А.Н. Шелаев **Сведения об авторе**

СООТНОШЕНИЯ ГАРМОНИИ И ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ПЕРЕХОДА СВЕРХПРОВОДНИК-ПРОВОДНИК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В продолжение работы автора статьи [1], в которой было впервые начато исследование эффекта Мейснера [2] - перехода сверхпроводник-проводник в магнитном поле на системную гармонию, в данной статье найдены новые соотношения гармонии, точно выражающиеся через константы золотого сечения $\phi = (-1+\sqrt{5})/2 \simeq 0{,}618$ и $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = \phi + 1 = 1/\phi \simeq 1{,}618$. Выявлен физический смысл этих соотношений. Как и ранее для ряда других базовых физических объектов (например, гравитационных и электростатических полей, прямого и обратного циклов Карно [3-6]), показано, что найденным соотношениям гармонии соответствуют экстремумы функций средних значений от параметров рассматриваемого перехода.

Найденные соотношения гармонии следуют из экспериментальной зависимости эффекта Мейснера - величины критического магнитного поля H_C, при котором состояние сверхпроводимости исчезает:

$$H_C / H_0 = 1 - (T / T_C)^2 \qquad (1),$$

где $H_0 -$ величина критического поля при температуре $T \simeq 0$, $T_C -$ величина критической температуры при отсутствии магнитного поля.

Переход сверхпроводника в обычное состояние под действием магнитного поля при $T < T_C$ является изотермическим фазовым переходом 1-го рода и связан с поглощением теплоты. При обратном переходе теплота выделяется. Переход же сверхпроводника в проводник при $H = 0$ и $T = T_C$ является фазовым переходом 2-го рода, при котором внутренняя энергия не изменяется.

Полагая в (1) $T/T_C = \tau$, $H_C/H_0 = h(\tau)$, получим простую квадратичную зависимость

$$h(\tau) = 1 - \tau^2, \qquad h(\phi) = 1 - \phi^2 = \phi \tag{2}$$

Уравнение $h(\tau) = \tau$ имеет 2 корня: $\tau_1 = \phi$, $\tau_2 = -\varphi$. Так как $\tau > 0$, то $\tau = \phi$.

В общем случае функции средних значений порядка λ $(-\infty < \lambda < +\infty)$ для m функций $f_j(\tau)$ $1 \le j \le m$ определяются выражением [3]:

$$M\lambda(\tau) = [\sum\nolimits_1^m f_j^{\lambda}(\tau)/m]^{1/\lambda} \qquad (3),$$

$M\lambda_1 \ge M\lambda_2$ при $\lambda_1 > \lambda_2$. Знак равенства имеет место при таком τ_0, при котором все $f_j(\tau_0)$ равны.

В нашем случае для двух функций: температуры перехода τ и величины магнитного поля $h(\tau)$ также можно определить бесконечное число функций средних значений, различающихся индексом λ :

$$M\lambda\tau h(\tau) = \left[(\tau^{\lambda} + h^{\lambda}(\tau))/2\right]^{1/\lambda} \tag{4}$$

При $\lambda = 1$ получаем среднее арифметическое $MA\tau h(\tau) = (\tau + h(\tau))/2$, при $\lambda = 0$ - среднее геометрическое $MG\tau h(\tau) = \sqrt{\tau \cdot h(\tau)}$, при $\lambda = -1$ - среднее гармоническое $MH\tau h(\tau) = 2/(1/\tau + 1/h(\tau))$, при $\lambda = 2$ - среднее квадратичное $MS\tau h = \sqrt{(\tau^2 + h^2(\tau))/2}$, при $\lambda = 3$ - среднее кубическое $MC\tau h(\tau) = \sqrt[3]{(\tau^3 + h^3(\tau))/2}$. Кроме того, введём ещё две функции при больших значениях $|\lambda|$: $MN\tau h(\tau)$ при $\lambda = N = 200$ и $MK\tau h(\tau)$ при $\lambda = K = -200$.

Графики перечисленных функций средних значений показаны на рис. 1. Функции записаны и пронумерованы в порядке их возрастания с ростом показателя степени λ: снизу-вверх.

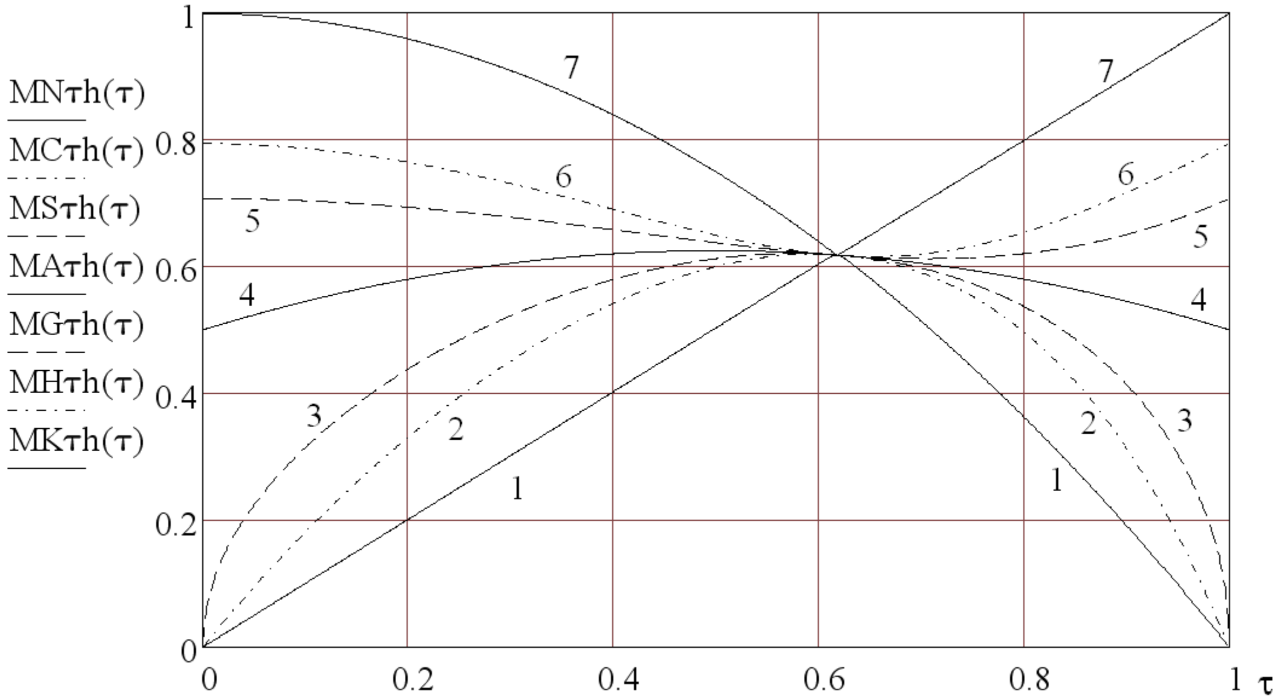

Рис. 1

Как следует из рис. 1, все кривые соприкасаются при $\tau = \phi$, при этом значения всех средних также равны ϕ ! Поэтому разность любых двух функций средних значений (и их производных) будет иметь экстремум при $\tau = \phi$.

В то же время отдельные функции средних значений также имеют экстремумы при следующих значениях τ: $\mathrm{MA\tau h(\tau)}$ при $\tau = 1/2$, $\mathrm{MG\tau h(\tau)}$ при $\tau = 1/\sqrt{3} \simeq 0{,}577350$, $\mathrm{MH\tau h(\tau)}$ при $\tau \simeq 0{,}59390 \simeq \sin(\sqrt{\varphi}/2) \simeq 0{,}59399$, $\mathrm{MS\tau h(\tau)}$ при $\tau = 1/\sqrt{2} \simeq 0{,}707106$, $\mathrm{MC\tau h(\tau)}$ при $\tau \simeq 0{,}6543 \simeq e^{\pi - e} \simeq 0{,}6549$, $\mathrm{MN\tau h(\tau)}$ и $\mathrm{MK\tau h(\tau)}$ при $\tau \simeq \phi$! Т. е., экстремум отдельной функции $\mathrm{M\lambda\tau h(\tau)}$ имеет место при $\tau \to \phi$ асимптотически при увеличении $|\lambda|$: $\lambda \to \pm\infty$.

Так как внутренняя энергия тела пропорциональна температуре τ, а энергия магнитного поля пропорциональна квадрату поля $W_H = \mu\mu_0 H^2/2$, введём функцию

$$D(\tau) = [h^2(0) - h^2(\tau)]/[\tau - 0] = [1^2 - (1-\tau^2)^2]/\tau = \tau\cdot(2-\tau^2) \qquad (5),$$

с точностью до постоянного множителя определяющую отношение изменения энергии критического магнитного поля к изменению тепловой энергии сверхпроводника при изменении его относительной температуры от 0 до τ. При этом оказывается что

$$D(0)=0,\ \ D(\phi)=1,\ \ \ D(\sqrt{2/3})=D_{max}=(4/3)\cdot\sqrt{2/3},\ \ \ D(1)=1 \qquad (6)$$

Таким образом, получен принципиальный результат: при изменении τ от нуля до ϕ и до 1 изменения тепловой энергии тела и энергии критического магнитного поля равны !

Наличие же максимума у функции $D(\tau)_{max}=2(2/3)^{3/2}$ при $\tau=\sqrt{2/3}$ говорит в частности, и о том, что числа $2/3$ $(2=\phi^2+\varphi^1,\ 3=\phi^2+\varphi^2)$ являются характерными числами данной физической системы.

Так, критическая температура перехода в сверхпроводящее состояние определяется соотношением: $T_C=(r/\varsigma(3/2))^{2/3}\cdot h_P^2/2mk_B$, где h_P, k_B - постоянные Планка и Больцмана, r, m - концентрация и масса частиц, $\varsigma(s)=\sum_1^{\infty}1/n^s=\prod_p 1/(1-p^s)$ - дзета функция Римана, n - *натуральные* числа, p - *простые* числа, $s\in\mathbb{C}$. При этом $\varsigma(3/2)\simeq 2{,}6124\simeq\varphi+1=\varphi^2$.

Интересно также то, что

$$\int_0^1 h(\tau)\,d\tau=2/3,\qquad \int_0^1 D(\tau)d\tau=(3/2)/2 \qquad (7)$$

Более того, даже интегралы от введённых выше функций средних значений точно выражаются через числа 2, 3 и константы ϕ,φ. Например,

$$\int_0^1 MA\tau h(\tau)d\tau=1/2^2+1/3 \qquad (8),$$

$$\int_0^1 MH\tau h(\tau)d\tau=3[(2^2\ln\phi)/(\phi+\varphi)+1] \qquad (9)$$

Далее рассмотрим функции средних значений от следующих функций: работы W, совершаемой при наложении критического магнитного поля H_C на сверхпроводник, и теплоты Q, поглощаемой при фазовом переходе 1-го рода сверхпроводник-проводник.

Функции W и Q можно выразить через изменения термодинамического потенциала Гиббса G и энтропии S [2]:

$$dG = -S \cdot dT - J \cdot dH, \qquad S = -(\partial G / \partial T)|_{H=CONST}, \qquad Q = T \cdot (S_N - S_S) \qquad (10),$$

где J - намагниченность вещества, S_N и S_S - значения энтропии в нормальном и сверхпроводящем состоянии.

В магнитном поле сверхпроводник, как диамагнетик, намагничивается против поля, причём, согласно эффекту Мейснера, магнитная индукция внутри сверхпроводника равна нулю:

$$B_S = H + 4\pi J_S = 0, \qquad J_S = -H / 4\pi \qquad (11)$$

Поэтому работа намагничивания на единицу объёма, производимая при наложении магнитного поля H_C, равна:

$$W = \Delta G_S = G_S(T, H_C) - G_S(T, 0) = -\int_0^{H_C} J_S \, dH = H_C^2 / 8\pi \qquad (12)$$

В состоянии обычного проводника $B_N \simeq H$, $J_N = (B - H)/4\pi \simeq 0$, поэтому

$$\Delta G_N = G_N(T, H_C) - G_N(T, 0) = -\int_0^{H_C} J_N \, dH \simeq 0 \qquad (13)$$

Так как при $H = H_C$ для перехода сверхпроводник-проводник должно выполняться условие равновесия фаз $G_S(T, H_C) = G_N(T, H_C)$, получаем, что

$$G_N(T,0) - G_S(T,0) = H_C^2 / 8\pi, \quad G_N(T,H) - G_S(T,H) = -H_C^2 / 8\pi + H^2 / 8\pi \qquad (14)$$

Поскольку $S = -(\partial G / \partial T)|_{H=CONST}$, то теплота, поглощаемая при переходе сверхпроводник-проводник ($S \to N$) равна

$$Q = T(S_N - S_S) = -T(H_C / 4\pi) dH_C / dT = (H_0^2 / 2\pi)\, (T / T_C)^2 (1 - (T / T_C)^2) \qquad (15)$$

Исходя из соотношений (12), (15), введём безразмерные функции:

$$w(\tau) = W(\tau)/(H_0^2/2\pi) = (1-\tau^2)^2/4, \quad q(\tau) = Q(\tau)/(H_0^2/2\pi) = \tau^2 \cdot (1-\tau^2) \qquad (16)$$

Графики функций $w(\tau)$, $q(\tau)$, $Iw(\tau) = \int_0^\tau w(\tau)d\tau$, $Iq(\tau) = \int_0^\tau q(\tau)d\tau$, $|w(\tau) - q(\tau)|$, $Iw(\tau) - Iq(\tau))$ (кривые 1- 6 соответственно) показаны на рис. 2.

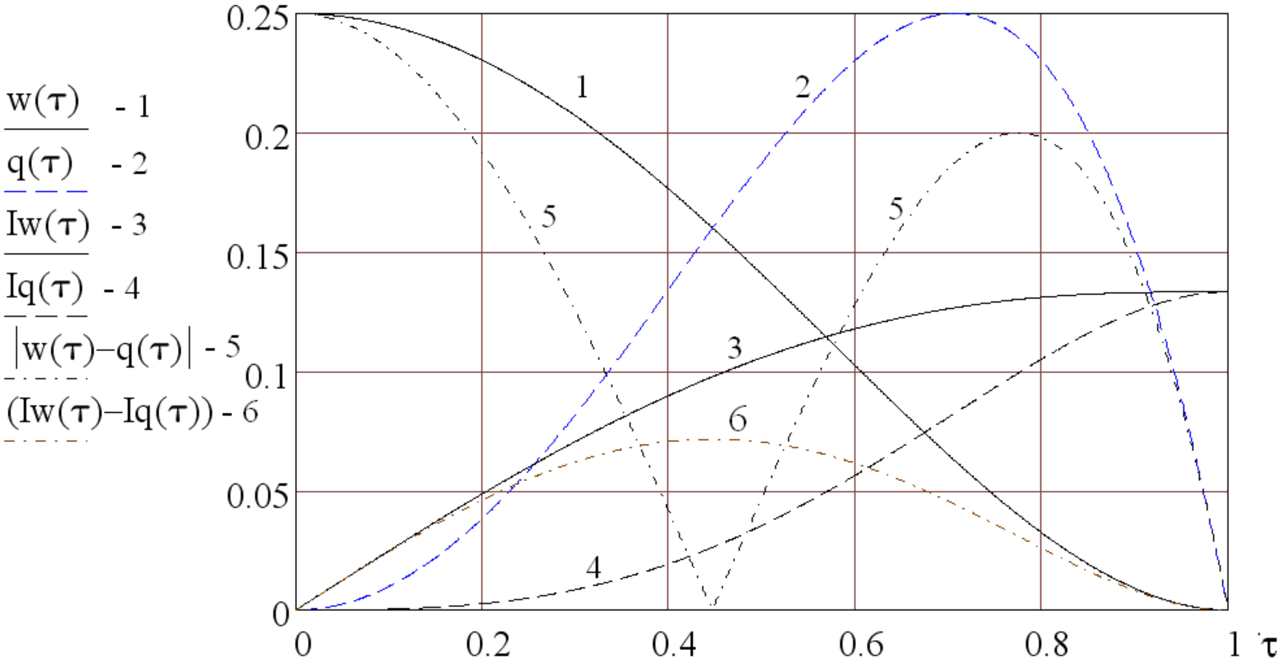

Рис. 2

Из рис. 2 следует новый важный результат: при $\tau = 1/\sqrt{5} = 1/(\phi + \varphi)$ $q(\tau) = w(\tau) = 4/25 = (\varphi^3 - \phi^3)/(\phi + \varphi)^4$, причём при этом значении $\tau = 1/(\phi + \varphi)$ имеет минимум, равный нулю, функция $|w(\tau) - q(\tau)|$ и максимум, равный $2^2/5^{5/2} = (\varphi^3 - \phi^3)/(\phi + \varphi)^5$, функция $Iw(\tau) - Iq(\tau)$!

Максимуму $q(\tau)_{max} = q(1/\sqrt{2}) = 1/4 = 1/(\varphi^3 - \phi^3)$ соответствуют значения $h(1/\sqrt{2}) = 1/2$, $q(1/\sqrt{2}) - w(1/\sqrt{2}) = (1/3 + 1/5)^{-1} = (1/(\phi^2 + \varphi^2) + 1/(\phi + \varphi)^2)^{-1}$, $Iw(1/\sqrt{2}) - Iq(1/\sqrt{2}) = 2^{-3^2/2}$.

Введём теперь функции средних значений для функций $q(\tau)$ и $w(\tau)$:

$$M\lambda qw(\tau) = [(q^\lambda(\tau) + w^\lambda(\tau))/2]^{1/\lambda} \qquad (17)$$

Графики функций $M\lambda qw(\tau)$ с нумерацией в порядке возрастания величины λ показаны на рис. 3 ($\lambda = -200, -1, 0, 1, 2, 3, 200$ - кривые 1 -7 соответственно).

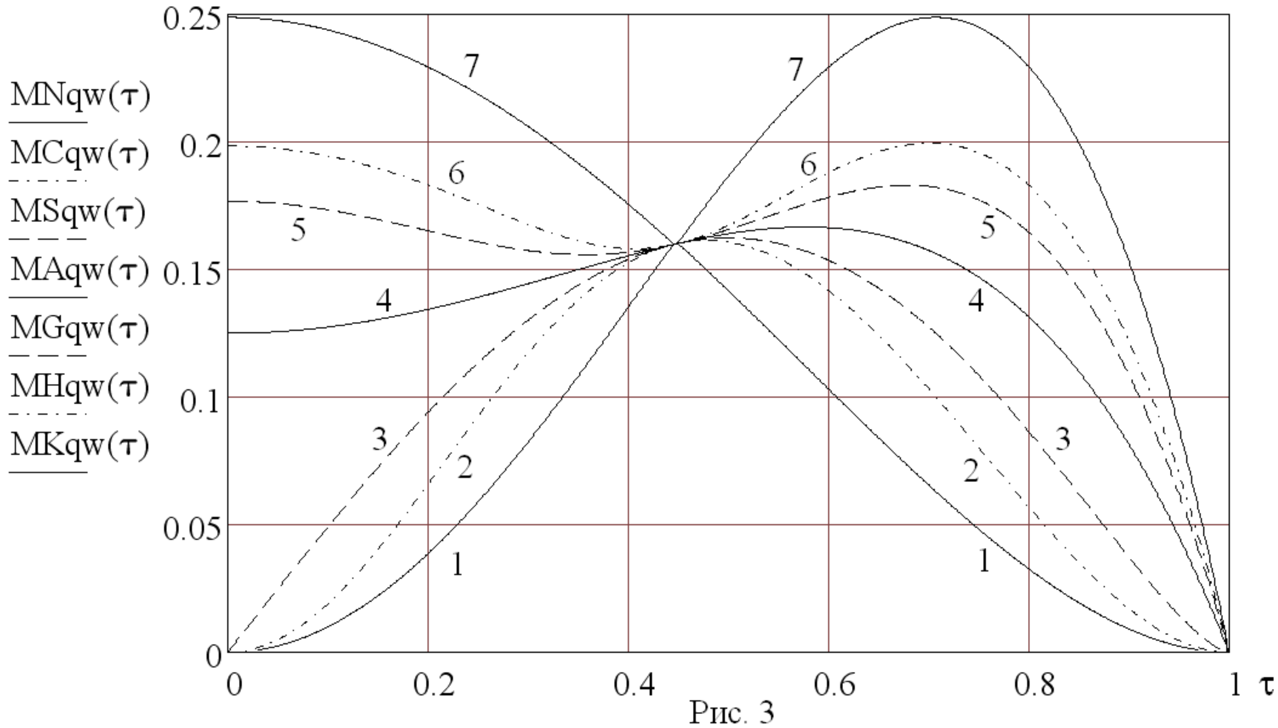

Рис. 3

При $\tau = 1/\sqrt{5} = 1/(\phi + \varphi)$ значения всех функций средних значений $M\lambda qw(1/\sqrt{5})$ равны между собой и равны $q(1/\sqrt{5}) = w(1/\sqrt{5}) = (2/5)^2$. Отсюда следует, что разность любых двух этих функций даст экстремум при $\tau = 1/(\phi + \varphi)$.

Существенно также то, что экстремум (максимум) при $\tau \simeq \phi$ реализуется для $M\lambda qw(\tau)$ при $\lambda \simeq 1{,}2975 \simeq (3+5)^{1/(3+5)} \simeq 1{,}2968 \simeq \sqrt{5/3} \simeq 1{,}2910$, с высокой точностью выражающемся через числа $3 = \phi^2 + \varphi^2$ и $5 = (\phi + \varphi)^2$.

В этой связи отметим, что число 5, наряду с числами 2, 3 также часто обнаруживается в соотношениях гармонии. Так, экстремум (максимум) при $\tau = 1/(\phi + \varphi)$ был найден и у функции $M\lambda\tau h(\tau)$ при $\lambda \simeq 1{,}2 = 2 \cdot 3/5$.

Далее, $Iq(1) = Iw(1) = 1/3 - 1/5$, $q(1/(\phi + \varphi)) = w(1/(\phi + \varphi)) = (1 - 3/5)^2$.

Даже длина дуги L кривой $h(\tau) = 1 - \tau^2$ точно выражается через первые простые числа натурального ряда 2, 3, 5 и $7 = \phi^4 + \varphi^4$:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (dh/d\tau)^2}\, d\tau = (2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}))/2^2 \qquad (18)$$

В свою очередь через длину дуги L точно выражаются криволинейные интегралы I-го рода по этой дуге от критического магнитного поля и квадрата поля:

$$I(h) = \int_0^1 h(\tau) \cdot \sqrt{1 + (dh/d\tau)^2}\, d\tau = L + (L - 5^{3/2})/(1 + 3 \cdot 5) \qquad (19),$$

$$I(h^2) = \int_0^1 h^2(\tau) \cdot \sqrt{1 + (dh/d\tau)^2}\, d\tau = 5^2(2 \cdot 3L - L/5 - 7\sqrt{5}/3)/2^7 \qquad (20)$$

Приведём и три примера наличия простых чисел в соотношениях обычной термодинамики. I. Внутренняя энергия U одного моля одноатомного газа равна: $U = (3/2)R$, где R - универсальная газовая постоянная. II. В уравнении адиабаты идеального газа $PV^{\gamma} = const$ показатель степени $\gamma = C_P / C_V$, где C_P, C_V - теплоёмкости при постоянном давлении и объёме. Причём, для одноатомных газов $C_V = (3/2$ ¸, $C_P = (C_V + R) = (5/2)R$, $C_P / C_V = 5/3$ III, Теплоёмкости же двухатомных газов при комнатной температуре без учёта колебательных степеней свободы равны: $C_V = (5/2)R$, $C_P = (7/2)R$, $C_P / C_V = 7/2$.

В исследуемом нами случае разность теплоёмкостей сверхпроводника и проводника можно найти из соотношений:

$$C_S - C_N = T\partial(S_S - S_N)/\partial T = (T/4\pi)[H_C(T) d^2 H_C(T)/dT^2 + (dH_C(T)/dT)^2] \quad (21)$$

Подставляя в (21) $H_C(\tau)$ и учитывая, что $S = -(\partial G/\partial T)|_{H=CONST}$ получим:

$$\Delta C(\tau) = (C_S - C_N)/(H_0^2/2\pi T_C) = \tau(-1 + 3\tau^2) \qquad (22),$$

$$\Delta S(\tau) = (S_S - S_N)/(H_0^2/2\pi T_C) = -\tau(1 - \tau^2) \qquad (23)$$

Зависимости (22), (23) для относительных разностей теплоёмкостей ΔC и энтропий ΔS от τ показаны на рис. 4.

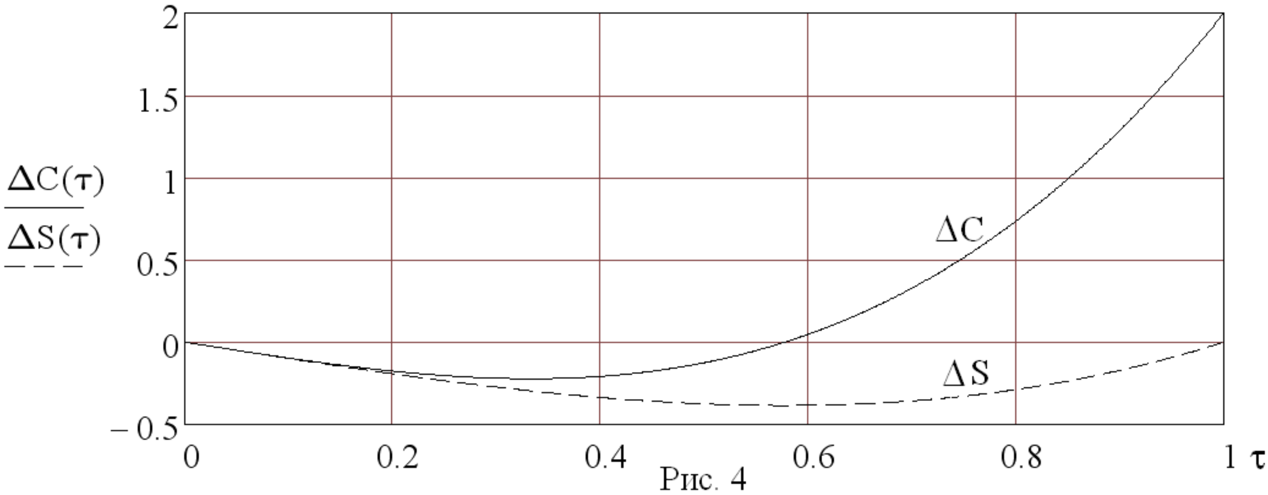

Рис. 4

Как следует из рис. 4, разность энтропий $S_S - S_N < 0$, а это означает, что сверхпроводящее состояние более упорядочено, чем обычное. Далее, при $T = T_C$ $(\tau = 1)$ имеет место скачок теплоёмкости $C_S - C_N = 2 = \phi^2 + \varphi^1$, соответствующий фазовому переходу 2-го рода.

При этом для $\Delta C(\tau)$ и $\Delta S(\tau)$ найден ряд интересных соотношений гармонии. Например, $\Delta C(\phi) = \phi^5 = 5\phi - 3$, $\Delta S(\phi) = -\phi^2$, $\Delta C(\tau)_{min} = \Delta C(1/3) = -2/3^2$, $\Delta S(\tau)_{min} = \Delta S(1/\sqrt{3}) = -2/3^{3/2}$, $\Delta C(1/\sqrt{3}) = 0$. $\Delta S(1/\sqrt{5}) = \Delta S(1/(\phi + \varphi)) =$ $= -2^2/5^{3/2} = 2 \cdot \Delta C(1/\sqrt{5})$ и $\int_0^1 \Delta C(\tau)\,d\tau = 2^{-2} = -\int_0^1 \Delta S(\tau)\,d\tau$!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для условия существования явления сверхпроводимости в магнитном поле. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 6, С.147-149.

2. *Квасников И.А.* Термодинамика.и статистическая физика. Теория равновесных процессов, М., Изд-во МГУ, 1991, 800 С.

3. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений. Академия тринитаризма, www.trinitas.ru, М., Эл. № 77-6567, публ. 17485 от 28.05.2012, 10 С.

4. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии для внутренних и внешних гравитационных полей однородных тел и экстремумы функций средних значений. Актуальные проблемы современной науки, 2011, № 2, С.115-118.

5. *Шелаев А.Н.* Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений, Академия тринитаризма, www.trinutas.ru, М., Эл. № 77-6567, публ. 17511 от 08.06.2012, 9 С.

6. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы функций средних значений для параметров прямого и обратного циклов Карно. Академия тринитаризма, www.trinutas.ru, М., Эл. № 77-6567, публ. 18276 от 25.10.2013, 10 С.