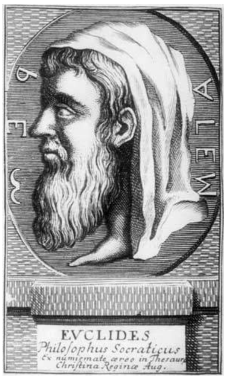
А.П. Стахов

Как Евклид использовал «золотое сечение» в своих «Началах»?

1. О «Началах» Евклида

В статье [1] приведены взгляды Д.Д. Мордухай-Болтовского, Алексея Лосева и Иоганна Кеплера на «золотое сечение» и его роль в развитии античной науки и математики. Настоящая статья является продолжением и развитием статьи [1]. В ней использованы материалы книги автора [2].

«Начала» Евклида – величайшее математическое сочинение древнегреческой эпохи. В настоящее время каждый школьник знает, кто такой Евклид, который написал самое значительное математическое сочинение греческой эпохи – «Начала» Евклида. Это научное произведение создано им в 3 в. до н. э. и содержит основы античной математики: элементарную геометрию, теорию чисел, алгебру, теорию пропорций и отношений, методы определения площадей и объемов и др. Евклид подвел в этом сочинении итог трехсотлетнему развитию греческой математики и создал прочный фундамент для дальнейшего развития математики.



Евклид

Сведения о Евклиде крайне скудны. К наиболее достоверным сведениям о жизни Евклида принято относить то немногое, что приводится в «Комментариях Прокла к первой книге «Начал» Евклида». Прокл указывает, что Евклид «жил во времена Птолемея I Сотера», потому что Архимед, живший при Птолемее Первом, упоминает об Евклиде. В частности, Архимед рассказывает, что Птолемей однажды спросил Евклида, есть ли более короткий путь изучения геометрии, нежели «Начала»; а тот ответил, что нет царского пути к геометрии. Учителями Евклида в Афинах были ученики Платона, а в правление Птолемея I (306–283 до н.э.) он преподавал во вновь основанной школе в Александрии. «Начала» Евклида превзошли сочинения его предшественников в области геометрии и на протяжении более двух тысячелетий оставались основным трудом по элементарной математике. В 13 частях, или книгах, «Начал» содержится большая часть знаний по геометрии и арифметике эпохи Евклида.

«Начала» Евклида состоят из тринадцати книг. В Книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов и производится сравнение их площадей. Заканчивается Книга I знаменитой Теоремой Пифагора. В Книге II излагается так называемая геометрическая алгебра, т. е. строится геометрический аппарат для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. В Книге III рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд, в Книге IV — правильные многоугольники. В Книге V даётся общая теория отношений величин, созданная Евдоксом Книдским; её можно рассматривать как прообраз теории действительных чисел, разработанной только во 2-й половине 19 в. Общая теория отношений является основой учения о подобии (Книга VI) и метода исчерпывания (Книга VII), также восходящих к Евдоксу. В Книгах VII—IX изложены начала теории чисел, основанные на алгоритме нахождения наибольшего общего делителя (алгоритм Евклида). В эти книги входит теория делимости, включая теоремы об однозначности разложения целого числа на простые множители и о бесконечности числа простых чисел; здесь излагается также учение об отношении целых чисел, эквивалентное, по существу, теории рациональных (положительных) чисел. В Книге X даётся классификация квадратичных и биквадратичных иррациональностей и обосновываются некоторые правила их преобразования. Результаты Книги X применяются в Книге XIII для нахождения длин рёбер правильных многогранников. Значительная часть Книг X и XIII (вероятно и VII) принадлежит Теэтету (начало 4 в. до н. э.). В Книге XI излагаются основы стереометрии. В Книге XII определяются с помощью метода исчерпывания отношение площадей двух кругов и отношение объёмов пирамиды и призмы, конуса и цилиндра. Эти теоремы впервые доказаны Евдоксом. Наконец, в Книге XIII определяется отношение объёмов двух шаров, строятся пять правильных многогранников и доказывается, что иных правильных тел не существует.

2. Предложение II.11 «Начал» Евклида

В «Началах» Евклида мы встречаемся с задачей, которая в дальнейшем сыграла большую роль в развитии науки. Речь идет о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении». В «Началах» Евклида эта задача встречается в двух формах. Первая форма сформулирована в виде Предложения 11 Книги II «Начал» Евклида [3 - 5]. В настоящей статье использовано изложение Предложения II.11, приведенное в [6].

Предложение II. 11. Данную прямую AD разделить на две неравные части AF и FD так, чтобы площадь квадрата, построенного на большем отрезке AF, равнялась бы площади прямоугольника, построенного на отрезке AD и меньшем отрезке FD.

Вникнем в суть этой задачи. Для этого изобразим эту задачу геометрически (Рис.1).

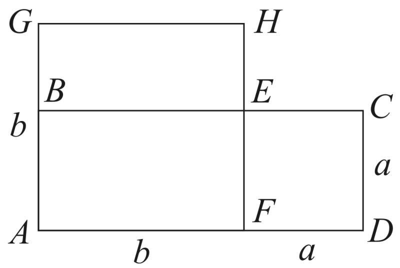


Рис. 1. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении

Таким образом, согласно Предложению II. 11, площадь квадрата *AGHF* должна быть равна площади прямоугольника *ABCD*. Если обозначить длину большего отрезка *AF* через *b* (она равна стороне квадрата *AGHE*), а сторону меньшего отрезка через *a* (она равна вертикальной стороне прямоугольника *ABCD*), то условие Предложения II. 11 можно записать в виде:

$$b^2 = a \times (a+b). \quad (1)$$

«Начала» Евклида переведены на многие языки мира. Наиболее авторитетным изданием сочинения Евклида на русском языке являются «Начала» в переводе и с комментариями Д.Д. Мордухай-Болтовского [3 - 5]. Интересно ознакомиться со следующими комментариями Мордухай-Болтовского, касающимися «золотого сечения»:

«Теперь посмотрим, какое место занимает золотое сечение в «Началах» Евклида. Прежде всего, нужно отметить, что оно встречается в двух формах, разница между которыми почти неощутима для нас, но была очень существенной в глазах греческого математика V-VI-го веков до н.э. Первая форма, прототип которого мы видели в Египте, является в Книге II «Начал», а именно в Предложении 11 вместе с вводящими его предложениями 5 и 6; здесь золотое сечение определяется как такое, в котором квадрат, построенный на большем отрезке, равняется прямоугольнику на всей прямой и меньшем отрезке. Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему - и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен только со времен Евдокса. Интересно отметить, что предложениям 5, 6 и 11 книги II соответствуют предложения 27, 28 и 30 – шестой. Затем, предложения 5 и 6 книги II разорвали связь между предложениями 4 и 7, соответствующим нашим формулам квадратов суммы и разности; «та же фигура», о которой упоминается в предложении 7, строится в 4-м.

В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1-5 и во второй – в предложениях 8-10. Правда в формулировке и тексте доказательства 1-5 предложений встречаются слова «в крайнем и среднем отношении», в доказательствах есть некоторые следы пользования пропорциями, но при внимательном чтении нетрудно заметить, что все эти места не связаны органически с общим текстом и легко из него могут быть исключены; все доказательство по существу ведется исходя из равенства на большем отрезке прямоугольнику ... Более того, предложение 2 книги XIII по существу равнозначно геометрическому построению предложения 11 книги II.

Все это позволяет думать, что предложения 4, 7, 8 книги II и предложения 1-5 книги XIII представляют остатки одного из самых древних в истории греческой геометрии документов, восходящего по всей вероятности к первой половине V века и возникшего в пифагорейской школе на основании того материала, который был привезен из Египта. Сравнительную древность этого документа можно установить из того обстоятельства, что предложения 4 и 7 книги II служат в ней для доказательства обобщенной теоремы Пифагора [квадрат стороны против острого и тупого угла (предложения 12 и 13 книги II)], которая, несомненно, была известна Гиппократу Хиосскому ... Несмотря на то, что первые пять предложений книги XIII составляют одно целое с рядом предложений книги II , нужно отметить, что при непосредственном использовании предложений книги II (в особенности предложения 11, которое и дает построение золотого сечения) доказательства были бы в отдельных случаях значительно проще»

Мы можем сделать следующие выводы из этих комментариев:

1. Во-первых, Мордухай-Болтовский не разделяет понятия «деление отрезка в крайнем и среднем отношении» и «золотое сечение». Для него это – одно и то же понятие.

2. Мордухай-Болтовский обращает внимание, что в «Началах» Евклида имеется не одна (Предложение II.11), а, по крайней мере, две различные формулировки задачи о «золотом сечении». Приведем еще раз цитату Мордухай-Болтовского: *«Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему - и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен Евдокса».* И далее: *«В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1-5 и во второй – в предложениях 8-10». То есть, Евклид широко использует в своих «Началах» как первую форму (Предложение II.11 и предложения 1-5 книги XIII), так и вторую форму как представление золотого сечения в виде пропорции (предложение 3 книги VI и предложения 8-10 книги XIII)».*

3. В задаче о «золотом сечении» Мордухай-Болтовский видит «египетский след» и явно намекает на Пифагора, который 22 года провел в Египте и привез оттуда огромное количество египетских математических знаний, включая «теорему Пифагора» и «золотое сечение». Отсюда вытекает, что Мордухай-Болтовский не сомневался в том, что не только Евклид, но и Пифагор (а отсюда следует, что и Платон, который был пифагорейцем), а также и древние египтяне знали о «золотом сечении» и широко его использовали.

В книге Валентина Бунина [7] также обращено внимание на «египетский след» в происхождении «золотого сечения»: *«Нелишне напомнить, что изначальный геометрический смысл "золотого сечения" весьма прост и был связан с ежегодным переделом земельных площадей, заливаемых Нилом. При этом решалась задача нахождения стороны такого прямоугольника, площадь которого должна была равняться площади квадрата, а отношение сторон обеспечивало бы удобство компоновки. Можно предположить, что соотношением "золотого* *сечения" египтяне пользовались и при сооружении пирамид для определения объема, равновеликого кубу».*

3. Вторая форма задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении и современная формулировка задачи о «золотом сечении»

Перейдем теперь ко второй форме формулировки задачи о «золотом сечении», о которой упоминает Мордухай-Болтовский. Вторая форма вытекает из первой, задаваемой выражением (1), если проделать следующие преобразования. Разделив обе части выражения (1) вначале на a, а затем на b, получим следующую пропорцию:

$$\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b}. \tag{2}$$

Пропорция (2) имеет следующую геометрическую трактовку (Рис.2). Разделим отрезок *AB* точкой *C* в таком отношении, чтобы большая часть отрезка *CB* так относилась к меньшей части *AC*, как отрезок *AB* к своей большей части *CB* (Рис. 2), то есть:

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{AC}. \tag{3}$$

Это и есть определение «золотого сечения», используемое в современной науке.

Рис. 2. Золотое сечение

Обозначим пропорцию (3) через *x*. Тогда, учитывая, что $AB=AC+CB$, пропорцию (3) можно записать в следующем виде:

$$x=\frac{AC+CB}{CB}=1+\frac{AC}{CB}=1+\frac{1}{\frac{CB}{AC}}=1+\frac{1}{x},$$

откуда вытекает следующее алгебраическое уравнение для вычисления искомого отношения *x*:

$$x^2-x-1=0. \tag{4}$$

Из «физического смысла» пропорции (3) вытекает, что искомое решение уравнения (4) должно быть положительным числом, откуда вытекает, что решением задачи о «золотом сечении» является положительный корень уравнения (4), который мы обозначим через Φ, то есть,

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{5}$$

Это и есть то знаменитое число, которое имеет много восхитительных названий: **золотое сечение, золотое число, золотая пропорция, божественная пропорция**.

Выведенное выше алгебраическое уравнение (4) часто называют уравнением золотой пропорции.

Заметим, что на отрезке AB существует еще одна точка D (Рис.2), которая делит его «золотым сечением», так как

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

4. Происхождение термина «золотое сечение»

.

Кто же ввел термин «ролотое сечение»? Иногда введение этого названия (“sectio aurea”) приписывают Леонардо да Винчи. Это – спорное мнение, потому что в сочинениях Леонардо да Винчи нигде не встречается название «золотое сечение». Однако, нет никаких сомнений в том, что великий Леонардо был «идейным вдохновителем» книги «De Divine Proportione” («Божественная пропорция») знаменитого итальянского математика Луки Пачоли, опубликованной в 1509 г. Историческое значение этой книги состоит в том, что это – первая в истории книга о «золотом сечении». Иллюстратором книги был Леонардо да Винчи. Поэтому книга имеет также художественную ценность. В книге [7], посвященной истории «золотого числа», утверждается, что немецкий математик Мартин Ом впервые ввел термин «золотое сечение» (“Goldene Shnitt”) в 1835 г. в книге “Die reine Elementar-Mathematik”.

Обозначение «золотой пропорции» греческой буквой Ф (число PHI) не является случайным. Эта буква является первой буквой в имени знаменитого греческого скульптора Фидия (Phidias), который широко использовал «золотое сечение» в своих скульптурных произведениях. Напомним, что Фидий (5 в. до н.э.) наряду с Поликлетом являлся одним из двух самых значительных и авторитетных мастеров древнегреческой скульптуры эпохи классики. Он прославился тем, что руководил работами по художественному убранству Акрополя, исполнив колоссальную бронзовую статую Афины Промахос («Победительницы в битвах»), воздвигнутую здесь около 456 до н.э. в ознаменование победы над персами. Создал также две грандиозные (из золота и слоновой кости) статуи: Афины Парфенос («Девы») для Парфенона на Акрополе (446–438 до н.э.) и Зевса Олимпийского (для храма Зевса в Олимпии, ок. 430 до н.э.), которого считали одним из «семи чудес света». При всей монументальности его образов, порой (подобно 9-метровой Афине Парфенос или 13-метровому Зевсу Олимпийскому) беспрецедентных по величине для Греции того времени, им была свойственна строгая уравновешенность и гармония пластических контрастов, основанная на золотом сечении, что и составляло суть классического стиля в период его высшего расцвета.

5. Способ геометрического построения золотого сечения

Золотое сечение широко встречается в геометрии. Известен следующий способ геометрического построения золотого сечения с использованием линейки и циркуля (Рис.3). Построим прямоугольный треугольник ABC со сторонами $AB=1$ и $AC=\frac{1}{2}$. Тогда в соответствии с «теоремой Пифагора» сторона

$CB = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Проведя дугу AD с центром в точке C до пересечения с отрезком CB в точке D, мы получим отрезок $BD = CB - CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi^{-1}$.

Проведя дугу DB с центром в точке B до ее пересечения с отрезком AB в точке E, мы получим деление отрезка AB в точке E «золотым сечением», поскольку

$$\frac{AB}{EB} = \frac{EB}{AE} = \Phi \text{ или } AB = 1 = EB + AE = \Phi^{-1} + \Phi^{-2}.$$

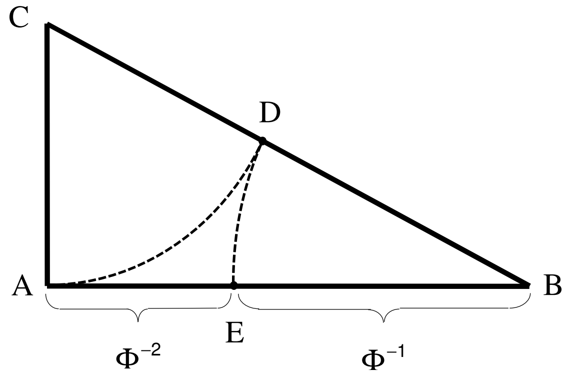


Рис. 3. Геометрическое построение золотого сечения

6. С какой целью Евклид написал свои «Начала»?

На первый взгляд, кажется, что ответ на этот вопрос очень простой: главная цель Евклида состояла в том, чтобы изложить основные достижения греческой математики за 300 лет, предшествующих Евклиду, используя «аксиоматический метод» изложения материала. Действительно, «Начала» Евклида являются главным трудом греческой науки, посвященным аксиоматическому построению геометрии и математики. Такой взгляд на «Начала» наиболее распространен в современной математике.

Однако, кроме «аксиоматической» точки зрения существует и другая точка зрения на мотивы, которыми руководствовался Евклид при написании «Начал». Эта точка зрения высказана греческим философом и математиком Проклом Диадохом (412-485), одним из первых комментаторов «Начал».

Прежде всего, несколько слов о Прокле. Прокл родился в Византии в семье богатого адвоката из Ликии. Намереваясь пойти по стопам отца, подростком уехал в Александрию, где учился сначала риторике, затем заинтересовался философией и стал учеником александрийского неоплатоника Олимпиодора Младшего. Именно у него Прокл начал изучать логические трактаты Аристотеля. В возрасте 20 лет Прокл переезжает в Афины, где Платоновскую Академию в то время возглавлял Плутарх Афинский. Уже к 28-летнему возрасту Прокл написал одну из своих главнейших работ, комментарий на платоновского «Тимея». Около 450 г. Прокл становится главой Платоновской Академии.

Среди математических сочинений Прокла наиболее известным является его «Комментарий к первой книге «Начал» Евклида». В этом Комментарии он выдвигает следующую необычную гипотезу, которую называют "гипотезой Прокла". Суть ее состоит в следующем. Как известно, XIII-я, то есть, заключительная книга «Начал» посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые играли главенствующую роль в «Космологии Платона» и в современной науке известны под названием Платоновых тел. Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает Эдуард Сороко [8], по мнению Прокла, Евклид *«создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики».*

7. Значение «гипотезы Прокла» для развития математики

Главный вывод из «гипотезы Прокла» состоит в том, что «Начала» Евклида, величайшее греческое математическое сочинение, было написано Евклидом под непосредственным влиянием греческой «идеи Гармонии», которая была связана с Платоновыми телами. Таким образом, «гипотеза Прокла» позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке "Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания» и «Космология Платона», основанная на правильных многогранниках, были воплощены в величайшем математическом сочинении греческой математики, "Началах" Евклида. С этой точки зрения мы можем рассматривать "Начала" Евклида как первую попытку создать «Математическую теорию гармонии мироздания», которая ассоциировалась в античной науке с Платоновыми телами. И это было главной идеей греческой науки! Это и есть главная тайна «Начал» Евклида, которая приводит к пересмотру истории возникновения математики, начиная с Евклида.

К сожалению, оригинальная гипотеза Прокла, касающаяся истинных целей, которые преследовал Евклид при написании Начал, проигнорирована большинством современных историков математики, что привело к искаженному взгляду на структуру математики и всего математического образования. И это является одной из главных «стратегических ошибок» в развитии математики [9].

«Гипотеза Прокла» оказала большое влияние на развитие науки и математики. В 17 веке Иоганн Кеплер, развивая идеи Евклида, построил «Космический кубок» – оригинальную модель Солнечной системы, основанную на Платоновых телах (об этом мы расскажем ниже).

В 19 в. выдающийся математик Феликс Клейн выдвинул предположение [10], что икосаэдр, одно из прекраснейших тел Платона, является главной геометрической фигурой математики, которая позволяет объединить все важнейшие разделы математики: геометрию, теорию Галуа, теорию групп, теорию инвариантов и дифференциальные уравнения. Эта идея Клейна не получила дальнейшего развития в математике, что также можно считать еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики [9].

8. «Гипотеза Прокла» и «ключевые» проблемы античной математики

Академик Колмогоров в книге [11] выделил две главные, то есть, «ключевые» проблемы, которые стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения - **проблему счета** и **проблему измерения**. Однако, из «гипотезы Прокла» вытекает еще одна «ключевая» проблема **– проблема гармонии**, которая была связана с «Платоновыми телами» и «золотым сечением» - важнейшими математическими открытиями античной математики. Именно эта проблема, согласно «гипотезе Прокла», была положена Евклидом в основу «Начал», главной целью которых было создание геометрической теории «Платоновых тел», которые в древнегреческой науке и философии (Пифагор, Платон) ассоциировались с гармонией Мироздания. Эта идея приводит к новому взгляду на историю математики, представленному на Рис.4.

Подход, демонстрируемый с помощью Рис.4, основан на следующих соображениях. Уже на этапе зарождения математики было сделано ряд важных математических открытий, которые фундаментально повлияли на развитие математики и всей науки в целом. Важнейшими из них являются:

1. **Позиционный принцип представления чисел**, сделанный вавилонскими математиками во 2-м тысячелетии до н.э. и воплощенный ими в Вавилонской 60-ричной системе счисления. Это важное математическое открытие лежит в основе всех последующих позиционных систем счисления, в частности, десятичной системы и двоичной системы - основы современных компьютеров. Это открытие, в конечном итоге, привело к формированию понятия натурального числа – важнейшего понятия, лежащего в основе математики.
2. **Доказательство существования несоизмеримых отрезков**. Это открытие, сделанное в научной школе Пифагора, привело к переосмысливанию ранней пифагорейской математики, в основе которой лежал «принцип соизмеримости величин», и к введению иррациональных чисел – второго (после натуральных чисел) фундаментального понятия математики. В конечном итоге, эти два понятия (натуральные и иррациональные числа) и были положены в основу «Классической Математики».
3. **Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»)**. Описание «золотого сечения» дано в «Началах» Евклида (Предложение II.11). Это предложение было введена Евклидом с целью создания полной геометрической теории «Платоновых тел» (в частности, додекаэдра), изложению которых посвящена заключительная (XIII-я) книга «Начал» Евклида.

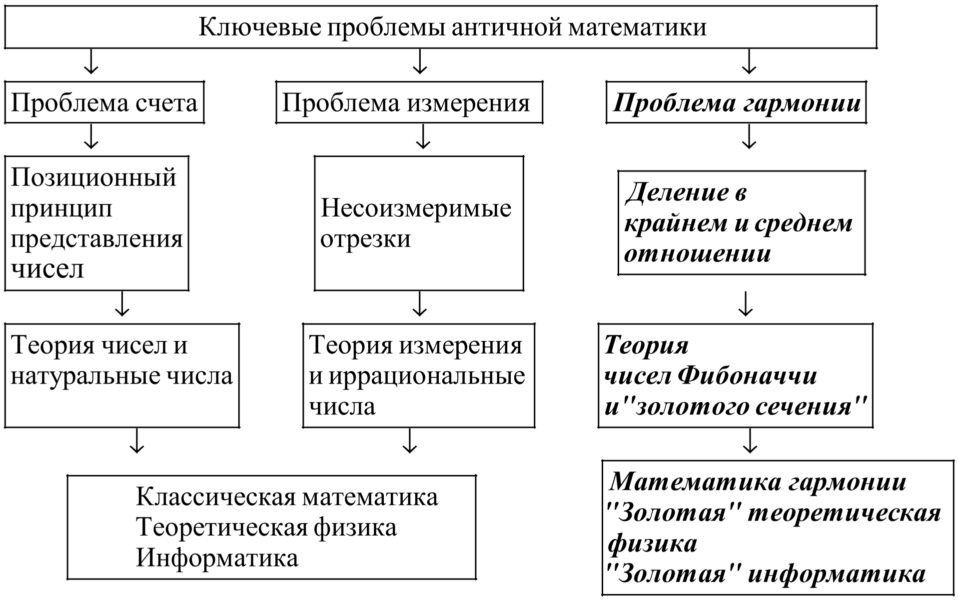


Рис. 4. «Ключевые» проблемы античной математики и новые направления в математике, теоретической физике и информатике

Сформулированный выше подход (Рис.4) приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что параллельно с **«Классической Математикой»** в науке, начиная с древних греков, развивалась еще одно математическое направление – **«Математика гармонии»**, которая, как и классическая математика, восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (Предложение II.11) и на теории правильных многогранников, изложенной в Книге XIII «Начал» Евклида. И в развитии «Математики Гармонии» в течение нескольких тысячелетий принимали участие выдающиеся мыслители и ученые: Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Кеплер, Кассини, Бине, Люка, Клейн, а в 20-м веке – Воробьев и Хоггатт. Возрождению античной «математики гармонии» в современной науке и посвящена книга автора [2].

9. Как Евклид использовал «золотое сечение»?

Возникает вопрос: зачем Евклид ввел в своих «Началах» различные формы «задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение»), которые встречаются в Книгах II, VI и XIII? Для ответа на этот вопрос обратимся к Платоновым телам (Рис.5).

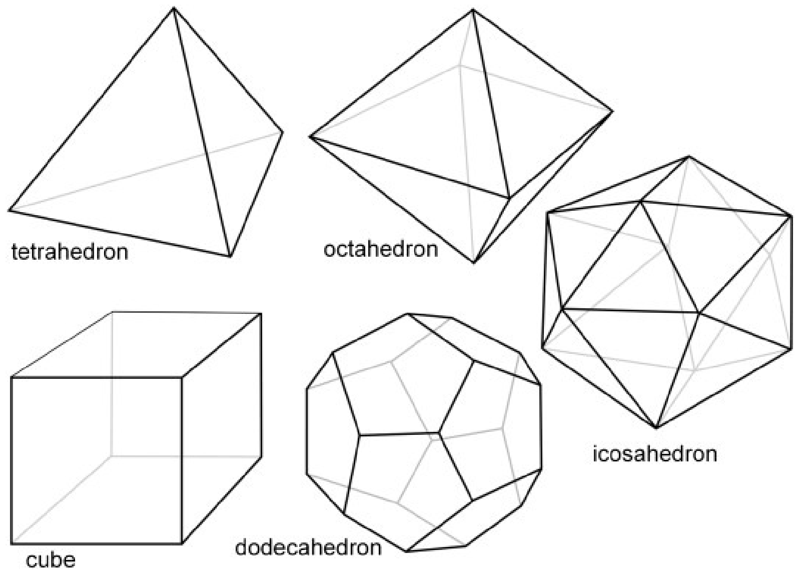


Рис. 5. Платоновы тела: тетраэдр (tetrahedron), октаэдр (octahedron), куб (cube) додекаэдр (dodecaedron), икосаэдр (icosahedron)

Как известно, гранями Платоновых тел могут быть только три вида правильных многоугольников: правильный треугольник (тетраэдр, октаэдр, икосаэдр), квадрат (куб) и правильный пятиугольник или пентагон (додекаэдр). Для того, чтобы сконструировать Платоновы тела, мы должны, прежде всего, уметь геометрически (то есть, с помощью линейки и циркуля) построить грани Платоновых тел. У Евклида не было никаких проблем с построением правильного или равностороннего треугольника и квадрата, однако он столкнулся с определенными трудностями при конструировании правильного пятиугольника или пентагона, который лежит в основе додекаэдра (Рис.6).

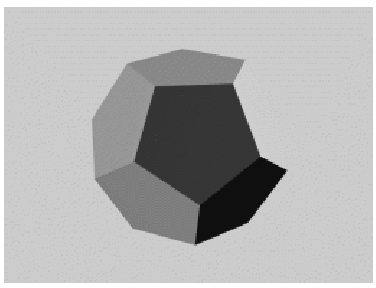
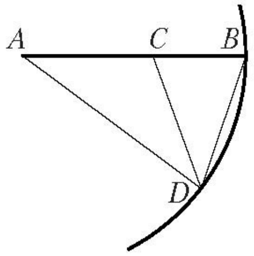


Рис.6. Додекаэдр

Именно для этой цели Евклид в Книге II ввел «золотое сечение», представленное в «Началах» в двух формах. Используя «золотое сечение», Евклид вначале конструирует «золотой» равнобедренный треугольник, чьи углы при основании равны удвоенному углу при вершине (Рис.7-а).



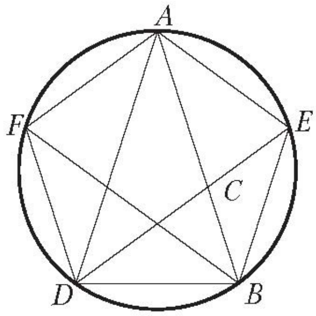


Рис. 7. «Золотой» равнобедренный треугольник (a) и пентагон (b)

Для этого вначале отрезок AB разделяется точкой C в «золотом сечении». Затем проводится окружность с центром в точке A и радиусом AB. После этого раствор циркуля выбирается равным отрезку AC и затем на окружности (с помощью циркуля) отмечается точка D, такая, что $AC = CD$. Затем с помощью линейки проводятся отрезки $AD,$ CD и BD. Полученный таким образом треугольник ABD обладает тем свойством, что углы B и D при его основании BD равны удвоенному углу при его вершине A, а отрезки CD и BD оказываются равными.

А теперь перейдем к конструированию пентагона (Рис.7-b). Для этого начнем с треугольника ABD, построенного на Рис.7-а. Проведем окружность через точки $A,$ B и D (Рис.7-b). После этого разделим угол ABD пополам и проведем отрезок DE до его пересечения с окружностью в точке E. Заметим, что этот отрезок пересекается в точке C с отрезком AB, разделяя его «золотым сечением». Подобным же образом находим точку F на окружности и затем находим регулярный пентагон $AEBDF$. А далее – один шаг к геометрическому построению додекаэдра (Рис.6) – одного из важнейших правильных многогранников, который символизировал в космологии Платона Гармонию Мироздания.

Заключение

Таким образом, ответ на вопрос, поставленный в названии настоящей статьи, вытекает из «гипотезы Прокла». Ответ очень простой: поскольку главной целью Евклида было построение завершенной теории Платоновых тел (Рис.5), то для этого он уже в Книге II вводит «задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении», известную в современной науке как «золотое сечение». К «золотому сечению» Евклид обращается многократно в последующих Книгах, в том числе, в завершающей книге – Книге XIII, в которой Евклид и помещает созданную им геометрическую теорию Платоновых тел.

«Гипотеза Прокла» приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, из «Начал» Евклида берут свое начало два направления математической науки - «Классическая Математика», позаимствовавшая в «Началах» аксиоматический подход, теорию чисел, теорию иррациональностей и другие достижения античной математики, и «Математика

Гармонии» [2], которая акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотом сечении») и на теории Платоновых тел, изложенной в Книге XIII «Начал» Евклида. Таким образом, «Гипотеза Прокла» переворачивает наши представления об истории математики, начиная с Евклида, и подчеркивает роль древнегреческой идеи Гармонии, «золотого сечения» и Платоновых тел в истории математики. К сожалению, «гипотеза Прокла» проигнорирована многими российскими историками математики, несмотря на мнение выдающегося российского историка математики Мордухай-Болтовского, который написал следующее:

«Тщательный анализ "Начал" меня решительно убеждает, что построение правильных тел, и еще более – доказательство существования пяти и только пяти тел – представляло некогда, еще до Евклида, конечную цель того труда, из которого произошли «Начала».

К счастью, в работах западных историков математики «гипотеза Прокла» не замалчивается и обсуждается с возрастающим интересом. В работах [12 - 14] обсуждается история «гипотезы Прокла» и ее влияние на научное творчество Иоганна Кеплера. «Гипотеза Прокла» также оказала влияние и на творчество выдающегося математика Феликса Клейна, который написал специальную книгу, посвященнцю икосѓэдру и его роли в развитии математики [10]. И это вселяет надежду, что истина восторжествует и одна из главных «стратегических ошибок» в истории математики – игнорирование «гипотезы Прокла» [9] - будет исправлена, а «математика гармонии» [2], восходящая к Пифагору, Платону и Евклиду, займет достойное место в системе современных математических знаний и образовании.

Литература

1. А.П. Стахов, Мордухай-Болтовский о «золотом сечении» в «Началах» Евклида // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.18131, 14.08.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321274.htm
2. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathemartics and Computer Science. New Jersy, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2009. – 748 p.
3. Начала Евклида. Книги I-VI. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
4. Начала Евклида. Книги VII-X. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
5. Начала Евклида. Книги XI-XV. Перевод с греческого и коментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
6. Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, Inc., 1998. – 195 p.
7. Бунин В.А. Код биоподобия. Троеначальный Код Метагармонии как биоподобия техногенных систем по критерию целевой функции // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15669, 24.11.2009

8. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.
9. А.П. Стахов, «Стратегические ошибки» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14555, 27.08.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321070.htm
10. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989. – 336 с.
11. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991. – 224 с.
12. Kann Charles H. Pythagoras and Pythagoreans. A Brief History. Hackett Publishing Co, Inc., 2001.
13. Zhmud Leonid. The origin of the History of Science in Classical Antiquity. Published by Walter de Gruyter, 2006.
14. Smorinsky Craig. History of Mathematics. A Supplement. Springer, 2008