Ткаченко И.С., Ткаченко В.А., Ткаченко М.И.

Генерирование числовых последовательностей типа Фибоначчи и Люка с помощью матриц $\boldsymbol{Q}_g, \boldsymbol{Q}_{p,q}$ и $\boldsymbol{Q}_{a,b,c}$ подобных $\boldsymbol{Q}$-матрице В. Хоггатта

$\boldsymbol{Q}$-матрица В.Хоггатта - это квадратная матрица 2 х 2

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

с помощью, которой генерируют последовательность чисел Фибоначчи, возводя ее в $n-$ ю степень[1]. Возникает вопрос, а что будет, если в этой матрице поменять местами строки? Оказывается, получим матрицу

$$\boldsymbol{Q}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

и умножив, ее справа на $\boldsymbol{Q}$-матрицу (1) получим матрицу

$$\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Теперь полученную матрицу (3) умножим на $\boldsymbol{Q}$-матрицу (1) слева

$$\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

и продолжая аналогично этот процесс

$$\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{Q})\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

далее

$$\boldsymbol{Q}_4 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{Q}_5 = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

обращают на себя внимание элементы последовательно полученных пяти матриц. Видим, что элементы первого столбца из последовательности чисел Люка

$$\{L_n\}(n = 0,1,2,..) = 2,1,3,4,7,11,18,29,47 \ldots \qquad (8)$$

а элементы второго столбца - из последовательности чисел Фибоначчи

$$\{F_n\}(n = 0,1,2,..) = 0,1,1,2,3,5,8,13.21,34 \ldots \quad (9)$$

Следовательно, если процесс умножения матриц (4)-(7) обобщить следующим образом

$$\boldsymbol{Q}_n = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}_i = \begin{pmatrix} L_n & F_{n+1} \\ L_{n-1} & F_n \end{pmatrix},$$

$$(n = 1,2,..) \quad (10)$$

то получаем процесс генерирования последовательностей чисел Люка и чисел Фибоначчи одновременно с использованием $\boldsymbol{Q}$-матрицы В.Хоггатта(1).

Определитель матрицы (10)

$$det\boldsymbol{Q}_n = L_nF_n - L_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n \quad (11)$$

позволяет установить взаимосвязь между последовательностями чисел Люка (8) и Фибоначчи (9).

Если $\boldsymbol{Q}$-матрицу (1) представить как

$$\boldsymbol{Q}_{0.0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

и, умножив ее сначала слева один раз на $\boldsymbol{Q}$-матрицу (1), получим матрицу

$$\boldsymbol{Q}_{0,1} = \boldsymbol{Q}_{0,0}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

а затем продолжим ее умножать справа, то получится процесс генерирования последовательностей чисел Люка и Фибоначчи в виде матриц

$$\boldsymbol{Q}_{0,2} = \boldsymbol{Q}_{0,1}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{Q}_{0,3} = \boldsymbol{Q}_{0,2}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{Q}_{0,4} = \boldsymbol{Q}_{0,3}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{Q}_{0,5} = \boldsymbol{Q}_{0,4}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

и так далее.

При этом следует обратить внимание на тот факт, что при получении чисел Люка, участвуют числа Фибоначчи, начиная с момента получения числа Люка со значением 3, которое в последовательности (8) стоит на третьей позиции следующим образом 0+3*1=3

1+3*1=4,

1+3*2=7,

2+3*3=11,

3+3*5=18,

5+3*8=29,
8+3*13=47,…,

то есть, обобщая, получаем, что

$$L_n = F_{n-2} + 3F_{n-1}\ . \tag{18}$$

Процесс умножения матрицы (12) на $\boldsymbol{Q}$-матрицу Хоггатта (1) есть генерирование последовательностей чисел Люка и чисел Фибоначчи

$$\boldsymbol{Q}_{0,n} = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{Q}_{0,i}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} L_n & L_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{n-2} + 3F_{n-1} & F_{n-3} + 3F_{n-2} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}, \qquad (n = 3,4, \dots) \tag{19}$$

при этом определитель матрицы (19) позволяет определить их взаимную связь

$$det\boldsymbol{Q}_{0,n} = L_n F_{n-2} - L_{n-1}F_{n-1} = F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3} = (-1)^n. \tag{20}$$

Выполнив умножение матрицы (13) на $\boldsymbol{Q}$-матрицу (1) слева, снова получим результат, который напоминает предыдущий, но здесь происходит перемещение столбцов и строк в чем читатель может убедиться самостоятельно

Возвращаясь к получению формулы (18) можем заметить, что получена она благодаря значению элемента равного 3 в матрице (14), а если его заменить, к примеру, на значение равное 5, то получим

$$\boldsymbol{Q}_{5,0} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{Q}_{5,1} = \boldsymbol{Q}_{5,0}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{Q}_{5,2} = \boldsymbol{Q}_{5,1}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{Q}_{5,3} = \boldsymbol{Q}_{5,2}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{Q}_{5,4} = \boldsymbol{Q}_{5,3}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 17 & 11 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 17 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{Q}_{5,5} = \boldsymbol{Q}_{5,4}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 28 & 17 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

или

0+5*1=5,

1+5*1=6,

1+5*2=11,

2+5*3=17,

3+5*5=28,

5+5*8=45,…

и, обобщая, получим матрицу

$$\boldsymbol{Q}_{5,n} = \boldsymbol{Q}_{5,n-1}\boldsymbol{Q} = \prod_{i=1}^{n}\boldsymbol{Q}_{5,i}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} G_n & G_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_n + 5F_{n+1} & F_{n-1} + 5F_n \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \qquad (n = 1.2,3,4, \dots) \tag{27}$$

для генерирования некоторой последовательности

$$G_n = F_{n-1} + 5F_n = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n =. \ (n = 2,3,4, \dots) \tag{28}$$

Полученные результаты дают нам возможность предположить, что, если $\boldsymbol{Q}$-матрица (1) будет представлена в виде

$$\boldsymbol{Q}_{g,0} = \begin{pmatrix} g & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

то, выполняя, умножение (29) справа на $\boldsymbol{Q}$-матрицу (1), имеем

$$\boldsymbol{Q}_{g,1} = \boldsymbol{Q}_{g,0}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} g & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 \cdot g & 1 \cdot g \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{Q}_{g,2} = \boldsymbol{Q}_{g,1}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 + g & g \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2g & 1 + g \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{Q}_{g,3} = \boldsymbol{Q}_{g,2}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 + 2g & 1 + g \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3g & 1 + 2g \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{Q}_{g,4} = \boldsymbol{Q}_{g,3}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 + 3g & 1 + 2g \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5g & 2 + 3g \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{Q}_{g,5} = \boldsymbol{Q}_{g,4}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 3+5g & 2+3g \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+8g & 3+5g \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\boldsymbol{Q}_{g,6} = \boldsymbol{Q}_{g,5}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 5+8g & 3+5g \\ 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+13g & 5+8g \\ 13 & 8 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

и так далее с учетом формирования элементов последовательности (9) получим матрицу произведения матрицы (29) на $\boldsymbol{Q}$-матрицу (1)

$$\boldsymbol{Q}_{g,n} = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{Q}_{g,i}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} G_n & G_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_n + gF_{n+1} & F_{n-1} + gF_n \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}, (n = 2,3,4, \dots) \quad (36)$$

позволяющую генерировать не только последовательность чисел Фибоначчи, но и ей подобную типа (19), то есть последовательности Люка.

Определить матрицы (36) возвращает нас к соотношению Кассини

$$det\boldsymbol{Q}_{g,n} = F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}, \quad (n = 2,3,4, \dots) \quad (37)$$

что подтверждает правильность как самих преобразований, так и предположения о независимости значения g для $\boldsymbol{Q}$-матрицы Хоггатта (1), благодаря которому появляется возможность генерирования не только числовых последовательностей Фибоначчи, но также вида (18) и (28).

Интересен и следующий момент в этом исследовании, когда в $\boldsymbol{Q}$-матрице Хоггатта (1) вместо единиц будут коэффициенты приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0, \quad (38)$$

то есть

$$\boldsymbol{Q}_{p,q} = \begin{pmatrix} -p & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

и, выполняя умножение матрицы (39) справа на самую себя, фактически возводя ее в $n -$ ю степень, получим

, $$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{2}} = \begin{pmatrix} -p & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 - q & -p \\ pq & -q \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{3}} = \begin{pmatrix} p^2 - q & -p \\ pq & -q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -p & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p^3 + 2pq & p^2 - q \\ -p^2q + q^2 & pq \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$Q^{4}_{p,q}=\begin{pmatrix}-p^3+2pq & p^2-q\\ -p^2q+q^2 & pq\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p & 1\\ -q & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^4-3p^2q+q^2 & -p^3+2pq\\ p^3q-2pq^2 & -p^2q+q^2\end{pmatrix},$$
(42)

$$Q^{5}_{p,q}=\begin{pmatrix}p^4-3p^2q+q^2 & -p^3+2pq\\ p^3q-2pq^2 & -p^2q+q^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p & 1\\ -q & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-p^5+4p^3q-3pq^2 & p^4-3p^2q+q^2\\ -p^4q+3p^2q^2-q^3 & p^3q-2pq^2\end{pmatrix}, \qquad (43)$$

$$Q^{6}_{p,q}=\begin{pmatrix}-p^5+4p^3q-3pq^2 & p^4-3p^2q+q^2\\ -p^4q+3p^2q^2-q^3 & p^3q-2pq^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p & 1\\ -q & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}p^6-5p^4q+6p^2q^2-q^3 & -p^5+4p^3q-3pq^2\\ p^5q-4p^3q^2+3pq^3 & -p^4q+3p^2q^2-q^3\end{pmatrix}, \qquad (44)$$

$$Q^{7}_{p,q}=\begin{pmatrix}p^6-5p^4q+6p^2q^2-q^3 & -p^5+4p^3q-3pq^2\\ p^5q-4p^3q^2+3pq^3 & -p^4q+3p^2q^2-q^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p & 1\\ -q & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-p^7+6p^5q-10p^3q^2+4pq^3 & p^6-5p^4q+6p^2q^2-q^3\\ -p^6q+5p^4q^2-6p^2q^3+q^4 & p^5q-4p^3q^2+3pq^3\end{pmatrix}, \qquad (45)$$

и так далее с учетом формирования элементов последовательности (9) получим матрицу (39) в $n-$ой степени

$$Q^{n}_{p,q}=\begin{pmatrix}-p & 1\\ -q & 0\end{pmatrix}^n=$$

$$\begin{pmatrix}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^n\frac{(n-l)!}{l!\,(n-2l)!}p^{n-2l}q^l & \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^{n-1}\frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!}p^{n-2l-1}q^l\\ \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^n\frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!}p^{n-2l-1}q^{l+1} & \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}(-1)^{n-1}\frac{(n-l-2)!}{l!\,(n-2l-2)!}p^{n-2l-2}q^{l+1}\end{pmatrix}$$

$(n=2,3,\dots)$ (46)

Элементы полученной матрицы в определенном смысле напоминают результаты доказательства теоремы о $n-$х степенях корней приведенного квадратного уравнения[2].

Итак, получили формулу для генерирования чисел типа Фибоначчи, зависящую от двух параметров p и q, которые в данном случае не связаны с корнями уравнения (38):

$$F_n(p,q) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{n-1} \frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!} p^{n-2l-1} q^l$$

$$(n = 2,3,\dots)\,. \quad (47)$$

Если предположить, что $p = q = -1$, то матрица (39) превращается в $\boldsymbol{Q}$-матрицу (1) и получаем

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-l)!}{l!\,(n-2l)!} & \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!} \\ \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!} & \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(n-l-2)!}{l!\,(n-2l-2)!} \end{pmatrix}$$

$$(n = 2,3,\dots) \quad (48)$$

что элементы последовательности Фибоначчи определяются через биномиальные коэффициенты.

Рассмотрим также случай когда в $\boldsymbol{Q}$-матрице (1) вместо единиц могут быть действительные числа и представим их в буквенном виде, то есть

$$\boldsymbol{Q}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}. \qquad (49)$$

Выполнив умножение слева этой матрицы на самую себя, видим

$$\boldsymbol{Q}_{a,b,c}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix}, \qquad (50)$$

$$\boldsymbol{Q}_{a,b,c}^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+2abc & a^2b+b^2c \\ a^2b+bc^2 & abc \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$\boldsymbol{Q}_{a,b,c}^4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^3+2abc & a^2b+b^2c \\ a^2b+bc^2 & abc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^4+3a^2bc+b^2c^2 & a^3b+2ab^2c \\ a^3c+2abc^2 & a^2bc+b^2c^2 \end{pmatrix} \qquad (52)$$

$$\boldsymbol{Q}_{a,b,c}^5 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^4+3a^2bc+b^2c^2 & a^3b+2ab^2c \\ a^3c+2abc^2 & a^2bc+b^2c^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^5 + 4a^3bc + 3ab^2c^2 & a^4b + 3a^2b^2c + b^3c^2 \\ a^4c+3a^2bc^2 + b^2c^3 & a^3bc+2ab^2c^2 \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$\boldsymbol{Q}_{a,b,c}^6 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^5 + 4a^3bc + 3ab^2c^2 & a^4b + 3a^2b^2c + b^3c^2 \\ a^4c+3a^2bc^2 + b^2c^3 & a^3bc+2ab^2c^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^6 + 5a^4bc + 6a^2b^2c^2 + b^3c^3 & a^5b + 4a^3b^2c + 3ab^3c^2 \\ a^5c+4a^3bc^2 + 3ab^2c^3 & a^4bc+3a^2b^2c^2 + b^2c^3 \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$\boldsymbol{Q}_{a,b,c}^7 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^6 + 5a^4bc + 6a^2b^2c^2 + b^3c^3 & a^5b + 4a^3b^2c + 3ab^3c^2 \\ a^5c+4a^3bc^2 + 3ab^2c^3 & a^4bc+3a^2b^2c^2 + b^3c^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^7 + 6a^5bc + 10a^3b^2c^2 + 4ab^3c^3 & a^6b + 5a^4b^2c + 6a^2b^3c^2 + b^4c^3 \\ a^6c + 5a^4bc^2 + 6a^2b^2c^3 + b^3c^4 & a^5bc + 4a^3b^3c^2 + 3ab^3c^3 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

что повторяются аналогичные действия как и с матрицей (39), и, обобщая, получим процедуру возведения матрицы $\boldsymbol{Q}_{a,b,c}$ в $n-$ую степень,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^n =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-l)!}{l!\,(n-2l)!} a^{n-2l} b^l c^l & \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!} a^{n-2l-1} b^{l+1} c^l \\ \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!} a^{n-2l-1} b^l c^{l+1} & \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(n-l-2)!}{l!\,(n-2l-2)!} a^{n-2l-2} b^{l+1} c^{l+1} \end{pmatrix}$$

$$(n = 2,3,\dots) \quad (56)$$

Снова, если в матрице (56) предположить, что $a = b = c$=1, то получим

$\boldsymbol{Q}$-матрицу (1) в $n-$ой степени

$$\boldsymbol{Q}_{a,b,c}^{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-l)!}{l!\,(n-2l)!} & \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!} \\ \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!} & \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(n-l-2)!}{l!\,(n-2l-2)!} \end{pmatrix}$$

$$(n = 2,3,\dots) \quad (57)$$

и видим, что матрица (57) совпадает с матрицей (48).

Рассмотрим также и случай когда матрицу (49) преобразовав в матрицу

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & a \end{pmatrix}, \qquad (58)$$

умножим ее вначале слева на матрицу (49) и представим как матрицу

$$\boldsymbol{Q}_{s,0} = \boldsymbol{Q}_{a,b,c}\, \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc & 2ab \\ 0 & bc \end{pmatrix}, \qquad (59)$$

а затем продолжим умножать (59) на (49) справа, то есть

$$\boldsymbol{Q}_{s,1} = \boldsymbol{Q}_{s,0}\, \boldsymbol{Q}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} bc & 2ab \\ 0 & bc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3abc & b^2c \\ bc^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (60)$$

$$\boldsymbol{Q}_{s,2} = \boldsymbol{Q}_{s,1}\, \boldsymbol{Q}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 3abc & b^2c \\ bc^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a^2bc + b^2c^2 & 3ab^2c \\ abc^2 & b^2c^2 \end{pmatrix}, \qquad (61)$$

$$\boldsymbol{Q}_{s,3} = \boldsymbol{Q}_{s,2}\, \boldsymbol{Q}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 3a^2bc + b^2c^2 & 3ab^2c \\ abc^2 & b^2c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3a^3bc + 4ab^2c^2 & 3a^2b^2c + b^3c^2 \\ a^2bc^2 + b^2c^3 & ab^2c^2 \end{pmatrix}, \qquad (62)$$

$$\boldsymbol{Q}_{s,4} = \boldsymbol{Q}_{s,3}\, \boldsymbol{Q}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 3a^3bc + 4ab^2c^2 & 3a^2b^2c + b^3c^2 \\ a^2bc^3 + b^2c^3 & ab^2c^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3a^4bc + 7a^2b^2c^2 + b^3c^3 & 3a^3b^2c + 4ab^3c^2 \\ a^3bc^2 + 2ab^2c^3 & a^2b^2c^2 + b^2c^3 \end{pmatrix}, \qquad (63)$$

$$\boldsymbol{Q}_{s,5} = \boldsymbol{Q}_{s,4}\, \boldsymbol{Q}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 3a^4bc + 7a^2b^2c^2 + b^3c^3 & 3a^3b^2c + 4ab^3c^2 \\ a^3bc^2 + 2ab^2c^3 & a^2b^2c^2 + b^2c^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3a^5bc + 10a^3b^2c^2 + 5ab^3c^3 & 3a^4b^2c + 7a^2b^3c^2 + b^4c^3 \\ a^4bc^2 + 3a^2b^2c^3 + b^3c^4 & a^3b^2c^2 + 2ab^3c^3 \end{pmatrix}, \qquad (64)$$

выполненные операции умножения матриц (60) – (64) напоминают умножение матриц (14) – (17), где получены идентичные коэффициенты, а потому, обобщая, можем представить этот процесс с учетом (19), в следующем виде

$$\boldsymbol{Q}_{s,n} = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{Q}_{s,i} \boldsymbol{Q}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + 3F_{n-1} & F_n + 3F_{n-2} \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$(n = 2,3, \dots) \qquad (65)$$

где $$L_{n+2} = F_{n+1} + 3F_{n-1},$$

$$F_n = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-l)!}{l!\,(n-2l)!} a^{n-2l} b^l c^l,$$

$$F_{n-1} = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-l-1)!}{l!\,(n-2l-1)!} a^{n-2l-1} b^{l+1} c^l,$$

$$F_{n-2} = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(n-l-2)!}{l!\,(n-2l-2)!} a^{n-2l-2} b^{l+1} c^{l+1}.$$

Таким образом, можем утверждать, что с помощью матрицы (65) осуществляется генерирование как числовых последовательностей типа Люка, так и типа Фибоначчи.

В матрице (49) элементы a, b, c могут быть мнимыми, и представлены в показательной форме

$$a = \rho_a e^{i\alpha}, b = \rho_b e^{i\beta}, c = \rho_c e^{i\gamma}, \quad (66)$$

а тогда ее элемент, имитирующий последовательности типа Фибоначчи, будет

иметь вид

$$F_n(a,b,c) = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-l)!}{l!\,(n-2l)!} {\rho_a}^{n-2l} (\rho_b \rho_c)^l e^{i(\alpha(n-2l)+\beta+\gamma)}.$$

Вывод здесь может быть следующим – матрицы (57) и (65) являются генераторами числовых последовательностей типа Фибоначчи и Люка как для любых действительных так мнимых чисел, а также служить основой для кодирования информации в компьютерных сетях.

1. А.П. Стахов, «Золотые» матрицы // «Академия Тринитаризма», М., Эл №776567, публ.15489, 26.08.2009

2.И.С. Ткаченко, Теорема о n - х степенях корней приведенного квадратного уравнения // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.17312, 14.02.2012

Сведения об авторах

Ткаченко Иван Семенович, доктор экономических наук, заведующий кафедрой последипломного экономического образования, Хмельницкий Национальный Университет,
Ткаченко Валентина Андреевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры автоматизованых систем и моделирования в экономике, Хмельницкий Национальный Университет,
Ткаченко Мирослав Иванович, кандидат экономических наук, заведующий кафедрой информационних технологий, Винницкий кооперативный институт.