние десятилетия область научных интересов проф. Стахова все больше сдвигается к основаниям математики и компьютерной науки.*

Об этом, например, свидетельствует его лекция «Золотое Сечение и современная математика гармонии», впервые прочитанная им на заседании 7-й Международной конференции «Числа Фибоначчи и их приложения» (Австрия, Грац, 1996) и затем повторенная в 1998 г. на заседании Украинского математического общества. Эта лекция произвела большое впечатление на украинских математиков и вызвала оживленную дискуссию.

Представленная книга является частью обширного плана математических исследований по обновлению современной науки, выполняемого проф. Стаховым в течение многих десятилетий. Впервые я познакомился с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка в 1993 г., когда мне на рецензию была представлена статья «Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи», представленная А.П. Стаховым и И.С. Ткаченко для публикации в журнале «Доклады Академии наук Украины». Статья меня заинтересовала и согласно моей рекомендации она была опубликована в одном из номеров журнала за 1993 год. Введенные Стаховым и Ткаченко новые классы элементарных функций могут стать важным событием в современной науке и математики, если при этом учесть особую роль, которую играют гиперболические функции в развитии математики и физики (гиперболическая геометрия Лобачевского, «четырехмерный мир Минковского» и т.д.).

Прежде всего, новые гиперболические функции представляют интерес с математической точки зрения. Они являются расширением известных формул Бине для чисел Фибоначчи и Люка на непрерывную область. Первый неожиданный результат, вытекающий из такого подхода, состоит в переосмысливании «теории чисел Фибоначчи», активно развевающейся в последние десятилетия. Благодаря гиперболическим функциями Фибоначчи и Люка «теории чисел Фибоначчи», которая до сих пор развивалась как «дискретная теория», превращается в «непрерывную теорию», значительно более богатую по своему содержанию, потому что гиперболическим функции Фибоначчи и Люка являются более сложными математическими объектами, чем числа Фибоначчи и Люка, которые являются лишь вырожденным случаем нового класса гиперболических функций.

Но особый интерес к гиперболическим функциями Фибоначчи и Люка возникает еще и потому, что эти функции были блестяще использованы украинским ученым и архитектором Олегом Боднаром в созданной им новой теории филлотаксиса. Кстати, статья Боднара на эту тему по моей рекомендации опубликована в том же журнале «Доклады Академии наук Украины» в 1992 г. Исследования Боднара показывают, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка (названные Боднаром «золотыми» гиперболическими функциями) отражают некоторые глубокие закономерности, существующие в живой природе, и поэтому могут стать весьма эффективным средством для моделирования процессов в живой природе.

Несмотря на строго математический характер книги проф. Стахова, необходимо отметить, что она написана популярно, с большим педагогическим мастерством и в каком-то смысле может выступать в роли «букваря» по числам Фибоначчи и Золотому Сечению, что чрезвычайно актуально для школ и университетов, как Украины, так и России и других стран. И поэтому издание книги необходимо и полезно не только с научной и математической точки зрения, но и с педагогической точки зрения. Мне кажется, что ее с удовольствием прочтут не только школьные учителя математики, школьники старших классов и студенты университетов, но также многие ученые и исследователи, которые интересуются историей науки и математики, а также приложениями чисел Фибоначчи и Золотого Сечения в своих предметных областях.

*И последнее замечание, касающееся названия нового класса гиперболических функций. Великие математики Фибоначчи и Люка, которые ввели в рассмотрение числа Фибоначчи и Люка, строго говоря, никакого отношения к этим функциям не имеют. И мне кажется, что наука (и особенно украинская математика) только выиграли бы, если бы эти функции были названы «**гиперболическими функциями Стахова и Ткаченко**», то есть, названы именами тех украинских ученых, которым принадлежит честь введения в математику нового класса функций. То же самое касается и новой геометрической теории филлотаксиса, созданной украинским ученым Олегом Боднаром. Мы имеем полное право назвать новую теорию филлотаксиса **«геометрией Боднара».***

Я не сомневаюсь, что книга проф. Стахова будет воспринята мировой научной общественностью с большим интересом, а научные результаты, изложенные в настоящей книге, могут открыть новые пути в математическом исследовании Природы.

Академик Национальной Академии наук Украины
и Российской Академии наук
Почетный директор Института математики
Национальной Академии наук Украины
Ю.А. Митропольский

Литература

1. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2009. – 748 p.
2. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады НАНУ, том 208, № 7, 1993. –с.9-14.
3. Stakhov A., Rozin B. *On a new class of hyperbolic function* // Chaos, Solitons & Fractals, 2005, Vol. 23, Issue 2, 379-389.
4. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва: Радио и Связь, 1984
5. Боднар О.Я. Геометрия филлотаксиса. Доклады НАНУ. 1992, №9.
6. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994. – 204 с.
7. Воробъев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва: Наука, (1961).

8. Hoggat, V.E., Jr. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
9. Oleh Bodnar. DYNAMIC SYMMETRY IN NATURE AND ARCHITECTURE. Visual Mathematics, Volume 12, No.4, 2010
http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/BOD2010/index.html
10. Oleh Bodnar. GEOMETRIC INTERPRETATION AND GENERALIZATION OF THE NONCLASSICAL HYPERBOLIC FUNCTIONS. Visual Mathematics, Volume 13, No.1, 2011
http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/bodnarsept2011/SilverF.pdf
11. Oleh Bodnar. MINKOWSKI GEOMETRY IN THE MATHEMATICAL MODELING OF NATURAL PHENOMENA. Visual Mathematics, Volume 14, No.1, 2012 http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/bodnardecembar2011/mink.pdf
12. Stakhov A.P. Gazale formulas, a new class of the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions, and the improved method of the “golden” cryptography // Moscow: Academy of Trinitarism, № 77-6567, publication 14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm.
13. Stakhov AP. A generalization of Cassini formula. Visual Mathematics, Volume 14, No.2, 2012 http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/stakhovsept2012/cassini.pdf
14. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
15. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (Русский перевод: Мидхат Газале. Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.).
16. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and “Golden” Fibonacci Goniometry. Applied Mathematics, 2011, 2 (January), 74-84.
17. Stakhov A., Aranson S.. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part II. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar’s Geometry). Applied Mathematics, 2011, 2 (February), 181-188.
18. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert’s Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (March).
19. Hilbert's Problems. From Wikipedia, the free encyclopaedia http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_problems
20. Hilbert's Fourth Problem. From Wikipedia, the free encyclopaedia http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_fourth_problem
21. Стахов А.П. Новая математика для живой природы. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка. – Винница, Изд-во «ITI», 2003. – 264 с.: