Н. Ф. Семенюта

О «золотых» режимах работы электрических моделей числовых последовательностей типа Фибоначчи

Исходные положения

Золотое сечение – удивительный феномен Природы и Мироздания. Феномен золотого сечения владел мыслью и чувствами многих мыслителей прошлого и продолжает волновать умы многих современных исследователей [1, 2]. Его сущность может быть осмыслена и понята только в объединении усилий специалистов различных направлений науки, техники, философии и др.

В современной литературе, как исторический факт, отмечают, что золотое сечение впервые упоминается в «Началах» Евклида. После Евклида исследованием золотого сечения занимались древнегреческие Гипсикл (II в. до н.э.) и Папп (III в. н.э.) и др. Древнегреческий ученый Клавдий Птолемей (ок. 87–165) также применял термин золотое сечение в своих трудах. В эпоху Возрождения деление исследовали также Лука Пачиоли и Леонардо да Винчи.

Теперь моя история золотого сечения. В сборнике «Крылатые латинские изречения» (Т. Г. Казаченок, Минск, 1993) приведены изречения на тему золотого сечения, которые связаны с Горацием (65–8 гг. до н. э.):

Aurea mediocritas – золотое сечение. **Гораций:**

Auream quisquis mediocritatem
Diligit, tutus caret obseleti
Sordibus tecti, caret invidenda
Sobrius aula.

Гораций

Тот кто золотой середины верен,
Мудро избежит и убогой кровли,
И того, и других, что питает зависть, -
Длинных чертогов.

Там же есть еще такое определение:

Medio tutissimus ibis. Средний путь – самый безопасный.

Овидий.

В книге на украинском языке «Крилаті вислови в українській літературній мові» (А. П. Коваль, В. В. Коптілов. Київ, 1975) приведено:

Золотая середина – происходит это словосочетание со второй книги «Од» (ода 10, строфа 5) римского поэта Горация (65–8 гг. до н. э.).

> Применяется для характеристики поступков человека, который избегает крайностей и решительных действий (цитируется также латинским языком – *aurea mediocritas* и французским – *juste milien.*

Таким образом, под золотым в то далекое время понималось деление без крайностей и решительных действий. Так большинство людей и сегодня понимают золотое сечение (золотую середину) как деление пополам (фифти-фифти). О такой золотой середине пишут и говорят все журналисты в средствах массовой информации.

Так что же нового внес Леонардо да Винчи в понятие золотого сечения? Леонардо да Винчи из всего множества деления «**без крайностей и решительных действий**» за золотым оставил только сечение с соотношением Ф = 1,618 (0,618). В этом его заслуга, размытость понятия золотого сечения получило свое точное математическое отношение. По Леонардо да Винчи «золотое сечение» соответствует «божественной пропорции» Пачиоли.

По Леонардо да Винчи золотое сечение было связано с геометрией (деление отрезка, треугольники и др.). Потом золотое сечение обнаружили в музыке, архитектуре живописи, поэзии и др. Далее – в человеке, ботанике, зоологии, медицине и т. д. Во всех этих случаях золотое сечение было связано с человеком, природой, а в конечном итоге со структурой объекта. Однако, во многих случаях, связанных с процессами, протекающими в тех или иных структурах, золотое деление может отличаться от золотого Ф = 1,618 (0,618) по Леонардо да Винчи. В связи с этим возникает много вопросов и сомнений, изложенных в работе А. В. Никитина [3].

Далее проблему золотого сечения рассмотрим на электрической модели последовательности гармонических чисел, в том числе, чисел Фибоначчи. Среди моделей золотого сечения наибольшее применение в теоретических и прикладных задачах получили геометрические и алгебраические модели. Эти две модели лежат в основе многочисленных исследований, связанных с золотым сечением и гармоническими пропорциями в природе, искусстве, науке, технике, обществе как у мыслителей и ученых прошедших столетий, так и современных ученых.

Появление электрических моделей задержалось на сотни лет в связи с тем, что во времена античности и Возрождения вообще не было понятия об электричестве [4]. В настоящее время электрическое моделирование является одним из основных направлений исследования физических процессов в науке и технике. Моделирование позволяет выявить наиболее существенные факторы изучаемого объекта или явления, поэтому является инструментом для более глубокого изучения реальности.

Электрические модели рекуррентных числовых последовательностей позволяют наиболее полно исследовать их свойства и связи, и что особенно важно, произвести исследования динамических процессов. Особенно по тем направлениям природы, науки и техники, где обмен информацией происходит с помощью передачи энергии сигналов.

Первые сведения о электрической модели золотого сечения были изложены в работах автора [5, 6, 7], а затем на конференции «Проблемы гармонии, симметрии, золотого сечения в природе, науке и искусстве» [8], прошедшей по инициативе профессора А. П. Стахова в Винницком аграрном университете (2003) Одесском национальном университете и др.[9, 10] . С тех пор прошло много лет, однако до настоящего времени большинство исследователей замкнулись на геометрических и алгебраических моделях, т. е. на моделях Древнего мира или, в лучшем случае, на моделях эпохи Возрождения.

.

Условие оптимального режима работы электрической цепи

Простейшие электрические цепи состоят из источника тока (генератор), линии связи (четырехполюсник) и приемника (нагрузка) (рисунок 1). Рассмотрим два варианта работы нагруженной цепи – нагрузка непосредственно соединена с источником тока (рисунок 1, *а*) и нагрузка соединена с источником тока через четырехполюсник (линию связи) (рисунок 1, *б*). В случае, когда нагрузка непосредственно соединена с генератором (источником тока), ток цепи по закону Ома равен:

$$I = \frac{E}{R_г + R_н} \tag{1}$$

и мощность, потребляемая нагрузкой равна

$$P = I^2 R = \frac{E^2 R_н}{R_г + R_н}. \tag{2}$$

нагрузки $R_н$ (приемника) (рисунок 1, *а*).

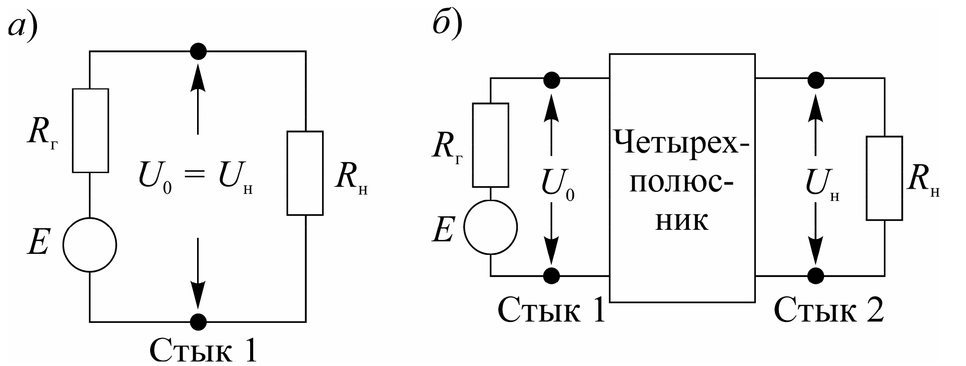

Рисунок 1 – Простейшие электрические цепи:
а – генератор – нагрузка; б – генератор – четырехполюсник – нагрузка

Определим соотношение между сопротивлением нагрузки $R_н$ и сопротивлением источника $R_г$, при котором на нагрузке $R_н$ выделяется максимальная мощность P при неизменных значениях E и $R_г$. С этой целью определим первую производную P по $R_н$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dP}{dR_н} = \frac{(R_г + R_н)^2 U_0^2 - 2(R_г + R_н)R_н U_0^2}{(R_г + R_н)^2} = \frac{U_0^2 R_н}{(R_г + R_н)^2}(R_г^2 - R_н^2) = 0.$$

Из полученного результата следует, что максимальная передача энергии к нагрузке, будет в том случае, когда значение сопротивление нагрузки $R_н$, и сопротивление источника $R_г$, будут равны

$$R_н = R_г, \tag{3}$$

Следовательно, оптимальному режиму работы цепи, соответствует режим, когда отношение $R_н/R_г = 1$. В теории электрических цепей и связи он получил название «**согласованного**» режима работы источника и нагрузки. Этот режим имеет исключительно большое значение в теории анализа и синтеза электрических цепей. Необходимо отметить, что условие $R_н = R_г$, т. е. равенство сопротивлений проводов электрической цепи (внутреннего сопротивления источника тока $R_г$) и сопротивления приемного реле (сопротивления нагрузки $R_н$) было установлено еще на начальном этапе создания науки об электричестве (1850) [4]. Таким образом, отношение $R_н/R_г = 1$ и есть «**золотое сечение**» для электрической системы **генератор–нагрузка** (стык 1), так как соответствует оптимальному условию передачи энергии от источника к нагрузке. Для геометрической модели золотого сечения этот случай соответствует делению отрезка на две равные части.

Условия оптимальной передачи энергии через четырехполюсник

В реальных моделях рассмотренный режим «источник–нагрузка» относительно редкий случай. Более общим является случай соединения нагрузки к источнику через проходной четырехполюсник (см. рисунок 2, *б*). Согласно условию (3) входное сопротивление четырехполюсника $R_{вх1}$ должно быть равно сопротивлению источника $R_г$ и выходное сопротивление четырехполюсника $R_{вых2}$ также должно быть равно сопротивлению нагрузки $R_н$. Следовательно, здесь возникает задача – согласования сопротивления источника и нагрузки с учетом промежуточного звена – четырехполюсника. Однако входное сопротивление четырехполюсника (линии связи) в общем случае зависит от значений его элементов (R_1, R_1), количества четырехполюсников в цепи (протяженности линии связи) и величины нагрузки. Иначе эта задача состоит в определении значений элементов четырехполюсника (линии связи), при котором его входное сопротивления будут равны сопротивлению нагрузки независимо от количества четырехполюсников в цепи (протяженности линии связи). На первый взгляд это парадоксальная задача, но она имеет решение. Покажем это на простом примере Ꞁ-образный цепи (рисунок 2).

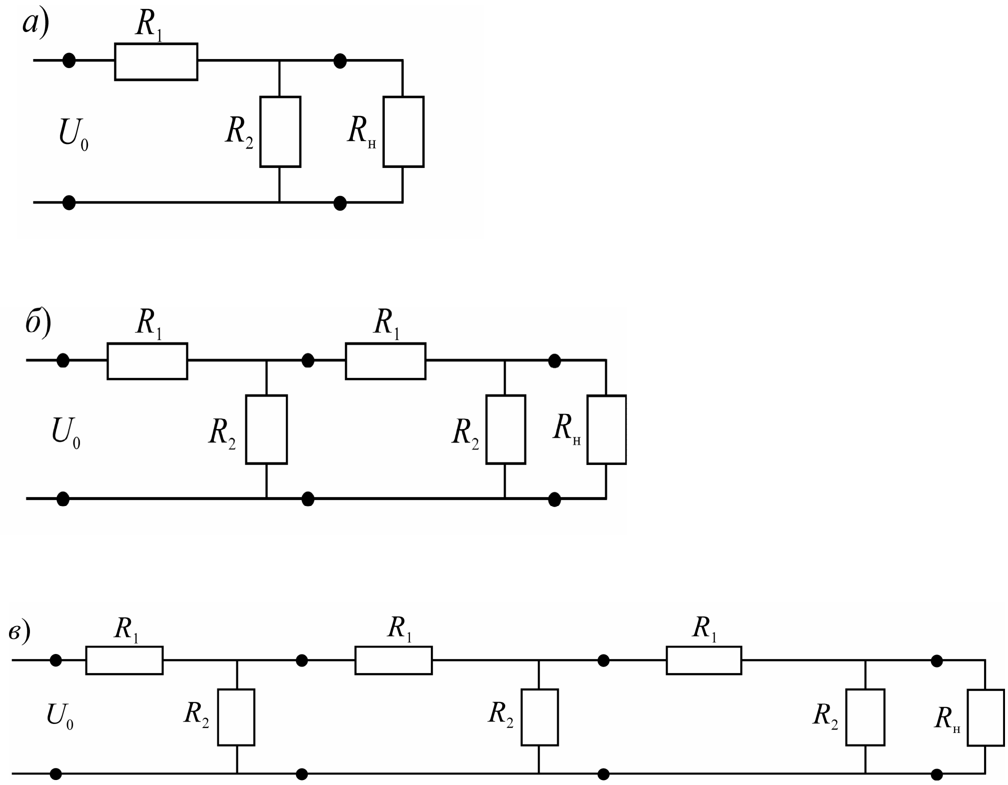

Рисунок 2 – К понятию характеристического сопротивления цепи

В случае $R_1 = R/2 = 1/2$, $R_2 = R = 1$ и $R_н = 1$(рисунок 2. *а*), входное сопротивление одного четырехполюсника $R_х = 1$. Добавив к четырехполюснику рисунка 2, *а* еще один такой же четырехполюсник, получим цепь, состоящую из двух четырехполюсников (рисунок 2, *б*). Входное сопротивление цепи при этом не изменилось $R_х = 1$. Добавим к цепи рисунка 2, *б* еще такой четырехполюсник (рисунок 2, *в*). Ее входное сопротивление не изменится и также будет $R_х = 1$. Сопротивление нагрузки $R_н$. будет согласовано с выходным сопротивление четырехполюсника (стык 2) и входное сопротивление четырехполюсника $R_{вх}.= R_н$.

Это **«золотое сечение»** для системы источник – четырехполюсник–нагрузка. Для геометрической модели золотого сечения этот случай соответствует делению отрезка на две неравные части.

Соотношения элементов четырехполюсника R_1 и R_2 для получения характеристического входного/выходного сопротивления можно определить из. рисунка 2, *а*. В случае согласованной нагрузки

$$R_х = R_н \tag{4}$$

характеристическое сопротивление равно:

$$R_х = R_1 + \frac{R_х R_2}{R_х + R_2}.$$

Откуда следует квадратное уравнение

$$R_{\text{x}}^2 - R_1 R_x - R_1 R_2 = 0\,, \tag{5}$$

корни которого, равны:

$$R_{\text{x}1,2} = \frac{R_1}{2} \pm \sqrt{\frac{R_1^2}{4} + R_1 R_2}\,. \tag{6}$$

Для рассмотренного примера (см. рисунок 3, *а*), когда R_1 = 1/2 и R_2 = 1 уравнение (5) принимает вид:

$$R_{\text{x}}^2 - \frac{1}{2} R_{\text{x}} - \frac{1}{2} = 0$$

вещественный корень которого, равен характеристическому сопротивлению:

$$R_{\text{x}1} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Сопротивление R_{x} = 1 и будет согласованным сопротивлением нагрузки для четырехполюсника с элементами R_1 = 1/2 и R_2 = 1 (см. рисунок 2). Сопротивление R_{x} получило название характеристического и определяет оптимальное значение входного (выходного) сопротивления четырехполюсника для согласованного режима работы с $R_{\text{г}}$ и $R_{\text{н}}$. Для геометрической модели этот случай соответствует асимметричному делению отрезка.

Таким образом, оптимальное сопротивление нагрузки электрической цепи, состоящей из одного или нескольких четырехполюсников, равно действительному корню уравнения (4). Это характерное для системы **«источник – четырехполюсник – нагрузка»** сопротивление в теории электрических цепей и электрической связи получило название **характеристического** сопротивления. Значение этого характерного корня (сопротивления $R_{\text{н}}$ = 1), оптимально для передачи энергии через четырехполюсник. т. е. это золотое сечеие для четырехполюсника

Для электрической модели числовой последовательности Фибоначчи сопротивления R_1 = 1 и R_2 = 1 и уравнение (1) принимает вид

$$R_{\text{x}}^2 - R_{\text{x}} - 1 = 0 \tag{7}$$

и согласованная (оптимальная) нагрузка четырехполюсника буде равна вещественному корню

$$.\,R_{\text{x}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi,. \tag{7}$$

т. е. золотому сечению

Заключение

В данной работе, очевидно впервые, предпринята попытка обосновать однородную электрическую цепь (четырехполюсник) как фундаментальную модель золотого сечения и гармонических последовательностей чисел.

Для максимальной передаче энергии от источника к нагрузке. необходима согласованность (гармония) сопротивления источника, что соответствует условию $R_н = R_г$. Это условие имеет исключительно большое значение для любых систем, связанных с передачей энергии, информации и др. Это условие лежит в основе современных систем передачи информации, теории анализа и синтеза электрических цепей.

Из условия $R_н = R_г$ следует также условие равенства характеристического сопротивления четырехполюсника и нагрузки $R_н = R_х$. Не менее важным в теории анализа и синтеза электрических цепей является согласование сопротивления нагрузки и характеристического сопротивления $R_х$, определяемого из уравнения (5). В случае подключения нагрузки через четырехполюсник необходимо выполнить условие $R_г = R_х$ по входу четырехполюсника (стык 1) и выходу $R_х = R_н$ (стык 2). Такое согласованное значение нагрузки цепного соединения четырехполюсников позволяет создать оптимальные условия передачи энергии. от стыка 1 к стыку 2 (см. рисунок 2).

В связи с полученным результатом возникает вопрос. – какая из двух согласованных нагрузок (3) и (6) является более «золотой», какая из них первоя и какая вторая? Ответить на поставленный вопрос, какая из них первая, какая вторая невозможно. Оба соответствуют оптимальным условиям передачи энергии. Часто встречающиеся в литературе понятия первое и второе «золотые» сечения, субъективны. Еще более субъективны понятия «металлические» (серебряное, медное и т. д.) пропорции. Математика наука точная и никаких субъективных понятий не должно быть. «Божественное сечение», названное потом «золотым» сечением, одно из них и никаких других не может быть. Божественному сечению соответствует только характеристическое сопротивление четырехполюсника с элементами $R_1= R_2= 1$. Четырехполюсникам с другими значениями элементов R_1 и R_2 соответствуют другие характеристические сопротивления (другие «золотые» «сечения), удовлетворяющие условиям оптимальной передачи энергии.

Таким образом, если отношение $R_{1/} R_2$ в случае «источник– нагрузка» равно 1, то в случае «источник – четырехполюсник– нагрузка» – корню квадратному характеристического уравнения (5), Значение корня определяется значениями элементов R_1 и R_2. Из множества характеристических значений корней, только одно соответствует 1,618, т. е. числу, принятому за золотое сечение.

Здесь только обратим внимание, что случаю золотого сечения четырехполюсника отношение его элементов $R_1/R_2 = 1$, что соответствует условию (7) и корню Ф. Это совпадение с (3) или закономерность требует исследования.

И еще на что мне хотелось бы обратить внимание. **Солнце** источник энергии, который оказывает многоплановое воздействие как на живую, так и на неживую природу Земли. Проходная среда от солнца к приемнику энергии (нагрузке) в процессе самоорганизации эволюции претерпела изменения с целью получения максимума энергии солнца Это явилось причиной. изменения параметров проходной среды (четырехполюсника), т. е. природы, человека, растений к параметрам золотого сечения по Фибоначчи. Это мое предположение требует исследования.

.Уважаемые коллеги, так как материал статьи не бесспорен, то прошу Ваши замечания шлите по электронной почте: **nikolay.semeniuta@gmail.com**. Буду благодарен.

Литература

1 Аркелян, Г. З Математика и история золотого сечения / Г. Аркелян. – М.: Логос. 2014. 404 с.

2 Stakhov, A. The mathematics of harmoni: from Euclid to contemporary mathematics end computer science. Singapore: Wordl Scintific. 2009. 696 p.

3 Никитин А. В., Золотое Сечение без прикрас // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.19709, 31.10.2014

4 Паррота, М. Ф. Гальванические батареи и законы электрического тока / М. Ф. Паррота. – СПб.: Институт инженеров путей сообщения. 1864. – 62 с.

5 Семенюта, Н. Ф. Применение рекуррентных соотношений к анализу электрических цепей / Электрические машина, цепи и системы : тр. Белорус. ин-та инж. ж.-д, трансп. – Гомель : БелИИЖТ, 1971. – Вып. 107. – С. 54–57.

6 Семенюта, Н. Ф. О связи параметров цепочечных схем с рекуррентными числовыми последовательностями / Н. Ф. Семенюта // Теоретическая электротехника. – Львов: Вища школа, 1974. – Вып 17. – С. 23–25.

7 Семенюта, Н. Ф. Моделирование линий с распределенными параметрами рекуррентными числами / Н. Ф. Семенюта // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: материалы V межгос. науч. конф. – Минск: БГУ, 1996. – С. 123–124.

8 Семенюта, Н. Ф. Электрическая модель «Золотого сечения» / Н. Ф. Семенюта // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та мистецтві: зб. наук. пр. ВДАУ. – Винница: ВДАУ, 2003. – Вып.15. – С. 330–335

9 Семенюта, Н. Ф. Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Н. Ф. Семенюта // Гармоническое развитие систем – третий путь человечества. – Одесса. ООО Институт креативных технологий. – Одесса. 2011. – С. 87–93.

10 Семенюта, Н. Ф. Семенюта Н.Ф. Математика гармонии: новый взгляд на «золотое» сечение // Междисциплинарные исследования в науке и образовании. – 2014. – № 3Kg; URL: www.es.rae.ru/mino/173-1446